فصل ۱

قسمت اول

ترسیم‌های هندسی

ترسیم‌های هندسی

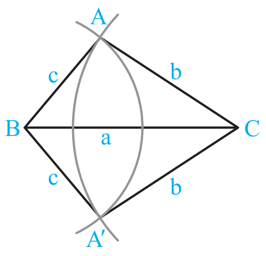
ترسیم‌های هندسی با دو ابزار خط‌کش و پرگار انجام می‌شوند:

آ) خط‌کش برای رسم خطی که از دو نقطه می‌گذرد، استفاده می‌شود. همچنین از خط‌کش مدرج برای رسم پاره‌خط با طول معلوم استفاده می‌شود. هر چند با معلوم بودن طول پاره‌خط‌ها می‌توان به کمک خط‌کش غیر مدرج آن‌ها را روی نیم‌خط مفروض رسم کرد.

ب) پرگار ابزاری برای رسم دایره‌ای است که مرکز آن نقطهٔ معلوم A است و از نقطهٔ معلوم دیگری مانند B می‌گذرد.

ترسیم‌های مقدماتی

۱- رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است.



این ترسیم، ترسیم مهمی می‌باشد و بسیاری از ترسیم‌های هندسی به کمک این ترسیم حل می‌شوند.

فرض کنید $BC = a$، $AB = c$ و $AC = b$ اندازهٔ اضلاع مثلث ABC باشند، ابتدا یکی از ضلع‌ها مثلاً $BC = a$ را رسم می‌کنیم سپس به مرکز C و شعاع b و به مرکز B و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم. محل تلاقی دو کمان یعنی نقاط A و A' رأس سوم مثلث است. مثلث‌های ABC و $A'BC$ جواب‌اند و چون این دو مثلث هم‌نهشت‌اند (ض‌ض‌ض)، پس مسئله دارای یک جواب است.

شرط جواب داشتن مسئله این است که دو کمان یکدیگر را قطع کنند و این هنگامی ممکن است که مجموع هر دو عدد داده شده، از عدد سوم بزرگ‌تر باشد، یعنی:

$$\begin{cases} a < b + c \\ c < a + b \\ b < a + c \end{cases}$$

مثال: آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که اندازهٔ اضلاع آن ۴، ۵ و ۶ باشد؟ چرا؟

پاسخ: بله، چون مجموع دو عدد کوچک‌تر، بزرگ‌تر از عدد بزرگ‌تر است $(۶ > ۴ + ۵)$، پس همواره می‌توان با اعداد داده شده یک مثلث ساخت.

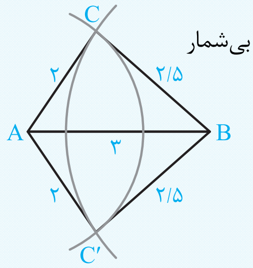
مثال: اگر ۳، ۴ و x اندازه‌های اضلاع یک مثلث باشند، آن‌گاه حدود تغییرات x را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x + ۴ > ۳ \\ x + ۳ > ۴ \\ ۳ + ۴ > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -۱ \\ x > ۱ \\ ۷ > x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱ < x < ۷$$

تست: پاره‌خط AB به طول ۳ سانتی‌متر مفروض است، چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر باشد؟

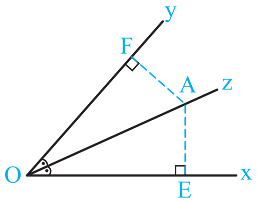
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار



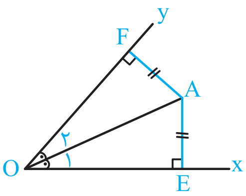
پاسخ: پاره‌خط $AB = ۳$ را رسم می‌کنیم به مرکز B و شعاع ۲/۵ و به مرکز A و شعاع ۲ دو کمان رسم می‌کنیم، چون $۲ + ۲/۵ > ۳$، پس دو کمان در دو نقطهٔ C و C' متقاطع‌اند و این نقاط جواب مسئله هستند.

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

خاصیت مهم نیمساز یک زاویه

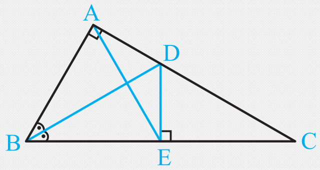


آ) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن‌گاه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل $AE = AF$ است.



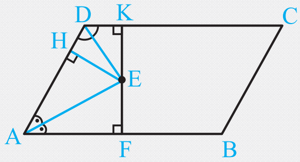
ب) اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، آن‌گاه آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد، یعنی در شکل مقابل $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ است.

مثال: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ نیمساز زاویهٔ B ضلع AC را در D قطع می‌کند، اگر DE عمود بر BC باشد، آن‌گاه ثابت کنید $D\hat{A}E = A\hat{E}D$



پاسخ: چون BD نیمساز زاویهٔ B است، پس نقطهٔ D از دو ضلع زاویهٔ B به یک فاصله است، یعنی $AD = DE$، پس مثلث ADE متساوی‌الساقین است، در نتیجه $D\hat{A}E = D\hat{E}A$

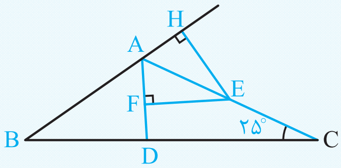
مثال: ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، نقطه‌ای داخل آن وجود دارد که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.



پاسخ: متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است، نقطهٔ تلاقی نیمساز زوایای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ را E می‌نامیم، E از دو ضلع زاویهٔ A و از دو ضلع زاویهٔ D هم به یک فاصله است پس $EF = EH$ و $EH = EK$، در نتیجه $EF = EH = EK$، یعنی E از سه ضلع AB، AD و CD به یک فاصله است.

تست: در مثلث ABC، پاره‌خط AD نیمساز زاویهٔ A است و نقطهٔ E روی ضلع AC وجود دارد که از خط شامل AB و خط شامل AD به یک فاصله است. اگر $\hat{C} = ۲۵^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵



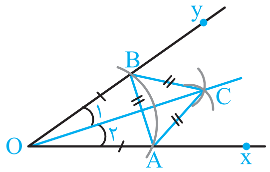
پاسخ: بنا به فرض $EH = EF$، پس AC نیمساز زاویهٔ DAH است، لذا $D\hat{A}C = C\hat{A}H$، از طرفی بنا به فرض AD نیمساز زاویهٔ A است، یعنی $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ در نتیجه $B\hat{A}D = D\hat{A}C = C\hat{A}H$ و می‌توان نوشت:

$$B\hat{A}D + D\hat{A}C + C\hat{A}H = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳B\hat{A}D = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}D = ۶۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = ۱۲۰^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ + \hat{B} + ۲۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۱۴۵^\circ = ۳۵^\circ$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۲- رسم نیمساز یک زاویه



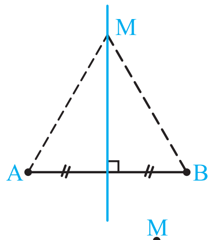
آ) نقطهٔ A را روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم. کمانی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع کند، داریم $OA = OB$

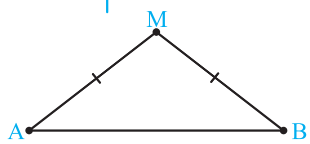
ب) به مرکز A و شعاع AB و به مرکز B و مجدداً شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.

پ) OC نیمساز زاویهٔ xOy است، زیرا دو مثلث OBC و OAC به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

برخی خواص عمودمنصف یک پاره‌خط و ترسیم آن

آ) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل داریم $MA = MB$

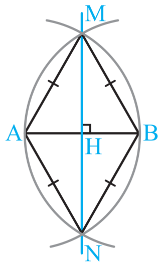




ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

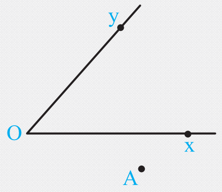
$MA = MB \Rightarrow$ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۳- رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

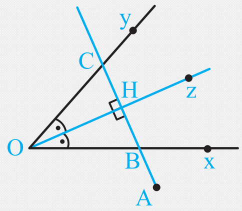


پاره‌خط AB مفروض است. ابتدا کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم، سپس کمانی به مرکز B و شعاع قبلی (AB) رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم. خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است، زیرا نقاط M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

مثال: مطابق شکل نقطهٔ A بیرون زاویهٔ xOy مفروض است. از نقطهٔ A خطی چنان رسم کنید که اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند و داشته باشیم $OB = OC$

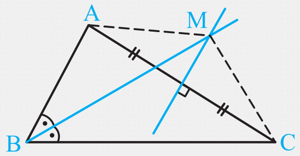


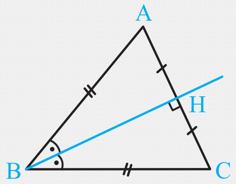
پاسخ: نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم و آن را Oz می‌نامیم. از نقطهٔ A خطی عمود بر Oz رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی‌اش با آن را H می‌نامیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB و OHC به حالت (زض) هم‌نهشت هستند، پس نتیجه می‌شود $OB = OC$



مثال: مثلث ABC مفروض است. نقطه‌ای چنان بیابید که از دو رأس A و C و دو ضلع زاویهٔ B به یک فاصله باشد.

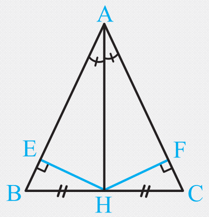
پاسخ: عمودمنصف ضلع AC و نیمساز زاویهٔ B را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن‌ها را M می‌نامیم. M نقطه‌ای است که از نقاط A و C به یک فاصله می‌باشد و فاصلهٔ آن از اضلاع زاویهٔ B به یک اندازه است. در این حالت مسئله یک جواب دارد اما اگر مثلث ABC در رأس B متساوی‌الساقین باشد $(AB = BC)$، در این‌صورت نیمساز و عمودمنصف ضلع AC بر هم منطبق می‌شوند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.





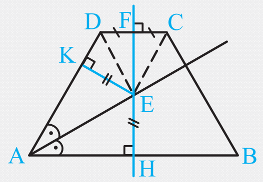
مثال: ثابت کنید اگر در یک مثلث نیمساز یک زاویه، میانه هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

پاسخ: بنا به فرض AH نیمساز زاویهٔ A و میانهٔ وارد بر ضلع BC است. می‌خواهیم ثابت کنیم $AB = AC$ یا $\hat{B} = \hat{C}$. به همین منظور از H بر اضلاع AB و AC عمودهای HE و HF را رسم می‌کنیم. بنا به خاصیت نیمساز داریم $HE = HF$ و می‌توان نوشت:



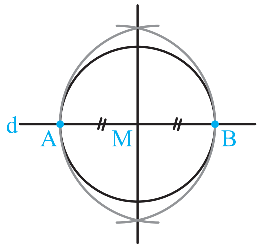
$$HE = HF \text{ ، } BH = CH \text{ ، } B\hat{E}H = C\hat{F}H = 90^\circ \xrightarrow{\text{به حالت وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{BEH} \cong \overset{\Delta}{CFH} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$$

مثال: در صفحهٔ ذوزنقهٔ $ABCD$ ، نقطه‌ای تعیین کنید که از دو سر قاعدهٔ کوچک CD به یک فاصله و از ساق AD و قاعدهٔ بزرگ AB به یک فاصله باشد.



پاسخ : عمودمنصف قاعدهٔ کوچک را رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با نیمساز زاویهٔ A را E می‌نامیم، E نقطه‌ای است که از دو سر قاعدهٔ کوچک CD به یک فاصله است و از دو ضلع زاویهٔ A به یک فاصله است.

۴- رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن



خط d و نقطهٔ M روی آن مفروض است.

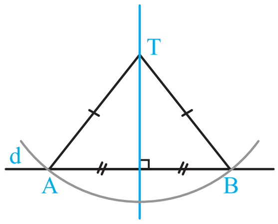
آ) نقطهٔ A را متمایز از M روی خط d در نظر می‌گیریم.

ب) به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن با خط d را B می‌نامیم.

پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.

ت) این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

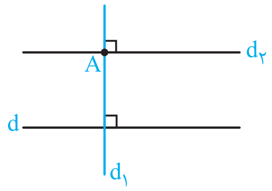
۵- رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن



خط d و نقطهٔ T خارج آن مفروض است.

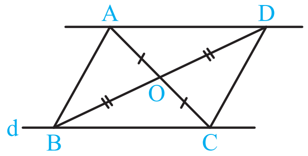
نقطهٔ A را روی خط d در نظر می‌گیریم، اگر TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است، در غیر این صورت به مرکز T و شعاع TA کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی دیگر آن با خط d را B می‌نامیم. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ T می‌گذرد (زیرا $TA = TB$) و بر خط d عمود است.

۶- رسم خط موازی با یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن



خط d و نقطهٔ A خارج آن مفروض است.

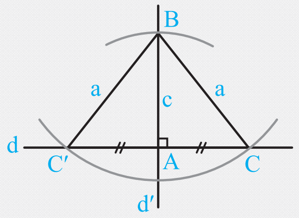
از نقطهٔ A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم، در نقطهٔ A خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم، دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند. لذا خط d_2 از نقطهٔ A گذشته و موازی خط d است.



نکته به کمک خواص متوازی‌الاضلاع هم می‌توانیم خط d_2 را رسم کنیم. کافی است نقطهٔ دلخواه C را روی d در نظر بگیریم، آن را به A وصل کنیم و وسط AC را O بنامیم. سپس نقطه‌ای دیگر مانند B روی خط d در نظر گرفته، آن را به O وصل کنیم و OB را تا نقطهٔ D به اندازهٔ خودش امتداد دهیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند، در نتیجه AD موازی d است.

چند مثال مهم از رسم

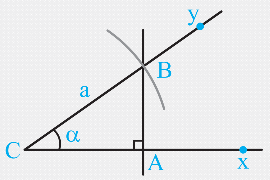
مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک ضلع آن معلوم باشد.



پاسخ : فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، طول وتر $BC = a$ و ضلع $AB = c$ معلوم باشند، می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.

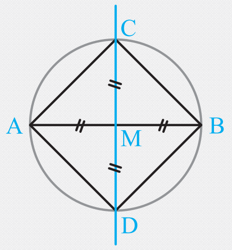
نقطهٔ A را روی خط d درنظر می‌گیریم و خط d' را در این نقطه بر خط d عمود رسم می‌کنیم. به مرکز A و شعاع c کمانی رسم می‌کنیم تا خط d' را در نقطهٔ B قطع کند. به مرکز B و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم و نقطه‌های تلاقی آن با خط d را C و C' می‌نامیم. مثلث‌های قائم‌الزاویه و هم‌نهشت ABC و ABC' جواب هستند و مسئله همواره با شرط $a > c$ ، یک جواب دارد.

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک زاویهٔ حادهٔ آن معلوم باشد.



پاسخ: فرض کنیم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول وتر $BC = a$ و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C} = \alpha$ معلوم باشند، می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم. مطابق شکل زاویهٔ xCy را برابر α رسم می‌کنیم، سپس به مرکز C و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Cy را B می‌نامیم، داریم $BC = a$. از B خطی عمود بر نیم‌خط Cx رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Cx را A می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسئله است.

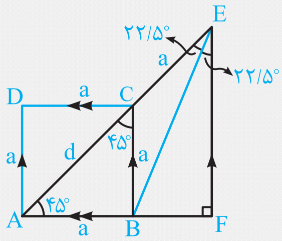
مثال: مربعی رسم کنید که قطر آن داده شده است.



پاسخ: فرض کنید پاره‌خط AB با طول معلوم قطر مربع باشد، می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. به همین جهت عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن با AB را نقطهٔ M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقطه‌های C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD مربع است، زیرا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگرند و طولشان برابر است.

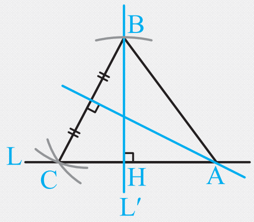
نکته رسم فوق جهت رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی که وتر آن معلوم است نیز به کار می‌رود. (مثلث‌های ACB و ADB)

مثال: مربعی رسم کنید که مجموع ضلع و قطر آن معلوم است.



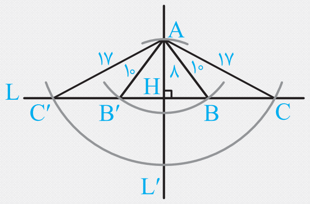
پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین AEF طول وتر $AE = a + d$ معلوم است پس مثلث AEF را رسم می‌کنیم، سپس نیمساز زاویهٔ E را رسم کرده و نقطهٔ تلاقی آن با ضلع AF را نقطهٔ B می‌نامیم. از B خطی موازی EF رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن را با AE، نقطهٔ C می‌نامیم. از C خطی موازی AF و از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم، ABCD مربع مطلوب است.

مثال: مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که ارتفاع وارد بر ساق آن ۱۲ و طول قاعده‌اش ۱۳ باشد.



پاسخ: نقطهٔ H را روی خط L در نظر می‌گیریم. خط L' را در این نقطه عمود بر L رسم می‌کنیم، سپس به مرکز H و شعاع ۱۲ کمانی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط L' را B می‌نامیم و به مرکز B و شعاع ۱۳ کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با خط L را نقطهٔ C می‌نامیم، عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن با خط L را A می‌نامیم، مثلث ABC جواب است.

مثال: مثلثی رسم کنید که دو ضلع آن ۱۰ و ۱۷ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۸ سانتی‌متر باشد.



پاسخ: خط L و نقطهٔ دلخواه H را روی آن درنظر می‌گیریم. خط L' را در نقطهٔ H عمود بر L رسم می‌کنیم. به مرکز H و شعاع ۸ کمانی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط L' را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۱۰ و به مرکز A و شعاع ۱۷، دو کمان رسم می‌کنیم، مطابق شکل، محل تلاقی آن‌ها با خط L را به ترتیب B، B'، C و C' می‌نامیم، مثلث‌های $AB'C$، ABC'، ABC و $AB'C'$ جواب‌اند. جواب‌های متمایز، دو مثلث ABC و $AB'C$ می‌باشند.

فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

قسمت اول: ترسیم‌های هندسی

نیمساز زاویه و عمودمنصف پاره‌خط

۱. مرکز همهٔ دایره‌هایی که از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند، چگونه‌اند؟

۱) روی دایره به قطر AB قرار دارند.
۲) روی دو خط متقاطع واقع‌اند.
۳) روی خطی عمود بر AB قرار دارند.
۴) روی خطی موازی AB هستند.

۲. دو خط متقاطع مفروضند، چند نقطه وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله‌اند و از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ اندازهٔ زاویهٔ C برابر 36° است. اگر نیمساز زاویهٔ B، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند و DE عمود بر BC باشد، اندازهٔ زاویهٔ DAE چند درجه است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۲۷

۴. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع BC روی ضلع AC متقاطع‌اند. اگر $\hat{A}=54^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۷۸ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۸۶

۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم $AB=14$ و $AD=8$. از نقطهٔ تلاقی قطرها، عمودی بر قطر AC رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در نقطهٔ E قطع کند. محیط مثلث ADE کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۶ ۴) ۲۸

۶. در مثلث ABC، $\hat{A}=126^\circ$ است. اگر عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC، ضلع BC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ EAF چند درجه است؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۴ ۴) ۶۸

۷. در مثلث ABC داریم $AB=AC$ و $\hat{A}=80^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟ (سراسری تجربی - ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۸. در مثلث ABC عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در E قطع می‌کند، به طوری‌که $CE=AB$. اگر $\hat{B}=75^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟

۱) 35° ۲) 30° ۳) 40° ۴) 45°

۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\,(\hat{C}=90^\circ\ ,\ \hat{B}=18^\circ)$، نیمساز زاویهٔ A را AD می‌نامیم. حاصل $\dfrac{AB-AD}{AC}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۰. اندازهٔ اضلاع یک متوازی‌الاضلاع ۶ و ۴ است. چند نقطه داخل آن وجود دارد که از هر سه ضلع متوازی‌الاضلاع به یک فاصله باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱. روی امتداد یک ضلع مثلث چند نقطه یافت می‌شود که از خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) حداکثر یکی ۳) ۲ ۴) دقیقاً یکی

۱۲. چند نقطه در صفحهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که از دو سر وتر به یک فاصله باشد و از وتر و خط شامل ضلع دیگر به یک فاصله باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۳. دو نقطهٔ A و B مفروض‌اند، همهٔ خط‌هایی را که از B می‌گذرند، در نظر می‌گیریم و A را نسبت به این خطوط قرینه می‌کنیم، وضع همهٔ این نقاط چگونه است؟

۱) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB قرار دارند. ۲) روی خطی عمود بر AB قرار دارند.

۳) روی خطی موازی AB قرار دارند. ۴) روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB واقع‌اند.

۱۴. حداکثر چند نقطه روی ارتفاع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه یافت می‌شود که از وتر و یک ضلع دیگر به یک فاصله باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

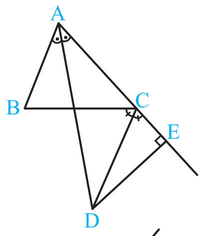
۱۵. در مثلث ABC داریم $\hat{B}=۵۰^\circ$ ، $\hat{C}=۶۰^\circ$. نیمساز داخلی زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ M متقاطع‌اند، زاویهٔ MBC چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۱۶. در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BM=BA$ و $CN=CA$ را جدا می‌کنیم. اگر زاویهٔ $\hat{A}=۷۲^\circ$ باشد، زاویهٔ $M\hat{A}N$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی - ۸۶)

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

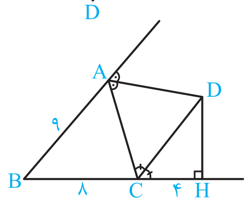
۱۷. در شکل مقابل نیمسازهای زوایای A و BCE در نقطهٔ D متقاطع‌اند. اگر $AE=۲۴$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۲۴ ۲) ۴۸

۳) ۳۶ ۴) ۳۰

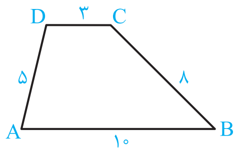
۱۸. در شکل مقابل نیمسازهای زوایای خارجی A و C در مثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کرده‌اند، با توجه به اندازه‌های داده شده روی شکل، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۱۹. در ذوزنقهٔ روبه‌رو عمودمنصف ساق BC، قاعدهٔ AB را در E قطع می‌کند. نسبت محیط ذوزنقهٔ $ABCD$ به محیط چهارضلعی $ADCE$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۹}$

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، عمودمنصف وتر BC، ضلع AC را در D و امتداد ضلع AB را در E قطع می‌کند، به‌طوری که $DE=BC$ است. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

ترسیم

۲۱. متوازی‌الاضلاعی با معلوم بودن طول ضلع‌های آن ۳ و ۵ و طول قطر x قابل رسم است. اگر x عددی صحیح باشد، چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۲. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۴ و ۳ و زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر داده‌شده ۳۰° است. چند مثلث با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۳. چند مثلث با اطلاعات $h_a=۲$ ، $b=۳$ و $c=۱$ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۴. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳ و ۵ و یکی از ارتفاع‌ها برابر ۴ باشد؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۶

۲۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر مشخص است. با معلوم بودن اندازهٔ کدام جزء دیگر رسم این مثلث جواب یکتا ندارد؟

۱) ارتفاع وارد بر وتر ۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم ۳) میانهٔ وارد بر وتر ۴) یک زاویهٔ حاده

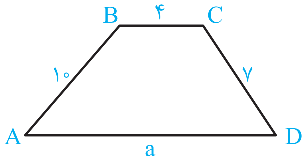
۲۶. در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷$، $c = ۵$ و میانهٔ $m_a = ۴$ با خطکش و پرگار کدام نتیجه درست است؟

۱) جواب منحصربه‌فرد ۲) دو جواب متمایز ۳) فاقد جواب ۴) بی‌شمار جواب

۲۷. چند متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن دو قطر و زاویهٔ بین آن‌ها می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

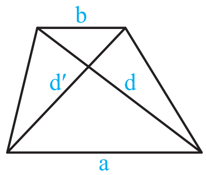
۲۸. اگر ذوزنقهٔ مقابل قابل رسم باشد، آن‌گاه محدودهٔ a کدام است؟



۱) $۴ < a < ۱۷$ ۲) $۳ < a < ۱۷$

۳) $۷ < a < ۲۱$ ۴) $۶ < a < ۲۰$

۲۹. اگر ذوزنقهٔ روبه‌رو با معلوم بودن قطرهای $d = ۷$ و $d' = ۵$ و قاعدهٔ کوچک $b = ۲$ و قاعدهٔ بزرگ a قابل رسم باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر صحیح برای a کدام است؟



۱) ۴۲ ۲) ۴۵

۳) ۴۶ ۴) ۴۳

۳۰. خط d و دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. اگر خط شامل AB بر خط d عمود باشد، چند نقطه روی d وجود دارد که از A و B به یک فاصله است؟

۱) یک یا بی‌شمار ۲) صفر یا بی‌شمار ۳) یک یا صفر ۴) یک یا صفر یا بی‌شمار

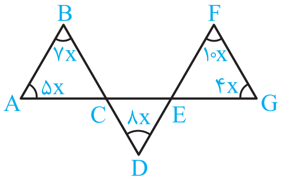
۳۱. با سه پاره‌خط به طول‌های $۴x - ۴$، $x + ۷$ و $۶x$ یک مثلث می‌توان ساخت، مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

قسمت دوم: استدلال

مجموع زوایا در مثلث و چندضلعی‌ها

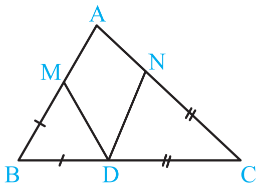
۳۲. با توجه به شکل، اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۴۰

۳) ۶۰ ۴) ۳۰

۳۳. در شکل مقابل $\widehat{A} = ۵۸°$، $BM = BD$ و $CN = CD$. زاویهٔ MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)



۱) ۵۸ ۲) ۵۹

۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۳۴. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، اندازهٔ زاویهٔ بین دو نیمساز زوایای A و B برابر $۱۱۰°$ است. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۰

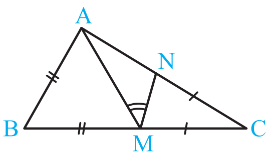
۳۵. در مثلث ABC، زاویهٔ $\widehat{A} = ۱۰۸°$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازهٔ $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم، کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

۳۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، قاعدهٔ BC را از هر دو طرف به اندازهٔ ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\widehat{M} = ۴۳°$، اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟



(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

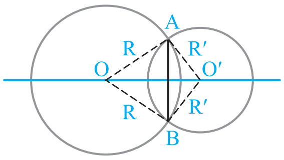
۱) ۹۳ ۲) ۹۴

۳) ۹۶ ۴) ۹۷

پاسخ فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱

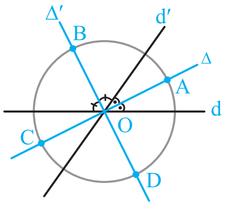
مطابق شکل دو دایره از دو نقطهٔ A و B گذشته‌اند، پس $OA = OB$ و $O'A = O'B$، یعنی خط شامل OO' عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس مرکز همهٔ دایره‌هایی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



۲

دو خط متقاطع d و d' مفروض‌اند. همه نقطه‌هایی که از این دو خط به یک فاصله‌اند روی نیمسازهای زوایای بین این دو خط یعنی خطوط Δ و Δ' قرار دارند.

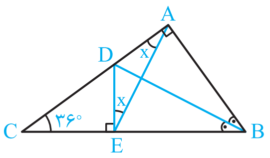
از طرفی همهٔ نقاطی که از O نقطهٔ تلاقی دو خط d و d' به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ سانتی‌متر است. نقطه‌های تلاقی Δ و Δ' با دایرهٔ مذکور، یعنی نقطه‌های A، B، C و D جواب مسئله هستند.



۳

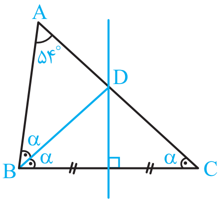
چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد و DA و DE فاصلهٔ نقطهٔ D از اضلاع این زاویه است، پس $DA = DE$، یعنی مثلث ADE متساوی‌الساقین است، لذا $D\hat{A}E = D\hat{E}A = x$، بنا به زاویهٔ خارجی در مثلث ADE داریم:

$$C\hat{D}E = x + x \Rightarrow ۹۰^\circ - ۳۶^\circ = ۲x \Rightarrow ۲x = ۵۴^\circ \Rightarrow x = ۲۷^\circ$$



۴

مطابق شکل عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ B، در نقطهٔ D روی ضلع AC متقاطع‌اند، نقطهٔ D از دو سر پاره‌خط BC به یک فاصله است، پس مثلث BDC متساوی‌الساقین است، با فرض $\hat{C} = \alpha$ اندازهٔ زوایا مطابق شکل می‌شود، داریم:

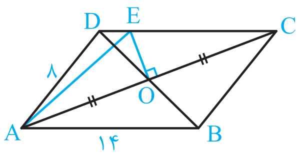


$$۲\alpha + \alpha + ۵۴^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۱۸۰^\circ - ۵۴^\circ = ۱۲۶^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۲۶^\circ}{۳} = ۴۲^\circ$$

$$\hat{B} = ۲\alpha = ۲ \times ۴۲^\circ = ۸۴^\circ$$

۵

می‌دانیم در یک متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی $OA = OC$، پس OE عمود بر AC، عمودمنصف قطر AC می‌باشد لذا $AE = CE$ و داریم:

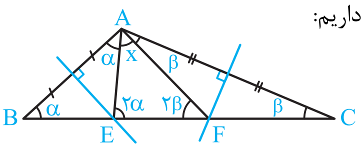


$$(\text{محیط مثلث ADE}) = AD + DE + AE = AD + \underbrace{DE + CE}_{CD=AB}$$

$$= AD + AB = ۸ + ۱۴ = ۲۲$$

۶

با توجه به اینکه $\hat{A}$ منفرجه است، محل تلاقی عمودمنصف‌ها بیرون مثلث است. از طرفی نقطهٔ E روی عمودمنصف پاره‌خط AB است پس $AE = BE$ و با استدلال مشابه $AF = CF$، پس مثلث‌های AEB و AFC متساوی‌الساقین هستند و بنا به زاویهٔ خارجی، زوایای مثلث AEF، مطابق شکل می‌شود، داریم:



$$\begin{cases} x + ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \\ A = \alpha + \beta + x \end{cases} \xrightarrow{A = ۱۲۶^\circ} \begin{cases} x + ۲(\alpha + \beta) = ۱۸۰^\circ \\ \alpha + \beta = ۱۲۶^\circ - x \end{cases}$$

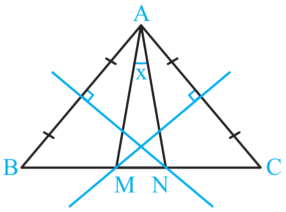
$$\Rightarrow x + ۲(۱۲۶^\circ - x) = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + ۲۵۲^\circ - ۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۲۵۲^\circ - ۱۸۰^\circ = ۷۲^\circ$$

۷

مطابق شکل عمودمنصف ساق AB، قاعدهٔ BC را در N قطع کرده است پس $AN = BN$ و در نتیجه $B\hat{A}N = A\hat{B}N$، اما در مثلث متساوی‌الساقین ABC، اندازهٔ زاویهٔ رأس ۸۰° است، پس داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$



$$\Rightarrow \hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}N = \hat{B} = ۵۰^\circ$$

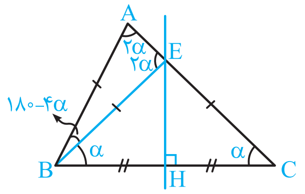
با استدلال مشابه نتیجه می‌شود $C\hat{A}M = ۵۰^\circ$ و نهایتاً:

$$C\hat{A}N = B\hat{A}M = B\hat{A}C - B\hat{A}N = ۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۳۰^\circ$$

$$B\hat{A}C = ۸۰^\circ \Rightarrow x + ۳۰^\circ + ۳۰^\circ = ۸۰^\circ \Rightarrow x = ۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۲۰^\circ$$

۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

B را بـه E وصـل مــی‌کنیم، چــون EH عمودمنصــف BC اسـت پــس BE = CE، بنـا بــه فــرض AB = CE، لــذا AB = BE و مثلث ABE متساوی‌الساقین است.



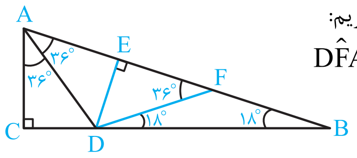
اگــر فــرض کنیــم $\hat{C}=\alpha$ داریــم $E\hat{B}C=\alpha$ و بنــا بــه زاویــۀ خــارجی $B\hat{E}A=۲\alpha$ امــا مثلــث ABE متساوی‌الساقین اســت، پس $\hat{A}=۲\alpha$ و $A\hat{B}E=۱۸۰^\circ-۴\alpha$ و نهایتاً:

$$\hat{B}=۱۸۰^\circ-۴\alpha+\alpha\Rightarrow ۷۵^\circ=۱۸۰^\circ-۳\alpha\Rightarrow ۳\alpha=۱۰۵^\circ\Rightarrow\alpha=۳۵^\circ$$

۹ — ۱ **۲** ۳ ۴

زاویۀ BDF را برابر ۱۸° جدا مــی‌کنیم. مثلث BDF متساوی‌الساقین می‌شود و بنا به زاویۀ خارجی داریم:

$$D\hat{F}A=۲\times۱۸^\circ=۳۶^\circ$$

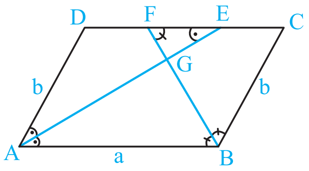


همچنین $D\hat{A}F=۳۶^\circ$، پس مثلث ADF هم متساوی‌الساقین اســت در نتیجــه AD = DF = BF. عمــود DE را رســم مــی کنیــم. ســه مثلــث قائم‌الزاویۀ ACD، AED و FDE بــه حالت وتــر و یــک زاویۀ حــاده هم‌نهشت هستند پس AC = AE = EF و نهایتاً داریم:

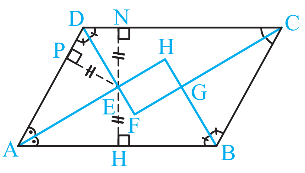
$$\frac{AB-AD}{AC}=\frac{AF+BF-AD}{AC}=\frac{AE+EF+AD-AD}{AC}=\frac{AC+AC}{AC}=۲$$

۱۰ — ۱ ۲ ۳ **۴**

اگــر در متوازی‌الاضــلاع ABCD مطــابق شــکل $a<۲b$ باشــد، در این‌صورت نیمسازهای زوایای A و B ضــلع CD را در E و F قطــع می‌کنند به‌طوری که CF=DE=b، پس AE و BF یکدیگر را داخل متوازی‌الاضلاع قطع می‌کنند (نقطۀ G).



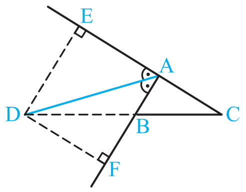
مطابق شکل، نیمساز زوایای A و D و همچنین نیمســاز زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ همــواره داخــل متوازی‌الاضــلاع (در نقاط E و G) متقاطع‌اند و این نقاط از سه ضلع متوازی‌الاضـلاع بـه یـک فاصله‌اند.



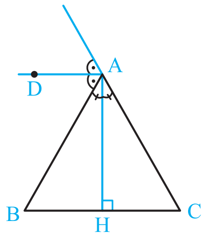
اما چون ضلع بـزرگ متوازی‌الاضـلاع AB = ۶، از دو برابـر ضـلع کوچـک یعنــی ۸ = ۴ × ۲ = ۲AD کوچـک‌تر اسـت، نقطـۀ تلاقــی نیمســازهای زوایای A و B و همچنین نقطۀ تلاقی نیمسازهای زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ داخل متوازی‌الاضلاع قرار می‌گیرند، پس چهار نقطۀ E، F، G و H جواب‌اند.

۱۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

اگــر مثلــث ABC متساوی‌الســاقین نباشــد (AB ≠ AC)، آن‌گــاه روی امتــداد ضلع BC دقیقاً یک نقطه یافت می‌شود که از خط‌های شــامل دو ضــلع دیگر بــه یــک فاصله است. این نقطه محل برخورد نیمساز زاویۀ خارجی A با امتداد ضلـع BC است که مطابق شکل نقطۀ D می‌باشد.

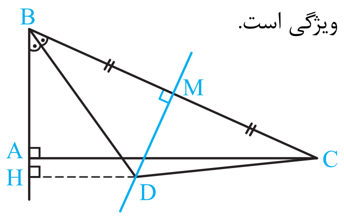


اگــر مثلــث متساوی‌الســاقین باشــد (AB = AC)، در ایــن صــورت نیمســاز خارجی زاویۀ A موازی قاعدۀ BC می‌شود، پس روی امتداد BC نقطه‌ای یافت نمی‌شـود که از خط‌های شامل دو ضلـع دیگر بـه یـک فاصله باشد.



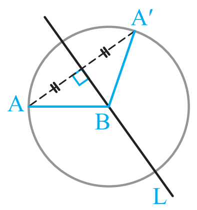
۱۲ — **۱** ۲ ۳ ۴

نقطۀ تلاقی عمودمنصف وتر BC و نیمساز زاویۀ B، نقطه‌ای است کـه از دو سر وتر به یک فاصله (BD = CD) و از وتر و امتـداد ضلـع AB بـه یک فاصله است (MD = MH). همچنین نقطۀ تلاقی نیمساز زاویۀ C و عمودمنصف BC نیز دارای این ویژگی است.



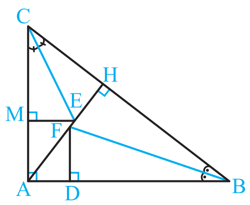
۱۳ — ۱ ۲ ۳ **۴**

فرض کنیم L یک خط دلخواه گذرنده از B باشد، قرینۀ نقطۀ A نسبت به L نقطۀ A′ اســـت یعنـــی خـــط L عمودمنصـــف پاره‌خط AA′ است، پس AB = BA′، در نتیجه A′ روی دایره‌ای به مرکز B و شـعاع AB قرار دارد.

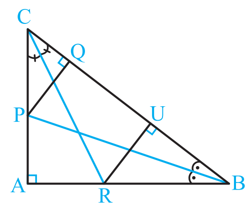


۱۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**

مطابق شکل، نیمسازهای زوایـای B و C، ارتفــاع AH را در نقــاط F و E قطــع کرده‌اند، لذا FD = FH و EH = EM

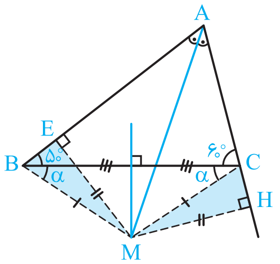


ارتفاع دیگر مثلث قائم‌الزاویه AC است کـه نیمســاز زاویۀ B آن را در نقطۀ P قطـع می‌کند، پس PA = PQ همچنیـن AB ارتفاع سوم مثلث قائم‌الزاویـۀ ABC اسـت، نیمساز زاویۀ C آن را در R قطـع می‌کنـد پـــس RA = RU بنـــابراین ۴ نقطـــه (R، P، F، E) روی ارتفاع‌هـای یک مثلث قائم‌الزاویه یافت می‌شود که از وتر و یک ضلع دیگر به یک فاصله‌اند.



۱۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

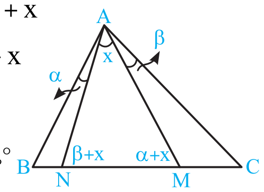
بنا به فرض $\hat{B}=۵۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$. نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف BC نیز M می‌باشد، این نقطه هرگز داخل و روی مثلث ABC قرار نمی‌گیرد (زیرا در غیر این‌صورت از هم‌نهشتی مثلث‌های MCH و MBE نتیجه می‌شود، دو زاویهٔ B و C برابرند که تناقض می‌باشد.) چون M روی عمودمنصف BC است، پس $MB = MC$ و چون M روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $MH = ME$، لذا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MHC و MEB به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند در نتیجه:



$$M\hat{C}H = M\hat{B}E \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \alpha - ۶۰^\circ = \alpha + ۵۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۵۰^\circ = ۷۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۵^\circ$$

۱۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

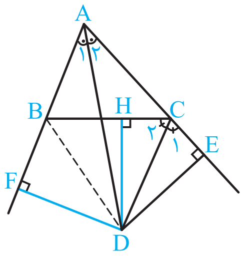
زوایای رأس A را مطابق شکل α، x، β فرض می‌کنیم داریم:



$$BA = BM \Rightarrow B\hat{M}A = B\hat{A}M = \alpha + x$$
$$CN = CA \Rightarrow C\hat{N}A = C\hat{A}N = \beta + x$$
$$\hat{A} = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + x = ۷۲^\circ \quad (۱)$$
$$\overset{\Delta}{AMN} : x + (\alpha + x) + (\beta + x) = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲x + (\alpha + \beta + x) = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(۱)} ۲x + ۷۲^\circ = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow x = \frac{۱۰۸^\circ}{۲} = ۵۴^\circ$$

۱۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

از نقطهٔ D بر ضلع BC و ضلع AB عمود می‌کنیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \\ CD = CD \\ \hat{E} = \hat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{CDE} \cong \overset{\Delta}{CDH} \Rightarrow \begin{cases} CH = CE \\ DE = DH \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AD = AD \\ \hat{F} = \hat{E} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{ADF} \Rightarrow \begin{cases} AF = AE \\ DE = DF \end{cases}$$

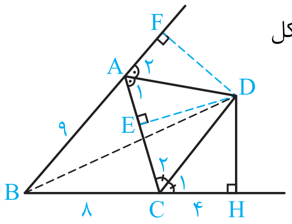
بنابراین $DH = DF$ و ضلع BD در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDH و BDF مشترک‌اند، پس این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند، پس $BF = BH$ و نهایتاً داریم:

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC} = AB + BC + AC = AB + BH + CH + AC$$
$$= AB + BF + CE + AC = AF + AE = ۲AE$$

بنا به فرض $AE = ۲۴$ است پس محیط مثلث ABC برابر ۴۸ است.

۱۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

عمودهای DE و DF را مطابق شکل رسم می‌کنیم. داریم:

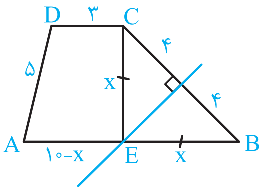


$$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ , CD = CD , \hat{H} = \hat{E} = ۹۰^\circ$$
$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{DCH} \cong \overset{\Delta}{DCE} \Rightarrow CE = CH \text{ ، } DE = DH$$
$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ , AD = AD , \hat{E} = \hat{F} = ۹۰^\circ$$
$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{ADF} \Rightarrow AF = AE \text{ ، } DE = DF$$
$$DF = DE = DH \text{ ، } BD = BD \text{ ، } \hat{F} = \hat{H} = ۹۰^\circ$$
$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{BDH} \cong \overset{\Delta}{BDF}$$
$$\Rightarrow BH = BF \Rightarrow BC + CH = AB + AF$$
$$\Rightarrow ۸ + ۴ = ۹ + AF \Rightarrow AF = ۱۲ - ۹ = ۳$$
$$AC = AE + CE = AF + CH = ۳ + ۴ = ۷$$

۱۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نقطهٔ E روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد، پس $CE = BE$ داریم:

$$\text{محیط } ADCE = AD + CD + CE + AE = AD + CD + \underbrace{BE + AE}_{AB}$$



$$(\text{محیط } ADCE) = AD + CD + AB = ۵ + ۳ + ۱۰ = ۱۸$$
$$\frac{\text{محیط } ABCD}{\text{محیط } ADCE} = \frac{۵ + ۳ + ۸ + ۱۰}{۱۸} = \frac{۲۶}{۱۸} = \frac{۱۳}{۹}$$

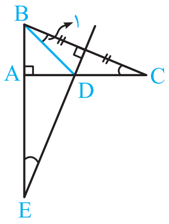
۲۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

مطابق شکل عمودمنصف وتر BC ضلع AC را در D و امتداد ضلع AB را در E قطع کرده به‌طوری که $DE = BC$ است.

$$\hat{C} = \hat{E} = ۹۰^\circ - \hat{B} \text{ ، } DE = BC \text{ ، } E\hat{A}D = B\hat{A}C = ۹۰^\circ$$
$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow AD = AB$$

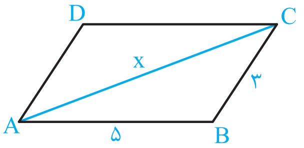
حال B را به D وصل می‌کنیم با توجه به تساوی فوق مثلث ABD قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین می‌شود پس $B\hat{D}A = ۴۵^\circ$. از طرفی D روی عمودمنصف BC قرار دارد پس $BD = CD$ و در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{C}$ و نهایتاً به کمک زاویهٔ خارجی داریم:

$$B\hat{D}A = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۴۵^\circ \Rightarrow ۲\hat{C} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = \frac{۴۵^\circ}{۲} = ۲۲/۵$$



۲۱ ۱ **۲** ۳ ۴

مثلث ABC با معلوم بودن سه ضلع آن قابل رسم است. از نقاط C و A دو خط موازی اضلاع AB و BC رسم می‌کنیم، نقطهٔ D محل تلاقی آن‌ها، رأس چهارم متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است. مسئله وقتی جواب دارد که مثلث ABC ساخته شود، یعنی:

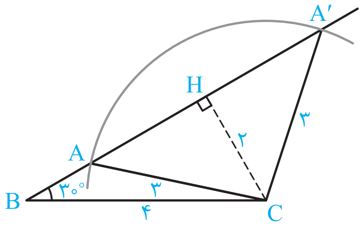


$$\begin{cases} x+۳>۵ \\ x+۵>۲ \\ ۵+۳>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>۲ \\ x>-۳ \\ ۸>x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۲<x<۸$$

مقادیر صحیح ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ در نامساوی اخیر صدق می‌کنند.

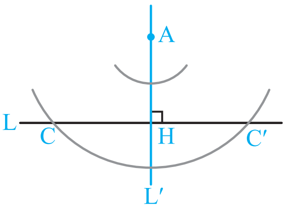
۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا پاره‌خط $BC=۴$ را رسم می‌کنیم، سپس زاویهٔ ۳۰° را روی این پاره‌خط می‌سازیم. به مرکز C و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این کمان با ضلع زاویه، رأس سوم مثلث است، چون فاصلهٔ C از ضلع زاویه ۲ است، پس کمان فوق، ضلع زاویه را در دو نقطه قطع می‌کند (A و A') و مسئله دو جواب متمایز دارد، مثلث‌های ABC و $A'BC$



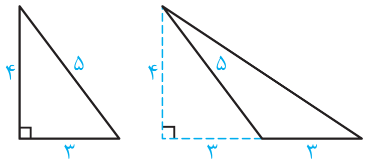
۲۳ **۱** ۲ ۳ ۴

دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم، AH را برابر ۲ جدا کرده به مرکز A و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم که خط L را در نقاط C و C' قطع می‌کند. کمانی به مرکز A و شعاع ۱ رسم می‌کنیم که خط L را قطع نمی‌کند، پس چنین مثلثی وجود ندارد.



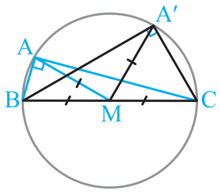
۲۴ **۱** ۲ ۳ ۴

در هر مثلث، ارتفاع نظیر یک ضلع، همواره از دو ضلع دیگر کوچک‌تر یا مساوی است. بنابراین ارتفاع نظیر ضلع سوم در مثلث به اضلاع ۳ و ۵ نمی‌تواند ۴ باشد. به همین دلیل ارتفاع نظیر ضلع ۵ هم نمی‌تواند ۴ باشد زیرا از ضلع به‌طول ۳ بزرگ‌تر می‌شود اما ارتفاع نظیر ضلع ۳ می‌تواند به طول ۴ باشد. پس دو مثلث زیر جواب هستند.



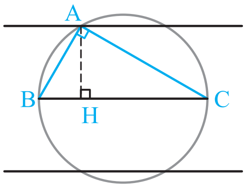
۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر معلوم باشد ($BC=a$)، مطابق شکل بی‌شمار مثلث قائم‌الزاویه می‌توان رسم کرد که میانهٔ همهٔ آن‌ها $AM=\frac{a}{۲}$ است.

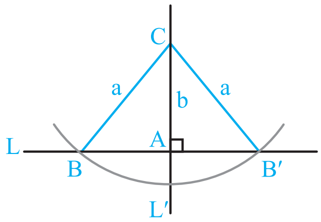


رسم سایر گزینه‌ها:

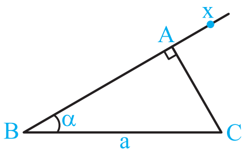
گزینهٔ (۱): دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم، سپس دو خط موازی BC و به فاصلهٔ ارتفاع وارد بر وتر، از BC رسم می‌کنیم، محل تلاقی این خط‌ها با دایره، جای رأس A است. چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده هم‌نهشت هستند پس مسئله یک جواب دارد.



گزینهٔ (۲): اگر ارتفاع وارد بر ضلع قائم معلوم باشد، یعنی یک ضلع و وتر مثلث قائم‌الزاویه معلوم است. دو خط عمود بر هم را رسم می‌کنیم، AC را برابر b جدا کرده، به مرکز C و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن با خط L جواب است. دو مثلث ایجاد شده هم‌نهشت هستند پس مسئله یک جواب دارد.



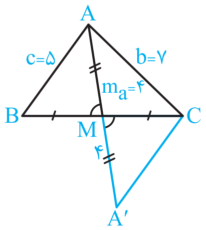
گزینهٔ (۴): پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، نیم‌خط Bx را چنان رسم می‌کنیم که زاویهٔ B برابر α شود، از رأس C خط عمود بر Bx رسم می‌کنیم، مثلث ABC مثلث مطلوب است.



۲۶ **۱** ۲ ۳ ۴

فرض کنیم مثلث ABC جواب باشد. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم. دو مثلث AMB و $A'MC$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند پس $A'C=AB=۵$. مثلث $AA'C$ با معلوم بودن اضلاع آن $AC=۷$، $A'C=AB=۵$ و $AA'=۲m_a=۸$ قابل رسم است.

پس مثلث $AA'C$ را با معلوم بودن سه ضلع رسم می‌کنیم، میانهٔ CM را رسم می‌کنیم آن را به اندازهٔ خودش از سمت M امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به‌دست آید، B را به A وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب است و مسئله همواره یک جواب دارد.



فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

قسمت اول: ترسیم‌های هندسی

۱. پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر مفروض است، نقطه یا نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر و از B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند.

۲. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن‌گاه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۳. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، آن‌گاه آن نقطه، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۴. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن‌گاه از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن‌گاه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۶. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازهٔ قطرهای آن ۱۲ و ۱۶ سانتی‌متر باشد و اندازهٔ زاویهٔ بین قطرهای آن ۴۵° باشد.

۷. مستطیلی رسم کنید که اندازهٔ قطرهایش ۶ سانتی‌متر باشد و زاویهٔ بین دو قطر آن ۴۵° باشد.

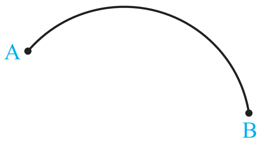
۸. متوازی‌الاضلاعی را رسم کنید که اندازه‌های دو ضلع و یک قطر آن معلوم باشد.

۹. متوازی‌الاضلاعی که اندازهٔ دو قطر و یک ضلع آن معلوم است را رسم کنید.

۱۰. روی خط مفروض d نقطه‌ای به فاصله‌های مساوی از دو نقطهٔ معلوم A و B پیدا کنید.

۱۱. وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۱۲. شکل مقابل کمانی از دایره است، مرکز دایره را تعیین کنید.



۱۳. ثابت کنید اگر در نیم‌دایره به قطر AB، C نقطه‌ای از نیم‌دایره به غیر از A و B باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ACB برابر ۹۰° است.

۱۴. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ دو ضلع آن ۱۲ و ۱۶ و میانهٔ نظیر ضلع سوم آن برابر ۱۰ باشد.

۱۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ روبه‌رو به آن معلوم باشد.

۱۶. نقطهٔ M داخل $x\hat{O}y$ مفروض است. خطی چنان رسم کنید که اضلاع زاویه را قطع کند و از نقطهٔ M بگذرد و M وسط پاره‌خط حاصل باشد.

۱۷. مثلثی رسم کنید که طول ضلع $BC = a$، طول میانهٔ $AM = m_a$ و زاویهٔ α بین میانهٔ AM و ارتفاع AH در آن معلوم باشند.

۱۸. در مثلث ABC طول نیمساز زاویهٔ B، اندازهٔ زاویهٔ B و اندازهٔ زاویهٔ C معلوم هستند. مثلث ABC را رسم کنید.

۱۹. زاویهٔ xOy به اندازهٔ ۴۵° مفروض است. نقطهٔ معلوم A روی Oy قرار دارد. نقطهٔ M را روی Oy چنان تعیین کنید که فاصلهٔ آن تا Ox برابر MA باشد.

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC و $(A = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نقطهٔ M را روی AH چنان بیابید که مجموع فواصل آن از AB و AC برابر فاصله‌اش از BC باشد.

قسمت دوم: استدلال

۲۱. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است.

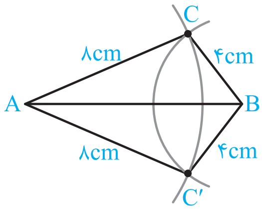
۲۲. ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور آن.

۲۳. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر ۳۶۰° است.

پاسخ فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

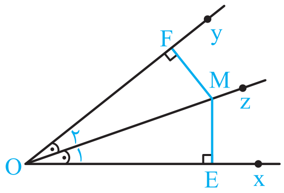
۱

پاره‌خط AB را به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر و به مرکز A و شعاع ۸ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم. چون $10 > 4 + 8$، پس این دو کمان یکدیگر را در دو نقطهٔ C و C' قطع می‌کنند، پس مسئله دارای دو جواب است.



۲

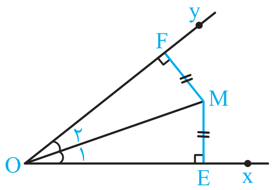
نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ xOy است و ME و MF فواصل آن از دو ضلع زاویه است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{OEM} \cong \overset{\Delta}{OFM} \Rightarrow ME = MF$$

۳

فرض کنیم نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xOy به یک فاصله باشد $(ME = MF)$ M را به O وصل می‌کنیم، داریم:

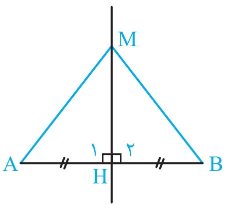


$$\left.\begin{array}{l} ME = MF \\ OM = OM \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OME} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

یعنی OM نیمساز زاویهٔ xOy است، پس M روی این نیمساز قرار دارد.

۴

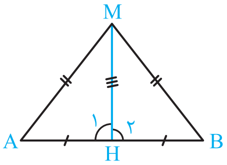
مطابق شکل نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، فاصله‌های M از دو سر پاره‌خط، MA و MB است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow MA = MB$$

۵

فرض کنیم نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد $(MA = MB)$، می‌خواهیم ثابت کنیم M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، به همین جهت M را به H (وسط پاره‌خط AB) وصل می‌کنیم،



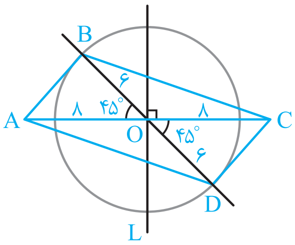
داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

اما دو زاویهٔ H_1 و H_2 مکمل‌اند، پس اندازهٔ هر کدام 90° است و این یعنی MH عمودمنصف AB است.

۶

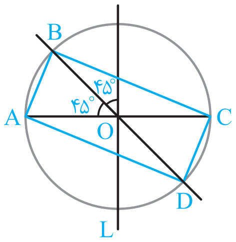
ابتدا پاره‌خط AC به طول ۱۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، سپس عمودمنصف AC (خط L) را رسم کرده و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع ۶ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.



نیمسازهای دو زاویهٔ قائمه را مطابق شکل رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند و زاویهٔ بین قطرهایش 45° است.

۷

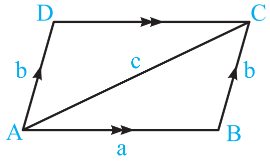
پاره‌خط AC را به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، خط L عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع ۳ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.



نیمسازهای زاویه‌های قائمهٔ بین L و AC را رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم، چهارضلعی ABCD مستطیل خواسته شده است.

۸

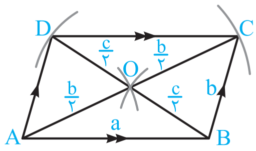
فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل $AB = a$، $AD = b$ و قطر $AC = c$ معلوم باشند، جهت رسم متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌کنیم.



ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع b و به مرکز A و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را C می‌نامیم. از نقطه‌های C و A دو خط به ترتیب به موازات AB و BC رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم، ABCD متوازی‌الاضلاع موردنظر است.

۹

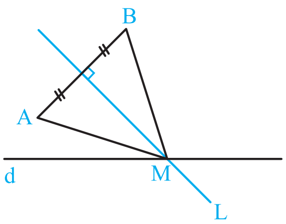
فرض کنید در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $AB = a$ و $AC = b$ و $BD = c$ معلوم باشد. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. پس $OA = \frac{AC}{۲} = \frac{b}{۲}$ و $OB = \frac{BD}{۲} = \frac{c}{۲}$



پاره‌خط $AB = a$ را رسم می‌کنیم، به مرکز A و شعاع $\frac{b}{۲}$ و به مرکز B و شعاع $\frac{c}{۲}$ دو کمان رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع $\frac{b}{۲}$ کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با امتداد OA را C و به مرکز O و شعاع $\frac{c}{۲}$ کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با امتداد OB را D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

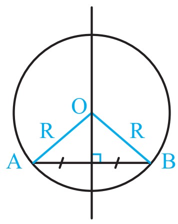
۱۰

خط L عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با خط d را M می‌نامیم، M نقطه‌ای است که از A و B به یک فاصله است و روی خط L قرار دارد.



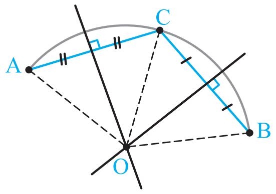
۱۱

عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد، زیرا مرکز دایره از دو سر وتر AB به یک فاصله است $(OA = OB = R)$.



۱۲

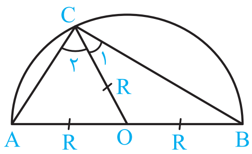
نقطهٔ دلخواه C را روی کمان داده شده در نظر می‌گیریم، عمودمنصف‌های وترهای BC و AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم.



داریم $OA = OC = OB$، یعنی نقطهٔ O مرکز دایره‌ای است که کمان داده شده بخشی از آن است.

۱۳

مرکز نیم‌دایره را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم. مثلث‌های OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند زیرا $OA = OC = OB = R$، در نتیجه $\hat{C}_۱ = \hat{B}$ و $\hat{C}_۲ = \hat{A}$ و در مثلث ABC داریم:

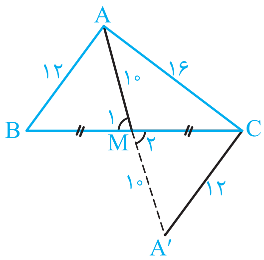


$$\hat{A} + \hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۲ + \hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲(\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}B = ۹۰^\circ$$

۱۴

فرض کنیم مثلث ABC مثلثی است که دو ضلع آن $AB = ۱۲$ و $AC = ۱۶$ و میانهٔ نظیر ضلع سوم $AM = ۱۰$ باشد، اگر AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم، دو مثلث AMB و $A'MC$ به حالت (ضزض) هم‌نهشت‌اند، پس $A'C = AB = ۱۲$.

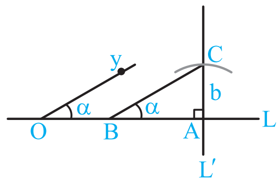


بنابراین اضلاع مثلث $AA'C$ معلوم هستند ($AC = ۱۶$، $A'C = ۱۲$ و $AA' = ۲۰$)

طریقهٔ ترسیم: ابتدا مثلث ACA' را با معلوم بودن سه ضلع آن می‌سازیم، سپس میانهٔ نظیر ضلع $AA' = ۲۰$ را رسم می‌کنیم (CM) و آن را از نقطهٔ M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به‌دست آید، مثلث ABC جواب است.

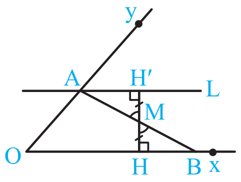
۱۵

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ضلع $AC = b$ و زاویهٔ $\hat{B} = \alpha$ معلوم هستند. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. دو خط عمود بر هم L و L' متقاطع در نقطهٔ A را رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه O را روی L درنظر می‌گیریم و نیم‌خط Oy را چنان رسم می‌کنیم که زاویه به اندازهٔ α ایجاد شود. به مرکز A و شعاع b کمانی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطهٔ C قطع کند و از نقطهٔ C خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط L را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.



۱۶

مطابق شکل زاویهٔ xOy و نقطهٔ M داخل آن مفروض است. عمود MH را بر نیم‌خط Ox وارد می‌کنیم و آن را از سمت M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ H' امتداد می‌دهیم،



سپس خط L را در نقطهٔ H' عمود بر HH' رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم، A را به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ B قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMH و AMH' به حالت (زضز) هم‌نهشت هستند پس $MA = MB$

۱۷

مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را با معلوم بودن وتر $AM = m_a$ و زاویهٔ $H\hat{A}M = \alpha$ رسم می‌کنیم. به مرکز M و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با امتداد MH را B و C می‌نامیم. A را به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب است.