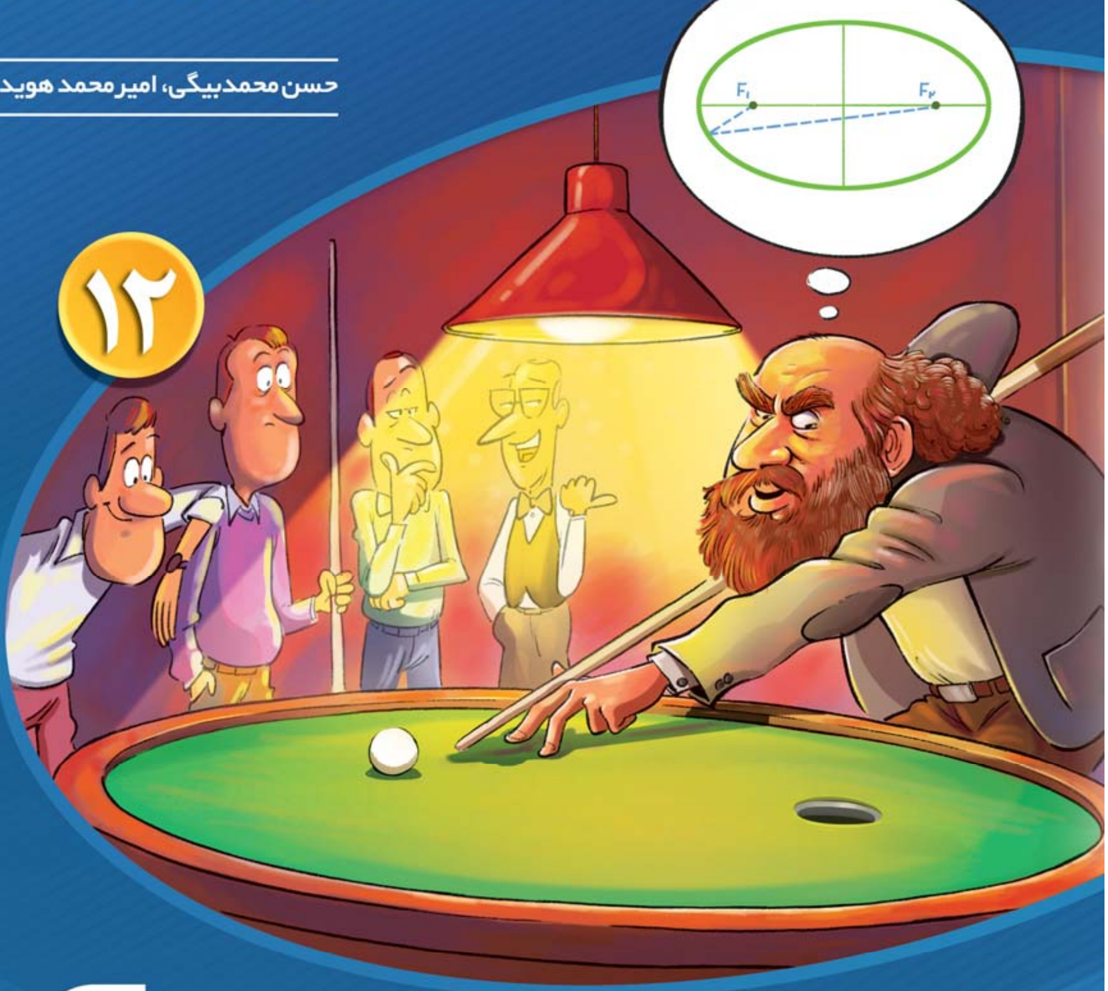
درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۳

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

۱۲



نشر الگو

مقدمهٔ مؤلفان

به نام خدا

این کتاب را براســاس محتوای هندسهٔ ســال دوازدهم نوشته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است و هر درس از دو بخش تشکیل شده است:

۱. خلاصه درس: در این بخش، ضمن مرور مطالب کتاب درسی، نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای را هم حل کرده‌ایم، تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این‌گونه پرســش‌ها آشــنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

۲. پرســش‌های چهارگزینه‌ای: در پایان هر درس مجموعه‌ای از پرســش‌های چهارگزینه‌ای مربوط به آن درس را آورده‌ایم. در این قســمت، از همهٔ مطالب کتاب درســی پرســش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرسش تألیفی به همراه پرسش‌های کنکورهای سال‌های قبل هم آورده‌ایم. راه‌حل همهٔ پرسش‌ها در انتهای هر فصل قرار دارد.

برای مطالعهٔ این کتاب، ابتدا باید خلاصهٔ درس را با دقت بخوانید و مطمئن شوید که روش‌های حل کردن پرسش‌های آن را یاد گرفته‌اید. سپس به حل کردن پرسش‌های انتهای درس بپردازید. با این کار، علاوه بر این که مطالب درسی را کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوید.

به یاد داشــته باشــید که سرعت مطالعهٔ هندسه کمتر از درس‌های دیگر است. سعی کنید دربارهٔ آنچه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه این‌که سرســری مطالب را حفظ کنید. حتماً به اســتدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه‌حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشــه کاغذ و قلم کنار خود داشــته باشــید و هرگاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از این‌که راه‌حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه‌حلش را ببینید.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درســی مســلط نیستید، بهتر اســت پیش از مطالعهٔ هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «هندسهٔ ۳ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، نسیمه سادات نوریان برای صفحه آرایی و سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از خانم فهیمه گودرزی و آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول

ماتریس و کاربردها

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

تعریف هر آرایش مستطیل شکل از عددهای حقیقی، که شامل تعدادی سطر و ستون است یک ماتریس است.
به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس یک «درایهٔ» آن ماتریس می‌گوییم.

درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور می‌کنیم و معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین نام‌گذاری می‌کنیم.

مرتبهٔ ماتریس

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ (بخوانید m در n) است.

توجه حاصل‌ضرب $m\times n$ تعداد درایه‌های ماتریس را نشان می‌دهد.

نمایش کلی درایه‌ها

در ماتریس دلخواه A، درایهٔ واقع در تقاطع سطر iام و ستون jام را با a_{ij} نشان می‌دهیم.

نتیجه در حالت کلی، ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اغلب ماتریس بالا را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ می‌نویسیم $(۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n)$. به a_{ij} درایهٔ عمومی ماتریس A می‌گوییم.

تست ۱ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$، مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

راه‌حل با توجه به اطلاعات سؤال درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

اکنون می‌نویسیم

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A = ۷-۲+۵+۷=۱۷$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

تست ۲ **مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=[۲i^۲-۳j]_{۳\times۳}$ چقدر است؟**

۱) ۱۰ **۲)** ۸ **۳)** ۱۶ **۴)** ۱۲

راه‌حل با توجه به تعریف، $a_{ij}=۲i^۲-۳j$. اکنون درایه‌های ستون دوم ماتریس A را می‌نویسیم:

$$a_{۱۲}=۲-۶=-۴,\quad a_{۲۲}=۸-۶=۲,\quad a_{۳۲}=۱۸-۶=۱۲$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس } A = a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}=-۴+۲+۱۲=۱۰$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است.

ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

مثال:

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳},\quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳},\quad \bar{O}=[۰]_{۱\times۱}=۰,$$

۲) ماتریس سطری: ماتریسی که یک سطر دارد.

در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس سطری به صورت $۱\times n$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر سطری‌اند.

$$C=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & \pi & \sqrt{۲} \end{bmatrix}_{۱\times۴},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times۳},\quad A=[۴]_{۱\times۱}$$

۳) ماتریس ستونی: ماتریسی که یک ستون دارد ماتریس ستونی است.

در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس ستونی به صورت $m\times۱$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر ستونی‌اند.

$$C=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}_{۵\times۱},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱},\quad A=[-۱]_{۱\times۱}$$

۴) ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

توجه اگر یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، به جای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$، می‌گوییم «ماتریس مربعی از مرتبهٔ n».

تذکر در ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ درایه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

$$a_{ij}\begin{cases} i=j \to \text{روی قطر اصلی است } a_{ij} \\ i<j \to \text{بالای قطر اصلی است } a_{ij} \\ i>j \to \text{پایین قطر اصلی است } a_{ij} \\ i+j=n+1 \to \text{روی قطر فرعی است } a_{ij} \end{cases}$$

مثال: ماتریس‌های زیر مربعی‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad C=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۵) ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است.

به عبارت دیگر،

$$\text{ماتریس قطری است } A \Leftrightarrow A=[a_{ij}]_{n\times n},\quad (i\neq j \Rightarrow a_{ij}=۰)$$

توجه در ماتریس قطری درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

مثال: ماتریس‌های زیر قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

مثال: ماتریس‌های زیر اسکالرند.

$$A=\begin{bmatrix} -۶ \end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۷) ماتریس همانی (واحد): ماتریس اسکالری که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ است.

ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n},\quad \delta_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$$

مثال: ماتریس‌های زیر همانی‌اند.

$$I_۱=\begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس A و B **مساوی** هستند، اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند.

۲) درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

به عبارت دیگر،

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ مساوی هستند اگر

۱) $m=p$ و $n=q$.

۲) به‌ازای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$.

در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

تست ۳

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ **مساوی باشند، مقدار** $x+y+z$ **چقدر است؟**

۱) -۱ **۲)** ۹ **۳)** ۱۵ **۴)** ۱۸

راه‌حل: چون $A=B$، پس $z-۱=۵$، $x+y=۹$ و $x-y=۳$، بنابراین $z=۶$، $y=۳$ و $x=۶$، در نتیجه $x+y+z=۱۵$. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر را با هم جمع یا از هم کم کنیم.

به عبارت دیگر، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، آن‌گاه

$$A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

و

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

تست ۴

اگر $[i]_{۲\times ۲}+\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}=[i^۲-۳j]_{۲\times ۲}$**، مقدار** $m+n$ **چقدر است؟**

۱) -۶ **۲)** -۵ **۳)** -۷ **۴)** صفر

راه‌حل: از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}=[i^۲-۳j]-[i]=[i^۲-i-۳j]$$

اگر $A=\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}$، چون $a_{۱۱}=m$ و $a_{۲۲}=n$، پس $m=۱-۱-۳=-۳$ و $n=۴-۲-۶=-۴$،

بنابراین $m+n=-۳-۴=-۷$. پس گزینهٔ (۳) درست است.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

بـرای هـر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در ماتریس A، یعنـی rA، یک ماتریس هم‌مرتبه با ماتریس A است: $rA=[d_{ij}]$، که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij}=ra_{ij}$$

یعنی هر درایهٔ ماتریس rA از ضرب عدد حقیقی r در درایهٔ نظیرش در ماتریس A به‌دست می‌آید.

مثال:

- $(-۱)\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ -۴ & -۵ & -۶ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$

- $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & \frac{۵}{۲} & \frac{۷}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۲\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۵ & \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

- $۰\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}_{۳\times۳}$

قرینهٔ یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشـد. **قرینهٔ** A ماتریسـی $m\times n$ است که از حاصل‌ضرب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A=(-۱)A$.

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد درماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)،

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$،

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$،

۷) $(rs)A=r(sA)$،

۸) $۱A=A$،

۹) $۰A=\bar{O}$ و $r\bar{O}=\bar{O}$،

۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq ۰$، آن‌گاه $A=B$ و

۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

تست ۵

اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ **و** $۲A-B=I$**، ماتریس B کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

راه‌حل از برابری $۲A-B=I$ به‌دست می‌آید

$$B=۲A-I=۲\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۶

اگر $A=[i-j]_{۲\times۲}$**،** $B=[i+j]_{۲\times۲}$ **و ماتریس‌های X و Y جواب‌های دستگاه** $\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}$ **باشند، مجموع درایه‌های ماتریس** $۲X+Y$ **چقدر است؟**

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا دو معادلهٔ داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$۲X=A+B$$

اکنون دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$۲Y=A-B\Rightarrow Y=\frac{A-B}{۲}$$

در نتیجه $۲X+Y=A+B+\frac{A-B}{۲}=\frac{۳A+B}{۲}$، یعنی $۲X+Y=[\frac{۳(i-j)+i+j}{۲}]_{۲\times۲}=[۲i-j]_{۲\times۲}$، پس $۲X+Y=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$. در نتیجه

$$۶=۲+۳+۰+۱=\text{مجموع درایه‌های ماتریس } ۲X+Y$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

ضرب ماتریس‌ها

شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس

ضرب ماتریس A در ماتریس B را به صورت AB نشان می‌دهیم. این ضرب زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد.

مرتبهٔ ماتریس AB

اگر A ماتریس $m\times n$ و B ماتریس $n\times p$ باشد، آن‌گاه $C=AB$ از مرتبهٔ $m\times p$ است:

$$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

تست ۷

اگر A ماتریسی از مرتبه ۳×۴، C ماتریسی از مرتبه ۳×۵ باشد و $AB=C$، مرتبهٔ ماتریس B کدام است؟

۱) ۳×۴ ۲) ۳×۵ ۳) ۵×۴ ۴) ۴×۵

راه‌حل: چون ماتریس AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر است، یعنی

$$۴=\text{تعداد سطرهای } B$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی را دارد. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

تست ۸

اگر ضرب ماتریسی $A_{۲\times۳}(B_{m\times n}C_{۳\times۵})$ تعریف شده باشد، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۸

راه‌حل: برای تعریف شدن ماتریس BC باید $n=۳$. فرض کنید $D=BC$، در این صورت D ماتریسی $m\times۵$ است. از طرف دیگر، برای تعریف شدن ضرب ماتریسی $A_{۲\times۳}D_{m\times۵}$ باید $m=۳$. بنابراین

$$m+n=۳+۳=۶$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}_{۱\times n}$ و $B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times۱}$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$AB=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱}\end{bmatrix}$$
$$=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲\end{bmatrix}=۲\times۱+۳\times(-۱)+۴\times۲$$
$$=۲-۳+۸=۷$$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی

حاصل‌ضرب ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ در ماتریس $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ماتریسی مانند $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ است که در آن درایهٔ c_{ij} از آن برابر است با ضرب سطر iام A در ستون jام B:

$$c_{ij}=[\text{سطر iام } A]\times[\text{ستون jام } B]=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

مثال: در ضرب زیر درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس حاصل‌ضرب را به‌دست آورده‌ایم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $=2\times1+1\times2+3\times(-2)=-2$

تست ۹ اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ ۲ باشند، کدام گزینه می‌تواند $AB-BA$ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2\end{bmatrix}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q\end{bmatrix}$. در این صورت

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ p & q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bp & ay+bq \\ cx+dp & cy+dq\end{bmatrix}$$

و

$$BA=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ ap+cq & bp+dq\end{bmatrix}$$

چون مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB و BA با هم برابرند، پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $AB-BA$ برابر صفر اســت. در بین گزینه‌هــا فقط گزینهٔ (۳) این ویژگــی را دارد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8\end{bmatrix}$ و $AB-BA=\bar{O}$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

راه‌حل از تساوی $AB-BA=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $AB=BA$. اکنون می‌نویسیم

$$AB=\begin{bmatrix} -2a+5b & 10a-40 \\ -4+3b & -4\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix} -2a+20 & 20 \\ ab-16 & 5b-24\end{bmatrix}$$

در نتیجه $\begin{cases} 10a-40=20 \\ 5b-24=-4\end{cases}$، بنابراین $a=6$ و $b=4$، پس $a+b=10$. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

تست ۱۱

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ ۱ & -x & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) ۱   **۲)** ۲   **۳)** ۳-   **۴)** ۴-

راه‌حل ضرب‌های سمت چپ را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}-x+۱ & -۲x-۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$x(-x+۱)+۲(-۲x-۱)+۰=۰$$

یعنی $-x^۲-۳x-۲=۰$. بنابراین $x_۱=-۲$ و $x_۲=-۱$، در نتیجه $x_۱+x_۲=-۳$. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۲

اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۴\\ ۵ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=AB$، مقدار $c_{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر   **۲)** ۱۶   **۳)** ۲۹   **۴)** ۲۴

راه‌حل توجه کنید که

$$c_{۲۳}=[\text{سطر دوم } A][\text{ستون سوم } B]$$

$$=\begin{bmatrix}۷ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۱\end{bmatrix}=۲۸+۱=۲۹$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۳

اگر $A=[۲i-۳j]_{۳\times۳}$ و $B=[i+i^۲]_{۳\times۳}$، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس AB چقدر است؟

۱) ۱۲   **۲)** ۱۵-   **۳)** ۱۸   **۴)** ۳۰-

راه‌حل فرض می‌کنیم $C=AB$. در این صورت

$$c_{۳۳}=[\text{سطر سوم } A][\text{ستون سوم } B]$$

$$=\begin{bmatrix}a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۳}\\ b_{۲۳}\\ b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۶\\ ۱۲\end{bmatrix}$$

$$=۶+۰-۳۶=-۳۰$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

تست ۱۴

اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -۱ & b & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$، $C=AB=[c_{ij}]$، **به‌طوری که** $c_{۱۳}=-۲$ و $c_{۲۲}=۰$، **مقدار** $a+b$ **چقدر است؟**

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۵

راه‌حل چون $c_{۱۳}=-۲$، پس

$$\begin{bmatrix} a & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۳a+۲-۱=-۲$$

یعنی $a=-۱$. همچنین از $c_{۲۲}=۰$ به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=۲b+۸=۰$$

یعنی $b=-۴$. اکنون به‌دست می‌آید $a+b=-۱-۴=-۵$. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

تذکر اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه منظور از $A^۲$ یعنی $A\times A$، $A^۳$ یعنی $A^۲\times A$ و ....

تست ۱۵

اگر $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، **کدام گزینه درست است؟**

۱) $x=y=-۱$ ۲) $x=-y=-۱$ ۳) $x=y=۱$ ۴) $x=-y=۱$

راه‌حل چون $A^۲=A\times A$، پس

$$A^۲=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^۲+y & xy-y \\ x-۱ & y+۱ \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر، چون $A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، پس $\begin{cases} x-۱=۰ \\ y+۱=۲ \end{cases}$، در نتیجه $x=۱$ و $y=۱$. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۶

اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، **حاصل** $A^۳+A^۴$ **کدام است؟**

۱) $\bar{O}$ ۲) I ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) A

راه‌حل با محاسبهٔ ماتریس $A^۳$ به‌دست می‌آید $A^۳=\bar{O}$، پس $A^۴=\bar{O}$ و در نهایت، $A^۳+A^۴=\bar{O}+\bar{O}=\bar{O}$. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

تست ۱۷

اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$، **مجموع درایه‌های ماتریس** $A^۵$ **چقدر است؟**

۱) $-۳^۷$ ۲) $۳^۷$ ۳) $-۳^۶$ ۴) $۳^۶$

راه‌حل ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}=-۳A$$

دو طرف برابری $A^۲=-۳A$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^۳=-۳A^۲=-۳(-۳A)=(-۳)^۲A$$

به همین صورت می‌توان نتیجه گرفت $A^n=(-۳)^{n-۱}A$. در نتیجه

$$A^۵=(-۳)^۴A=۸۱A=\begin{bmatrix} -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \\ -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \\ -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید

مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵=۹\times(-۸۱)=-۳^۶$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۸

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱۴۴ & ۱۲۰ \\ -۱۲۰ & -۱۰۰ \end{bmatrix}$، **ماتریس** $A^{۱۳۹۷}$ **کدام است؟**

۱) A ۲) $-A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $۴A$

راه‌حل ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱۲۰ & ۱۴۴ \\ -۱۰۰ & -۱۲۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۲۰ & ۱۴۴ \\ -۱۰۰ & -۱۲۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

بنابراین $A^{۱۳۹۷}=\bar{O}$. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۹

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، **مقدار** $a-b$ **چقدر است؟**

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

راه‌حل می‌نویسیم

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

اکنون $(A+I)^2$ و $(A+I)^3$ را به‌دست می‌آوریم تا شاید بتوان از روی آن‌ها جواب را به‌دست آورد:

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

و

$$(A+I)^3=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}$$

در تمام ماتریس‌های بالا اگر درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم را از درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول کم کنیم، حاصل برابر ۱ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که $a-b=1$. توجه کنید که این استدلال برای تست به‌کار می‌رود و در مسئله‌های تشریحی جواب نمی‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۲۰

اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر ۱۳۹۷ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۳۹۵ ۲) ۱۳۹۶ ۳) ۱۳۹۷ ۴) ۱۳۹۸

راه‌حل ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

اکنون می‌توان حدس زد که $A^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$. بنابر فرض باید $n+2=1397$، در نتیجه $n=1395$.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱) ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی در حالت کلی نمی‌توان گفت $AB=BA$.

نکته

۱) ماتریس‌های به شکل $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$ با هم جابه‌جایی دارند.

۲) ماتریس‌های به شکل $\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$ با هم جابه‌جایی دارند.

ویژگی ۲) برای سه ماتریس ضرب شوندهٔ A، B و C خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است:

$$A(BC)=(AB)C$$

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}۵ & i>j\\ ۷ & i=j\\ -۲ & i<j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۳۶　　۲) ۲۱　　۳) ۲۸　　۴) ۳۰

۲- درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i^۲+۲j & i\geq j\\ ۲j-i & i<j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۷　　۲) ۲۳　　۳) ۲۵　　۴) ۲۹

۳- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i>j\\ ۷ & i=j\\ i^۲-۱ & i<j\end{cases}$ مفروض است. مقدار $۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}$ برابر کدام است؟

۱) ۲۲　　۲) ۱۸　　۳) ۲۰　　۴) ۲۴

۴- اگر در ماتریس $A_{۳\times۴}$ بدانیم $a_{ij}=\begin{cases}-i & i>j\\ ۰ & i=j\\ j & i<j\end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۸　　۳) ۲۰　　۴) ۲۸

۵- ماتریس $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳ & ۲\\ ۴ & ۳ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۴\end{bmatrix}$ مفروض است. کدام‌یک از تعاریف زیر می‌تواند مشخص‌کنندهٔ این ماتریس باشد؟

۱) $a_{ij}=\begin{cases}i+۱ & i<j\\ j+i & i\geq j\end{cases}$　　۲) $a_{ij}=\begin{cases}j-i & i>j\\ i+۱ & i=j\\ ۲j+۱ & i<j\end{cases}$　　۳) $a_{ij}=\begin{cases}j+۱ & i<j\\ j-۱ & i\geq j\end{cases}$　　۴) $a_{ij}=\begin{cases}j+۱ & i\leq j\\ i+j & i>j\end{cases}$

۶- چند تا از ماتریس‌های زیر قطری هستند؟

$$\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۵\\ ۰ & ۵ & ۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & -۴\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ ۵ & ۰\end{bmatrix}$$

۱) ۵　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۷- کدام‌یک از ماتریس‌های زیر ماتریس اسکالر نیست؟

۱) $\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۵\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۵ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

۸- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $\frac{x}{۲}-y+۲z$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) -۴

۹- اگر $\begin{bmatrix} c & -۵ \\ d & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & b \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & a \end{bmatrix}$، مقدار $ac-bd$ برابر کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۱ ۳) ۸۱ ۴) ۷۹

۱۰- اگر $A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}$ و $B=[i^۲-۳j]_{۳\times۳}$، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۱۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، که در آن $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$، که در آن $b_{ij}=\begin{cases} j-i & i<j \\ i+j & i\geq j \end{cases}$، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۱

۱۲- اگر $A=[۲i-j]_{۲\times۲}$، $B=[۴i+۳j]_{۲\times۲}$، $X+Y=A$ و $X-Y=B$، مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۵۲

۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $mA-nB=\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$، زوج مرتب (m,n) کدام است؟

۱) $(-۳,-۲)$ ۲) $(۳,۲)$

۳) $(۲,۳)$ ۴) چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

۱۴- اگر $A=\begin{bmatrix} a-۱ & m^۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -a & m+۱ \\ a & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، $C=۲A-B$، $c_{۲۱}=۲c_{۳۲}$ و $c_{۱۱}=-c_{۲۲}$، مقدار $a-m$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۵- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$، $B=[b_{ij}]_{۴\times۳}$ و $C=[c_{ij}]_{۳\times۵}$، کدام ضرب قابل تعریف است؟

۱) AB ۲) CB ۳) AC ۴) BA

۱۶- کدام گزینه نادرست است؟

۱) حاصل‌ضرب دو ماتریس اسکالر، ماتریسی اسکالر است.

۲) حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، ماتریسی قطری است.

۳) حاصل‌ضرب یک ماتریس اسکالر و یک ماتریس قطری ماتریسی قطری است.

۴) حاصل‌ضرب یک ماتریس اسکالر و یک ماتریس قطری ماتریسی اسکالر است.

۱۷- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^۲+C=AB$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس C برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۸- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱&-۴\\۱&۰\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $AB-BA$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱&۱۰\\۳&۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۲&۱۰\\۳&۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۲&۱۰\\۳&-۲\end{bmatrix}$

۱۹- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۴&a\\b&-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس AB ماتریسی قطری باشد، مقدار $۲a-b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) صفر ۳) -۵ ۴) ۱

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۴\\-۲&-۴\end{bmatrix}$، حاصل $A^۲+۲A-I$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $-I$ ۳) I ۴) A

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&k\end{bmatrix}$، به‌ازای چند مقدار k تساوی ماتریسی $A^۲+۲A-I=\bar{O}$ درست است؟

۱) صفر ۲) نامتناهی ۳) ۱ ۴) ۲

۲۲- اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $۲A+B=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۲&۲\\۱&۱\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $B^۲$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۲

۲۳- دو ماتریس $A=[a_{ij}]=[۲i-j]_{۲\times۲}$ و $B=[b_{ij}]=[-۲i-j^۲]_{۲\times۲}$ مفروض‌اند. حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $AB-B$ برابر کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۲۰ ۳) -۳۰ ۴) -۴۰

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&-۳\\a&۲&۲\\۰&۱&۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\b&a&۲\\۳&۴&-۵\end{bmatrix}$ و $C=AB=[c_{ij}]$، $c_{۲۱}=۱۶$ و $c_{۲۲}=۰$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) -۱۱

۲۵- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\۲&-۱&-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱&۲&-۲\\-۱&۲&-۲\\-۱&۲&-۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس AB چگونه است؟

۱) ماتریس اسکالر ۲) ماتریس صفر ۳) ماتریس همانی ۴) ماتریس قطری

۲۶- دو ماتریس $A=[i-۲j]_{۲\times۳}$ و $B=[۲i+j]_{۱\times۳}$ مفروض‌اند. اگر $C=\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $C^۲$ برابر کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۶ ۳) ۵۷ ۴) ۵۸

۲۷- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i>j\\ i^۲-۱ & i=j\\ j-i & i<j\end{cases}$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $b_{ij}=\begin{cases}i+j & i>j\\ i^۲+۱ & i=j\\ i-j+۲ & i<j\end{cases}$ مفروض‌اند. ماتریس $AB-BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱۰&۱۰&۱۶\\۸&۲&-۶\\۱۴&۱۸&-۱۲\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱۰&۲۰&۲۶\\۸&۳۸&۳۲\\۵۴&۷۶&۱۷۴\end{bmatrix}$ ۳) $\bar{O}$ ۴) I

۲۸- در تساوی $\begin{bmatrix} ۱ & x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۲ & -۴ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \\ x \end{bmatrix}=۰$، مجموع مقادیر x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

۲۹- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & m & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۵ & a \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ -۱ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۰ & -۴ \\ ۲ & -۵ & -۱ \end{bmatrix}$، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A(A+B)B+۲I$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۱　　۴) صفر

۳۱- ماتریس‌های A و B مربعی از مرتبهٔ ۲ هستند. اگر $AB=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، حاصل $B\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۵ & -۶ \end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix} -۵ & ۱ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ ۱۲ & -۳ \end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix} ۶ & ۴ \\ ۸ & -۲ \end{bmatrix}$　　۴) $\bar{O}$

۳۲- ماتریس‌های A و B مربعی و هم‌مرتبه هستند. اگر $AB=BA$، کدام‌یک از تساوی‌های زیر به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است؟

۱) $A^nB=BA^n$　　۲) $(AB)^n=A^nB^n$

۳) $(AB)^n=B^nA^n$　　۴) هر سه گزینه

۳۳- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$.

۲) اگر $AB=AC$، آن‌گاه ماتریس‌های B و C مساوی‌اند.

۳) اگر $(A-I)^۲=\bar{O}$، آن‌گاه $A=I$.

۴) اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه $A^۳\times A^۲=A^۲\times A^۳$.

۳۴- اگر بدانیم $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$، درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) ۲

۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A^۵$ کدام است؟

۱) ۳۲۴　　۲) ۱۲۴　　۳) ۲۴۳　　۴) ۴۲۳

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل $A^۳$ کدام است؟

۱) ۶A　　۲) ۳۶A　　۳) ۴۹A　　۴) ۷A

۳۷- ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A^{3}=I$، ماتریس A^{2} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^{n} برابر ۱۰۲۴ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۹- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^{n} برابر ۱۳۸۸ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۳۸۴ ۲) ۱۳۸۵ ۳) ۱۳۸۶ ۴) ۱۳۸۷

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$، ماتریس A^{20} با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$، ماتریس A^{20} برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴۲- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A^{1394} کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۴۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$، در ماتریس A^{101} مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس A^{1394} برابر کدام است؟

۱) A^{2} ۲) A ۳) $-I_{2}$ ۴) $-A$

۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{5}-A^{3}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

۴۶- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{1394}+A^{1393}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ بنابر تعریف درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$a_{۱۱}=۷,\quad a_{۱۲}=-۲,\quad a_{۱۳}=-۲$$
$$a_{۲۱}=۵,\quad a_{۲۲}=۷,\quad a_{۲۳}=-۲$$
$$a_{۳۱}=۵,\quad a_{۳۲}=۵,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ & -۲ \\ ۵ & ۷ & -۲ \\ ۵ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$۳(۵)+۳(۷)+۳(-۲)=۱۵+۲۱-۶=۳۰$$

۲- گزینهٔ ۴ ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۳\,,\quad a_{۱۲}=۳\,,\quad a_{۱۳}=۵$$
$$a_{۲۱}=۶\,,\quad a_{۲۲}=۸\,,\quad a_{۲۳}=۴$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A=۳+۳+۵+۶+۸+۴=۲۹$$

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A،

$$a_{۲۴}=۲^{۲}-۱=۳,\quad a_{۳۱}=۳+۱=۴,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین

$$۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}=۲(۳)-۳(۴)+۴(۷)=۲۲$$

۴- گزینهٔ ۱ درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۰,\quad a_{۱۲}=۲,\quad a_{۱۳}=۳,\quad a_{۱۴}=۴$$
$$a_{۲۱}=-۲,\quad a_{۲۲}=۰,\quad a_{۲۳}=۳,\quad a_{۲۴}=۴$$
$$a_{۳۱}=-۳,\quad a_{۳۲}=-۳,\quad a_{۳۳}=۰,\quad a_{۳۴}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ & ۴ \\ -۳ & -۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲ است.

۵- گزینهٔ ۴ در گزینهٔ (۱)، درایهٔ $a_{۱۲}$ از رابطهٔ $i+۱$ به‌دست می‌آید، پس $a_{۱۲}=۲$، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

در گزینهٔ (۲)، درایهٔ $a_{۱۲}$ از رابطهٔ $۲j+۱$ به‌دست می‌آید، پس $a_{۱۲}=۵$، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

در گزینهٔ (۳)، درایهٔ $a_{۱۱}$ از رابطهٔ $j-۱$ تعیین می‌شود، پس $a_{۱۱}=۰$ که در ماتریس A این درایه برابر ۲ است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

پس به ناچار باید گزینهٔ (۴) درست باشد که کافی است آن را بررسی کنید.

۶- گزینهٔ ۴ ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. پس ماتریس‌های $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$ قطری هستند و بقیه قطری نیستند.

۷- گزینهٔ ۲ ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند. پس ماتریس گزینهٔ (۲) ماتریس اسکالر نیست.

۸- گزینهٔ ۴ دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. چون $A=B$، پس

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x-y=۳ \\ x+y=۹ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲x=۱۲\Rightarrow x=۶,\ y=۳ \\ z-۱=-۳\Rightarrow z=-۲ \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{x}{۲}-y+۲z=\frac{۶}{۲}-۳-۴=-۴$$

-۹ گزینهٔ ۲ در دو ماتریس مساوی درایه‌های نظیر هم مساوی‌اند، پس

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۵ & b \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -۵ \\ d & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۳+b \\ ۷ & a-۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -۵ \\ d & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} c=۳ \\ ۳+b=-۵ \Rightarrow b=-۸ \\ d=۷ \\ a-۴=۱ \Rightarrow a=۵ \end{cases}$$

بنابراین

$$ac-bd=(۵)(۳)-(-۸)(۷)=۷۱$$

-۱۰ گزینهٔ ۴ با تعریف ماتریس‌های A و B درایه‌های این دو ماتریس را تعیین می‌کنیم:

$$A=[۲\,ij-۱]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}$$

$$B=[i^{۲}-۳j]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۶ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$۲A-B=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۶ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

فقط ستون دوم ماتریس $۲A-B$ را لازم داریم، پس

$$۲A-B=\begin{bmatrix} ? & ۱۱ & ? \\ ? & ۱۶ & ? \\ ? & ۱۹ & ? \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر $۱۱+۱۶+۱۹=۴۶$ است.

-۱۱ گزینهٔ ۱ ابتدا درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_{۱۲}=۱-۲=-۱ \\ a_{۱۳}=۱-۳=-۲ \Rightarrow A=\begin{bmatrix} & -۱ & -۲ \\ ? & & -۱ \\ ? & ? & \end{bmatrix} \\ a_{۲۳}=۲-۳=-۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{۱۲}=۲-۱=۱ \\ b_{۱۳}=۳-۱=۲ \Rightarrow B=\begin{bmatrix} & ۱ & ۲ \\ ? & & ۱ \\ ? & ? & \end{bmatrix} \\ b_{۲۳}=۳-۲=۱ \end{cases}$$

پس

$$A+B=\begin{bmatrix} & ۰ & ۰ \\ ? & & ۰ \\ ? & ? & \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر صفر است.

-۱۲ گزینهٔ ۳ ابتدا ماتریس $۲X+Y$ را برحسب ماتریس‌های A و B به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\dfrac{A+B}{۲} \\ Y=\dfrac{A-B}{۲} \end{cases}$$

$$۲X+Y=A+B+\frac{A-B}{۲} \qquad (۱)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+B=[۲i-j]_{۲\times۲}+[۴i+۳j]_{۲\times۲}=[۶i+۲j]_{۲\times۲} \qquad (۲)$$

$$A-B=[۲i-j]_{۲\times۲}-[۴i+۳j]_{۲\times۲}=[-۲i-۴j]_{۲\times۲} \qquad (۳)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$۲X+Y=[۶i+۲j]_{۲\times۲}+[-i-۲j]_{۲\times۲}=[۵i]_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ ۱۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر $۵+۵+۱۰+۱۰=۳۰$ است.

-۱۳ گزینهٔ ۴ ماتریس‌های A و B را در معادلهٔ $mA-nB=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ قرار می‌دهیم:

$$m\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}-n\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n & -۲m \\ m+n & ۲m-۳n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -n=-۳ \Rightarrow n=۳ \\ -۲m=-۴ \Rightarrow m=۲ \\ m+n=۵ \\ ۲m-۳n=۰ \end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به‌دست آمده در معادلهٔ چهارم صدق نمی‌کنند، پس $m=۲$ و $n=۳$ قابل‌قبول نیست.

۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا درایه‌های ماتریس $C=۲A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$C=۲A-B=۲\begin{bmatrix} a-۱ & m^۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -a & m+۱ \\ a & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳a-۲ & ۲m^۲-m-۱ \\ ۶-a & -۴ \\ ۰ & ۲m+۱ \end{bmatrix}$$

اکنون بنابر فرض سؤال،

$$c_{۱۱}=-c_{۲۲}\Rightarrow ۳a-۲=-(-۴)\Rightarrow ۳a-۲=۴\Rightarrow a=۲$$

$$c_{۲۱}=۲c_{۳۲}\Rightarrow ۶-a=۲(۲m+۱)\Rightarrow ۴m+a=۴$$

$$\xrightarrow{a=۲} ۴m+۲=۴\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$a-m=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۵- گزینهٔ ۳ ضرب دو ماتریس در صورتی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. در اینجا ماتریس A ماتریسی ۲×۳ و ماتریس C ماتریسی ۳×۵ است، پس ماتریس AC قابل تعریف و از مرتبهٔ ۲×۵ است. سایر گزینه‌ها این ویژگی را ندارند و ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست.

۱۶- گزینهٔ ۴ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر و ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. اکنون ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس AB یک ماتریس اسکالر نیست، پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا ماتریس‌های $(A+B)^۲$ و AB را پیدا می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

در ضمن،

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$C=AB-(A+B)^۲$$

$$=\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس C برابر است با

$$-۱+۱+۲+۱=۳$$

۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا ماتریس‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۱۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB-BA=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & -۱۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، پس

$$\begin{cases} -۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

پس $۲a-b=۸-۳=۵$.

۲۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix}$$