فصل اول: حرکت شناسی

۱- گزینه۱ درس‌نامه‌های این کتاب رو از اول تا آخرش می‌خونید! *به جان شما، اصلاً جای چونه نداره!! اولیشو تحویل بگیرید!!*

۱) مکان - جابه‌جایی

◄ **طبقه‌بندی حرکت بر مبنای مسیر حرکت:** اگر مسیر حرکت متحرکی به شکل خطی باشد، حرکت آن را «یک‌بُعدی» و اگر بر مسیر خمیده‌ای در یک صفحه حرکت کند، حرکت آن را «دوبعدی» و اگر نتوان مسیر حرکت آن را در یک صفحه‌ی مسطح نشان داد، حرکت آن را «سه‌بعدی» می‌گوییم (شکل ۱). ما فعلاً حرکت‌های یک‌بعدی را بررسی می‌کنیم و پس از تسلط به مفاهیم آن، وارد فضای دوبعدی می‌شویم.

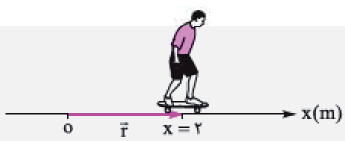
(پ) (ب) (الف)

شکل ۱. الف) نمونه‌ای از حرکت یک‌بعدی. ب) نمونه‌ای از حرکت دوبعدی. پ) نمونه‌ای از حرکت سه‌بعدی.

◄ **بردار مکان:** برای تشخیص مکان یک متحرک، نقطه‌ای را به عنوان مبدأ مختصات (مبدأ مکان) در نظر می‌گیرند و تمام فاصله‌ها را نسبت به این نقطه می‌سنجند. **برداری که مبدأ مختصات را به مکان متحرک وصل می‌کند، «بردار مکان» می‌نامیم** و معمولاً آن را با نماد $\vec{r}$ نشان می‌دهیم.

توجه۱ مختصه‌ی مبدأ مکان، صفر در نظر گرفته می‌شود؛ مگر این‌که طراح مسئله فرض دیگری را جلوی پای ما بگذارد.

نمونه۱ در شکل ۲، بردار مکان اسکیت‌سواری که به فاصله‌ی ۲ متری از مبدأ مختصات (نقطه‌ی o) و در قسمت مثبت محور x قرار دارد، رسم شده است. بردار مکان این شخص به‌صورت $\vec{r} = x\vec{i} = 2\vec{i}$ (در SI) نمایش داده می‌شود.



شکل ۲

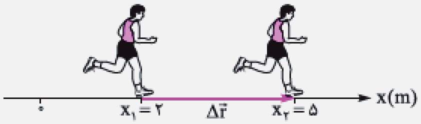
توجه۲ برای معرفی مکان جسمی که روی محور مکان (در یک بُعد) حرکت می‌کند، لازم نیست حتماً از نمایش بُرداری استفاده کنیم. با مشخص کردن مختصات جسم، مکان جسم معلوم می‌شود.

نمونه۲ در شکل ۲، می‌توان موقعیت مکانی شخص را با عبارت $x = +2\,m$ بیان کرد؛ از این عبارت برداشت می‌شود که شخص روی محور x و در ناحیه‌ی مثبت آن و به فاصله‌ی ۲ متری مبدأ قرار دارد.

⚠ حواس‌ها جمع! بردار مکان یک جسم در یک لحظه، هیچ اطلاعی در مورد جهت حرکت جسم در آن لحظه به ما نمی‌دهد.

◄ **جابه‌جایی:** برای نمایش تغییر مکان یک متحرک، از بردار «جابه‌جایی» استفاده می‌کنیم. **جابه‌جایی، برداری است که مکان اولیه‌ی متحرک را به مکان ثانویه‌ی آن وصل می‌کند.**

نمونه۳ شکل ۳ بردار جابه‌جایی شخصی را نشان می‌دهد که از مکان $x_1 = 2\,m$ به مکان $x_2 = 5\,m$ منتقل شده است.



شکل ۳

توجه۳ مقدار جابه‌جایی یک متحرک را در انتقال از مکان x_1 به مکان x_2، می‌توان به کمک رابطه‌ی ۱ محاسبه کرد.

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1} \qquad \text{(رابطه‌ی ۱)}$$

نمونه۴ جابه‌جایی شخص در شکل ۳، برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 2 \rightarrow \Delta x = 3\,m$$

که نمایش برداری آن (در SI) به‌صورت مقابل است:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} = 3\vec{i}$$

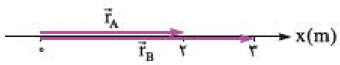
نکته۱ اگر $\Delta x > 0$ باشد، متحرک در جهت محور x و اگر $\Delta x < 0$ باشد، متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود.

◀ **مسافت: طول مسیر طی‌شده توسط متحرک را «مسافت» می‌نامیم.** برخلاف جابه‌جایی، که اندازه‌اش فقط به فاصله‌ی مکان اولیه تا مکان ثانویه بستگی دارد، مسافت به مسیر پیموده‌شده نیز بستگی دارد.

نمونه ۵ اگر شناگری درازای استخری به طول $20\,m$ را در امتداد یک خط راست به‌صورت رفت‌وبرگشت طی کند و سر جای اولیه‌ی خود برگردد، مسافت طی‌شده توسط او برابر $40\,m$ و جابه‌جایی‌اش برابر صفر خواهد بود.

نکته۲ در صورتی که متحرک روی یک خط راست حرکت کند و تغییر جهت ندهد، مسافت و جابه‌جایی آن هم‌اندازه‌اند.

نکته۳ جابه‌جایی یک کمیت **برداری** است و در حرکت یک‌بعدی، ممکن است مثبت یا منفی باشد؛ اما مسافت کمیتی **نرده‌ای** و همواره مثبت است.



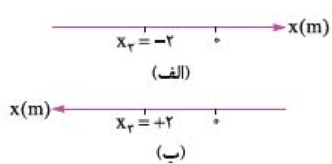
در شکل روبه‌رو، بردارهای مکان جناب A و جناب B را نشان داده‌ایم! واضح است که در SI، $\vec{r}_A = 2\vec{i}$ و $\vec{r}_B = 3\vec{i}$ است؛ به جهت حرکتشون هم ربطی نداره!

۲- **گزینه ۱** شکل بالا رو ببینید؛ *نه! چون من ببینم!!*

۳- **گزینه ۲** چون A در جهت محور x حرکت می‌کند، $\Delta x_A > 0$ و چون B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، $\Delta x_B < 0$ است. پس $\Delta\vec{r}_A$ در جهت محور x و $\Delta\vec{r}_B$ در خلاف جهت محور x است.

۴- **گزینه ۱** وقتی می‌خواهیم جابه‌جایی متحرک را در یک مسیر حساب کنیم، فقط ابتدا و انتهای مسیر متحرک برای ما مهم است و *این‌که متحرک در اواسط مسیر کجا رفته، با کی گشته و ... به ما ربطی نداره!!* بنابراین، بردار جابه‌جایی متحرک در انتقال از مکان x_1 به مکان x_2 و در SI برابر است با:

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} = [-2 - (-3)]\,\vec{i} \;\rightarrow\; \Delta\vec{r} = \vec{i}$$



۵- **گزینه ۳** اولاً که جسم در نهایت، به مکان x_2 منتقل شده است و به فاصله‌ی ۲ متری مبدأ قرار دارد (یا ۳، یا ۴). ثانیاً وقتی می‌گوییم: «$x_2 = -2\,m$ است»، یعنی اگر از مبدأ، $2\,m$ در خلاف جهت محور x حرکت کنیم، به مکان x_2 می‌رسیم (شکل الف). حالا اگر جهت محور x عکس شود (شکل ب)، به این برداشت می‌رسیم که برای رسیدن به مکان x_2، این‌بار باید $2\,m$ در جهت محور x حرکت کنیم؛ یعنی در این شرایط، $x_2 = +2\,m$ و به زبان برداری $\vec{r}_2 = 2\vec{i}$ (در SI) است.

۶- **گزینه ۴** اندازه‌ی جابه‌جایی، برابر فاصله‌ی نقطه‌ی آغاز تا پایان حرکت است:

$$\Delta x = AB$$

اما مسافت (d) برابر طول کل مسیر حرکت است:

$$d = AC + CB \xrightarrow[(CB=AB)]{(AC=2AB)} d = 3AB \rightarrow d = 3\Delta x$$

۷- **گزینه ۴** شناگر در هر دقیقه مسافت $10\,m$ و در ۱۵ دقیقه مسافت $150\,m$ (یعنی $15\times 10\,m$) را طی می‌کند؛ این از مسافت! و اما جابه‌جایی: شناگر در مدت ۱۵ دقیقه، ۱۵بار طول استخر را طی می‌کند. از آن‌جا که شناگر در هر رفت‌وبرگشت، به نقطه‌ی شروع حرکتش می‌رسد، بعد از پیمودن ۱۴باره‌ی طول استخر (۷ رفت‌وبرگشت) به مکان اولیه و بار ۱۵اُم به انتهای دیگر استخر می‌رسد و به فاصله‌ی ۱۰ متری از مکان اولیه‌اش می‌رسد. (باز هم تأکید می‌کنم که جابه‌جایی به فاصله‌ی مستقیم مبدأ تا مقصد بستگی دارد و به طول مسیر طی‌شده بی‌اعتناست!)

۸- **گزینه ۲** به نظر من این تست، ساده‌ترین تست در تاریخ کنکورهای سراسریه!! با آوردن این تست، خواستم یک بحث مقدماتی رو در رابطه با نمودار مکان ـ زمان راه بندازم! همراه ما باشید!

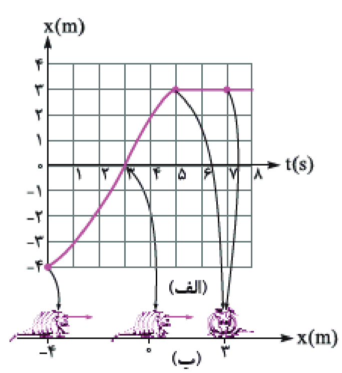
۲) مقدمه‌ای بر نمودار مکان ـ زمان (x ـ t)

از روی نمودار مکان ـ زمان یک متحرک، می‌توان مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط آن را به‌دست آورد.

۱ مکان در هر لحظه: این کم‌ترین انتظار ما از نمودار مکان ـ زمان است!

نمونه ۱ شکل ۴ نمودار مکان ـ زمان جانوری را نشان می‌دهد که روی محور x در حال حرکت است. از روی این نمودار، می‌فهمیم که جانور ...

- در مبدأ زمان ($t_0 = 0$)، در مکان $x_0 = -4\,m$ بوده است.
- در لحظه‌ی $t = 3\,s$، از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور کرده است.
- تا لحظه‌ی $t = 3\,s$، در قسمت منفی محور x و از این لحظه به بعد، در قسمت مثبت محور x بوده است.
- تا لحظه‌ی $t = 5\,s$، در جهت محور x حرکت کرده است.
- از لحظه‌ی $t = 5\,s$ به بعد، در مکان $x = 3\,m$ جاخوش کرده است!



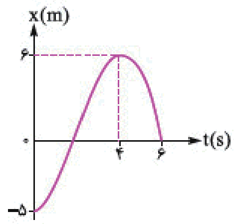
شکل ۴: الف) نمودار مکان ـ زمان یک جانور.
ب) نمایش مسیر حرکت جانور.

خیلی از دانش‌آموزان، مسیر حرکت یک متحرک را با شکل نمودار مکان ـ زمان آن یکی می‌گیرند؛ اشتباه است! همان‌طور که در نمونه‌ی بالا می‌بینید، ممکن است نمودار مکان ـ زمان یک متحرک به شکل منحنی، اما مسیر حرکت آن یک خط راست باشد؛ خواهشاً بین این دو، فرق بگذارید!

۲ جابه‌جایی: واضح است که با در دست داشتن مکان متحرک در دو لحظه، می‌توان جابه‌جایی متحرک را در بین آن دو لحظه حساب کرد ($\Delta x = x_۲ - x_۱$).

۳ مسافت: اگر مجموع جابه‌جایی‌های متحرک در جهت مثبت را با اندازه‌ی مجموع جابه‌جایی‌های آن در جهت منفی جمع کنید، مسافت طی‌شده توسط متحرک به‌دست می‌آید.

نمونه۲ شکل ۵ نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که از مبدأ زمان تا لحظه‌ی $t_۱ = ۴s$ در جهت محور x و از این لحظه تا لحظه‌ی $t_۲ = ۶s$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک را در بازه‌ی زمانی $t_۰ = ۰$ تا $t_۱$ با $\Delta x_۱$ و در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ با $\Delta x_۲$ نشان می‌دهیم؛ داریم:



شکل ۵

$$\begin{cases} t_۰ = ۰ \rightarrow x_۰ = -۵\,m \\ t_۱ = ۴s \rightarrow x_۱ = ۶\,m \\ t_۲ = ۶s \rightarrow x_۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Delta x_۱ = x_۱ - x_۰ = ۶ - (-۵) = ۱۱\,m$$

$$\Delta x_۲ = x_۲ - x_۱ = ۰ - ۶ = -۶\,m$$

جابه‌جایی متحرک (Δx) در بازه‌ی زمانی $t_۰$ تا $t_۲$ برابر است با: $\Delta x = x_۲ - x_۰ = ۰ - (-۵) \rightarrow \Delta x = ۵\,m$

البته برای محاسبه‌ی Δx، می‌توانیم جابه‌جایی‌های مسیر را با هم جمع جبری کنیم: $\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۱۱ - ۶ \rightarrow \Delta x = ۵\,m$

برای محاسبه‌ی مسافت (d)، باید اندازه‌ی جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم: $d = \Delta x_۱ + |\Delta x_۲| = ۱۱ + ۶ \rightarrow d = ۱۷\,m$

نکته در نمونه‌ی ۲، تا لحظه‌ی $t = ۴s$ متحرک در جهت محور x و از لحظه‌ی $t = ۴s$ تا $t = ۶s$ متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین، متحرک در لحظه‌ی $t = ۴s$ تغییر جهت می‌دهد. نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی روی نمودار را نقاط اکسترمم نسبی می‌نامیم. متحرک در این نقاط (در نمودار مکان ـ زمان) تغییر جهت می‌دهد.

۹- **گزینه۱** حرکت مورچه را می‌توان به چهار مرحله تقسیم کرد:

الف در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۸s$، از مبدأ مکان ($x = ۰$) به مکان $x = ۴۰cm$ می‌رود؛ یعنی $+۴۰cm$ جابه‌جا می‌شود:

(الف)

$$\Delta x = x - x_۰ = ۴۰ - ۰ = ۴۰\,cm$$

ب در بازه‌ی زمانی $t = ۸s$ تا $t = ۱۲s$، در مکان $x = ۴۰cm$ قرار دارد و ساکن است.

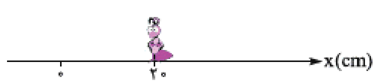
(ب)

پ در بازه‌ی زمانی $t = ۱۲s$ تا $t = ۱۴s$، از مکان $x_۱ = ۴۰cm$ به مکان $x_۲ = ۲۰cm$ منتقل می‌شود؛ یعنی $-۲۰cm$ جابه‌جا می‌شود:

(پ)

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۲۰ - ۴۰ = -۲۰\,cm$$

ت در بازه‌ی زمانی $t = ۱۴s$ تا $t = ۱۸s$، در مکان $x = ۲۰cm$ قرار می‌گیرد.



(ت)

با توجه به این صحبت‌ها، مورچه فقط در ۸ ثانیه‌ی اول، در جهت محور x حرکت می‌کند.

۱۰- **گزینه۱** به مدت ۲s و در بازه‌ی زمانی [۱۲s,۱۴s].

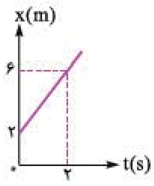
۱۱- **گزینه۲** به مدت ۸s و در بازه‌های زمانی [۸s,۱۲s] و [۱۴s,۱۸s].

۱۲- **گزینه۴** در تمام مدت ۱۸s، مورچه در مکان‌های $x > ۰$ است.

۱۳- **گزینه۴** یکی از مهارت‌های اولیه‌ای که باید در تجزیه و تحلیل نمودارهای خطی به آن برسید، تعیین سریع مختصات یک نقطه از نمودار با استفاده از شیب آن است.

۳) تعیین مختصات نقاط روی نمودارهای خطی با استفاده از مفهوم شیب

نمونه فرض کنید نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل الف است و می‌خواهیم مکان متحرک را در لحظه‌ی $t = ۵\,s$ تعیین کنیم. سه راه اصلی در پیش داریم؛ انتخاب می‌کنید!

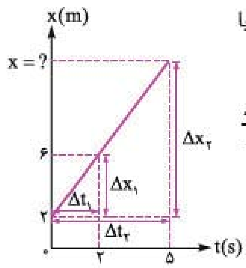


(الف)

۱ استفاده از معادله‌ی خط: شیب خط رو حساب می‌کنیم:
$$m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶-۲}{۲-۰} = ۲$$

با توجه به عرض از مبدأ نمودار $(x_۰ = ۲\,m)$، معادله‌ی خط رو می‌نویسیم:
$$x = mt + x_۰ = ۲t + ۲$$

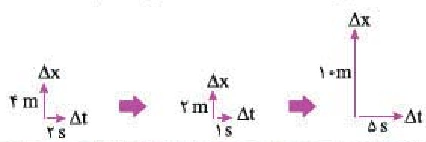
حالا لحظه‌ی $t = ۵\,s$ رو در معادله قرار می‌دیم:
$$x = ۲ \times ۵ + ۲ = ۱۲\,m$$



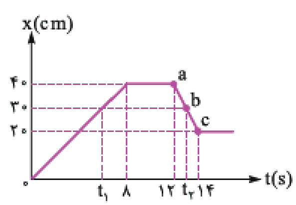
(ب)

۲ استفاده از تشابه مثلثاتی: نسبت تشابه بین مثلث‌هایی که ارتفاع و قاعده‌ی آن‌ها در شکل ب، با نمادهای Δx و Δt نشان داده شده، x را در لحظه‌ی $t = ۵\,s$ مشخص می‌کند:
$$\frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} \rightarrow \frac{۶-۲}{۲-۰} = \frac{x-۲}{۵-۰} \rightarrow \frac{x-۲}{۵} = ۲ \rightarrow x-۲ = ۱۰ \rightarrow x = ۱۲\,m$$

۳ استفاده از مفهوم شیب: شیب خط، ثابت است. پس نسبت تغییرات کمیت واقع بر محور قائم به تغییرات کمیت واقع بر محور افقی، مقداری است ثابت. شکل ب نشان می‌دهد که متحرک در مدت ۲ ثانیه، $۴\,m$ جابه‌جا شده است؛ یعنی هر ثانیه $۲\,m$ جابه‌جا می‌شود و در مدت ۵ ثانیه، $۱۰\,m$ جابه‌جا می‌شود و از مکان $x_۰ = ۲\,m$ به مکان $x = ۱۲\,m$ می‌رسد. این مطالب رو می‌تونیم به‌صورت رمزی و به شکل مقابل نشون بدیم:



با توجه به شکل مقابل، فاصله‌ی متحرک از مبدأ در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$، $۳۰\,cm$ شده. متحرک در مرحله‌ی اول $۴۰\,cm$ رو در $۸\,s$ طی می‌کنه؛ پس $۳۰\,cm$ رو در $۶\,s$ می‌ره.



جابه‌جایی (cm)	زمان (s)
۴۰	۸
۳۰	$t_۱$

$$\rightarrow t_۱ = \frac{۸ \times ۳۰}{۴۰} = ۶\,s$$

محاسبه‌ی $t_۲$ نیاز به این کارا نداره! نقطه‌ی b وسط پاره‌خط ac قرار داره (چون $x_b = \frac{x_a + x_c}{۲}$ است).

پس $t_۲$ هم وسط $t_a = ۱۲\,s$ و $t_c = ۱۴\,s$ قرار گرفته:
$$t_۲ = \frac{t_a + t_c}{۲} = \frac{۱۲+۱۴}{۲} = ۱۳\,s$$

۱۴- **گزینه۲** مورچه در لحظه‌ی $t = ۴\,s$ (که وسط لحظه‌های $t = ۰$ و $t = ۸\,s$ است) در مکان $x = ۲۰\,cm$ (که وسط مکان‌های $x = ۰$ و $x = ۴۰\,cm$ است) قرار می‌گیرد. پس:
$$\Delta x = x_{(t=۸\,s)} - x_{(t=۴\,s)} = ۴۰ - ۲۰ \rightarrow \Delta x = ۲۰\,cm$$

۱۵- **گزینه۳** دوچرخه‌سوار در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴\,s$ به اندازه‌ی $۴۰\,m$ و در بازه‌ی زمانی $t = ۶\,s$ تا $t = ۸\,s$ به اندازه‌ی $۲۰\,m$ در جهت محور x حرکت می‌کند که مجموع این دو جابه‌جایی می‌شود $۶۰\,m$ در جهت محور x.

۱۶- **گزینه۳** با توجه به نمونه‌ی ۲ درس‌نامه‌ی ۲، جابه‌جایی را در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۸\,s$ با $\Delta x_۱$ و در بازه‌ی زمانی $t = ۸\,s$ تا $t = ۱۴\,s$ با $\Delta x_۲$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:
$$\Delta x_۱ = x_{(t=۸\,s)} - x_۰ = ۶۰ - ۰ = ۶۰\,m$$
$$\Delta x_۲ = x_{(t=۱۴\,s)} - x_{(t=۸\,s)} = ۰ - ۶۰ = -۶۰\,m \rightarrow d = \Delta x_۱ + |\Delta x_۲| = ۶۰ + ۶۰ \rightarrow d = ۱۲۰\,m$$

۱۷- **گزینه۳** هر دو متحرک روی محور x از مکان ۰ تا $x_۱$ جابه‌جا شده‌اند؛ تغییر جهت نداده‌اند؛ پس جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط دو متحرک برابر است:
$$\Delta x_A = \Delta x_B \quad , \quad d_A = d_B$$

۱۸- **گزینه۱** جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۱\,s$:
$$\Delta x_۱ = x_{(t=۱\,s)} - x_۰ = ۰ - ۴ = -۴\,m$$

جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t = ۱\,s$ تا $t = ۲\,s$:
$$\Delta x_۲ = x_{(t=۲\,s)} - x_{(t=۱\,s)} = ۴ - ۰ = ۴\,m$$

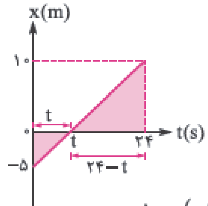
جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t = ۲\,s$ تا $t = ۳\,s$:
$$\Delta x_۳ = x_{(t=۳\,s)} - x_{(t=۲\,s)} = ۰ - ۴ = -۴\,m$$

کل جابه‌جایی: $\Delta x = x_{(t=۳\,s)} - x_۰ = ۰ - ۴ = -۴\,m$ یا $\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳ = -۴ + ۴ - ۴ = -۴\,m$

و مسافت کل: $d = |\Delta x_۱| + \Delta x_۲ + |\Delta x_۳| = ۴ + ۴ + ۴ = ۱۲\,m$

و نسبت این دو: $\frac{\Delta x}{d} = \frac{-۴}{۱۲} \rightarrow \frac{\Delta x}{d} = -\frac{۱}{۳}$

۱۹- **گزینه۲** **(استفاده از تشابه مثلثاتی):** با توجه به شکل مقابل، متحرک در لحظه‌ی t، از مبدأ مکان عبور می‌کند. برای محاسبه‌ی t می‌توانیم بین مثلث‌های مشخص‌شده در شکل، نسبت تشابه بنویسیم:



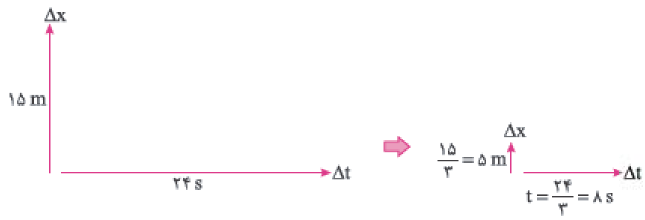
$$\frac{۱۰}{۵} = \frac{۲۴-t}{t} \rightarrow ۲ = \frac{۲۴-t}{t} \rightarrow ۲t = ۲۴ - t \rightarrow ۳t = ۲۴ \rightarrow t = ۸\,s$$

(استفاده از معادله‌ی خط): متحرک در مدت $۲۴\,s$، $۱۵\,m = ۱۰ - (-۵)$ جابه‌جا شده؛ پس: $m = \frac{۱۰-(-۵)}{۲۴-۰} = \frac{۱۵}{۲۴} = \frac{۵}{۸}$ (شیب خط)

عرض از مبدأ نمودار، برابر $x_۰ = -۵\,m$ است و: $x = mt + x_۰ = \frac{۵}{۸}t - ۵$

حالا باید ببینیم در چه لحظه‌ای $x = ۰$ می‌شود: $۰ = \frac{۵}{۸}t - ۵ \rightarrow \frac{۵}{۸}t = ۵ \rightarrow t = ۸\,s$

تیزباش بهترین کار اینه که ذهنی حساب کنی! متحرک در مدت $۲۴\,s$، $۱۵\,m$ جابه‌جا می‌شه و در مدت t ثانیه، $۵\,m$ (از مکان $x_۰ = -۵\,m$ می‌رسه به مکان $x = ۰$). با توجه به شیب ثابت نمودار، نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ثابت می‌ماند؛ پس t برابر $۸\,s$ است. من از نوشتن رمزیِ این تناسب، خیلی خوشم می‌یاد! ببین!



۲۰- **گزینه۴** متحرک همیشه در جهت محور x حرکت می‌کنه $(\Delta x > ۰)$ و هیچ‌وقت تغییر جهت نمی‌ده.

۲۱- **گزینه۲** در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ (نقاط اکسترمم نسبی نمودار)، سوی حرکت تغییر می‌کند.

۲۲- **گزینه۳** در بازه‌های زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ و $t_۳$ تا $t_۴$ که نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

۲۳- **گزینه۴** لطفاً به یک درس‌نامه‌ی دیگر توجه بفرمایید.

۴) معادله‌ی حرکت

◂ معادله‌ی ریاضی‌ای که مکان متحرک را به‌صورت تابعی از زمان بیان می‌کند و توسط آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه تعیین کرد، «معادله‌ی مکان ـ زمان» یا «معادله‌ی حرکت» نام دارد. نمایش معادله‌ی حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت $x = f(t)$، نشان می‌دهد که مکان متحرک تابع زمان حرکت است.

نمونه۱ فرض کنید معادله‌ی حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = t^۲ - ۲t + ۱$ است. از این معادله می‌فهمیم که متحرک ...

- در مبدأ زمان $(t_۰ = ۰)$ در مکان $x_۰ = ۱\,m$ بوده است. $t_۰ = ۰ \rightarrow x_۰ = ۰^۲ - ۲\times ۰ + ۱ = ۱\,m$
- در لحظه‌ی $t_۱ = ۱\,s$ از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور کرده است. $t_۱ = ۱\,s \rightarrow x_۱ = ۱^۲ - ۲\times ۱ + ۱ = ۰$
- در لحظه‌ی $t_۲ = ۲\,s$ به مکان اولیه‌اش برگشته است. $t_۲ = ۲\,s \rightarrow x_۲ = ۲^۲ - ۲\times ۲ + ۱ = ۱\,m \rightarrow x_۲ = x_۰$

نکته۱ به مکان متحرک در مبدأ زمان، می‌گوییم «مکان اولیه». برای محاسبه‌ی مکان اولیه، باید x را در لحظه‌ی $t = ۰$ به‌دست آوریم.

توجه **منظور از مبدأ زمان، لحظه‌ی شروع مطالعه‌ی حرکت است**؛ دقت! دقت! گفتم لحظه‌ی شروع مطالعه‌ی حرکت؛ نه لحظه‌ی شروع حرکت! این عبارت‌ها به یک معنا نیستند. (مثلاً ممکن است حرکتی را از اواسط آن، مورد بررسی قرار دهیم؛ در این صورت، مبدأ زمان نسبت به لحظه‌ی شروع حرکت، تأخیر دارد!)

نکته۲ در حرکت بر محور x، متحرک به تعداد دفعاتی که $x = ۰$ می‌شود، از مبدأ مکان عبور می‌کند.

نکته۳ برای محاسبه‌ی جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2، مکان متحرک در این دو لحظه رو به‌دست می‌یاریم و از هم کم می‌کنیم $(\Delta x = x_2 - x_1)$.

نمونه۲ در نمونه‌ی ۱، جابه‌جایی متحرک بین دو لحظه‌ی $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ می‌شود: $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 0 \rightarrow \Delta x = 1\,m$

یکایک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی مکان و زمان حرکت را بیان می‌کند؛ نه رابطه‌ی سرعت و زمان حرکت را!

۲ قیافش که نشون می‌ده یک معادله‌ی حرکته! اما حرکتی با این معادله تا به حال دیده نشده! چرا که به ازای هر t، دوتا x به‌دست می‌آید (یکی مثبت، یکی منفی)، یعنی متحرک در هر لحظه، می‌تواند در دو جا حضور داشته باشد! می‌شه؟!

۳ *دل بندم!* مکان ـ زمان؛ نه سرعت ـ مکان!

۴ این معادله، مکان را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد؛ *پس فور فورشه!*

۲۴- **گزینه۴** سه گزینه‌ی اول، معادله‌های حرکت اجسامی را نشان می‌دهند که بر روی محور x حرکت می‌کنند. دقت کنید که معادله‌ی حرکت جسمی که روی یک خط راست حرکت می‌کند، می‌تواند معادله‌ی ریاضی ساده‌ای داشته باشد (مثل $x = 2t$)؛ می‌تواند معادله‌ی ریاضی پیچیده‌ای داشته باشد (مثل $x = \log t^2$!)؛ در هر دو صورت، متحرک از صراط مستقیم (در این مثال‌ها، محورx) خارج نمی‌شود!!

۲۵- **گزینه۴** مکان متحرک در لحظه‌ی $t = 1s$ برابر است با: $x = t^2 - 2t - 3 = 1^2 - 2\times1 - 3 = -4\,m$

پس متحرک در لحظه‌ی $t = 1s$ در فاصله‌ی ۴ متری مبدأ قرار می‌گیرد (دقت کنید که همواره فاصله با عددی مثبت بیان می‌شود). $|x| = 4\,m$

۲۶- **گزینه۲** با جای‌گذاری لحظه‌ی $t_0 = 0$ در معادله‌ی حرکت، مکان اولیه‌اش معلوم می‌شود: $x_0 = 0^2 - 2\times0 - 3 = -3\,m$

صورت تست در واقع، فاصله‌ی مکان‌های x تا x_0 را از ما می‌خواهد: $|\Delta x| = |x - x_0| = |-4 - (-3)| \rightarrow |\Delta x| = 1\,m$

۲۷- **گزینه۲** می‌خواهیم ببینیم چند ثانیه پس از لحظه‌ی $t = 0$، مجدداً $x = x_0 = -3\,m$ می‌شود. کافی است ریشه‌های معادله‌ی $x = -3\,m$ را به‌دست آوریم: $x = t^2 - 2t - 3 = -3 \rightarrow t^2 - 2t = 0 \rightarrow t = 0$ ☒ , $t = 2s$ ☑

۲۸- **گزینه۱** از حل معادله‌ی $x = 0$، لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ به‌دست می‌آید.

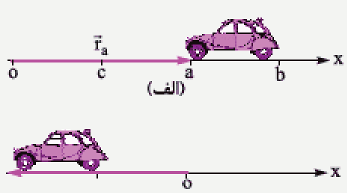
$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \rightarrow t = -1s$ ☒ , $t = 3s$ ☑

توجه داشته باشید که ما حرکت را از لحظه‌ی $t = 0$ به بعد بررسی می‌کنیم و به زمان‌های قبل از آن، حتی اگر حرکتی وجود داشته باشد، کاری نداریم (یعنی $t \in R^+$). بنابراین، متحرک فقط یک‌بار (در لحظه‌ی $t = 3s$) از مبدأ مکان عبور می‌کند. *(اونایی که ۳ رو زدن! طراح تست که لحظه‌ی عبور از مبدا رو نخواسته! این‌طور اشتباه‌ها خیلی سوختن داره! حواستونو بیشتر جمع کنید!)*

۲۹- **گزینه۱** یک متن آموزشی و ادامه‌ی ماجرا!

۵) شرط تغییر جهت بردار مکان

فرض کنید همانند شکل ۶ـ الف، اتومبیلی در مکان $x = a$ قرار دارد. بردار مکان سپر جلوی اتومبیل $(\vec{r}_a)$ در جهت محور x است. اگر اتومبیل در مکان‌های مثبت b یا c قرار بگیرد، باز هم بردار مکان در جهت محور x خواهد بود و تغییر جهت نمی‌دهد. پس چه موقعی بردار مکان اتومبیل تغییر جهت می‌دهد؟ زمانی که مطابق شکل ۶ـ ب، از مبدأ مختصات عبور کند. در این صورت، بردار مکان اتومبیل در خلاف جهت محور x خواهد بود.



(ب)
شکل ۶

نتیجه شرط تغییر جهت بردار مکان یک متحرک، آن است که متحرک از مبدأ مختصات عبور کند.

نمونه فرض کنید معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. این معادله را می‌توان به‌صورت $x = (t-1)(t-3)$ نوشت و ریشه‌های آن را حساب و مطابق جدول مقابل تعیین علامت کرد.

t (s)	۰		۱		۳		∞
x		+		−		+	

جدول نشان می‌دهد که متحرک دوبار (در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 3s$) از مبدأ مکان عبور کرده؛ پس بردار مکان متحرک دوبار تغییر جهت داده است.

معادله‌ی حرکت ذره‌ی مطرح‌شده در صورت تست ۲۹، برابر است با: $x = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

این ذره هرگز در مکان‌های منفی قرار نمی‌گیرد $(x \geq 0)$. پس، بردار مکان آن مادام‌العمر در جهت محور x است و هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

۳۰- **گزینه۴** **در لحظه‌ی به‌هم‌رسیدن، دو متحرک در یک مکان قرار می‌گیرند؛** یعنی xشان برابر می‌شود؛ پس باید ریشه‌های قابل پذیرش معادله‌ی $x_1 = x_2$ را به‌دست آوریم. $x_2 = x_1 \rightarrow t^2 + 6t + 10 = -t^2 + 2t \rightarrow 2t^2 + 4t + 10 = 0$

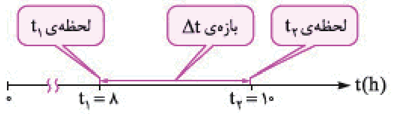
Δی معادله‌ی بالا منفی است $(\Delta = 4^2 - 4\times2\times10 = -64)$. پس هیچ لحظه‌ای پیدا نمی‌شود که به ازای آن، دو متحرک در کنار یکدیگر دیده شوند.

۳۱- **گزینه‌ی ۱** بهتر است به بهانه‌ی حل این تست، گریزی به مفهوم بازه‌ی زمانی بزنیم.

۶) مفهوم زمان

نمونه‌ی ۱ فرق بین لحظه و بازه‌ی زمانی را مشخص می‌کند.

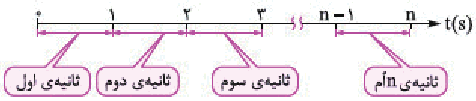
نمونه ۱ فرض کنید رأس ساعت ۸ وارد مدرسه شده‌اید و رأس ساعت ۱۰ (به *دلیل مشغله‌ی کاری!*) مدرسه را ترک می‌کنید. مدت زمان حضور شما در مدرسه، ۲ h به‌طول می‌انجامد (از لحظه‌ی $t_1 = 8\,h$ شروع و تا لحظه‌ی $t_2 = 10\,h$ ادامه می‌یابد.) به عبارت دیگر، بازه‌ی زمانی حضور شما در کلاس، تمام لحظه‌های بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 را شامل می‌شود و مدت آن برابر است با: $\Delta t = t_2 - t_1 = 10 - 8 \rightarrow \Delta t = 2\,h$



شکل ۷. هر لحظه با یک نقطه روی محور زمان نشان داده می‌شود. بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$، همه‌ی لحظه‌های بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 را دربرمی‌گیرد.

در شکل ۷، لحظه‌های t_1، t_2 و بازه‌ی زمانی Δt را روی محور زمان نمایش داده‌ایم.

توجه ۱ منظور از ثانیه‌ی اول حرکت، بازه‌ی زمانی $t_0 = 0$ تا $t = 1\,s$؛ منظور از ثانیه‌ی دوم، بازه‌ی زمانی $t = 1\,s$ تا $t = 2\,s$ و ... است. با این حساب، ثانیه‌ی nاُم حرکت، بازه‌ی زمانی‌ای است که از لحظه‌ی $t = n-1$ تا $t = n$ (هر دو برحسب ثانیه) طول می‌کشد (شکل ۸).



شکل ۸. نمایش بازه‌های زمانی یک‌ثانیه‌ای بر روی محور زمان.

توجه ۲ منظور از t ثانیه‌ی nاُم، بازه‌ی زمانی‌ای است که از لحظه‌ی $(n-1)t$ ثانیه شروع و در لحظه‌ی nt ثانیه خاتمه می‌یابد.

نمونه ۲ دو ثانیه‌ی اول حرکت، یعنی از لحظه‌ی $t = 0$ تا $t = 2\,s$؛ دو ثانیه‌ی دوم حرکت، یعنی از لحظه‌ی $t = 2\,s$ تا $t = 4\,s$ و در حالت کلی، دو ثانیه‌ی nاُم یعنی از لحظه‌ی $t = 2n-2$ تا $t = 2n$ (هر دو برحسب ثانیه).

تیزباش وقتی می‌گن ۲ ثانیه‌ی دهم، سریع ۲ رو ضرب در ۱۰ کن (۲۰)، حالا ۲تا ازش کم کن (۱۸)؛ پس می‌شه بازه‌ی زمانی $t = 18\,s$ تا $t = 20\,s$. حالا شما بگید: ۴ ثانیه‌ی پنجم از کِی تا کِی می‌شه؟ بله! از لحظه‌ی $t = 16\,s$ تا $t = 20\,s$ ($20 - 4 = 16\,s$ و $4 \times 5 = 20\,s$).

مکان متحرک در مبدأ زمان ($t_0 = 0$) برابر است با: $x_0 = -2\times 0^3 + 6\times 0 + 8 = 8\,m$

و مکان آن در لحظه‌ی $t_1 = 1\,s$: $x_1 = -2\times 1^3 + 6\times 1 + 8 = 12\,m$

و مکان آن در لحظه‌ی $t_2 = 2\,s$: $x_2 = -2\times 2^3 + 6\times 2 + 8 = 4\,m$

جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی اول (بازه‌ی زمانی t_0 تا t_1) می‌شود: $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 12 - 8 = 4\,m$

جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی دوم (بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2) می‌شود: $\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 4 - 12 = -8\,m$

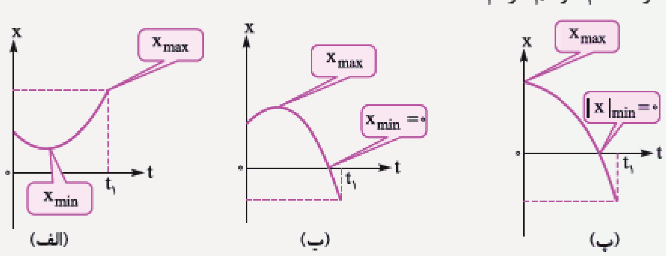
حالا خواسته‌ی طراح تست را اجابت می‌کنیم! $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{-8}{4} \rightarrow \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -2$

۳۲- **گزینه‌ی ۲** جنبه‌ی ریاضی این تست‌ها قوی‌تر از جنبه‌ی فیزیکی اون‌هاست! در متن زیر، روش حل این مدل تست‌ها را توضیح داده‌ایم.

۷) استراتژی محاسبه‌ی بیشترین و کم‌ترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان

در شکل ۹، نمودار مکان ـ زمان چند متحرک فرضی رو در مدت t_1 رسم کردم.

? با توجه به این شکل‌ها، در چه لحظه‌هایی فاصله‌ی متحرک از مبدأ ($|x|$)، بیشینه یا مینیمم می‌شه؟



شکل ۹

پاسخ فاصله‌ی متحرک از مبدأ در شکل ۹ـ پ در اولین لحظه (لحظه‌ی $t = 0$)، در شکل ۹ـ الف در آخرین لحظه‌ی بررسی حرکت (لحظه‌ی t_1) و در شکل ۹ـ ب در نقطه‌ی اکسترمم، بیشینه شده. یعنی برای تعیین x_{max} باید مکان متحرک رو در سه لحظه با هم مقایسه کنی: اول ـ آخر ـ اکسترمم.

برای محاسبه‌ی $|x|_{min}$ هم همین‌کار رو می‌کنیم؛ فقط حواستون رو جمع کنید که اگه مطابق شکل‌های ۹ـ ب و ۹ـ پ متحرک از مبدأ عبور کنه، $|x|_{min} = 0$ می‌شه.

مثال **معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^2-2t+6$ است. کم‌ترین و بیشترین فاصله‌ی این متحرک از مبدأ مکان تا لحظه‌ی $t=3\,s$ چند متر است؟**

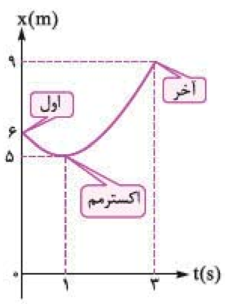
پاسخ مفهومی‌ترین راه برای حل این سؤال، استفاده از نمودار مکان ـ زمان است. برای رسم نمودار مکان ــ زمان یک معادله‌ی درجه‌ی ۲، کافیه مختصات سه‌تا نقطه‌ی مهم رو معلوم کنی: اول ـ آخر ـ اکسترمم.

۱ اول: در لحظه‌ی $t=0$: $x_0=0^2-2\times0+6=6\,m$

۲ آخر: در لحظه‌ی $t=3\,s$: $x=3^2-2\times3+6=9-6+6=9\,m$

۳ اکسترمم: با توجه به این‌که x تابع درجه‌ی دوم از زمان است، نمودار $x-t$ متحرک به شکل یک سهمی است و چون ضریب عبارت درجه ۲ (یعنی ضریب t^2) مثبت است، این سهمی دارای نقطه‌ی مینیمم است. برای تعیین مختصات نقطه‌ی مینیمم، می‌تونی از فرمول آشنای $t=\frac{-b}{2a}$ استفاده کنی:

$$\begin{cases}x=t^2-2t+6\\y=ax^2+bx+c\end{cases}\xRightarrow{(a=1,\,b=-2)}t=\frac{-(-2)}{2\times1}=1\,s\rightarrow x=1^2-2\times1+6=1-2+6=5\,m$$



ولی بهتره از مفهوم مشتق استفاده کنی. شیب خط مماس بر نمودار در رأس سهمی برابر صفره؛ بنابراین، مشتق تابع (x) نسبت به متغیر (t) در رأس سهمی برابر صفر است.

$$\frac{dx}{dt}=0\ (\text{مشتق تابع x نسبت به متغیر t})\rightarrow 2t-2=0\rightarrow(t=1\,s\ ,\ x=5\,m)$$

حالا نمودار مکان ـ زمان متحرک رو رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، کم‌ترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان $5\,m$ و بیشترین فاصله‌ی آن از مبدأ (تا لحظه‌ی $t=3\,s$)، $9\,m$ است:

$$x_{min}=5\,m\ ,\ x_{max}=9\,m$$

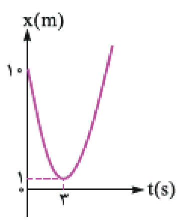
تیزباش لازم نیست حتماً نمودار رسم کنی! مختصات x در لحظه‌ی اول، آخر و اکسترمم رو که حساب کردی، ببین کدوم x از بقیه کم‌تر و کدوم x از بقیه بیشتره.

x رو به شکلی بنویس که از دل اون یک اتحاد (اتحاد دوم) و یک عدد ثابت بیرون بیاد! مطمئنم این کار را قبلاً در درس ریاضی بارها انجام داده‌اید! ببینید:

$$x=t^2-2t+6=(t^2-2t+1)+5=(t-1)^2+5$$

x زمانی مینیمم است که عبارت داخل پرانتز بالا صفر بشه: $t=1\,s:\ t-1=0\rightarrow x_{min}=5\,m$

و وقتی ماکزیمم باشد که t ماکزیمم باشد. یعنی در لحظه‌ی $t=3\,s$: $t=3\,s:\ x=3^2-2\times3+6\rightarrow x_{max}=9\,m$



برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) یک تابع درجه‌ی ۲، می‌توان مشتق تابع را نسبت به متغیر، مساوی صفر قرار داد؛ یعنی:

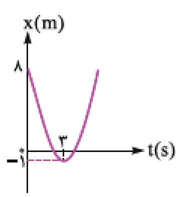
$$\frac{dx}{dt}=2t-6=0\rightarrow2t=6\rightarrow t=3\,s\rightarrow x_{min}=3^2-6\times3+10=9-18+10\rightarrow x_{min}=1\,m$$

نمودار مکان ـ زمان متحرک هم به وضوح، جواب بالا را تأیید می‌کند!

x را به شکل مجموع یک اتحاد و یک عدد ثابت می‌نویسیم:

$$x=t^2-6t+10=(t^2-6t+9)+1=(t-3)^2+1\xrightarrow{(t=3\,s\ \rightarrow\ t-3=0)}x_{min}=1\,m$$

۳۳- **گزینه ۱** این‌بار تعیین مختصات نقطه‌ی اکسترمم را در دستور کار خود قرار می‌دهیم:



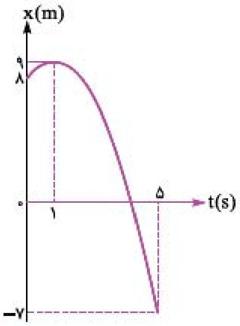
$$\frac{dx}{dt}=2t-6=0\rightarrow2t=6\rightarrow t=3\,s\rightarrow x=3^2-6\times3+8=9-18+8=-1\,m$$

یه‌دفعه عجله نکنی ۲ رو بزنی!

مکان اولیه‌ی متحرک $x_0=8\,m$ است و برای رسیدن به مکان $x=-1\,m$، قطعاً از مبدأ عبور می‌کند. پس $|x|_{min}=0$ است؛ برای درک بهتر مطلب، نمودار مکان ـ زمان متحرک رو هم براتون رسم کردم!

$$x=t^2-6t+8=(t^2-6t+9)-1=(t-3)^2-1$$

در رابطه‌ی بالا، اگر به‌جای عدد «۱-» یک عدد مثبت قرار داشت، امکان نداشت x برابر صفر بشه؛ ولی حالا که یک عدد منفی در کنار عبارت $(t-3)^2$ قرار گرفته، x دوبار صفر می‌شه؛ یک‌بار قبل از لحظه‌ی $t=3\,s$ (در لحظه‌ی $t=2\,s$) و یک‌بار بعد از لحظه‌ی $t=3\,s$ (در لحظه‌ی $t=4\,s$).



۳۴- گزینه۳ ریشه‌ی مشتق معادله، نقطه‌ی اکسترمم نمودار را مشخص می‌کند.

$$\frac{dx}{dt}=-۲t+۲=۰ \rightarrow t=۱s \rightarrow x=-۱^۲+۲\times۱+۸=۹\,m$$

با توجه به نمودار نیز، بیشترین فاصله‌ی ذره از مبدأ مکان در ۵ ثانیه‌ی اول، ۹ m است. $x_{max}=۹\,m$

$$x=-t^۲+۲t+۸=-(t^۲-۲t-۸)=-(t^۲-۲t+۱)+۹=۹-(t-۱)^۲$$

بیشترین فاصله‌ی ذره از مبدأ در مکان‌های مثبت برابر است با: $t=۱s: t-۱=۰ \rightarrow x_{max}=۹\,m$

و در مکان‌های منفی: $t=۵s: x=-۵^۲+۲\times۵+۸=-۲۵+۱۰+۸=-۷\,m \rightarrow |x|=۷\,m$

یادتون نره که دعوا بین سه‌تا نقطه‌س: اول، آخر، اکسترمم که در این تست، نقطه‌ی اکسترمم بیشترین x رو داشت.

۳۵- گزینه۴ درس‌نامه‌ی بعدی به بررسی مفهوم سرعت متوسط می‌پردازد.

۸) سرعت متوسط

به نسبت جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی یک متحرک، می‌گوییم «سرعت متوسط» و مقدار آن را با $\bar{v}$ نشان می‌دهیم. بنابراین، در حرکت یک‌بعدی بر روی محور x، رابطه‌ی ۲ برقرار است. (رابطه‌ی ۲) $\boxed{\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}}$

توجه یکای سرعت متوسط در SI، «متر بر ثانیه (m/s)» است؛ البته متداول‌ترین یکایی که ما ـ در زندگی روزمره ـ برای بیان سرعت استفاده می‌کنیم، «کیلومتر بر ساعت (km/h)» است. نحوه‌ی تبدیل این دو یکا را در نمونه‌های ۱ و ۲ ملاحظه بفرمایید.

نمونه۱ فرض کنید سرعت متوسط اتومبیلی ۷۲ km/h است. با توجه به این‌که هر کیلومتر معادل ۱۰۰۰ متر و هر ساعت معادل ۳۶۰۰ ثانیه است، سرعت اتومبیل برحسب متر بر ثانیه برابر است با:

$$\bar{v}=۷۲\frac{km}{h}=۷۲\times\frac{۱۰^۳\,m}{۳۶۰۰\,s}=۷۲\times\frac{۱}{۳/۶}\,m/s \rightarrow \bar{v}=۲۰\,m/s$$

نمونه۲ فرض کنید سرعت متوسط اتومبیلی ۱۰ m/s است. این سرعت برحسب کیلومتر بر ساعت برابر است با:

$$\bar{v}=۱۰\frac{m}{s}=۱۰\times\frac{۱۰^{-۳}\,km}{\frac{۱}{۳۶۰۰}\,h}=۱۰\times۳/۶\,km/h \rightarrow \bar{v}=۳۶\,km/h$$

نتیجه برای تبدیل یکای km/h به m/s، سرعت مورد نظر را تقسیم بر ۳/۶ و برای تبدیل یکای m/s به km/h، سرعت مورد نظر را ضرب در ۳/۶ می‌کنیم.

تیزباش بالای ۹۰٪ تست‌هایی که در اون‌ها نیاز به تبدیل واحد km/h به m/s و برعکس وجود داره، سرعت متحرک برحسب m/s، مضرب درستی از ۵ و سرعت متحرک برحسب km/h، مضرب درستی از ۱۸ است. توجه کنید که ۵ m/s = ۱۸ km/h است و برای تبدیل سریع‌تر این دو واحد، می‌تونید از این تساوی استفاده کنید. اگر هم که مقادیر جدول ۱ رو به‌خاطر بسپرید که چه بهتر!

v (m/s)	v (km/h)
۵	۱۸
۱۰	۳۶
۱۵	۵۴
۲۰	۷۲
۲۵	۹۰
۳۰	۱۰۸

جدول ۱

نکته از آن‌جا که Δt همواره مثبت است،[1] علامت $\bar{v}$ تابع علامت Δx است. اگر متحرک در جهت محور x جابه‌جا شود، $\bar{v}>۰$ و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، $\bar{v}<۰$ است.

۱ - هیچ‌گاه نمی‌توان زمان را به عقب بازگرداند. (به‌جز در فیلم‌های تخیلی!!) پس همیشه $t_۲>t_۱$ و $\Delta t>۰$ است.

«آقا! ما قهرمان شنای المپیک رو می‌شناسیم! رفیقمه!! اون‌قدر سرعت متوسطش زیاده! سه‌سوته طول یک استخر رو می‌ره و برمی‌گرده!!»

جمله‌ی فوق اشتباه است! چون پس از بازگشت به نقطه‌ی اولیه، جابه‌جایی و در نتیجه، سرعت متوسط شناگر صفر می‌شود!

۳۶- گزینه۳ اگر محور x را در جهت جابه‌جایی شناگر در مدت رفت در نظر بگیریم، سرعت متوسط او در این مدت برابر است با:

$$\bar{v}_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{۴۰}{۲۰}=۲\,m/s$$

چون شناگر مسیرِ آمده را در جهت عکس برمی‌گردد، جابه‌جایی او در مسیر برگشت، منفیِ جابه‌جایی‌اش در مسیر رفت است؛ به این معنی که $\Delta x_2=-\Delta x_1=-۴۰\,m$ می‌باشد. پس:

$$\bar{v}_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\frac{-۴۰}{۲۵}=-۱/۶\,m/s \Rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}=\frac{۲}{-۱/۶} \rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}=-\frac{۵}{۴}$$

توجه اگر محور x را در جهت جابه‌جایی شناگر در مسیر برگشت انتخاب کنیم، علامت $\bar{v}_1$، منفی و علامت $\bar{v}_2$، مثبت می‌شود؛ اما در جواب نهایی تغییری حاصل نمی‌شود.

۳۷- گزینه۴ زمان سپری‌شده در جابه‌جایی اتومبیل از نقطه‌ی A تا B برابر است با:

$$\Delta t=t_2-t_1=۲۰-۱۰=۱۰\,s$$

بنابراین، سرعت متوسط اتومبیل در مسیر AB برابر است با:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_B-x_A}{\Delta t}=\frac{۲۰۰-(-۱۰۰)}{۱۰}=\frac{۳۰۰}{۱۰} \rightarrow \bar{v}=۳۰\,m/s$$

۳۸- گزینه۲ مدت زمانی را که طول می‌کشد تا اتومبیل از A تا o جابه‌جا شود، با Δt_1 و زمان جابه‌جایی از o تا B را با Δt_2 نشان می‌دهیم. زمان جابه‌جایی از A تا B (یعنی Δt) برابر مجموع زمان‌های این دو بازه خواهد بود:

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=۱۰+۲۰=۳۰\,s$$

بنابراین، سرعت متوسط اتومبیل در مسیر AB می‌شود:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_B-x_A}{\Delta t}=\frac{۲۰۰-(-۱۰۰)}{۳۰}=\frac{۳۰۰}{۳۰} \rightarrow \bar{v}=۱۰\,m/s$$

۹) چه وقت زمان‌ها رو با هم جمع می‌کنیم و چه وقت از هم کم؟!

طول مدت بازه‌ی زمانی بین لحظه‌های t_1 و t_2، برابر اندازه‌ی تفاضل این دو لحظه از یکدیگر است $(\Delta t=t_2-t_1)$؛ اما اگر حرکتی در چند بازه‌ی زمانی (متوالی) صورت بگیرد، کل زمان حرکت، برابر مجموع زمان‌های این بازه‌هاست $(\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2+\cdots+\Delta t_n)$.

نمونه فرض کنید متحرکی نصف مسیری رو در مدت $\Delta t_1=۱۰\,s$ و نصف دیگرش رو در مدت $\Delta t_2=۳۰\,s$ طی می‌کند. کل زمان حرکت متحرک می‌شه:

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=۱۰+۳۰ \rightarrow \Delta t=۴۰\,s$$

حالا اگر متحرک همون مسیر رو بین دو لحظه‌ی $t_1=۱۰\,s$ و $t_2=۳۰\,s$ طی کند، مدت زمان حرکتش می‌شه:

$$\Delta t=t_2-t_1=۳۰-۱۰ \rightarrow \Delta t=۲۰\,s$$

۳۹- گزینه۲

$$\bar{v}=۷۲\,km/h=۷۲\times\frac{۱۰۰۰\,m}{۳۶۰۰\,s}=\frac{۷۲}{۳/۶}\,m/s=۲۰\,m/s$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow ۲۰=\frac{۳۶۰۰}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=۱۸۰\,s=۳\times۶۰\,s \rightarrow \Delta t=۳\,min$$

۴۰- گزینه۱ منظور از ۵ ثانیه‌ی اول، بازه‌ی زمانی بین دو لحظه‌ی $t_0=۰$ و $t=۵\,s$ است. ابتدا جابه‌جایی متحرک را در این بازه‌ی زمانی، حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} t_0=۰ \rightarrow x_0=۰/۲۵+\sin ۰=۰/۲۵+۰=۰/۲۵\,m \\ t=۵\,s \rightarrow x=۰/۲۵+\sin ۵\pi=۰/۲۵+۰=۰/۲۵\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x-x_0=۰/۲۵-۰/۲۵=۰$$

خب؛ مطابق رابطه‌ی ۲، وقتی جابه‌جایی متحرک صفر باشد، سرعت متوسط آن نیز صفر است.

۴۱- گزینه۲

$$\begin{cases} t_1=۱\,s \rightarrow x_1=۵\times۱^2-۲=۳\,m \\ t_2=۲\,s \rightarrow x_2=۵\times۲^2-۲=۱۸\,m \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{۱۸-۳}{۲-۱}=\frac{۱۵}{۱} \rightarrow \bar{v}=۱۵\,m/s$$

۴۲- گزینه۳ سرعت متوسط متحرک هنگامی صفر می‌شود که متحرک برگردد سر جای اولیه‌اش. معادله‌ی حرکت متحرک نشان می‌دهد که متحرک در لحظه‌ی $t_0=۰$، در مکان $x=x_0=۱۴\,m$ بوده است.

$$t_0=۰ \rightarrow x=x_0=۱۴\,m$$

حالا باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌ای دوباره در مکان $x=۱۴\,m$ قرار می‌گیرد.

$$x=۲t^2-۱۶t+۱۴=۱۴ \rightarrow ۲t^2-۱۶t=۰ \rightarrow t^2-۸t=۰$$

معادله‌ی بالا دوتا ریشه دارد؛ یکی صفر که *ولش* (!) و دیگری $t=۸\,s$ که در دل ۳ جا دارد!

۴۳- گزینه۲ در لحظه‌ی عبور از مبدأ مکان، $x=۰$ می‌شود.

$$x=۰ \rightarrow t^2-۵t+۶=۰ \rightarrow (t-۲)(t-۳)=۰ \rightarrow (t_1=۲\,s \quad , \quad t_2=۳\,s)$$

بنابراین، متحرک در لحظه‌ی $t_1=۲\,s$ برای اولین‌بار و در لحظه‌ی $t_2=۳\,s$ برای دومین‌بار از مبدأ مکان عبور می‌کند.

$$\begin{cases} t_0=۰ \rightarrow x_0=۶\,m \\ t_1=۲\,s \rightarrow x_1=۰ \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}=\frac{۰-۶}{۲-۰}=-\frac{۶}{۲} \rightarrow \bar{v}=-۳\,m/s$$

۴۴- گزینه ۲

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = A \\ t = 3\,s \rightarrow x = A + B\times 3^3 = A + 27B \end{cases} \Rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(A+27B)-A}{3-0} = 9B \xrightarrow{(\bar{v}=18\,m/s)} 9B = 18 \rightarrow B = 2 \quad (\text{در SI})$$

$$x = A + 2t^3 \xrightarrow{(t=2\,s \ \rightarrow\ x=24\,m)} 24 = A + 2\times 2^3 \rightarrow A + 16 = 24 \rightarrow A = 8\,m$$

۴۵- گزینه ۲ در هنگام تعیین جابه‌جایی، اول و آخر مسیر را می‌بینیم. آسانسور در ابتدای مسیر در طبقه‌ی اول و در انتهای مسیر در طبقه‌ی هفتم واقع است. فاصله‌ی بین این دو طبقه (Δy) برابر است با:

$$\Delta y = (7-1)\times 5 = 30\,m$$

(چون آسانسور در راستای قائم حرکت می‌کند، جابه‌جایی‌اش را با Δy نشان داده‌ایم.) از طرفی، زمان کل حرکت، برابر مجموع زمان‌های بازه‌های مطرح‌شده در صورت تست است.

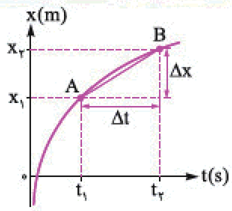
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 20 + 5 + 10 = 35\,s$$

Δy را بر Δt تقسیم کنید تا به جواب برسید.

$$\bar{v} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{30}{35} \rightarrow \bar{v} = \frac{6}{7}\,m/s$$

۴۶- گزینه ۳ لطفاً به درس‌نامه‌ی بعدی توجه بفرمایید.

۱۰) تعیین سرعت متوسط از روی نمودار مکان ـ زمان



شکل ۱۰

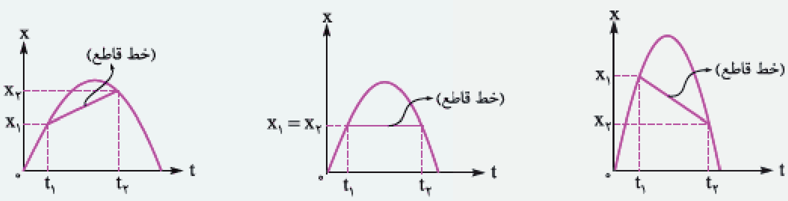
شکل ۱۰ نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در لحظه‌ی t_1 در مکان x_1 و در لحظه‌ی t_2، در مکان x_2 قرار دارد. اگر نقطه‌ی $A(t_1, x_1)$ را به نقطه‌ی $B(t_2, x_2)$ وصل کنیم، پاره‌خطی حاصل می‌شود که شیب آن برابر است با:

$$\text{شیب پاره‌خط } AB = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \text{شیب پاره‌خط } AB = \bar{v}_{(\text{در بازه‌ی زمانی } t_1 \text{ تا } t_2)}$$

نتیجه **سرعت متوسط یک متحرک بین دو لحظه از زمان، برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه را بر روی نمودار مکان ـ زمان به هم وصل می‌کند.**

یادداشت ریاضی اگر یک خط، به شکل صعودی باشد (شبیه این:)، علامت شیب آن مثبت و اگر به شکل نزولی باشد (شبیه این:)، علامت شیب آن منفی و اگر افقی باشد (شبیه این:)، مقدار شیب آن صفر است.

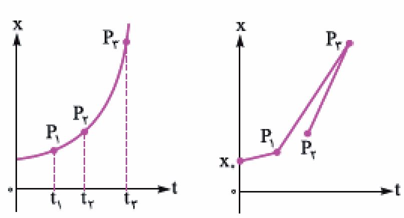
نمونه در شکل‌های ۱۱، علامت سرعت متوسط را بین دو لحظه‌ی دل‌خواه t_1 و t_2 بر روی نمودار مکان ـ زمان مشخص کرده‌ایم.



الف) $\Delta x > 0 \Rightarrow \bar{v} > 0$ ب) $\Delta x = 0 \Rightarrow \bar{v} = 0$ پ) $\Delta x < 0 \Rightarrow \bar{v} < 0$

شکل ۱۱

با توجه به شکل الف، پاره‌خط‌های قاطع بر نمودار را در بازه‌های زمانی ارائه‌شده در گزینه‌ها، رسم می‌کنیم (شکل ب). سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی ۰ تا t_1 برابر شیب پاره‌خط x_0P_1 و در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 برابر شیب پاره‌خط P_1P_2 و در بازه‌ی زمانی t_2 تا t_3 برابر شیب پاره‌خط P_2P_3 است. در بین این سه، امتداد پاره‌خط P_2P_3 زاویه‌ی بزرگ‌تری با محور افقی می‌سازد؛ بنابراین، شیب پاره‌خط P_2P_3 بیشتر از دو پاره‌خط دیگر است و سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی t_2 تا t_3 بیشتر از سایر بازه‌هاست.



(الف) (ب)

۴۷- گزینه ۱ با این فرض که متحرک روی همین محور x در نمودار حرکت می‌کند، متحرک در لحظه‌ی $t_1 = 5\,s$ در مکان A' است (نه A) و در لحظه‌ی $t_2 = 8\,s$ به مکان B' (نه B) منتقل می‌شود. جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر است با:

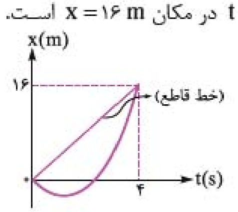
$$\Delta x = x_{B'} - x_{A'} = 42 - 60 = -18\,m$$

و سرعت متوسط آن:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-18}{8-5} = \frac{-18}{3} = -6\,m/s \rightarrow |\bar{v}| = 6\,m/s$$

بردار سرعت متوسط در جهت جابه‌جایی، یعنی از A' به طرف B' است.

۴۸- گزینه۳ با توجه به نمودار مکان ـ زمان، متحرک در لحظه‌ی $t_0 = 0$ در مکان $x_0 = 0$ و در لحظه‌ی $t = 4\,s$ در مکان $x = 16\,m$ است. بنابراین:



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{16 - 0}{4 - 0} = \frac{16}{4} \rightarrow \bar{v} = 4\,m/s$$

البته می‌تونستید شیب خط قاطع بر نمودار رو بین دو لحظـه‌ی $t_0 = 0$ و $t = 4\,s$ حـساب کنیـد و بـه همـین جواب برسید.

۴۹- گزینه۲ نمی‌دونم طراح، از طرح این‌که شتاب حرکت متحرک ثابته چه منظوری داشته! چـون در محاسـبه‌ی سـرعت متوسـط فقـط مکان‌های اولیه و نهایی مهمند و نوع حرکت متحرک تأثیری در جواب نداره.

$$\begin{cases} t_1 = 1\,s: x_1 = 0 \\ t_2 = 4\,s: x_2 = -6\,m \end{cases} \Rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = \frac{-6}{3} \rightarrow \bar{v} = -2\,m/s$$

۵۰- گزینه۲ سرعت متوسط را در ۴ ثانیه‌ی اول با $\bar{v}_1$ و در ۲ ثانیه‌ی بعدی با $\bar{v}_2$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{cases} t_0 = 0: x_0 = 0 \\ t = 4\,s: x = x_1 \\ t = 6\,s: x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \dfrac{x_1 - 0}{4 - 0} = \dfrac{x_1}{4} \\ \bar{v}_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \dfrac{0 - x_1}{6 - 4} = \dfrac{-x_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = -\frac{1}{2}$$

۵۱- گزینه۱ *درس‌نامه‌ی زیر به شما رو کرده! روشو زمین نندازید!!*

۱۱) سرعت لحظه‌ای

بنا به تعریف، سرعت متحرک در لحظه‌ی t_1، برابر حد سرعت متوسط آن در یک بازه‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک در همسایگی t_1 است.

$$(\text{سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی } t_1 \text{ تا } t_2)\ \bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \rightarrow v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

با توجه به نمادگذاری‌های به‌کاررفته در کتاب‌های ریاضیات، جمله‌ی بالا را به‌صورت $\frac{dx}{dt}$ می‌نویسند و به آن می‌گویند: «مشتق مکان نسبت به زمان». بنابراین، سرعت متحرک در هر لحظه (v) از رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \quad (\text{رابطه‌ی ۳})$$

نمونه۱ اگر معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^2 + 2t + 1$ باشد، معادله‌ی سرعت آن در SI برابر است با:

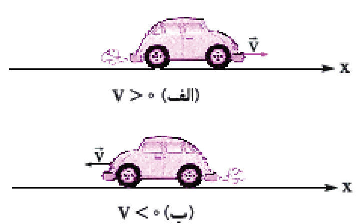
$$v = \frac{dx}{dt} = 2t + 2$$

توسط معادله‌ی اخیر، می‌توانیم سرعت متحرک را در هر لحظه حساب کنیم؛ مثلاً در لحظه‌ی $t = 1\,s$:

$$v = 2 \times 1 + 2 \rightarrow v = 4\,m/s$$

توجه سرعت لحظه‌ای را به‌اختصار، سرعت می‌نامیم؛ اما سرعت متوسط را همان سرعت متوسط صدا می‌زنیم!!!

نکته۱ دقت کنید که سرعت، یک کمیت برداری است که توسط رابطه‌ی ۳، می‌توان مقدار جبری آن را در حرکت یک‌بعدی به‌دست آورد. **زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، بردار سرعت آن در جهت محور x و $v > 0$ است و زمانی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بردار سرعت آن در خلاف جهت محور x و $v < 0$ است.** شکل ۱۲ را تماشا کنید!



شکل ۱۲

نکته۲ اگر سرعت متحرکی تابع درجه‌ی اول از زمان باشد، برای محاسبه‌ی $\bar{v}$ می‌توان میانگین زمان‌ها $(\bar{t})$ را در معادلـه‌ی سـرعت ـ زمـان متحرک جای‌گذاری کرد. اگر: $v = at + v_0 \rightarrow \bar{v} = a\bar{t} + v_0$

نمونه۲ در نمونه‌ی ۱، چون v تابع درجه‌ی اول از زمان است، برای محاسبه‌ی $\bar{v}$ می‌توانیم $\bar{t}$ را در معادله‌ی $v - t$ متحرک جای‌گزین کنیم. مثلاً سرعت متوسط متحرک در ثانیه‌ی اول (از $t_0 = 0$ تا $t_1 = 1\,s$) می‌شود:

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_0}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}\,s \rightarrow \bar{v} = 2\bar{t} + 2 = 2 \times \frac{1}{2} + 2 \rightarrow \bar{v} = 3\,m/s$$

و اما تست ۵۱؛ ابتدا از تابع مکان ـ زمان متحرک (نسبت به زمان) مشتق می‌گیریم:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \times 3t^2 + 3 = t^2 + 3$$

حالا سرعت متحرک را در لحظه‌ی $t = 2\,s$ تعیین می‌کنیم:

$$v = 2^2 + 3 = 4 + 3 \rightarrow v = 7\,m/s$$

۵۲- گزینه‌ی «۳»

$$v=\frac{dx}{dt}=2t+2 \xrightarrow{(t=2\,s)} v=2\times2+2=4+2=6\,m/s$$

$$\begin{cases} t_0=0 \to x_0=0^2+2\times0-1=-1\,m \\ t_1=2s \to x_1=2^2+2\times2-1=4+4-1=7\,m \end{cases} \Rightarrow \overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{7-(-1)}{2-0}=\frac{8}{2}=4\,m/s \to \frac{v}{\overline{v}}=\frac{6}{4} \to \frac{v}{\overline{v}}=\frac{3}{2}$$

تیزباش چون v تابع درجه‌ی اول از زمانه، می‌تونی میانگین زمان‌ها رو در معادله‌ی $v-t$ قرار بدی و در زمان حل تست، صرفه‌جویی کنی!

$$\overline{t}=\frac{t_0+t_1}{2}=\frac{0+2}{2}=1s$$

$$v=2t+2 \to \overline{v}=2\overline{t}+2=2\times1+2=4\,m/s$$

فقط برای تابع‌های درجه‌ی اولِ زمان، می‌توانید مقدار متوسط تابع را با جای‌گذاری مقدار متوسط متغیر به‌دست آورید.

۵۳- گزینه‌ی «۳» با یک تستِ صرفاً محاسباتی سروکار داریم؛ پس *توضیح، بی توضیح!!*

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=6t \quad , \quad v_2=\frac{dx_2}{dt}=3t^2-9$$

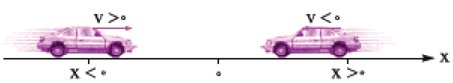
$$v_1=v_2 \to 6t=3t^2-9 \to 3t^2-6t-9=0 \to t^2-2t-3=0 \to (t+1)(t-3)=0 \to t=-1s \;\boxtimes \;,\; t=3s \;\checkmark$$

۵۴- گزینه‌ی «۱» علامت سرعت متحرک جهت حرکت آن را نشان می‌دهد. پس باید سرعت متحرک را تعیین علامت کنیم.

$$v=\frac{dx}{dt}=8t+8 \xrightarrow{(t\geq0)} v>0$$

(پس متحرک پیوسته در جهت محور محور x حرکت می‌کند.)

۵۵- گزینه‌ی «۲» با توجه به رابطه‌ی $v=-4x$، دو حالت بیشتر نداریم: یا $x>0$ و $v<0$ است؛ یا $x<0$ و $v>0$ است. در هر دو حالت، متحرک به مبدأ مکان نزدیک می‌شود. در شکل مقابل، هر دو حالت ممکن دیده می‌شوند.



۵۶- گزینه‌ی «۱» اول با یک حرکت سریع، مشتق x را نسبت به t به‌دست می‌آوریم!

$$v=\frac{dx}{dt}=4t-1$$

حالا نوبت تعیین علامت v است. این کار را در جدول روبه‌رو انجام داده‌ام. مطابق این جدول، متحرک از لحظه‌ی $t_0=0$ تا $t=\frac{1}{4}s$ در خلاف جهت محور x و از لحظه‌ی $t=\frac{1}{4}s$ به بعد در جهت محور x حرکت می‌کند.

t (s)	۰		$\frac{1}{4}$		∞
v		−	⋮	+	

۵۷- گزینه‌ی «۱» اول، به متن آموزشی زیر توجه کنید.

۱۲) شرط تغییر جهت متحرک

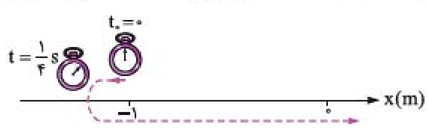
◀ وقتی متحرکی می‌ایستد، سرعتش صفر و وقتی برمی‌گردد، علامت سرعتش تغییر می‌کند. در نتیجه ...

نتیجه **شرط تغییر جهت متحرک، صفر شدن سرعت و سپس تغییر علامت آن است.**

نمونه۱ اگر معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $v=t-1$ باشد، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=1s$ صفر و سپس تغییر علامت می‌دهد. پس متحرک در لحظه‌ی $t=1s$ تغییر جهت می‌دهد.

نمونه۲ اگر معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی به‌صورت $v=t^2+2t$ باشد، چون همواره $v>0$ است، متحرک از مبدأ زمان به بعد، هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

با توجه به پاسخ تست ۵۶، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=\frac{1}{4}s$ صفر شده و سپس تغییر علامت داده است. لذا در این لحظه، متحرک تغییر جهت می‌دهد. در شکل مقابل، نحوه‌ی حرکت متحرک را نشان داده‌ایم (دقت کنید که متحرک، چه در هنگام رفت و چه در هنگام برگشت، روی محور x حرکت می‌کند؛ منتها برای تمایز بین این دو، مسیر رفت را بالاتر از محور x و مسیر برگشت را پایین‌تر از محور x رسم کرده‌ایم.)



۵۸- گزینه‌ی «۳» می‌خواهیم ببینیم متحرک چند ثانیه در مکان‌های منفی بوده است. به این منظور، معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک را تعیین علامت می‌کنیم. اول ریشه‌های معادله را به‌دست بیاریم:

$$x=2t^2-t-1=0 \to (2t+1)(t-1)=0 \to t=-\frac{1}{2}s \quad , \quad t=1s$$

جدول روبه‌رو علامت x را از لحظه‌ی $t_0=0$ به بعد، نشان می‌دهد. با توجه به جدول، متحرک به مدت 1s (از لحظه‌ی $t_0=0$ تا $t=1s$) در مکان‌های منفی بوده است.

t (s)	۰		۱		∞
x		−	⋮	+	

۵۹- گزینه‌ی «۱» معادله‌ی سرعت متحرک را به‌دست آورده، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+12t-9$$

$$v=0 \to -3t^2+12t-9=0 \to t^2-4t+3=0 \to (t-1)(t-3)=0 \to t_1=1s \quad , \quad t_2=3s$$

با توجه به جدول روبه‌رو، متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 تغییر جهت می‌دهد. بازه‌ی زمانی بین لحظه‌های این دو تغییر جهت، برابر است با:

$$\Delta t=t_2-t_1=3-1 \to \Delta t=2s$$

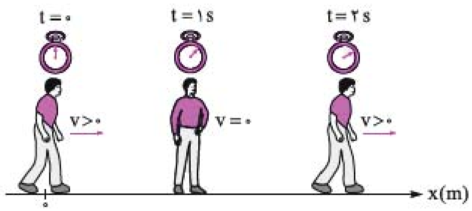
t (s)	۰		۱		۳		∞
v		+	⋮	−	⋮	+	

خیلی سبز — فیزیک پیش دانشگاهی

۶۰- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی سرعت متحرک عبارت است از: $v=\frac{dx}{dt}=t^2-2t+1=(t-1)^2$

با توجه به معادله‌ی فوق، v همواره مثبت یا صفر است؛ بنابراین، متحرک همواره در جهت محور x حرکت می‌کند و هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

توجه در لحظه‌ی $t=1s$، سرعت متحرک صفر می‌شود؛ صفر شدن سرعت، شرط لازم برای تغییر جهت متحرک است، اما کافی نیست؛ شرط دوم برای تغییر جهت متحرک، تغییر علامت v است که در این مثال، محقق نشده و مطابق شکل مقابل، متحرک در یک لحظه متوقف شده و سپس در همان جهت قبلی به حرکت خود ادامه داده است.



۶۱- گزینه‌ی ۳ اندازه‌ی سرعت، کم‌تر از صفر که نمی‌شه! می‌شه؟!

$v=t^2-3t-18=0 \rightarrow (t-6)(t+3)=0 \rightarrow t_1=-3s$ ☒ , $t_2=6s$ ☑

توجه در لحظه‌ی $t=1/5s$، $\frac{dv}{dt}=0$ می‌شود. در این لحظه، تابع سرعت ـ زمان متحرک مینیمم می‌شود؛ یعنی سرعت متحرک منفی‌ترین مقدار ممکن را دارد ($v=-20/25\,m/s$)؛ اما منفی بودن سرعت که نشان‌دهنده‌ی کمی اندازه‌ی آن نیست! نشان‌دهنده‌ی حرکت متحرک در خلاف جهت محور مکان است.

۶۲- گزینه‌ی ۳

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}\times 3t^2-6\times 2t+20=2t^2-12t+20=2(t^2-6t+10)$$

$$v=2[(t-3)^2+1] \xrightarrow{(t=3s \text{ اگر})} v=v_{min}=2\times(0^2+1)=2\times 1 \rightarrow v_{min}=2\,m/s$$

برای پیدا کردن کمینه‌ی مقدار v، از معادله‌ی آن نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و عبارت حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dv}{dt}=4t-12=0 \rightarrow t=3s$$

$$v_{min}=2\times 3^2-12\times 3+20=18-36+20=38-36 \rightarrow v_{min}=2\,m/s$$

۶۳- گزینه‌ی ۴

۱۳) رسیدن از تابع سرعت ـ زمان به تابع مکان ـ زمان

با مشتق گرفتن از تابع مکان ـ زمان، تابع سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید. عکس این عمل، پادمشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری نام دارد.

یادداشت ریاضی فرض کنید تابع $F(x)$، پادمشتق (یا انتگرال) تابع $f(x)$ باشد. این عبارت به‌صورت $\int f(x)dx=F(x)$ نوشته می‌شود. در این صورت، مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ است: $F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$

نمونه اگر $F(x)$ پادمشتق تابع $f(x)=x^2$ باشد، داریم: $f(x)=x^2 \rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ (عدد ثابت)

(مشتق عدد ثابت c صفر است.) $F'(x)=\frac{1}{3}\times 3x^2+0=x^2 \rightarrow F'(x)=f(x)$ یا $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c$

نتیجه تابع مکان ـ زمان یک متحرک، برابر انتگرال تابع سرعت ـ زمان آن است. (رابطه‌ی ۴) $\boxed{x(t)=\int v(t)dt}$

نکته اگر v تابع درجه‌ی nاُم زمان و به شکل $v=at^n$ باشد، آن‌گاه: $x=\int at^ndt=\frac{a}{n+1}t^{n+1}+x_0$

شهرباش هم باید یک درجه به درجه‌ی t اضافه کنی و هم حاصل رو به شکل ضریب بیاری توی مخرج! مثلاً فرض کن $v=t^3$ است؛ یکی به توان t اضافه کن، (t^4)، حالا توان t رو برعکس کن $(\frac{1}{4})$، حالا این دو رو کنار هم بذار تا x معلوم بشه: $\frac{1}{4}t^4$.

نمونه $v=3t^2+t+1 \rightarrow x=3\times(\frac{1}{2+1}\times t^{2+1})+(\frac{1}{1+1}\times t^{1+1})+t+x_0 \rightarrow x=t^3+\frac{1}{2}t^2+t+x_0$

مثال **معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=20t-40$ است. اگر این متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان گذشته باشد، در لحظه‌ی $t=5s$ در چند متری مبدأ مکان است؟** *(آزمایشی سنجش ـ ۹۳)*

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۵۰ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینه‌ی «۳»** برای محاسبه‌ی مکان متحرک، نیاز به معادله‌ی مکان ـ زمان آن داریم. معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک، معادله‌ای است که اگر از آن نسبت به زمان مشتق بگیریم، معادله‌ی $20t-40$ حاصل شود. آن معادله عبارت است از:

$$x=20\times\frac{1}{2}t^2-40t+x_0=10t^2-40t+x_0 \xrightarrow{(x_0=0 \text{ :فرض تست})} x=10t^2-40t$$

بنابراین، مکان متحرک در لحظه‌ی $t=5s$، برابر است با: $x=10\times 5^2-40\times 5=250-200 \rightarrow x=50\,m$

می‌تونی از معادله‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها نسبت به زمان مشتق بگیری یا اصلاً مثل یه بچه‌ی ریاضی‌بلد، انتگرال معادله‌ی سرعت متحرک رو حساب کنی! آن‌چه مشتقش نسبت به زمان می‌شود $v=-6t^2+6t$، عبارت است از:

$$x=-6\times(\frac{1}{2+1}\times t^{2+1})+6\times(\frac{1}{1+1}\times t^{1+1})+x_0=-6\times\frac{1}{3}t^3+6\times\frac{1}{2}t^2+x_0=-2t^3+3t^2+x_0$$

x_0 مقدار ثابتی است که بعد از مشتق‌گیری نابود می‌شه!! برای محاسبه‌ی x_0، مختصات $(t=1s \ , \ x=-2m)$ را در معادله‌ی فوق جای‌گذاری می‌کنیم:

$$t=1s \to x=-2\times1^3+3\times1^2+x_0=-2 \to -2+3+x_0=-2 \to x_0=-3m \to x=-2t^3+3t^2-3$$

تیزباش x یک درجه بالاتر از v است؛ پس x تابع درجه‌ی سوم از زمان است. سر جلسه‌ی کنکور، بد نیست بعضی موقع‌ها سرتو بالا بگیری و یه نگاه به گزینه‌ها بندازی! فقط ۴ می‌تونه جواب تست باشه!

۶۴- **گزینه۳** باز هم باید در جهت عکس عمل مشتق‌گیری حرکت کنیم و انتگرال معادله‌ی $v-t$ را به‌دست آوریم: $x=t^3-8t+x_0$

$$x=x_0 \to t^3-8t+x_0=x_0 \to t^3-8t=0 \to t^3=8t \xrightarrow{(t>0)} t=0 \ \boxed{\times} \ , \ t=2\sqrt{2}s \ \boxed{\checkmark}$$

۶۵- **گزینه۲** معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک عبارت است از: $x=-t^2+4t+c$

که منظور از c یک عدد ثابت است (که در این‌جا معرف مکان اولیه‌ی متحرک است). حالا می‌توانیم در کمال خونسردی، جابه‌جایی متحرک را در بازه‌ی زمانی $t_1=4s$ تا $t_2=6s$ حساب کنیم.

$$\begin{cases} t_1=4s \to x_1=-4^2+4\times4+c=c \\ t_2=6s \to x_2=-6^2+4\times6+c=-12+c \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_2-x_1=(-12+c)-c=-12m \to |\Delta x|=12m$$

تیزباش در پاسخ تست، متوجه شدید که c هر مقداری که داشته باشد، در جواب نهایی تأثیری ندارد؛ پس در محاسبه‌ی جابه‌جایی، می‌توان c را به حساب نیاورد؛ یا اصلاً یک کار بهتر کنیم! c را سمت چپ معادله‌ی مکان ـ زمان ببریم:

$$x-c=-t^2+4t \xrightarrow{(c=x_0)} x-x_0=-t^2+4t \to \Delta x=-t^2+4t$$

با جای‌گذاری $t_1=4s$ و $t_2=6s$ در معادله‌ی بالا، به‌ترتیب جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی ۰ تا t_1 و ۰ تا t_2 به‌دست می‌آید؛ می‌توان گفت:

$$\begin{cases} \Delta x_1=-4^2+4\times4=0 \\ \Delta x_2=-6^2+4\times6=-12m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=\Delta x_2-\Delta x_1=-12-0=-12m \to |\Delta x|=12m$$

چون سرعت متحرک تابع درجه‌ی اول از زمان است، می‌توانیم با جای‌گذاری مقدار متوسط t، مقدار متوسط v را به‌دست آوریم:

$$\bar{v}=-2\bar{t}+4=-2\times(\frac{t_1+t_2}{2})+4=-2\times5+4=-10+4=-6m/s$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \Delta x=\bar{v}\Delta t=-6\times(6-4)=-6\times2 \to \Delta x=-12m \to |\Delta x|=12m$$

۶۶- **گزینه۳** از معادله‌ی سرعت، نسبت به زمان، انتگرال می‌گیریم: $x=t^2+t+x_0$

$$\begin{cases} t_1=1s \to x_1=1^2+1+x_0=2+x_0 \\ t_2=2s \to x_2=2^2+2+x_0=6+x_0 \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{(6+x_0)-(2+x_0)}{2-1}=\frac{4}{1} \to \bar{v}=4m/s$$

چون v تابع درجه‌ی اول از زمان است، می‌توانیم بگوییم: $v=2t+1 \to \bar{v}=2\bar{t}+1$

$$\bar{t}=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}s \to \bar{v}=2\times\frac{3}{2}+1=3+1 \to \bar{v}=4m/s$$

۶۷- **گزینه۱** مشتق چی می‌شه $v=3t^2-6t+2$؟ *باریکلا،* $x=t^3-3t^2+2t+x_0$

ثانیه‌ی سوم یعنی بازه‌ی زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=3s$. همون‌طور که قبلاً گفتم برای محاسبه‌ی Δx، می‌تونی عدد ثابت x_0 رو به حساب نیاری!

$$\begin{cases} t_1=2s \to x_1=2^3-3\times2^2+2\times2=8-12+4=0 \\ t_2=3s \to x_2=3^3-3\times3^2+2\times3=27-27+6=6m \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{6-0}{3-2}=\frac{6}{1} \to \bar{v}=6m/s$$

۶۸- **گزینه۲** برای جواب دادن به این تیپ تست‌ها، از نکات ارائه‌شده در متن آموزشی زیر استفاده می‌کنیم:

۱۴) روش محاسبه‌ی مسافت

برای محاسبه‌ی مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازه‌ی زمانی، معادله‌ی سرعت متحرک را به‌دست آورده، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم تا مشخص شود در بازه‌ی زمانی ارائه‌شده، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند یا نه. اگر جهت حرکت متحرک تغییر نکند، اندازه‌ی جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک، برابر است. اگر جهت حرکت متحرک تغییر کند، باید اندازه‌ی جابه‌جایی در جهت + و اندازه‌ی جابه‌جایی در جهت − محور را جداجدا حساب کرده و آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = 4t^2 - 16t + 8$ است. مسافت طی‌شده توسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $0 \le t \le 3\,s$ چند متر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۲)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینه‌ی «۴»** سرعت متحرک رو تعیین علامت می‌کنیم.

$$v = \frac{dx}{dt} = 8t - 16 = 0 \rightarrow t = 2\,s$$

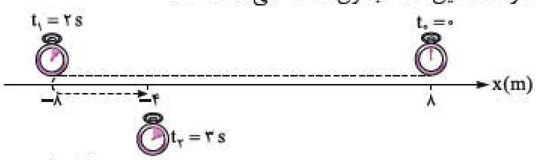
جدول تعیین علامت v نشون می‌ده متحرک در لحظه‌ی $t = 2\,s$ تغییر جهت می‌ده. تا لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت نمی‌ده، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط اون هم‌اندازن. پس اندازه‌ی جابه‌جایی رو یک‌بار از لحظه‌ی $t_0 = 0$ تا $t_1 = 2\,s$ و بار دیگه از لحظه‌ی $t_1 = 2\,s$ تا $t_2 = 3\,s$ حساب می‌کنیم و سپس این مقادیر رو با هم جمع می‌کنیم.

t(s)	۰		۲		∞
v		−	¦	+	

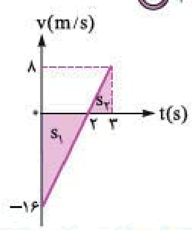
$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 8\,m \\ t_1 = 2\,s \rightarrow x_1 = 4\times 2^2 - 16\times 2 + 8 = -8\,m \\ t_2 = 3\,s \rightarrow x_2 = 4\times 3^2 - 16\times 3 + 8 = -4\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = -8 - 8 = -16\,m \\ \Delta x_2 = x_2 - x_1 = -4 + 8 = 4\,m \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(d = |\Delta x_1| + \Delta x_2)} d = 16 + 4 \rightarrow d = 20\,m$$

توجه مسیر حرکت متحرک به شکل زیر است. از لحظه‌ی $t_0 = 0$ تا $t_1 = 2\,s$، مسافت $16\,m$ را در خلاف جهت محور x و از لحظه‌ی $t_1 = 2\,s$ تا $t_2 = 3\,s$، مسافت $4\,m$ را در جهت محور x طی کرده که این $4\,m$ با اون $16\,m$ می‌شه $20\,m$!



ببین! جلوی این راه حل یک تیک بزن؛ بعد از خوندن درس‌نامه‌ی ۱۶، بهش مراجعه کن. اون‌جا بهت می‌گم که برای محاسبه‌ی مسافت طی‌شده توسط متحرک، می‌تونی نمودار سرعت ـ زمان اون رو رسم کنی و اندازه‌ی مساحت‌های بین نمودار و محور زمان رو با هم جمع کنی.



$$d = |S_1| + S_2 = \frac{16\times 2}{2} + \frac{8\times 1}{2} = 16 + 4 \rightarrow d = 20\,m$$

معادله‌ی سرعت متحرک می‌شود:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 12t$$

با توجه به این‌که $t > 0$ است، $v > 0$ است. یعنی متحرک همواره در جهت محور x حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد. لذا مسافت طی‌شده هم‌اندازه با جابه‌جایی متحرک است $(d = |\Delta x|)$

$$\begin{cases} t_1 = 1\,s \rightarrow x_1 = 1^3 + 6\times 1^2 + 20 = 7 + 20 \\ t_2 = 2\,s \rightarrow x_2 = 2^3 + 6\times 2^2 + 20 = 32 + 20 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 32 - 7 = 25\,m \xrightarrow{(d = |\Delta x|)} d = 25\,m$$

(حتماً تا الان متوجه شدید که من تا چه اندازه از دخالت x_0 در محاسبه‌ی Δx برم می‌دارا!)

۶۹- **گزینه۲** اول ببینیم متحرک تغییر جهت می‌ده یا نه.

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t - 6 = 0 \rightarrow t = 2\,s$$

خب؛ متحرک در لحظه‌ی $t = 2\,s$ تغییر جهت می‌ده. پس باید اندازه‌ی جابه‌جایی رو از مبدأ زمان تا لحظه‌ی $t_1 = 2\,s$ و از لحظه‌ی t_1 تا $t_2 = 3\,s$ جداگانه حساب کنیم و آخر سر اون‌ها رو با هم جمع کنیم.

t(s)	۰		۲		∞
v		−	¦	+	

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 20\,m \\ t_1 = 2\,s \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}\times 2^2 - 6\times 2 + 20 = -6\,m + 20\,m \\ t_2 = 3\,s \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}\times 3^2 - 6\times 3 + 20 = -4/5\,m + 20\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = -6\,m \\ \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 1/5\,m \end{cases} \Rightarrow d = |\Delta x_1| + \Delta x_2 = 6 + 1/5 \rightarrow d = 7/5\,m$$

۷۰- **گزینه۳** **گام اول:** ابتدا لحظه‌ی تغییر جهت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v = -2t + 8 = 0 \rightarrow 2t = 8 \rightarrow t = 4\,s$$

گام دوم: مشتق چی می‌شه $-2t + 8$؟! اون چیزه می‌شه معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک:

$$x = -t^2 + 8t + x_0$$

گام سوم: بزرگی جابه‌جایی متحرک را در بازه‌ی زمانی $t_0 = 0$ تا $t_1 = 4\,s$، حساب و با بزرگی جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t_1 = 4\,s$ تا $t_2 = 8\,s$، جمع می‌کنیم تا مسافت طی‌شده حساب شود.

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x = x_0 \\ t_1 = 4\,s \rightarrow x_1 = -4^2 + 8\times 4 + x_0 = 16 + x_0 \\ t_2 = 8\,s \rightarrow x_2 = -8^2 + 8\times 8 + x_0 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = 16\,m \\ |\Delta x_2| = |x_2 - x_1| = |-16| = 16\,m \end{cases} \Rightarrow d = \Delta x_1 + |\Delta x_2| = 16 + 16 \rightarrow d = 32\,m$$