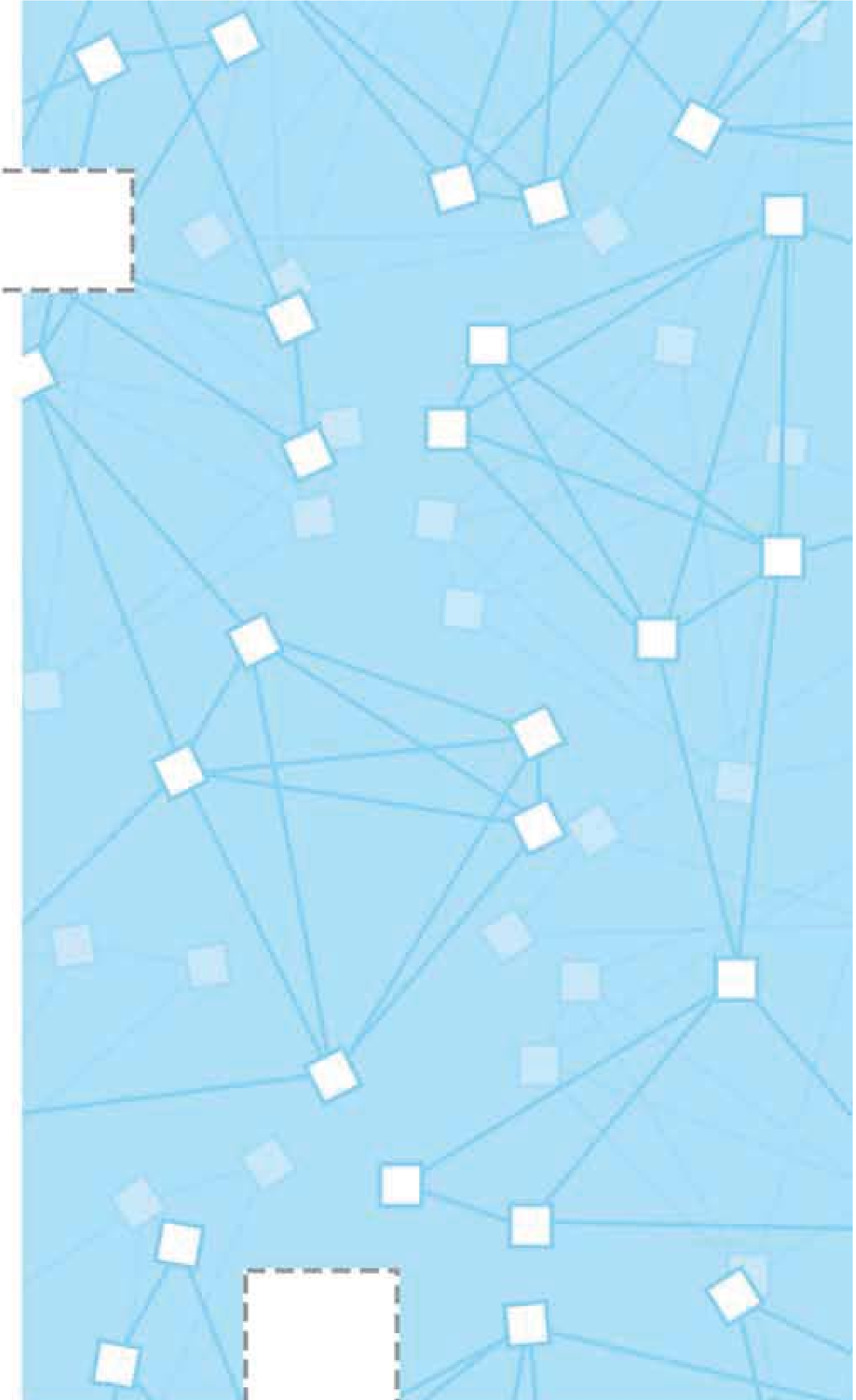
آزمون‌های مرحله‌ای



۲ گراف و کاربردهای آن

فصل دوم: گراف و کاربردهای آن

بخش ۱: مفاهیم اولیه‌ی نظریه‌ی گراف‌ها

گراف

ساختاری گسسته است شامل تعدادی رأس و یال‌هایی که این رأس‌ها را به هم متصل می‌کنند. دو نوع گراف در کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته است: ۱- گراف (ساده) ۲- گراف جهت‌دار

در این فصل منظور از گراف، گراف ساده است. در فصل ترکیبیات با گراف‌های جهت‌دار آشنا می‌شویم.

گراف ساده

گراف ساده زوج مرتبی به صورت (V, E) است که در آن V و E به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱- V مجموعه‌ای است ناتهی و متناهی که به اعضای آن رأس گویند. تعداد اعضای V را مرتبه‌ی گراف گویند و آن را با p نمایش می‌دهند. $(p=|V|)$

۲- E مجموعه‌ای است که هر عضو آن زیرمجموعه‌ای ۲ عضوی از V است که به اعضای آن یال گویند. تعداد اعضای E را اندازه‌ی گراف گویند و آن را با نماد q نمایش می‌دهند. $(q=|E|)$

نکته: در گراف ساده ویژگی‌های زیر برقرار است:

۱- بین هر دو رأس حداکثر یک یال می‌توان رسم کرد.

۲- هر رأس حلقه یا طوقه ندارد. (حلقه یالی است که دو سر آن یک رأس باشد)

۳- هیچ یالی نباید جهت‌دار باشد.

درجه‌ی رئوس در گراف (ساده)

در یک گراف تعداد یال های متصل به یک رأس را درجه‌ی آن رأس گویند. درجه‌ی رأس a را با نماد $\deg(a)$ نمایش می‌دهند. با توجه به تعریف درجه می‌توان رئوس گراف را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

انواع رأس

۱- رأس زوج: رأسی که درجه‌ی آن زوج است.

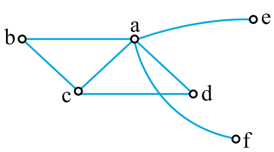
۲- رأس فرد: رأسی که درجه‌ی آن فرد است.

۳- رأس ایزوله، منفرد یا تنها: رأسی که درجه آن صفر است. توجه کنید که همه‌ی رئوس ایزوله، زوج هم هستند.

۴- رأس ماکسیمم: رأسی که بزرگ‌ترین درجه را داشته باشد و درجه‌ی آن رأس را با نماد Δ نمایش می‌دهند.

۵- رأس می‌نیمم: رأسی که کم‌ترین درجه را داشته باشد و درجه‌ی آن رأس را با نماد δ نمایش می‌دهند.

مسأله ۱ **در گراف مقابل مقادیر δ و Δ را به‌دست آورید و تعیین کنید که کدام رأس‌ها، رأس‌های ماکسیمم و می‌نیمم هستند؟**



راه‌حل: در این گراف کم‌ترین درجه برابر ۱ و بیش‌ترین درجه برابر ۵ است. همچنین رأس a ، رأس ماکسیمم است و رأس‌های e و f از درجه‌ی مینیمم هستند، پس رأس‌های از درجه‌ی مینیمم و ماکسیمم لزوماً منحصر بفرد نیستند.

نکته: با توجه به این که بین دو رأس یک گراف ساده، حداکثر می‌توان یک یال رسم کرد، بیش‌ترین تعداد یال‌های یک گراف ساده برابر $\binom{p}{۲}$ است. در واقع در هر گرافی بین مرتبه (p) و اندازه (q) همواره رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$۰ \le q \le \binom{p}{۲}$$

مسأله ۲ گرافی با $q=۳۱$، حداقل چند رأس دارد؟

راه‌حل: با داشتن تعداد یال‌ها و با استفاده از نکته‌ی قبل داریم:

$$q=۳۱ \xrightarrow{q\le\binom{p}{۲}} ۳۱\le\binom{p}{۲}\Rightarrow ۳۱\le\frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow ۶۲\le p(p-۱)$$

حاصل‌ضرب دو عدد متوالی از ۶۲ بزرگ‌تر شده است. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای تعداد رأس‌ها برابر ۹ است.

شمارش تعداد گراف‌ها با رئوس و یال‌های مشخص

- ابتدا توجه کنید که بین p رأس، حداکثر $\binom{p}{۲}$ یال می‌توان رسم کرد. برای تشکیل یک گراف، هر یالی دو حالت دارد (رسم شود یا رسم نشود) پس تعداد گراف‌هایی که با p رأس مشخص (اسم‌دار) می‌توان رسم کرد، برابر است با:

$$\underbrace{۲}_{\text{هر یالی دو حالت دارد}}^{\overbrace{\binom{p}{۲}}^{\text{ماکسیمم تعداد یال‌ها}}}$$

- تعداد گراف‌هایی که با p رأس مشخص (اسم‌دار) می‌توان رسم کرد به طوری که هر کدام k یال داشته باشند، برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{۲}}{k}$$

مسأله ۳ با مجموعه‌ی رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف می‌توان ساخت که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

الف) شامل یال ab نباشد؟

راه‌حل: هر یال دو حالت دارد. یا در گراف رسم می‌شود و یا رسم نمی‌شود. طبق فرض گراف شامل یال ab نیست، بنابراین یال ab تنها یک حالت دارد و سایر یال‌ها دو حالت دارند.

$$\text{تعداد گراف‌ها}=۲^{\binom{p}{۲}}\xrightarrow{p=۵}۲^{\binom{۵}{۲}-۱}=۲^{۹}=۵۱۲$$

ب) شامل یال ab بوده و دارای ۴ یال باشد؟

راه‌حل: طبق فرض گراف شامل یال ab است، بنابراین کافی است ۳ یال دیگر را از بین $\binom{۵}{۲}-۱$ یال باقی‌مانده انتخاب کنیم:

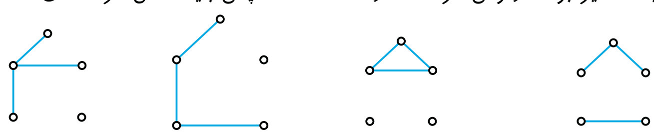
$$\text{تعداد گراف‌های با ۴ یال شامل ab}=\binom{\binom{۵}{۲}-\overset{\text{شامل یال ab}}{۱}}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}=۸۴$$

شمارش تعداد گراف‌ها با رئوس مشابه (بدون نام‌گذاری)

اگر رئوس گراف مشابه (فاقد نام‌گذاری) باشند، برای شمارش تعداد گراف‌ها فقط باید شکل گراف‌ها را رسم کنیم. در رسم شکل گراف‌ها بهتر است که از رأس درجه‌ی ماکسیمم شروع به رسم کنیم. همچنین توجه کنید که تفاوت گراف‌ها تنها در درجه‌ی رأس‌های آن‌ها نیست. بلکه ممکن است تفاوت در وجود nضلعی‌های مختلف موجود در گراف و یا چیدمان رئوس گراف با درجه‌های مختلف باشد.

مسأله ۴ با ۵ رأس و ۳ یال چند نوع گراف می‌توان رسم کرد؟

راه‌حل: با توجه به این‌که به متمایز بودن رئوس گراف اشاره نشده است، پس باید شکل گراف‌های ممکن را رسم کنیم:



رأس ایزوله ندارد — دارای مثلث است — $\Delta=۲$ — $\Delta=۳$

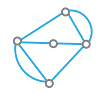
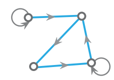
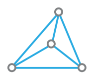
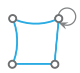
بنابراین ۴ نوع گراف می‌توان رسم کرد.

محاسبات

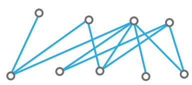
آزمون ٦

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه
مفاهیم اولیه‌ی نظریه‌ی گراف‌ها	۲۳ دقیقه	۱۶ و ۱۷

۱- کدام گزینه یک گراف ساده است؟

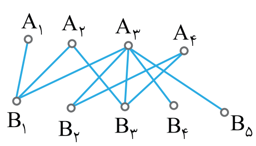
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲- در گراف مقابل بین پارامترهای گراف $(p$ و q ،Δ ،$\delta)$، کدام رابطه برقرار است؟



۱) $q=p+\delta$
۲) $p+\Delta=q+۲\delta$
۳) $p+q=۴\Delta+\delta$
۴) $q-p=\Delta-۳\delta$

۳- مطابق گراف شکل مقابل، برای شغل‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ پنج نفر به نام‌های $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، $B_۴$ و $B_۵$ داوطلب می‌شوند. اگر هیچ شغلی خالی نماند و هر فرد حداکثر بتواند یک شغل اختیار کند، احتمال بی‌کار ماندن کدام شخص بیش‌تر است؟

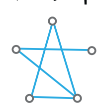
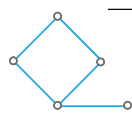
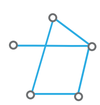
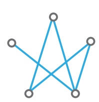


۱) $B_۱$
۲) $B_۲$
۳) $B_۳$
۴) $B_۴$

۴- چند گراف ساده با ۵ رأس مشابه و ۴ یال می‌توان رسم کرد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۵- کدام گراف با بقیه یکریخت نیست؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶- G گرافی از مرتبه‌ی ۱۸ با ۵ رأس درجه‌ی صفر است. حداقل اندازه‌ی G چند است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷- مجموعه‌ی رأس‌های یک گراف ساده $\{۱,۲,\dots,۶\}$ است. در این گراف دو رأس متمایز با هم مجاورند اگر و فقط اگر مجموع اعداد متناظر با آن رأس‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

۸- با مجموعه‌ی رأس‌های $V=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند گراف می‌توان ساخت که در آن‌ها $q\geq ۲$ باشد؟

۱) ۱۰۲۳ ۲) ۱۰۱۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۵۰

۹- با مجموعه‌ی رأس‌های $V=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند گراف با اندازه‌ی ۳ می‌توان ساخت که یال‌هایش دوبه‌دو در رأس‌های متمایز مشترک باشند؟

۱) ۱ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۰- با مجموعه‌ی رأس‌های $V=\{a,b,c,d\}$ چند گراف می‌توان ساخت که در آن درجه‌ی رأس a صفر نباشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۵۶ ۳) ۴۱ ۴) ۴۷

محاسبات

۱۱- با شش رأس a ، b، c، d ، e و f چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که ab یالی از آن بوده و رأس c دارای درجه‌ی ۵ باشد؟

۱) $۲^{۸}-۱$ ۲) $۲^{۹}$ ۳) $۲^{۱۰}-۱$ ۴) $۲^{۱۱}$

۱۲- G گرافی ساده با اندازه‌ی ۲۳ و ۶ رأس درجه‌ی صفر است. حداقل مرتبه‌ی G چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۳- اگر گراف G از مرتبه‌ی ۲۰ و اندازه‌ی ۸ باشد، آن‌گاه حداقل تعداد رأس‌های منفرد برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۷

۱۴- در گرافی از مرتبه‌ی ۲۱ و اندازه‌ی ۲۰، حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۵- در گرافی با بیش از یک رأس، رابطه‌ی $q+۷=۷p$ بین مرتبه و اندازه‌ی گراف برقرار است. حداقل مرتبه‌ی این گراف چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

بخش ۲: دنباله‌ی درجه‌های گراف

قضیه‌ی مجموع درجات

قضیه **در هر گراف مجموع درجه رئوس گراف دو برابر اندازه‌ی آن است:**

$$\deg v_۱+\deg v_۲+\cdots+\deg v_p=۲q$$

مسأله ۵ **گراف ساده‌ی G از مرتبه ۱۱ و اندازه‌ی ۱۴ فقط رئوس درجه‌ی ۲ و ۳ دارد. گراف G چند رأس درجه‌ی فرد دارد؟**

راه‌حل: فرض کنید تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ و ۳ به ترتیب x و y باشند. در این‌صورت داریم:

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg V_i=۲q\Rightarrow \underbrace{۲+۲+\cdots+۲}_{x\text{ تا}}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{y\text{ تا}}=۲\times۱۴\Rightarrow ۲x+۳y=۲۸$$

از طرفی چون $p=۱۱$، پس $x+y=۱۱$ است. با حل دستگاه $\begin{cases}۲x+۳y=۲۸\\ x+y=۱۱\end{cases}$ مقدار y که همان تعداد رئوس درجه‌ی فرد است، را به‌دست می‌آوریم: $y=۶$.

ویژگی‌های درجات رئوس یک گراف

۱- تعداد رئوس درجه‌ی فرد همواره زوج است. ولی زوج و فرد بودن تعداد رئوس زوج بستگی به مقدار p دارد.

مثال: • در گرافی از مرتبه‌ی ۲۵ چون تعداد رئوس فرد، زوج است، پس تعداد رئوس زوج آن باید فرد باشد. (چون p هم فرد است)

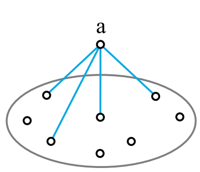
۲- در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p همواره داریم: $\Delta\leq p-۱$

۳- در هر گراف بین δ، Δ، p و q رابطه‌ی $\delta\leq\frac{۲q}{p}\leq\Delta$ برقرار است. مفهوم این رابطه این است که میانگین درجات $(\frac{۲q}{p})$ همواره بین کم‌ترین درجه (δ) و بیش‌ترین درجه (Δ) قرار دارد.

مسأله ۶ **در یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۹ می‌دانیم $\delta=۴$. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار q را به‌دست آورید.**

راه‌حل: با توجه به نامساوی $\delta\leq\frac{۲q}{p}$ داریم:

$$\delta\leq\frac{۲q}{p}\xrightarrow[p=۹]{\delta=۴}۴\leq\frac{۲q}{۹}\Rightarrow ۱۸\leq q\Rightarrow \min q=۱۸$$



همچنین گراف مورد نظر حداقل یک رأس درجه‌ی ۴ دارد. اگر این رأس را a در نظر بگیریم، رأس a با ۴ یال به بقیه‌ی گراف متصل است. بقیه‌ی گراف ۸ رأس و حداکثر $\binom{۸}{۲}=۲۸$ یال دارد. پس گراف G حداکثر $۲۸+۴=۳۲$ یال با شرایط مورد نظر می‌تواند داشته باشد.

نتیجه: **در حالت کلی برای گرافی ساده از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داریم:** $q\leq\delta+\binom{p-۱}{۲}$

مسأله ۷ درگرافی از مرتبه‌ی ۱۱، می‌دانیم $\Delta=۸$ و $\delta=۳$. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار اندازه‌ی گراف چند است؟

راه‌حل: تفاوت این مثال با مثال قبلی در این است که هر دو مقدار δ و Δ را می‌دانیم. در این مسائل نامساوی $\delta\leq\frac{۲q}{p}\leq\Delta$ تنها کران‌های بالا و پائین q را نشان می‌دهد و نه مقدار دقیق ماکسیمم و می‌نیمم را. در این گونه مسائل بهتر است که از رابطه‌ی مجموع درجه‌های گراف استفاده کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q\Rightarrow q=\frac{\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i}{۲}$$

برای پیدا کردن کم‌ترین مقدار q باید درجه‌ی رئوس کم‌ترین مقدار ممکن باشند. بنابراین یک رأس را از درجه‌ی Δ و سایر رئوس را از درجه‌ی δ در نظر می‌گیریم:

$$\min(q)=\frac{\overset{\Delta}{۸}+۱۰\times\overset{\delta}{۳}}{۲}=۱۹$$

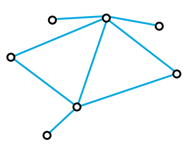
برای پیدا کردن بیش‌ترین مقدار q باید درجه‌ی رئوس بیش‌ترین مقدار ممکن باشند. بنابراین یک رأس را از درجه‌ی δ و سایر رئوس را از درجه‌ی Δ در نظر می‌گیریم. ولی برای این‌که تعداد رئوس فرد، زوج باشد، درجه‌ی یکی از رئوس درجه‌ی Δ را به بزرگ‌ترین درجه‌ی فرد ممکن تغییر می‌دهیم:

$$\max(q)=\frac{\overset{\delta}{۳}+۷+۹\times\overset{\Delta}{۸}}{۲}=۴۱$$

دنباله‌ی درجات

دنباله‌ای نزولی (و نه اکیداً نزولی) است که درجات رئوس گراف را نشان می‌دهد.

مثال: • دنباله‌ی درجات گراف مقابل به صورت ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۴, ۵ نوشته می‌شود.



روش تشخیص ساده بودن گراف با استفاده از دنباله‌ی درجات

شرط لازم اول: تعداد رئوس فرد نباید فرد باشد.

شرط لازم دوم: در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p همواره داریم: $\Delta\leq p-۱-(\text{تعداد صفرها})$

شرط لازم سوم: در هر گراف ساده از مرتبه‌ی p همواره داریم: تعداد رئوس درجه‌ی $(p-۱)\leq\delta$. (به شرط آن‌که همه‌ی رئوس از درجه‌ی $p-۱$ نباشد.)

نتیجه: دنباله‌ی درجات نمی‌تواند یک تصاعد حسابی یا هندسی باشد، مگر این‌که دنباله‌ی ثابتی باشد. یعنی همه‌ی درجات با هم برابر باشد.

شرط کافی (الگوریتم هاول ـ حکیمی): فرض کنید می‌خواهیم گرافی بودن دنباله‌ی نزولی $(d_۱, d_۲, \ldots, d_p)$ را بررسی کنیم.

گام اول: بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله (یعنی $d_۱$) را حذف کرده و از هر یک از $d_۱$ جمله‌ی بعدی یک واحد کسر می‌کنیم.

گام دوم: اگر دنباله‌ی باقی‌مانده از حالت نزولی خارج شد، آن را مجدداً به‌صورت نزولی مرتب می‌کنیم.

گام سوم: گام اول و دوم را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا به دنباله‌ی عددی برسیم که همه‌ی جمله‌های آن صفر باشد.

در این‌صورت دنباله‌ی اولیه می‌تواند دنباله‌ی درجه‌های رئوس یک گراف ساده باشد. ولی اگر به دنباله‌ی صفر نرسیدیم و الگوریتم هم دیگر قابل انجام نبود (مثلاً به صفر و ۲ رسیده بودیم)، دنباله‌ی اولیه گرافی نیست.

تذکر در مراحل اجرای الگوریتم هر کجا تشخیص دادیم دنباله‌ی به دست آمده نمی‌تواند (یا می‌تواند) دنباله‌ی درجه‌های یک گراف ساده باشد، می‌توانیم الگوریتم را متوقف کنیم.

مسأله ۸ **آیا دنباله‌ی ۴, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱, ۰ می‌تواند متعلق به درجه‌های یک گراف ساده باشد؟**

راه‌حل: شرط اول: ۴ رأس فرد دارد. شرط دوم: $۴ \leq ۸-۱-۱$. شرط سوم: دنباله هیچ رأسی از درجه‌ی $p-۱$ ندارد، پس $\delta \geq ۰$.

شرط چهارم: با استفاده از الگوریتم هاول - حکیمی ساده بودن گراف را تایید می‌کنیم:

~~۴~~, ۳, ۲, ۲, ۱ , ۱ , ۱ , ۰

۲ , ۱ , ۱ , ۰ , ۱ , ۱ , ۰

مرتب‌سازی

~~۲~~, ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۰ , ۰

۰ , ۰ , ۱ , ۱ , ۰ , ۰

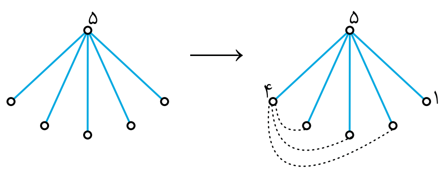
مرتب‌سازی

~~۱~~, ۱ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰

۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰ $\Rightarrow$ چون به دنباله‌ی صفر رسیدیم گراف ساده است.

مسأله ۹ **اگر x, y, z , ۱ ,۴ ,۵ درجات رئوس یک گراف باشد، کم‌ترین مقدار ممکن x چند است؟**

راه‌حل: چون کلمه‌ی دنباله در سؤال ذکر نشده است، نمی‌توان گفت که دنباله‌ی داده شده نزولی است. در چنین سؤالاتی که مجهول‌های زیادی دارند، توصیه می‌کنیم که شکل گراف را رسم کنید. برای رسم گراف ابتدا رأس درجه‌ی ماکسیمم را رسم کرده، سپس رأس درجه‌ی ۴ را تشکیل می‌دهیم:



پس y ،x و z حداقل برابر ۲ هستند.

محاسبات

آزمون ۷

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه
دنباله‌ی درجه‌های گراف	۲۳ دقیقه	۱۸ و ۱۹

۱- اگر در گراف ساده‌ی $G(V, E)$ درجه‌ی هر رأس ۶ و رابطه‌ی $|E|=4|V|-5$ برقرار باشد، مقادیر $|E|$ و $|V|$ کدام است؟

۱) $|E|=20$ و $|V|=5$ ۲) $|E|=15$ و $|V|=10$ ۳) $|E|=15$ و $|V|=5$ ۴) چنین گرافی وجود ندارد.

۲- اگر دنباله‌ی درجه رأس‌های گرافی با اندازه‌ی q به صورت $6, 6, 5, x, 2, 2, 2, 2$ باشد و $q<15$، آن‌گاه x چه عددی می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳- در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج عددی .... و تعداد رأس‌های فرد عددی .... است.

۱) فرد - فرد ۲) فرد - زوج ۳) زوج - فرد ۴) زوج - زوج

۴- کدام عدد نمی‌تواند حاصل‌ضرب درجات رأس‌های یک گراف ساده با مرتبه‌ی ۵ باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۵- گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۱۰ که فقط یک بخش دارد، موجود است. اگر درجه‌ی همه‌ی رأس‌ها زوج باشد، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۲ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶- اگر دنباله‌ی درجه رأس‌های یک گراف ساده تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند و این دنباله ۷ عضو داشته باشد، آن‌گاه Δ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۵

۷- دنباله‌ی درجه رأس‌های گرافی به‌صورت $\delta, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8$ است. δ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸- چند نوع گراف ساده با دنباله‌ی درجه رأس‌های $3, 3, 2, 1, 1$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- کدام دنباله، دنباله‌ی درجه رأس‌های گرافی ساده است؟

۱) $5, 4, 3, 2, 2, 1$ ۲) $4, 4, 4, 3, 2, 1$ ۳) $5, 4, 3, 2, 2, 0$ ۴) $5, 5, 3, 3, 1, 1$

۱۰- اگر $4, x, y, 2, 2, 1$ دنباله‌ی درجه رأس‌های گراف G باشد، حداقل و حداکثر مقدار xy چند است؟

۱) ۶ و ۱۲ ۲) ۴ و ۱۲ ۳) ۳ و ۶ ۴) ۴ و ۶

۱۱- اگر $a, b, c, 3, 2, 1$ دنباله‌ی درجه رأس‌های یک گراف باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار اندازه‌ی گراف چند است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۲- در گرافی با اندازه‌ی ۳۵، مجموع همه‌ی درجات زوج برابر ۲۶ است. در این گراف حداکثر چند رأس درجه‌ی ۱ وجود دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۴

۱۳- دنباله‌ی نزولی $2, z, y, 3, 3$ مربوط به درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده است. (y, z) چند دسته جواب می‌تواند داشته باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴- اگر در گرافی با اندازه‌ی ۱۴، به هر رأسی دست‌کم ۵ یال منتهی شود، ماکسیمم مقدار مرتبه چند است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) چنین گرافی وجود ندارد.

۱۵- در گرافی $p=9$، $\delta=3$ و $\Delta=7$. در این صورت q چه مقداری می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۲ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

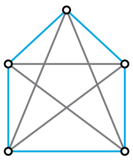
بخش ۳: چند رده‌ی خاص از گراف‌ها

گراف کامل

گرافی ساده است که در آن هر دو رأس گراف مجاورند. (همه‌ی یال‌های آن وصل شده‌اند) در گراف کامل همه‌ی رئوس از درجه‌ی $p-۱$ هستند.

در هر گراف کامل K_p داریم: ۱) $q=\binom{p}{۲}=\frac{p(p-۱)}{۲}$ ۲) $\Delta=\delta=p-۱$

$K_۵$:



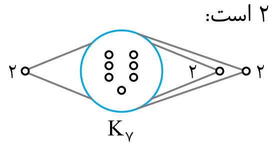
کاربرد گراف کامل در حل مسأله‌ها

کاربرد اول: در بعضی از سؤالاتی که ماکسیمم اندازه‌ی گراف مطلوب است، می‌توان قسمتی از گراف را کامل کرد.

مسأله ۱۰ اگر در گرافی از مرتبه‌ی ۱۰، فقط سه رأس درجه‌ی ۲ وجود داشته باشد، ماکسیمم اندازه‌ی گراف چقدر است؟

راه‌حل: ابتدا با ۷ رأس باقی‌مانده، گراف کامل $K_۷$ را تشکیل می‌دهیم، سپس ۳ رأس با درجه‌ی ۲ را به گراف اضافه می‌کنیم.

بنابراین ماکسیمم اندازه‌ی گراف برابر مجموع یال‌های گراف کامل $K_۷$ و ۶ یال رئوس درجه‌ی ۲ است:

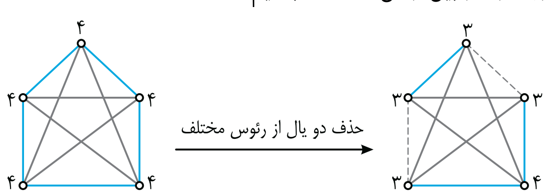


$$q_{max}=\binom{۷}{۲}+۲+۲+۲=۲۷$$

کاربرد دوم: با توجه به این‌که در گراف کامل همه‌ی رأس‌ها از درجه‌ی $p-۱$ است، در حل سؤالاتی که مقادیر δ و Δ مطلوب است، می‌توان ابتدا گراف را کامل در نظر گرفت و سپس با حذف یال‌ها با توجه به فرض مسأله گراف موردنظر سؤال را تشکیل داد.

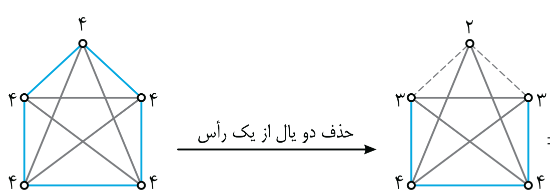
مسأله ۱۱ در گرافی از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۸، حداقل و حداکثر مقدار δ چقدر است؟

راه‌حل: ابتدا گراف کامل $K_۵$ را در نظر می‌گیریم. این گراف $۱۰=\frac{۵\times۴}{۲}$ یال و ۵ رأس درجه‌ی $۴=۱-۵$ دارد. برای این‌که به گراف فرض سؤال برسیم باید دو یال از این گراف را حذف کنیم. برای آن‌که بیش‌ترین مقدار δ به‌دست آید، باید این دو یال را از رئوس مختلف برداریم تا کم‌ترین کاهش درجه را در بین رأس‌ها داشته باشیم:



$\Rightarrow \Delta=۴ \quad , \quad \max\delta=۳$

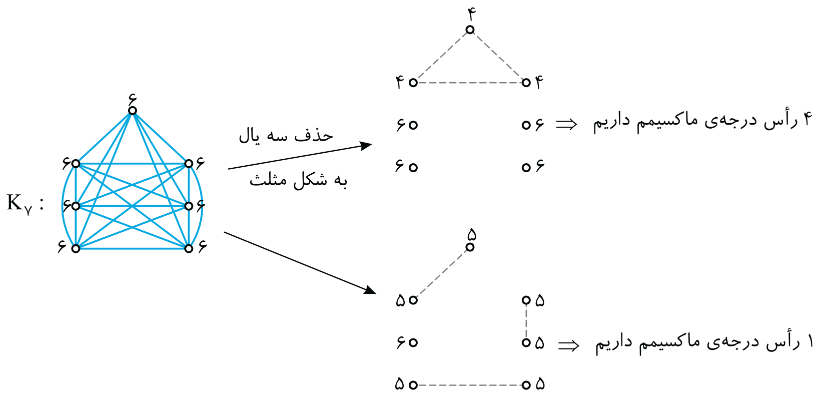
برای این که کم‌ترین مقدار δ به‌دست آید، باید دو یال را از یک رأس حذف کنیم تا بیش‌ترین کاهش درجه را در آن رأس داشته باشیم.



$\Rightarrow \Delta=۴ \quad , \quad \min\delta=۲$

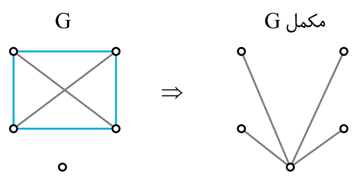
مسأله ⑫ در گرافی از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۱۸، حداقل و حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکسیمم وجود دارد؟

راه‌حل: ابتدا گراف کامل K_7 را در نظر می‌گیریم. این گراف $21=\frac{7\times 6}{2}$ یال و ۷ رأس از درجه‌ی $6=1-7$ دارد. برای رسیدن به گراف فرض سؤال باید ۳ یال از گراف K_7 را حذف کنیم. برای به‌دست آوردن حداکثر تعداد رئوس از درجه‌ی ماکسیمم، بهتر است یال‌های حذف شده با رأس‌های کم‌تری درگیر باشند، بنابراین بهتر است آن‌ها را به صورت مثلثی حذف کنیم. برای به‌دست آوردن حداقل تعداد رئوس از درجه‌ی ماکسیمم، بهتر است که سه یال را از رئوس مختلف حذف کنیم:



گراف مکمل

مکمل یک گراف، گرافی با همان مجموعه رأس‌های گراف اولیه است که اجتماع یال‌های آن با یال‌های گراف اولیه یک گراف کامل می‌سازد و اشتراک یال‌های آن با یال‌های گراف اولیه تهی باشد.



نکته: اگر p و q به ترتیب مرتبه و اندازه‌ی یک گراف و $\overline{p}$ و $\overline{q}$ به‌ترتیب مرتبه و اندازه‌ی مکمل آن گراف باشد، داریم:

$$1)\ p=\overline{p}$$

$$2)\ q+\overline{q}=\binom{p}{2}$$

$$3)\ \underbrace{\deg a}_{\text{درجه‌ی رأس a در گراف}}+\underbrace{\deg \overline{a}}_{\text{درجه‌ی رأس a در گراف مکمل}}=p-1\Rightarrow\begin{cases}\overset{\text{ماکسیمم درجه‌ی گراف}}{\Delta}+\overset{\text{می‌نیمم درجه‌ی گراف مکمل}}{\overline{\delta}}=p-1\\ \delta+\overline{\Delta}=p-1\end{cases}$$

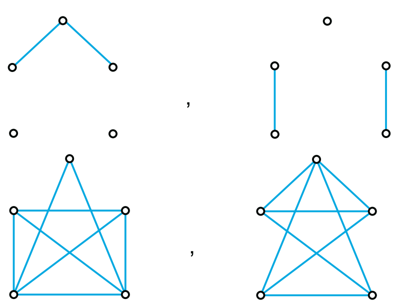
کاربرد گراف مکمل

با توجه به این‌که به ازای هر گراف مکملی یک گراف متناظر با آن قابل رسم است، در سؤالاتی که تعداد یال‌های زیادی در گراف وجود دارد، بهتر است شکل گراف مکمل آن را رسم کنیم.

مسأله ⑬ چند گراف از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۸ وجود دارد؟

راه‌حل: با توجه به این‌که گراف مکمل این گراف $\binom{5}{2}-8=2$ یال دارد، کافی است تعداد گراف‌های با ۵ رأس و ۲ یال را به‌دست آوریم:

بنابراین دو گراف با $p=5$ و $q=8$ قابل رسم است:



گراف منتظم

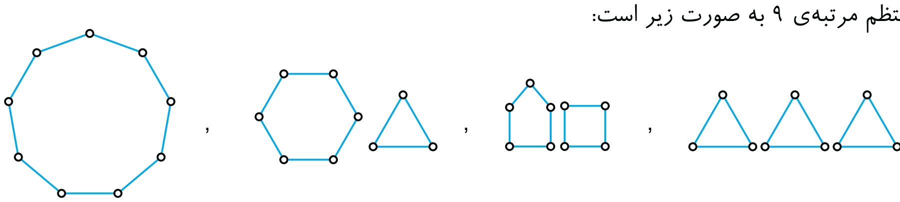
گراف r- منتظم گرافی است که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن برابر r است. در هر گراف r منتظم داریم: ۱) $pr=2q$ و ۲) $\Delta=\delta=r$
توجه کنید که در دو حالت، گراف منتظم حتماً وجود **ندارد**: ۱- گراف r- منتظم مرتبه‌ی p که در آن $r\geq p$ وجود ندارد. ۲- گراف فرد منتظم مرتبه‌ی فرد وجود ندارد. به عنوان مثال گراف ۳- منتظم مرتبه‌ی ۷ وجود ندارد.

مسأله ۱۴ چند گراف ۲- منتظم مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

راه‌حل: در حالت کلی برای پیدا کردن تعداد گراف‌های ۲- منتظم مرتبه‌ی p ، باید تعداد روش‌هایی که می‌توان عدد p را به صورت مجموع اعداد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ نوشت، به‌دست آوریم:

$9=6+3=5+4=3+3+3$

نمودار گراف‌های ۲- منتظم مرتبه‌ی ۹ به صورت زیر است:



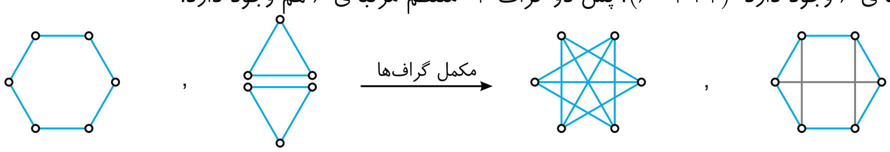
بنابراین ۴ نوع گراف ۲ - منتظم مرتبه‌ی ۹ وجود دارد.

مسأله ۱۵ چند گراف ۳ منتظم مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟

راه‌حل: مکمل این گراف، یک گراف ۲- منتظم مرتبه‌ی ۶ است، پس می‌توان گراف‌های ۲- منتظم مرتبه‌ی ۶ را رسم کرد. اگر v_i یک رأس دلخواه از گراف باشد، آن‌گاه داریم:

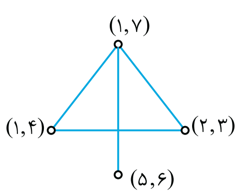
$$\deg_G v_i+\deg_{\overline{G}} v_i=p-1 \xrightarrow[r=3]{p=6} \overline{r}+3=6-1\Rightarrow \overline{r}=2$$

دو گراف ۲- منتظم مرتبه‌ی ۶ وجود دارد $(6=3+3)$، پس دو گراف ۳- منتظم مرتبه‌ی ۶ هم وجود دارد:

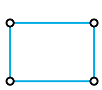


گراف بازه‌ای

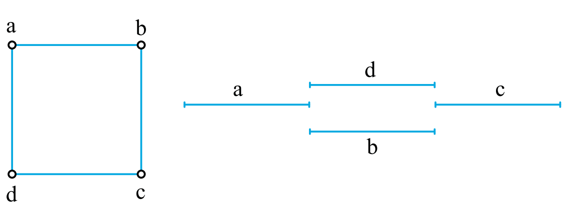
گرافی است که می‌توان به رئوس آن، بازه‌های باز متمایز از اعداد حقیقی را نسبت داد، به طوری‌که هر دو رأس به شرطی مجاورند که بازه‌های متناظر با آن رأس‌ها با هم اشتراک غیر تهی داشته باشند.



مسأله ۱۶ بازه‌ای بودن گراف مقابل را بررسی کنید؟



راه‌حل: ابتدا بازه‌هایی را به صورت a، b، c و d به گراف اختصاص می‌دهیم. اگر این بازه‌ها متناظر با این رئوس باشند، داریم:

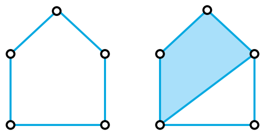


اما بازه‌ی d نمی‌تواند فقط با بازه‌های a و c اشتراک داشته باشد و باید با بازه‌ی b هم اشتراک داشته باشد در حالی‌که d و b مجاور نیستند. (توجه کنید که اگر یک قطر این چهارضلعی را رسم کنیم، گراف بازه‌ای ایجاد می‌شود.)

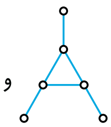
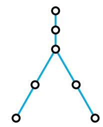
نکات گراف بازه‌ای

۱- تمام گراف‌های کامل، می‌توانند گراف بازه‌ای باشند.

۲- گراف‌هایی که در آن‌ها nضلعی فاقد قطر $(n \geq ۴)$ وجود داشــته باشــد، قطعاً بازه‌ای نیســتند. به عنوان مثال گراف‌های زیر به ترتیب از پنج ضلعی و چهارضلعی بدون قطر تشکیل شده‌اند، پس نمی‌توانند بازه‌ای باشند:



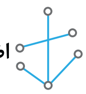
بنابراین گراف‌های ۲ - منتظم و بازه‌ای از یک یا چند مثلث مجزا تشکیل شده‌اند.

۳- گراف‌هایی به شکل  و  قطعاً بازه‌ای نیستند.

محاسبات

آزمون ۸

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه
چند ردهی خاص از گراف‌ها - شماره ۱	۲۳ دقیقه	۲۰ و ۲۱

۱- چند یال به گراف  **اضافه کنیم تا بین هر دو رأس دلخواه گراف دقیقاً یک یال وجود داشته باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۲- گرافی از مرتبه‌ی ۹ دارای یک رأس ایزوله است و به یک رأس آن فقط ۳ یال متصل است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۳۱ ۲) ۲۴ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۳- اگر اندازه‌ی گراف ساده‌ی $G(V,E)$ برابر ۲۶ و مرتبه‌ی آن برابر ۸ باشد، از هر عضو مجموعه‌ی V حداقل چند یال می‌گذرد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۴- در یک گراف از مرتبه‌ی ۱۰، اگر $\delta=۳$ و $\Delta=۹$، حداکثر مقدار q چند است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۲ ۳) ۴۰ ۴) ۳۹

۵- تعداد یال‌های یک گراف $\frac{۱}{۴}$ تعداد یال‌های مکمل آن است. مرتبه‌ی گراف چه عددی می‌تواند باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۳۷

۶- چند گراف غیر یکریخت از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۱۳ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷- کدام گراف وجود دارد؟

۱) ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۷ ۲) ۱۰- منتظم از مرتبه‌ی ۸ ۳) ۸- منتظم از مرتبه‌ی ۱۷ ۴) ۵- منتظم از مرتبه‌ی ۱۳

۸- عدد p اول است. تعداد گراف‌های p-منتظم از مرتبه‌ی $p+۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌نهایت

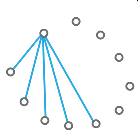
۹- چند گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۶ (با رأس‌های مشابه) می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰- ۵ نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند که هر کدام از آن‌ها به دو نفر دیگر نامه بفرستد. به چند طریق این عمل امکان‌پذیر است به شرط آن‌که هر نفر به آن دو نفری نامه فرستاده باشد که از آن‌ها نامه دریافت کرده است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) غیرممکن

۱۱- گراف مقابل با اضافه کردن حداقل چند یال به گراف منتظم تبدیل می‌شود؟



۱) ۳۳ ۲) ۲۸

۳) ۵ ۴) ۲۷

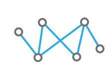
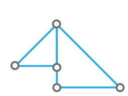
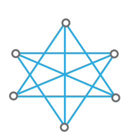
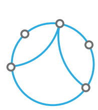
۱۲- با اضافه کردن ۱۰ یال به یک گراف r-منتظم می‌توان آن را به یک گراف کامل تبدیل کرد. چند مقدار برای r وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

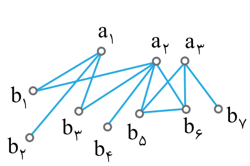
۱۳- بازه‌های $A_n=((-۱)^n n, ۲n)$ مفروض‌اند. گراف بازه‌ای متناظر با بازه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_۵$ چند یال دارد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۴- کدام‌یک از گراف‌های زیر بازه‌ای است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۵- گراف مقابل به چند طریق می‌تواند گراف بازه‌ای باشد؟



۱) بی‌شمار ۲) ۲

۳) ۳ ۴) نشدنی

محاسبات

آزمون ۹

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه
چند رده‌ی خاص از گراف‌ها - شماره ۲	۲۳ دقیقه	۲۲ و ۲۳

۱- در یک گراف کامل، رابطه‌ی $p=2\Delta-7$ برقرار است. اندازه‌ی این گراف چند است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

۲- در گراف ساده‌ای از مرتبه‌ی ۱۱، حداکثر مقدار اندازه‌ی گراف چقدر باشد تا گراف ۵ بخش جدا از هم داشته باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۳- از گراف K_8، x یال حذف کرده و گراف جدید را G می‌نامیم. اگر $\Delta(G)=\Delta(K_8)$، حداکثر مقدار x چند است؟

۱) ۷ ۲) صفر ۳) ۲۱ ۴) ۶

۴- در گرافی از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۴۰، حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکسیمم وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱۰

۵- در یک گراف از مرتبه‌ی ۱۰، اگر $\delta=2$ و $\Delta=7$، حداقل و حداکثر مقدار q چند است؟

۱) ۱۰ و ۳۵ ۲) ۱۳ و ۳۲ ۳) ۱۲ و ۳۳ ۴) ۱۳ و ۳۳

۶- گراف G و مکمل آن ($\overline{G}$) مفروض‌اند. مجموع درجه رأس‌های گراف G و $\overline{G}$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۷- چند نوع گراف از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۷ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸- در گراف n-منتظم از مرتبه‌ی p داریم $p^2-2q=18$. چند مقدار برای n وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۹- چند گراف منتظم از مرتبه‌ی ۷ می‌توان ساخت؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰- چند گراف n-منتظم و ناتهی از مرتبه‌ی ۱۰ وجود دارد که در آن‌ها $q\leq 10$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

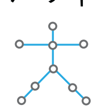
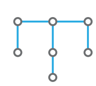
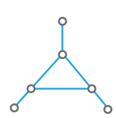
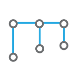
۱۱- در یک مهمانی ۱۷ نفر حضور دارند. اگر ۱۶ نفر آن‌ها همگی با ۵ نفر فامیل باشند، نفر هفدهم با چند نفر می‌تواند فامیل باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

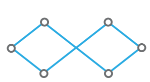
۱۲- در گراف G، $p=9$، $q=22$ و $\Delta=5$. مینیمم درجه‌ی G چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳- کدام گراف بازه‌ای است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۴- به گراف زیر حداقل چند یال اضافه کنیم که یقین حاصل کنیم که حتماً ۶ بازه‌ی متمایز وجود دارد که این گراف را بازه‌ای می‌کند؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) گراف بازه‌ای است.

۱۵- گراف بازه‌های $(-1,2)$، $(2,3)$، $(1,4)$ و $(0,b)$ دارای ۴ یال است. کدام نتیجه حتماً درست است؟

۱) $2<b\leq 3$ ۲) $3<b\leq 4$ ۳) $1<b\leq 2$ ۴) $0<b\leq 1$