فصل ۲

انواع توابع (زوج و فرد، صعودی و نزولی، یک‌به‌یک و پوشا)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توابع زوج و توابع فرد

۱- اگر $f=\{(-۱,a+۱),(\ ,۳),(-۲,۱),(۱,b),(۲,b+۵)\}$ یک تابع زوج باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) -۲۰   ۳) -۱۲   ۴) ۱۲

۲- اگر تابع $f=\{(-۱,۲),(\ ,a),(۲,b+c),(c-b,-۲),(-۲,۷)\}$ یک تابع فرد باشد، حاصل $۲a+b-۲c$ کدام است؟

۱) -۵   ۲) -۲   ۳) ۲   ۴) قابل تعیین نیست.

۳- تابع حقیقی $f=\{(۲,a),(۱,b),(\ ,c),(d,\ ),(e,g)\}$ هم زوج است و هم فرد. مجموع مقادیر مجهول در تعریف تابع کدام است؟

۱) صفر   ۲) -۲   ۳) -۳   ۴) قابل تعیین نیست.

۴- چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر f تابعی فرد باشد، آن‌گاه $f(\ )=\ $.

ب) اگر f تابع ثابت صفر باشد، آن‌گاه f هم زوج است و هم فرد.

پ) اگر برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم: $f(-x)=-f(x)$، آن‌گاه f فرد است.

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

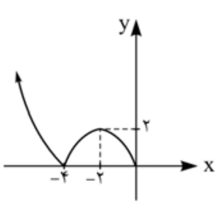
۵- چند تا از توابع زیر زوج و چند تا فردند؟

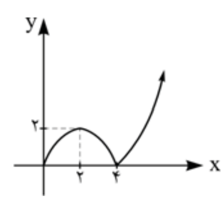
الف) $\begin{cases} f:[-۱,+\infty)\to R \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=x \end{cases}$

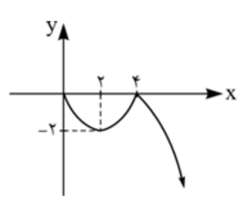
پ) $\begin{cases} f:(-۳,۳)\to R \\ f(x)=|x| \end{cases}$ ت) $\begin{cases} f:(-۲,-۱)\quad(۱,۲)\to R \\ f(x)= \end{cases}$

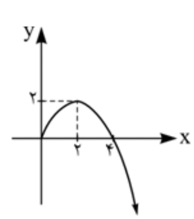
۱) ۳ تا زوج - ۲ تا فرد   ۲) ۲ تا زوج - ۱ فرد   ۳) ۱ زوج - ۱ فرد   ۴) ۲ تا فرد - ۲ تا زوج

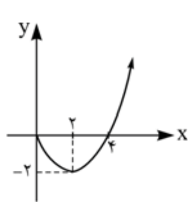
۶- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع فرد f رسم شده است. کدام گزینه بقیه‌ی نمودار تابع f را نشان می‌دهد؟



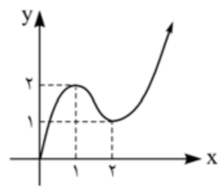
۱)


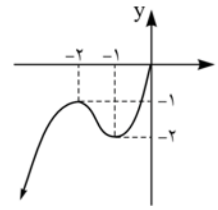
۲)


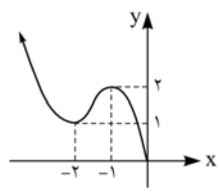
۳)


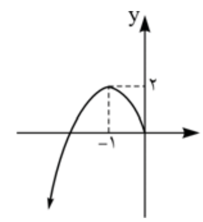
۴)


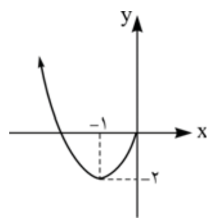
۷- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع زوج f رسم شده است. کدام گزینه بقیه‌ی نمودار تابع f را نشان می‌دهد؟



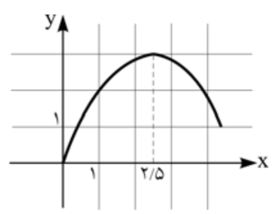
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع فرد f رسم شده است. حاصل $3[f(-3)] + f(-1) + 2f(2/5)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)



۱) -8

۲) -5

۳) -2

۴) 2

تشخیص توابع فرد و توابع زوج

۹- کدام تابع زوج است؟

۱) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ ۲) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x}$ ۳) $f(x) = x^6 - x + 1$ ۴) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+1}$

۱۰- کدام تابع فرد است؟

۱) $f(x) = x^3 + x^2 + x$ ۲) $f(x) = x^{15} + x^{13} + \dots + x + 1$

۳) $f(x) = x|x|$ ۴) $f(x) = |x-1| + |x+1|$

۱۱- اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع $y = ax^3 + bx^2 + dx + e$، آن‌گاه چند تا از تساوی‌های زیر لزوماً درست است؟

الف) $de =$ ب) $be =$ پ) $ab =$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲- اگر تابع $y = x^3 + (m+n-4)x^2 + nx + m - n$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه حاصل mn کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۳- اگر تابع $y = x^4 + 3x^3 + A(x+1)^3 + Bx$ زوج باشد، آن‌گاه حاصل $A + B$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) صفر ۴) 6

۱۴- مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار کدام تابع است؟

۱) $f(x) = x\sin^3 x$ ۲) $f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$

۳) $f(x) = |x-1| - |x+1|$ ۴) $f(x) = x^4 + x$

۱۵- نمودار چند تا از توابع زیر نسبت به محور y ها متقارن است؟

الف) $f(x) = x\cos x$ ب) $f(x) = x\sin x + \cos 3x$

پ) $f(x) = (x+1)^4$ ت) $f(x) = |x-1| + |x+1| + |x|$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۱۶ **چند تا از توابع زیر فرد هستند؟**

الف) $f(x) = 2x + \sin 2x$ ب) $f(x) = x^3 + \cos 3x$

پ) $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$ ت) $f(x) = x\sqrt{x}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۱۷ **چه تعداد از توابع زیر زوج هستند؟**

الف) $f(x) = 1 + \sin^2 x$ ب) $f(x) = \sin(1+x^2)$ پ) $f(x) = \sin(1+x)^2$

ت) $f(x) = 1 - \sin|x|$ ث) $f(x) = \sin(1-x) + \sin(1+x)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۱۸ **تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos(\sin x) + \sin(\cos x)$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) فرد است. ۲) زوج است. ۳) نه زوج و نه فرد است. ۴) اگر $x >$ باشد، فرد است.

-۱۹ **اگر تابع $h(x) = (a-b)\sin x + (a^2-1)x^2 + (b+1)\cos x$ فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a+b$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

-۲۰ **در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$، حاصل $f(\frac{1}{2008}) + f(-\frac{1}{2008})$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2008}}$ ۴) $2 - \frac{1}{\sqrt{2008}}$

-۲۱ **تابع $f(x) = \frac{(1+3^x)^2}{3^x}$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) نه زوج، نه فرد ۴) هم زوج، هم فرد

-۲۲ **تابع $f(x) = \frac{x}{2-2^x} - \frac{x}{2}$، از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) هم زوج، هم فرد ۴) نه زوج، نه فرد

-۲۳ **به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+2| + a|x-2|$ زوج است؟**

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

-۲۴ **اگر تابع $f(x) = |x+a| - |x+2| + b|x+5|$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -6 ۴) -2

-۲۵ **تابع $f(x) = \sin(\log(\frac{1-x}{1+x}))$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) زوج ۲) فرد ۳) نه زوج، نه فرد ۴) هم زوج، هم فرد

-۲۶ **تابع غیرتهی $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(\frac{ax+2}{x-2})$ تابعی فرد است. مقدار a کدام است؟**

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ± 1 ۴) وجود ندارد.

-۲۷ **اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \log(ax + \sqrt{16x^2+1})$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $-4, 1$ ۳) $4, -4$ ۴) $4, 1$

زوج و فرد بودن توابع چندضابطه‌ای

-۲۸ **تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq \\ -\sqrt{-x} & x < \end{cases}$، از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) نه زوج و نه فرد ۴) هم زوج و هم فرد

-۲۹ **اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} & x > \\ a\sqrt{x^2+bx+c} & x < \end{cases}$ فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟**

۱) -3 ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) -1

۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases} x|x| & x\le -۱ \\ [x+۱]+[۱-x] & -۱<x<۱ \\ -x|x| & x\ge ۱ \end{cases}$ **از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) زوج ۲) فرد ۳) نه زوج، نه فرد ۴) هم زوج، هم فرد

۳۱- **اگر** $D_f=[\ ,b]$ **و بدانیم:** $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge \\ f(-x) & x< \end{cases}$**، در این صورت تابع** g **از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟**

۱) زوج ۲) فرد
۳) ممکن است فرد باشد، ولی لزوماً فرد نیست. ۴) ممکن است زوج باشد، ولی لزوماً زوج نیست.

* ۳۲- **اگر** $D_f=[\ ,b]$ **و** $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge \\ -f(-x) & x< \end{cases}$**، در این صورت تابع** g **از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟ (**f **تابعی ثابت نیست)**

۱) زوج ۲) فرد
۳) ممکن است فرد باشد، ولی لزوماً فرد نیست. ۴) ممکن است زوج باشد، ولی لزوماً زوج نیست.

۳۳- تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^۲-۲x+۳} & x> \\ g(x) & x< \end{cases}$ **یک تابع فرد است. ضابطه‌ی تابع** g **کدام است؟**

۱) $g(x)=-\dfrac{\sin x}{x^۲+۲x+۳}$ ۲) $g(x)=-\dfrac{\sin x}{x^۲-۲x+۳}$

۳) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x^۲-۲x+۳}$ ۴) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x^۲+۲x+۳}$

* ۳۴- **اگر** $f(x)=\begin{cases} x\sin x & <x<\dfrac{\pi}{۲} \\ \dfrac{\pi}{۲}x & \dfrac{\pi}{۲}<x<۲ \\ g(x) & -۲<x< \end{cases}$ **تابعی زوج باشد، ضابطه‌ی تابع** g **کدام است؟**

۱) $g(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\dfrac{\pi}{۲} \\ -x\sin x & -\dfrac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$ ۲) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\dfrac{\pi}{۲} \\ x\sin x & -\dfrac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$

۳) $g(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\dfrac{\pi}{۲} \\ x\sin x & -\dfrac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$ ۴) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\dfrac{\pi}{۲} \\ -x\sin x & -\dfrac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$

مسائل ترکیبی درباره‌ی توابع زوج و فرد

۳۵- **اگر** f **دامنه‌ای متقارن نسبت به مبدأ داشته باشد، آن‌گاه چندتا از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟**

الف) اگر g **زوج باشد،** fog **نیز زوج است.** **ب) اگر** g **زوج باشد،** gof **نیز زوج است.**
پ) اگر g **فرد باشد،** fog **نیز فرد است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۶- **اگر** f **تابعی زوج و** g **تابعی فرد باشد، چه تعداد از توابع زیر لزوماً فرد هستند؟**

الف) $h_۱(x)=f(x)g(x)$ **ب)** $h_۲(x)=f(g(۲x))$ **پ)** $h_۳(x)=g(f(x))$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۷- **اگر توابع** $f+g$ **و** $f-g$ **فرد باشند و به ازای هر** x**،** $f(x)\neq$ **و** $g(x)\neq$**، آن‌گاه** f **و** g **چگونه‌اند؟**

۱) f و g هر دو زوج‌اند. ۲) f زوج و g فرد است. ۳) f فرد و g زوج است. ۴) f و g هر دو فردند.

۳۸- اگر تابع $f(x)=\sin ۲x+\cos\frac{x}{۲}+\tan x$ به صورت مجموع تابع زوج g و تابع فرد h نوشته شود، حاصل $h(\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ ۴) ۲

۳۹- تابع $f(x)=(x^۳+\frac{۱}{x^۳})^۹$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشته‌ایم. اگر تابع زوج را g بنامیم، آن‌گاه مقدار $g(۱۰۰)$ کدام است؟

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) $۱۰۰^۳+\frac{۱}{۱۰۰^۳}$ ۳) صفر ۴) $(۱۰۰^۳+۱۰۰^{-۳})^۹$

۴۰- تابع $f(x)=\frac{\sin ۲x-۳}{\cos ۲x+۱}$ را به صورت مجموع دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ نوشته‌ایم که g زوج و h فرد است. مقدار $h(\frac{۳\pi}{۴})$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۲ ۴) ۲-

۴۱- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$، آن‌گاه تابع $g(x)=f(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲})$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) هم زوج، هم فرد ۴) نه زوج، نه فرد

* ۴۲- اگر برای هر $x,y\in R$ داشته باشیم: $f(xy)=f(x)+f(y)$، تابع f از نظر زوج و فرد بودن چه وضعیتی دارد؟

۱) حتماً زوج است. ۲) حتماً فرد است. ۳) نه زوج است و نه فرد. ۴) می‌تواند زوج یا فرد باشد.

* ۴۳- درباره‌ی تابع $f:R\to R$ می‌دانیم: $f(x^۲+y^۲)=xf(x)+yf(y)$. تابع f از نظر زوج و فرد بودن چه وضعیتی دارد؟

۱) زوج است. ۲) فرد است. ۳) لزوماً نه زوج است، نه فرد. ۴) هم زوج است، هم فرد.

توابع صعودی و توابع نزولی

۴۴- کدام تابع، نزولی است؟

۱) $y=x+۲$ ۲) $y=x^۳-۳$ ۳) $y=۳-x^۳$ ۴) $y=x$

۴۵- تابع حقیقی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x+۱} & x\le -۱\\ (x+۱)^۲+۱ & x>-۱\end{cases}$ در دامنه‌اش چه وضعیتی دارد؟

۱) صعودی اکید است. ۲) صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.
۳) نزولی است، ولی نزولی اکید نیست. ۴) نزولی اکید است.

۴۶- کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x-۱} & x\le ۱\\ x^۲-۴ & x\ge ۲\end{cases}$ درست است؟

۱) در دامنه‌اش اکیداً صعودی است. ۲) در دامنه‌اش صعودی است.
۳) در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. ۴) در دامنه‌اش نزولی است.

۴۷- کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=\frac{x^۲}{x^۲+۲}$ ۳) $y=x^۳+۳x^۲+۳x$ ۴) $y=x^۳-۳x$

۴۸- تابع $y=\sin ۲x$ در فاصله‌های $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ و $[\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}]$ به ترتیب کدام وضعیت را دارد؟

۱) نزولی- صعودی ۲) صعودی- نزولی ۳) صعودی- صعودی ۴) نزولی- نزولی

۴۹- حدود a برای آن‌که تابع $y=(a-۲)x^۲-x$ در فاصله‌ی $[۱,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\ge\frac{۵}{۲}$ ۲) $۲<a\le\frac{۵}{۲}$ ۳) $a<\frac{۵}{۲}$ ۴) $a>۲$

۵۰- تابع $f(x)=|x+۲|+|x-۴|$ در چند تا از فاصله‌های زیر نزولی است؟

الف) $[-۷,-۳]$ ب) $[-۵,۲]$ پ) $[-۳,۴]$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۱- تابع $f(x)=|x+m^{۲}-m|-|x+۶|$ بر دامنه‌ی خود نزولی است. حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $m\geq ۳$ یا $m\leq -۲$ ۲) $m>۲$ یا $m<-۳$ ۳) $-۲\leq m\leq ۳$ ۴) $-۳<m<۲$

۵۲- برای کدام مقادیر m، تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲ & x\geq ۱ \\ x-۲m & x\leq \end{cases}$ صعودی است؟

۱) $m\geq \frac{۱}{۲}$ ۲) $m>\frac{۱}{۲}$ ۳) $m<\frac{۱}{۲}$ ۴) $m\leq \frac{۱}{۲}$

۵۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر f و g در $D_f \quad D_g$ صعودی اکید باشند، آن‌گاه $f+g$ صعودی اکید است.

۲) اگر f و g در $D_f \quad D_g$ هر دو صعودی و مثبت باشند، آن‌گاه fg صعودی است.

۳) اگر f صعودی باشد، آن‌گاه $-f$ صعودی است.

۴) اگر f صعودی و مثبت باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{f}$ نزولی است.

۵۴- اگر $f=\{(\ ,۱),(۱,۲),(۳,۵),(۵,m)\}$ و $\frac{۱}{f}$ نزولی اکید باشد، آن‌گاه مقدار m کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۵۵- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و تابع g بر R_f اکیداً صعودی باشد، کدام گزاره درباره‌ی gof درست است؟

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است. ۳) تابع ثابت است. ۴) نه صعودی است و نه نزولی.

۵۶- چه تعداد از توابع زیر در دامنه‌ی خود صعودی اکیدند؟

الف) $y=\log(\sqrt{x})$ ب) $y=\log_{۲}(x^{-۳})$ پ) $y=\sqrt[۳]{x\sin x}$ ت) $y=۵^{\frac{۱}{\sqrt{x}}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۷- تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(x^{۲}-۲x-۳)$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty,-۱)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $(۳,+\infty)$

۵۸- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی R باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y=\frac{۱}{\sqrt[۴]{f(|x|)-f(۲)}}$ کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $R-(-۲,۲)$ ۴) $R-[-۲,۲]$

۵۹- f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی اعداد حقیقی است و $g(x)=\sqrt{f(|x+۳|)-f(|۳x+۱|)}$. دامنه‌ی g کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,-۱]\quad[۱,+\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱]$

۶۰- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $(\ ,+\infty)$ باشد و بدانیم $f(۲a^{۲}+a+۱)<f(۳a^{۲}-۴a+۱)$، در این صورت برای a چند مقدار صحیح می‌توان یافت؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

توابع یک‌به‌یک

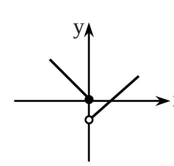
۶۱- اگر تابع $f=\{(۵,۲),(k,۱),(-۳,۱),(k+۸,a+۱)\}$ یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه مقدار $a+۲k$ کدام است؟

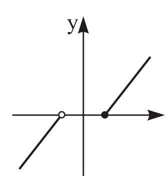
۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۵

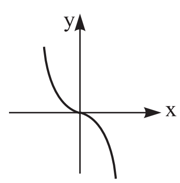
۶۲- اگر $f=\{(۳,۲),(۴m,۳),(a-۱,۲),(m^{۲}+a,۳)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه مقدار $a+m$ کدام است؟

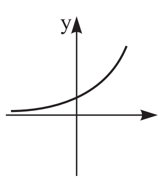
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۳- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۴- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y = x^{۳} + ۱$ ۲) $y = x^{۳} - x$ ۳) $y = x^{۴}$ ۴) $y = \begin{cases} x & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$

۶۵- کدام تابع حقیقی، یک‌به‌یک است؟

۱) $y = ۳x \sin x$ ۲) $y = -x \cos x$ ۳) $y = (x-۱)|x-۱|$ ۴) $y = x^{۲}|x|$

۶۶- چند تا از توابع زیر یک‌به‌یک هستند؟

الف) $y = \begin{cases} x & x > \\ x^{۲} & x \leq \end{cases}$ ب) $y = \begin{cases} -x & x > \\ x^{۲} & x \leq \end{cases}$ پ) $y = \begin{cases} -۲x & x \leq -۱ \\ -x^{۲} - ۲x & x > -۱ \end{cases}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۷- توابع زیر از R به R تعریف شده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x^{۳} + x + ۱$ ۲) $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۲}$
۳) $f(x) = x^{۲} + x|x|$ ۴) $f(x) = x^{۳} - ۲x^{۲}$

۶۸- کدام تابع، یک‌به‌یک است؟

۱) $y = x^{۵} - x + ۱$ ۲) $y = |x| + \sqrt[۳]{x}$ ۳) $y = |x-۲| + \sqrt{x}$ ۴) $y = |x+۲| + \sqrt{x-۱}$

۶۹- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x^{۳} + x^{۲} - a^{۲}x + b$ ۲) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$
۳) $f(x) = x - \sqrt{x}$ ۴) $f(x) = |x| - ۱$

۷۰- تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۱۰$ در بازه‌ی $[a, +\infty)$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۷۱- تابع $f(x) = (a+۲)x^{۴} + x^{۳} + bx$ یک‌به‌یک است. حاصل $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳- ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) ۱- ۴) تابع هیچ‌گاه یک‌به‌یک نیست.

۷۲- برای چه مقادیری از m تابع $f(x) = \begin{cases} x+m & x \leq ۳ \\ mx+۲ & x > ۳ \end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

۱) $m \in (\;, \frac{۱}{۲}]$ ۲) $m \in [\frac{۱}{۲}, ۱)$ ۳) $m \geq \frac{۱}{۲}$ ۴) $m \in R$

* ۷۳- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = a|x+۱| + |x-۱| + (۲-a)x - a - ۱$ یک‌به‌یک است؟

۱) $a \geq \frac{۱}{۲}$ ۲) $a \leq \frac{۱}{۲}$ ۳) $a > \frac{۱}{۲}$ ۴) $a < \frac{۱}{۲}$

* ۷۴- f تابعی اکیداً یکنوا است و می‌دانیم برای هر $x \in R$: $(fog)(x) = -x^{۲}$. کدام گزینه درست است؟ ($D_f = D_g = R$)

۱) f زوج است. ۲) f فرد است. ۳) g زوج است. ۴) g فرد است.

توابع پوشا

۷۵- تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲}}$ در R چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک- پوشا ۲) غیر یک‌به‌یک- پوشا
۳) یک‌به‌یک- غیر پوشا ۴) غیر یک‌به‌یک- غیر پوشا

۷۶- کدام گزینه درباره‌ی تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = x|x| \end{cases}$ درست است؟

۱) یک‌به‌یک و پوشا است. ۲) فقط یک‌به‌یک است.
۳) نه یک‌به‌یک است نه پوشا. ۴) فقط پوشا است.

۷۷- کدام گزینه دربارهٔ تابع $\begin{cases} f: Z \to Z \\ f(x) = |x| + ۱ \end{cases}$ درست است؟

۱) یک‌به‌یک و پوشا است. ۲) نه یک‌به‌یک است نه پوشا. ۳) یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست. ۴) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

۷۸- دربارهٔ تابع $\begin{cases} f: R^+ \to (\ ,۱) \\ f(x) = \dfrac{x}{۱+|x|} \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) هم یک‌به‌یک است، هم پوشا. ۲) یک‌به‌یک نیست، پوشا است. ۳) یک‌به‌یک است، پوشا نیست. ۴) یک‌به‌یک نیست، پوشا نیست.

۷۹- کدام گزینه دربارهٔ تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = |x-۲| - x \end{cases}$ درست است؟

۱) یک‌به‌یک است، پوشا نیست. ۲) یک‌به‌یک نیست، پوشا است. ۳) یک‌به‌یک و پوشا است. ۴) نه یک‌به‌یک است نه پوشا.

۸۰- اگر $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = ۶x$، آن‌گاه تابع $f \times g$، چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست. ۲) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.
۳) نه یک‌به‌یک است نه پوشا. ۴) یک‌به‌یک و پوشا است.

۸۱- اگر $f(x) = \dfrac{x}{x-۱}$، آن‌گاه fof چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک- پوشا ۲) یک‌به‌یک- غیر پوشا ۳) غیر یک‌به‌یک- پوشا ۴) غیر یک‌به‌یک- غیر پوشا

۸۲- تابع $\begin{cases} f: R - \{۲\} \to R - \{۳\} \\ f(x) = \dfrac{ax - ۴}{۳x - b} \end{cases}$ یک‌به‌یک و پوشا است. در این صورت دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(۶,۹)$ ۲) $(۹,۶)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۶,۶)$

گزیدهٔ سؤالات آزمون‌های سراسری و آزاد سال ۸۶ به بعد

۸۳- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \geq \\ ۱ - x^۲ & x < \end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی چگونه است؟ **(سراسری- ۸۹)**

۱) پوشا - یک‌به‌یک ۲) غیرپوشا - یک‌به‌یک ۳) پوشا - غیر یک‌به‌یک ۴) غیرپوشا - غیر یک‌به‌یک

۸۴- کدام تابع یک‌به‌یک است؟ **(آزاد-۸۶)**

۱) $y = x + |۲x|$ ۲) $y = x + |x|$ ۳) $y = x - |x|$ ۴) $y = \sqrt{x} + |x|$

۸۵- کدام تابع زوج است؟ **(آزاد-۸۶)**

۱) $y = \begin{cases} x^۴ - x + ۱ & x > \\ x^۴ + x + ۱ & x < \end{cases}$ ۲) $y = \dfrac{۳x^۳ + x^۲}{۲x + ۱}$

۳) $y = \begin{cases} x^۲ + x + ۲ & x > \\ x^۲ - x - ۲ & x < \end{cases}$ ۴) $y = |x-۱| - |x+۱| + |x|$

۸۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲x + ۳ & x \geq ۴ \\ ۲|x+۳| + a|x+b| & -۴ < x < ۴ \\ cx^۲ + dx + e & x \leq -۴ \end{cases}$ تابعی زوج باشد، $a + b + c + d + e$ کدام است؟ **(آزاد- ۸۷)**

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۳

۸۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x^۲ + ۲x} + ۴x + ۱ & x > \\ \sqrt[۳]{ax^۲ + bx} + cx + d & x < \end{cases}$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a + b + c - d$ چقدر است؟ **(آزاد- ۸۹)**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

فصل ۲

انواع توابع (زوج و فرد، صعودی و نزولی، یک‌به‌یک و پوشا)

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۱) A

> تابعی حقیقی f را در صورتی زوج می‌گویند که دو شرط زیر در آن برقرار باشد:
> ۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $-x \in D_f$ (اصطلاحاً دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن باشد.)
> ۲) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$

تابع زوج به ورودی‌های قرینه، مقادیر یکسان نسبت می‌دهد. طبق فرض $f(۱) = b$، $f(-۱) = a + ۱$، $f(۲) = b + ۵$ و $f(-۲) = ۱$، بنابراین:

$$\begin{cases} a + ۱ = b \\ ۱ = b + ۵ \end{cases} \Rightarrow b = -۴ \,,\, a = -۵ \Rightarrow ab = ۲۰$$

۲- گزینه‌ی (۳) A

> تابع حقیقی f را در صورتی فرد می‌گویند که دو شرط زیر در آن برقرار باشد:
> ۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $-x \in D_f$ (اصطلاحاً دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن باشد.)
> ۲) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = -f(x)$

تابع فرد به ورودی‌های قرینه، مقادیر قرینه نسبت می‌دهد. طبق فرض $f(۲) = b + c$، $f(-۲) = ۷$، $f(-۱) = ۲$ و $f(c - b) = -۲$، پس:

$$\begin{cases} b + c = -۷ \\ c - b = ۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۴ \;,\; c = -۳$$

همچنین طبق فرض $f(\;) = a$، و چون f فرد است می‌دانیم: $f(\;) = -f(\;)$ (در تعریف تابع فرد به جای x، عدد صفر را قرار دهید)، بنابراین:

$$a = -a \Rightarrow ۲a = \;\Rightarrow a = \;\xrightarrow[c=-۳]{b=-۴} ۲a + b - ۲c = -۴ + ۶ = ۲$$

> **نکته:** در هر تابع فرد f، اگر $\in D_f$ ، آن‌گاه: $f(\;) =$
> اثبات این نکته مانند روش به‌دست آوردن مقدار a، در راه‌حل بالا است.

۳- گزینه‌ی (۳) A چون تابع فرد است و $f(\;) = c$، پس $c =$. همچنین چون دامنه‌ی تابع باید نسبت به مبدأ متقارن باشد، پس یکی از مقادیر d و e برابر ۲- و دیگری برابر ۱- است. همچنین اگر $x \in D_f$، آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{فرد } f \Rightarrow f(-x) = -f(x) \\ \text{زوج } f \Rightarrow f(-x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) =$$

پس خروجی‌های تابع فقط می‌توانند مقدار صفر را داشته باشند، یعنی $a = b = g =$. به این ترتیب مجموع مقادیر مجهول $-۳ = -۱ - ۲$ می‌شود.

> **نکته:** اگر f تابعی غیرتهی و با دامنه‌ی متقارن نسبت به مبدأ باشد، فقط در حالتی هم زوج است و هم فرد که تابع ثابت با مقدار صفر باشد.

۴- گزینه‌ی (۱) B گزاره‌ی (الف) فقط وقتی درست است که بدانیم $\in D_f$ ، در غیر این صورت نادرست است. گزاره‌ی (ب) نیز فقط وقتی درست است که بدانیم دامنه‌ی تابع f نسبت به مبدأ متقارن است. ولی گزاره‌ی (پ) همواره درست است. زیرا از شرط $f(-x) = -f(x)$، شرط اول توابع فرد نیز حاصل می‌شود (این شرط که اگر $x \in D_f$، آن‌گاه $-x \in D_f$).

۵- گزینه‌ی (۴) B در مورد (الف) دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن نیست، پس نه زوج است و نه فرد. در مورد (ت) تابع ثابت صفر با دامنه‌ی متقارن نسبت به مبدأ داریم، پس تابع هم زوج است و هم فرد.

حال به راحتی می‌توانیم نشان بدهیم که در مورد (ب) داریم $f(-x) = -f(x)$ و در مورد (پ) داریم: $f(-x) = f(x)$، پس (ب) تابعی فرد و (پ) تابعی زوج را نشان می‌دهد.

A **۶- گزینه‌ی (۲)**

> **نکته:** ۱) نمودار هر تابع زوج، نسبت به محور y ها متقارن است.
> ۲) نمودار هر تابع فرد، نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

باید بقیه‌ی نمودار قرینه‌ی بخش اولیه نسبت به مبدأ مختصات باشد. پس گزینه‌ی (۲) نمودار درست را نشان می‌دهد.

A **۷- گزینه‌ی (۲)** نمودار هر تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است، پس باید بقیه‌ی نمودار قرینه‌ی بخش اولیه نسبت به محور y ها باشد.

B **۸- گزینه‌ی (۲)** با توجه به نمودار $f(۱)=۲$، $f(۲/۵)=۳$ و $f(۳)=۲/...$ (یعنی $۲<f(۳)<۳$). از فرد بودن تابع f نتیجه می‌گیریم:

$$f(-۳)=-۲/... \quad , \quad f(-۱)=-۲ \Rightarrow ۳[f(-۳)]+f(-۱)+۲f(۲/۵)=۳\times(-۳)-۲+۲\times۳=-۵$$

A **۹- گزینه‌ی (۴)** در گزینه‌های (۱) و (۲) به وضوح داریم $f(-x)=-f(x)$، پس با تابعی فرد مواجه‌ایم. در گزینه‌ی (۳) داریم $f(۱)=۱$ و $f(-۱)=۳$، پس تابع نه زوج است و نه فرد. در گزینه‌ی (۴) دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن است و داریم $f(-x)=\frac{x^۲-۱}{x^۴+۱}=f(x)$، پس تابع زوج است.

A **۱۰- گزینه‌ی (۳)** در گزینه‌ی (۱) داریم $f(۱)=۳$ و $f(-۱)=-۱$، پس تابع نه زوج است و نه فرد. در گزینه‌ی (۲) داریم $f(\ )=۱\neq$ ، پس تابع فرد نیست. در گزینه‌ی (۳) داریم:

$$f(-x)=-x|-x|\xrightarrow{|-x|=|x|}f(-x)=-x|x|=-f(x)$$

پس تابع f فرد است. در گزینه‌ی (۴) هم علاوه بر امتحان کردن $f(\ )$، می‌توانید با نمودار گلدان شکل تابع نشان دهید تابع فرد نیست (در واقع تابع زوج است).

A **۱۱- گزینه‌ی (۳)**

> **نکته:** اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، برای فرد بودن تابع P، باید تنها جملات با درجه‌ی فرد x در P حضور داشته باشند، و برای زوج بودن P، تنها جملات با درجه‌ی زوج x. حالت خاص $P(x)=$ هم زوج و هم فرد است.

باید تابع فرد باشد، پس باید تنها جملات با درجه‌ی فرد در تابع حضور داشته باشند، یعنی باید $b=e=$ ، پس هر سه گزاره‌ی $de=$ ، $be=$ و $ab=$ لزوماً درست‌اند.

A **۱۲- گزینه‌ی (۲)** باید چندجمله‌ای شامل فقط جملات با توان‌های فرد x باشد، پس باید:

$$m+n-۴=m-n= \ \Rightarrow m=n=۲\Rightarrow mn=۴$$

B **۱۳- گزینه‌ی (۴)** ضابطه‌ی تابع را بر حسب درجات x مرتب می‌کنیم:

$$y=x^۴+۳x^۳+A(x+۱)^۳+Bx=x^۴+(A+۳)x^۳+۳Ax^۲+(۳A+B)x+A$$

برای آن‌که تابع فوق زوج باشد، باید ضریب جمله‌های با درجه‌ی فرد آن صفر باشد. یعنی:

$$A+۳=۳A+B= \ \Rightarrow A=-۳, B=۹\Rightarrow A+B=۶$$

B **۱۴- گزینه‌ی (۳)** باید ببینیم کدام تابع فرد است. در هر ۴ گزینه داریم $D_f=R$ و در گزینه‌ی (۳):

$$f(-x)=|-x-۱|-|-x+۱|\xrightarrow{|-u|=|u|}f(-x)=|x+۱|-|x-۱|\Rightarrow f(-x)=-(|x-۱|-|x+۱|)=-f(x)$$

پس تابع گزینه‌ی (۳) فرد است. توابع گزینه‌های (۲) و (۴) نه زوج هستند و نه فرد. تابع گزینه‌ی (۱) نیز زوج است، زیرا:

$$f(-x)=-x\sin^۳(-x)=-x\times(-\sin x)^۳=x\sin^۳x=f(x)$$

B **۱۵- گزینه‌ی (۲)** باید ببینیم چند تا از توابع موردنظر زوج هستند. مورد (پ) به وضوح تابعی نه زوج و نه فرد را بیان می‌کند. مورد (الف) تابعی فرد را نشان می‌دهد و برای مورد (ب) داریم:

$$f(-x)=-x\sin(-x)+\cos(-۳x)\xrightarrow[\cos(-\alpha)=\cos\alpha]{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha}f(-x)=x\sin x+\cos۳x=f(x)$$

پس مورد (ب) تابعی زوج است. مورد (ت) نیز تابعی زوج است، زیرا:

$$f(-x)=|-x-۱|+|-x+۱|+|-x|\xrightarrow{|-u|=|u|}f(-x)=|x+۱|+|x-۱|+|x|=f(x)$$

B **۱۶- گزینه‌ی (۲)** مورد (الف) تابعی فرد را نشان می‌دهد، زیرا:

$$f(-x)=-۲x+\sin(-۲x)\xrightarrow{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha}f(-x)=-(۲x+\sin۲x)=-f(x)$$

مورد (ب) تابعی نه زوج و نه فرد را نشان می‌دهد ($f(\ )\neq$)، در مورد (ت) نیز دامنه $x\geq$ و غیرمتقارن است، پس باز هم تابعی نه زوج و نه فرد را بیان می‌کند. تابع گزینه‌ی (پ) فرد است، زیرا اولاً دامنه‌ی آن $[-۱,۱]$ و متقارن است، ثانیاً داریم:

$$f(-x)=\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}=-(\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱+x})=-f(x)$$

B **۱۷- گزینه‌ی (۴)** تنها تابع غیر زوج، تابع مورد (پ) است. در بقیه‌ی توابع به راحتی می‌توانید با تغییر x به $-x$ نشان بدهید که ضابطه‌ی تابع فرقی نمی‌کند!

B **۱۸- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم و با $f(x)$ مقایسه می‌کنیم:

$$f(-x)=\cos(\sin(-x))+\sin(\cos(-x))=\cos(-\sin x)+\sin(\cos x)=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

B **۱۹- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** توابع $y=x^{۲}$ و $y=\cos x$ به تنهایی زوج و تابع $y=\sin x$ فرد است. پس در ضابطه‌ی h باید ضریب دوتای اول صفر باشد تا h نیز فرد شود. بنابراین:

$$\begin{cases}b+۱= \\ a^{۲}-۱=\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-۱ \\ a=\pm۱\end{cases}\Rightarrow a+b= \quad \text{یا} \ -۲\Rightarrow \text{۲ مقدار مختلف}$$

راه دوم: چون h فرد است و $\in D_h$ ، پس $h(\ )=$ ، بنابراین $b+۱=$ ، پس $b=-۱$ و $h(x)=(a+۱)\sin x+(a^{۲}-۱)x^{۲}$. حال از فرد بودن h داریم:

$$h(-x)=-h(x)\Rightarrow(a+۱)\sin(-x)+(a^{۲}-۱)x^{۲}=-(a+۱)\sin x-(a^{۲}-۱)x^{۲}\Rightarrow ۲(a^{۲}-۱)x^{۲}=$$

چون تساوی بالا باید برای هر $x\in R$ برقرار باشد، پس $a^{۲}-۱=$ و ادامه‌ی راه‌حل مانند راه قبل می‌شود.

B **۲۰- گزینه‌ی (۱)** به وضوح $D_f=R$، حال نشان می‌دهیم تابع f فرد است:

$$f(-x)=\sqrt{۱-x+x^{۲}}-\sqrt{۱+x+x^{۲}}=-f(x)$$

پس برای هر $x\in R$ (و از جمله $x=\frac{۱}{۲۰۰۸}$) داریم: $f(x)+f(-x)=$

B **۲۱- گزینه‌ی (۱)** چون $f(x)$ تابع ثابت صفر نیست، پس گزینه‌ی (۴) نادرست است. حال داریم:

$$f(x)=\frac{۱+۲\times ۳^{x}+۳^{۲x}}{۳^{x}}=\frac{۱}{۳^{x}}+۲+۳^{x}=۳^{-x}+۳^{x}+۲\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

C **۲۲- گزینه‌ی (۴)** دقت کنید که معادله‌ی $۲-۲^{x}=$ فقط جواب $x=۱$ را دارد، پس $D_f=R-\{۱\}$ و نسبت به مبدأ غیرمتقارن است. بنابراین تابع نه زوج است و نه فرد.

B **۲۳- گزینه‌ی (۳)** باید $f(-x)=f(x)$ پس داریم:

$$f(-x)=|-x+۲|+a|-x-۲|\xrightarrow{|u|=|-u|}f(-x)=|x-۲|+a|x+۲|$$

عبارت بالا برای هر $x\in R$ باید با عبارت $f(x)=|x+۲|+a|x-۲|$ مساوی باشد، به وضوح $a=۱$.

B **۲۴- گزینه‌ی (۴)** باید $f(-x)=-f(x)$. داریم:

$$f(-x)=|-x+a|-|-x+۲|+b|-x+۵|\xrightarrow{|u|=|-u|}f(-x)=|x-a|-|x-۲|+b|x-۵|$$

با مقایسه‌ی ضابطه‌ی بالا با $-f(x)=-|x+a|+|x+۲|-b|x+۵|$ نتیجه می‌گیریم $|x-a|=|x+۲|$، پس $a=-۲$. همچنین داریم: $b|x-۵|=-b|x+۵|$، پس $b=$. بنابراین $a+b=-۲$.

C **۲۵- گزینه‌ی (۲)** داریم $D_f=(-۱,۱)$ که متقارن است، حال ضابطه‌ی $f(-x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(-x)=\sin(\log(\frac{۱+x}{۱-x}))=\sin(-\log(\frac{۱-x}{۱+x}))=-\sin(\log(\frac{۱-x}{۱+x}))=-f(x)$$

C **۲۶- گزینه‌ی (۲)** باید $f(-x)+f(x)=$ ، بنابراین:

$$\log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{-ax+۲}{-x-۲})+\log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{ax+۲}{x-۲})= \ \Rightarrow\log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{ax-۲}{x+۲}\times\frac{ax+۲}{x-۲})= \ \Rightarrow\frac{(ax)^{۲}-۴}{x^{۲}-۴}=۱\Rightarrow a^{۲}=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

به ازای $a=-۱$، تابع به $f(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}(-۱)$ تبدیل می‌شود که تعریف نشده است!

C **۲۷- گزینه‌ی (۳)** باید تابع فرد باشد، در نتیجه $f(-x)+f(x)=$ ، بنابراین:

$$\log(-ax+\sqrt{۱۶x^{۲}+۱})+\log(ax+\sqrt{۱۶x^{۲}+۱})= \ \Rightarrow(-ax+\sqrt{۱۶x^{۲}+۱})(ax+\sqrt{۱۶x^{۲}+۱})=۱$$

$$\Rightarrow ۱۶x^{۲}+۱-a^{۲}x^{۲}=۱\Rightarrow a^{۲}=۱۶\Rightarrow a=\pm۴$$

به راحتی می‌توانید نشان دهید که در هر دو حالت $a=\pm۴$، داریم $D_f=R$.

B ۲۸- گزینه‌ی (۲) با فرض $x <$ داریم $-x >$ و با توجه به ضابطه‌ها می‌توانیم بنویسیم: $f(-x) = -\sqrt{-(-x)} = -\sqrt{x} = -f(x)$

به همین ترتیب با فرض $x >$ داریم $-x <$ و با توجه به ضابطه‌ها $f(-x) = -f(x)$، پس تابع فرد است.

B ۲۹- گزینه‌ی (۱) برای $x >$ شرط $f(-x) = -f(x)$ را بررسی می‌کنیم: (داریم $-x <$)

$$a\sqrt{(-x)^۲ + b(-x)} + c = -\sqrt{x^۲ + x} - ۱ \Rightarrow a\sqrt{x^۲ - bx} + c = -\sqrt{x^۲ + x} - ۱$$

برای آن‌که دو طرف تساوی برای تمام مقادیر حقیقی x مساوی باشند، باید داشته باشیم: $c = -۱$ ، $a = -۱$ و $b = -۱$

C ۳۰- گزینه‌ی (۱) اگر $x \le -۱$ داریم: $f(x) = x|x|$ و چون $-x \ge ۱$ داریم:

$$f(-x) = -(-x)|-x| = x|x|$$

به همین ترتیب حالت $x \ge ۱$ و $-x \le -۱$ بررسی می‌شود. حال برای $-۱ < x < ۱$ داریم $-۱ < -x < ۱$ و ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x) = [x] + [-x] + ۲$ بنویسیم، پس $f(-x) = f(x)$، در نتیجه تابع زوج است.

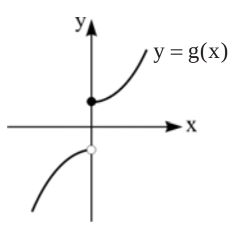
C ۳۱- گزینه‌ی (۱) اگر $x \ge$ ، آن‌گاه $-x \le$ و داریم:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(-x) = f(-(-x)) = f(x) \end{cases} \Rightarrow g(-x) = g(x)$$

به همین ترتیب برای $x <$ ثابت می‌شود $g(-x) = g(x)$، پس تابع g زوج است.

D ۳۲- گزینه‌ی (۳) اگر $x >$ ، آن‌گاه $-x <$ و داریم:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(-x) = -f(-(-x)) = -f(x) \end{cases} \Rightarrow g(-x) = -g(x)$$



به همین ترتیب برای $x <$ داریم $g(-x) = g(x)$. ولی نمی‌توانیم بگوییم g تابعی فرد است، زیرا باید $g( ) =$ ، ولی $g( ) = f( )$ و تنها در حالتی g فرد است که $f( ) =$. برای مثال نقض $f(x) = x^۲ + ۱$ را با فرض $D_f = [,۱]$ در نظر بگیرید.

$$g(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x \ge \\ -x^۲ - ۱ & x < \end{cases}$$

C ۳۳- گزینه‌ی (۴) برای $x <$ داریم $-x >$ ، در نتیجه $f(-x) = g(-x)$. حال از فرد بودن f نتیجه می‌گیریم:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow g(-x) = -\frac{\sin x}{x^۲ - ۲x + ۳} \xrightarrow{t=-x} g(t) = -\frac{\sin(-t)}{(-t)^۲ - ۲(-t) + ۳} = \frac{\sin t}{t^۲ + ۲t + ۳}$$

D ۳۴- گزینه‌ی (۳) اگر $< x < ۲$ ، آن‌گاه $-۲ < -x <$ ، پس $f(-x) = g(-x)$. از زوج بودن تابع f داریم:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow g(-x) = \begin{cases} x\sin x & < x < \frac{\pi}{۲} \\ \frac{\pi}{۲}x & \frac{\pi}{۲} < x < ۲ \end{cases} \xrightarrow{t=-x} g(t) = \begin{cases} (-t)\sin(-t) & -\frac{\pi}{۲} < t < \\ \frac{\pi}{۲}(-t) & -۲ < t < -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(t) = \begin{cases} t\sin t & -\frac{\pi}{۲} < t < \\ -\frac{\pi}{۲}t & -۲ < t < -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

B ۳۵- گزینه‌ی (۱) اگر g زوج باشد، داریم $g(-x) = g(x)$، حال می‌توانیم بنویسیم:

$$(fog)(-x) = f(g(-x)) \xrightarrow{g(-x)=g(x)} f(g(x)) = (fog)(x)$$

پس $(fog)(-x) = (fog)(x)$، بنابراین fog نیز زوج است. ولی زوج بودن gof، نامشخص است، زیرا $(gof)(-x) = g(f(-x))$ و درباره‌ی $f(-x)$ اطلاعی نداریم. پس گزاره‌ی (الف) درست و (ب) نادرست است. گزاره‌ی (پ) نیز لزوماً درست نیست، زیرا از فرد بودن g نتیجه می‌گیریم: $(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x))$ که چون درباره‌ی f اطلاعی نداریم، نمی‌توانیم آن‌را به $-f(g(x))$ ربط دهیم.

B ۳۶- گزینه‌ی (۱) در هر تابع $h(-x)$ را به $h(x)$ ربط می‌دهیم:

الف) $h_۱(-x) = f(-x)g(-x) \xrightarrow[\text{فرد } g]{\text{زوج } f} f(x) \times (-g(x)) = -f(x)g(x) = -h_۱(x)$ فرد

ب) $h_۲(-x) = f(g(-۲x)) \xrightarrow{\text{فرد } g} f(-g(۲x)) \xrightarrow{\text{زوج } f} f(g(۲x)) = h_۲(x)$ زوج

پ) $h_۳(-x) = g(f(-x)) \xrightarrow{\text{زوج } f} g(f(x)) = h_۳(x)$ زوج

B **۳۷- گزینه‌ی (۴)** مجموع و تفاضل دو تابع فرد، همواره فرد است. پس $۲f = (f+g)+(f-g)$ و $۲g = (f+g)-(f-g)$ هر دو فردند، بنابراین f و g نیز فردند.

B **۳۸- گزینه‌ی (۴)**

نکته: هر تابع با دامنه‌ی متقارن را می‌توان به صورت منحصر به فرد به شکل مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. در واقع:

$$g(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)+f(-x)) \quad , \quad h(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))$$

که g زوج و h فرد است و $f(x)=g(x)+h(x)$

می‌توانیم با توجه به نکته‌ی بالا تابع h را تشکیل دهیم، ولی با توجه به توابع مثلثاتی بدیهی است که $h(x)=\sin ۲x+\tan x$ فرد و $g(x)=\cos\frac{x}{۲}$ زوج است. بنابراین: $h(\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۲}+\tan\frac{\pi}{۴}=۲$

B **۳۹- گزینه‌ی (۳)** چون f خود تابعی فرد است (چرا؟)، پس در رابطه‌ی $f(x)=\underbrace{\frac{۱}{۲}(f(x)+f(-x))}_{g(x)}+\underbrace{\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))}_{h(x)}$، قسمت زوج یعنی $g(x)$ تابع ثابت صفر است. پس: $g(۱۰۰)=$

C **۴۰- گزینه‌ی (۴)** تابع فرد h ضابطه‌ی زیر را دارد:

$$h(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))=\frac{۱}{۲}(\frac{\sin ۲x-۳}{\cos ۲x+۱}+\frac{\sin ۲x+۳}{\cos ۲x+۱})=\frac{۲\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}\Rightarrow h(\frac{۳\pi}{۴})=\frac{۲\times(-۱)}{۱+}=-۲$$

B **۴۱- گزینه‌ی (۳)** واضح است که $D_f=[۱,+\infty)$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\ge ۱\Rightarrow ۱-x^۲\ge ۱+x^۲\Rightarrow ۲x^۲\le \quad \Rightarrow x=$$

پس فقط $x=$ در دامنه‌ی تابع g حضور دارد و داریم $g(\ )=f(۱)=$ ، بنابراین g هم زوج است و هم فرد.

D **۴۲- گزینه‌ی (۱)** در معادله‌ی فرض سؤال یک‌بار به جای x ، y و یک‌بار $-x$ قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x^۲)=f(x)+f(x) \\ f(x^۲)=f(-x)+f(-x)\end{array}\right\}\Rightarrow ۲f(x)=۲f(-x)\Rightarrow f(x)=f(-x) \quad \text{زوج}$$

D **۴۳- گزینه‌ی (۲)** با جای‌گذاری $-x$ به جای x در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$f(x^۲+y^۲)=-xf(-x)+yf(y)\xrightarrow{\text{فرض}}-xf(-x)+yf(y)=xf(x)+yf(y)\Rightarrow xf(x)+xf(-x)=$$
$$\Rightarrow x(f(x)+f(-x))=$$

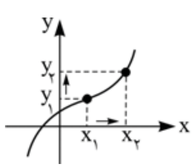
بنابراین برای هر $x\ne$ داریم $f(-x)=-f(x)$. حال برای $x=$ با جای‌گذاری $x=y=$ در معادله داریم:

$$f(\ )=\ +\ =$$

بنابراین تابع قطعاً فرد است.

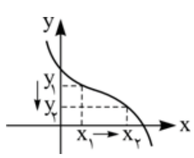
A **۴۴- گزینه‌ی (۳)**

تعریف توابع یکنوا



۱) تابع حقیقی f را «اکیداً صعودی» می‌گویند، اگر برای هر $x_۱, x_۲\in D_f$ که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم:
$f(x_۱)<f(x_۲)$

در نمودار این توابع با افزایش x، مقدار y نیز افزایش می‌یابد (یعنی با پیش رفتن در جهت مثبت محور xها نمودار بالا می‌رود).



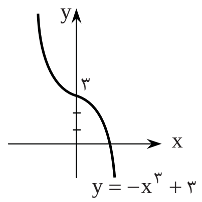
۲) تابع حقیقی f را «اکیداً نزولی» می‌گویند، اگر برای هر $x_۱, x_۲\in D_f$ که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم:
$f(x_۱)>f(x_۲)$

در نمودار این توابع با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد (یعنی با پیش رفتن در جهت مثبت محور xها نمودار پایین می‌رود).

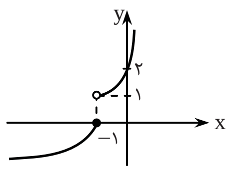
۳) اگر در نامساوی‌های بالا (یعنی $f(x_۱)<f(x_۲)$ یا $f(x_۱)>f(x_۲)$)، حالت تساوی هم بتواند رخ دهد (یعنی $f(x_۱)\le f(x_۲)$ یا $f(x_۱)\ge f(x_۲)$)، آن‌گاه به این توابع «صعودی» یا «نزولی» می‌گویند.

۴) توابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را «اکیداً یکنوا» و توابع صعودی یا نزولی را «یکنوا» نیز می‌گویند.

با رسم نمودار تابع $y = ۳ - x^۳$ می‌بینیم که اکیداً نزولی است. در این نمودار با پیش رفتن در جهت مثبت x ها، نمودار پایین می‌رود. در توابع گزینه‌های دیگر، با رسم نمودار با توابعی اکیداً صعودی مواجه می‌شویم.

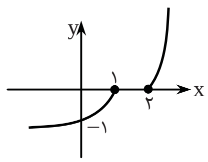


A **۱۴۵- گزینه‌ی (۱)** در توابع چند ضابطه‌ای برای تشخیص نزولی یا صعودی بودن بهتر است از رسم نمودار کمک بگیریم. با رسم نمودار f دیده می‌شود که f اکیداً صعودی است.



B **۱۴۶- گزینه‌ی (۲)** نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که مشخص است تابع در بازه‌های $(-\infty, ۱]$ و $[۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ولی به دلیل این‌که $f(۱) = f(۲) =$ ، در دامنه‌اش اکیداً صعودی نیست. البته می‌توانیم بگوییم صعودی است.

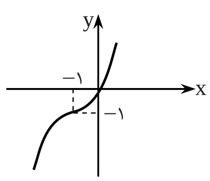


B **۱۴۷- گزینه‌ی (۳)** در گزینه‌ی (۳) ضابطه‌ی تابع به صورت زیر قابل نوشتن است:

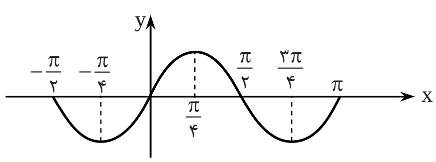
$$y = (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱) - ۱ = (x + ۱)^۳ - ۱$$

از نمودار این تابع مشخص است که تابع اکیداً صعودی است.

در گزینه‌های دیگر می‌توانید با مثال نقض نشان بدهید که تابع اکیداً صعودی نیست. مثلاً در گزینه‌ی (۱) مقدار تابع به ازای $x =$ و $x = ۲\pi$ یکسان است، پس با آن‌که $۲\pi >$ ، ولی $f(۲\pi) \not> f(\ )$. به همین ترتیب گزینه‌های دیگر رد می‌شود.



B **۱۴۸- گزینه‌ی (۲)** با توجه به نمودار واضح است که ابتدا در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$ مقدار تابع افزایش و سپس در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}]$ کاهش می‌یابد.

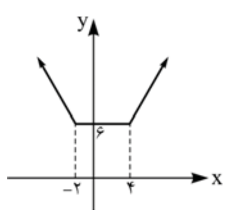


B **۱۴۹- گزینه‌ی (۱)** اگر $a = ۲$ با یک تابع درجه‌ی یک نزولی اکید مواجه‌ایم، پس $a \neq ۲$. در این صورت نمودار تابع یک سهمی به شکل  یا  است. برای آن‌که این نمودار در فاصله‌ی $[۱, +\infty)$ صعودی باشد، باید اولاً تقعر آن روبه بالا باشد، ثانیاً محور تقارن آن قبل از $x = ۱$ باشد.

بنابراین اولاً باید $a - ۲ >$ ، ثانیاً $\frac{۱}{۲(a-۲)} \leq ۱$ ، داریم:

$$\frac{۱}{۲(a-۲)} \leq ۱ \xrightarrow{a-۲>} ۱ \leq ۲(a-۲) \Rightarrow ۲a \geq ۵ \Rightarrow a \geq \frac{۵}{۲} \xrightarrow{a>۲} a \geq \frac{۵}{۲}$$

B **۱۵۰- گزینه‌ی (۳)** با توجه به نمودار گلدان شکل روبه‌رو، تابع در فاصله‌ی $(-\infty, -۲)$ نزولی اکید و در فاصله‌ی $(۴, +\infty)$ صعودی اکید است. در فاصله‌ی $(-۲, ۴)$ نیز تابع ثابت است که هم صعودی و هم نزولی است. بنابراین در هر سه فاصله‌ی موردنظر، تابع نزولی است (البته فقط در فاصله‌ی $[-۷, -۳]$ نزولی اکید است).



B **۱۵۱- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم نمودار تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ به یکی از دو شکل مقابل است. پس برای آن‌که تابع نزولی باشد، باید $a > b$. در ضابطه‌ی تابع فرض شرط $a > b$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$-(m^۲ - m) > -۶ \Rightarrow m^۲ - m < ۶ \Rightarrow (m - ۳)(m + ۲) < \ \Rightarrow -۲ < m < ۳$$

در ضمن حالت $a = b$ به تابع ثابت صفر منجر می‌شود که هم نزولی است و هم صعودی، پس پاسخ نهایی $-۲ \leq m \leq ۳$ می‌شود.