۴۴۸- گزینه‌ی «۳»

برای آنکه ۳ مهره‌ی انتخاب شده دو به دو هم‌رنگ نباشند، باید یک مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سبز انتخاب شود که طبق اصل ضرب این کار به $n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}$ حالت امکان‌پذیر است.

از طرفی اگر هیچ شرطی اعمال نشود، انتخاب ۳ مهره از این ظرف به $n(S)=\binom{۳+۴+۲}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است؛ پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۳\times۴\times۲}{۱۲\times۷}=\frac{۲}{۷}$$

توجه: $\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!(۹-۳)!}=\frac{۷\times۸\times۹}{۶}=۷\times۱۲$

۴۴۹- گزینه‌ی «۲»

از آن‌جا که می‌دانیم این خانواده چهار فرزند پسر و دو فرزند دختر دارد، پس:

$$n(S)=\binom{۶}{۲}=\binom{۶}{۴}=۱۵$$

و از آن‌جا که باید فرزند اول پسر و فرزند آخر دختر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که از میان چهار فرزند باقی‌مانده باید یکی دختر و سه تای دیگر پسر باشند، یعنی اگر پیشامد مورد نظر را با A نشان دهیم، آنگاه:

$$n(A)=\binom{۴}{۱}=\binom{۴}{۳}=۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۵}$$

راهبرد حل تیپ (۱۱)

به قسمت‌های «اشتراک دو پیشامد» و «اجتماع دو پیشامد» در متن درس مراجعه کنید.

۴۵۰- گزینه‌ی «۳»

هر کدام از سکه‌ها دو حالت و پرتاب تاس شش حالت دارد، پس فضای نمونه‌ای در این سؤال $n(S)=۲\times۲\times۶=۲۴$ عضو دارد؛ اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، داریم:

A = {(۳، پ، ر)، (۶، پ، ر)، (۳، ر، پ)، (۶، ر، پ)، (۳، ر، ر)، (۶، ر، ر)}

$\Rightarrow n(A)=۶$

بنابراین احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

۴۵۱- گزینه‌ی «۲»

حالت‌هایی که دو تاس با هم برابر بیایند یا مجموعشان ۱۱ شود را می‌نویسیم.

$$n(S)=۶^۲=۳۶$$

$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۸\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

۴۵۲- گزینه‌ی «۲»

حداقل در یکی از دروس قبول شود، یعنی $A\cup B$.

A: فیزیک B: شیمی

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۷۵=۰/۵۵+۰/۶۰-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۵۵+۰/۶۰-۰/۷۵=۰/۴۰$$

۴۰ درصد امکان دارد که در هر دو درس قبول شود.

راهبرد حل تیپ (۱۲)

به قسمت «قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسازگار» در متن درس مراجعه کنید.

۴۵۳- گزینه‌ی «۱»

با توجه به شرایط مسأله، پیشامد همرنگ بودن ۳ مهره‌ی انتخابی (که احتمال آن را P در نظر می‌گیریم)، اجتماع دو پیشامد ناسازگار زیر است:

۱) هر سه مهره‌ی انتخابی سفید باشند: $P_1=\dfrac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$

۲) هر سه مهره‌ی انتخابی سیاه باشند: $P_2=\dfrac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$

پس داریم:

$$P=P_1+P_2=\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۱۰}{۸۴}$$

$$=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

راهبرد حل تیپ (۱۳)

به قسمت «متمم یک پیشامد» در متن درس مراجعه کنید.

۴۵۴- گزینه‌ی «۳»

اگر تاجر بودن را با A و برای اولین بار سفر کردن را با B نمایش دهیم، سؤال پیشامد $(A\cup B)'$ را خواسته است.

$$P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=۱-\left[\frac{۲۳}{۷۲}+\frac{۱۲}{۷۲}-\frac{۸}{۷۲}\right]=۱-\frac{۲۷}{۷۲}=\frac{۴۵}{۷۲}=\frac{۵}{۸}$$

۴۵۵- گزینه‌ی «۳»

خواندن روزنامه‌ی الف را با A و خواندن روزنامه‌ی ب را با B نمایش می‌دهیم. سؤال پیشامد $(A\cup B)'$ را خواسته است.

$$P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=۱-\left[\frac{۳۰}{۱۰۰}+\frac{۲۵}{۱۰۰}-\frac{۹}{۱۰۰}\right]=۱-\frac{۴۶}{۱۰۰}=\frac{۵۴}{۱۰۰}=۰/۵۴$$

۴۵۶- گزینه‌ی «۴»

لااقل یک بار رقم ۲ ظاهر شود یعنی یک بار ظاهر شود یا دو بار یا سه بار. متمم این حالت‌ها این است که رقم ۲ ظاهر نشود. احتمال آن را حساب کرده و از یک کم می‌کنیم:

از ۱۰ رقم ممکن، ۲ نیامده

A: رقم ۲ نیاید $\rightarrow n(A)=\boxed{۸}\,\overbrace{\boxed{۹}\,\boxed{۹}}=۸\times۹\times۹$

صفر نمی‌تواند بیاید

S: کل اعداد سه رقمی $\rightarrow n(S)=\boxed{۹}\,\boxed{۱۰}\,\boxed{۱۰}=۹\times۱۰\times۱۰$

صفر نمی‌تواند بیاید

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰}=\frac{۷۲}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(\text{رقم ۲ لااقل یک بار ظاهر شود})$$

$$=P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۷۲}{۱۰۰}=\frac{۲۸}{۱۰۰}=۰/۲۸$$

۸۵۷- گزینه‌ی «۳»

حالتی که تعداد افراد دو گروه برابر باشند را حساب کرده و از روش متمم استفاده می‌کنیم. برابر بودن تعداد افراد دو گروه یعنی دو نفر از ۴ نفر ریاضی و دو نفر از ۶ نفر تجربی. بنابراین داریم:

$$P(\text{تعداد افراد دو گروه، متفاوت})=۱-P(\text{تعداد افراد دو گروه، برابر})$$

$$=۱-\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}}=۱-\frac{۶\times۱۵}{۲۱۰}=۱-\frac{۳}{۷}=\frac{۴}{۷}$$

توجه:

$$\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۶!\times۴!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۴\times۳\times۲\times۱}=۲۱۰$$

۸۵۸- گزینه‌ی «۴»

متمم پیشامد «لااقل یکی از موش‌های انتخاب شده سفید باشد»، آن است که «هیچ کدام از موش‌های انتخاب شده سفید نباشند»، یا به عبارت دیگر «همه‌ی موش‌های انتخاب شده سیاه باشند»، بنابراین احتمال مورد نظر، برابر است:

$$۱-\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=۱-\frac{\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱}}{\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۳\times۲\times۱}}=۱-\frac{۲۰}{۱۶۵}=\frac{۱۴۵}{۱۶۵}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

۸۵۹- گزینه‌ی «۲»

متمم پیشامد آنکه «حداقل یک مهره‌ی آبی از ظرف خارج شود» آن است که «هیچ مهره‌ی آبی‌ای از ظرف خارج نشود»؛ پس:

$$P(\text{حداقل یک آبی})=۱-P(\text{هیچ آبی})\quad(*)$$

برای آنکه هیچ مهره‌ی آبی‌ای از ظرف خارج نشود، باید هر سه مهره‌ی انتخابی از میان سه مهره‌ی قرمز و دو مهره‌ی سیاه انتخاب شوند، پس:

$$(*)\Rightarrow P(\text{حداقل یک آبی})=۱-\frac{\binom{۳+۲}{۳}}{\binom{۴+۳+۲}{۳}}$$

$$=۱-\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

۸۶۰- گزینه‌ی «۲»

$$A\cap B=\{\text{پ ر ر، ر پ ر، ر ر پ}\}\Rightarrow n(A\cap B)=۳$$

از طرفی، در پرتاب سه سکه، فضای نمونه‌ای دارای $n(S)=۲^۳$ عضو است، پس: $P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$

۸۶۱- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم که فضای نمونه‌ای تعداد فرزندان یک خانواده‌ی ۴ فرزندی $۲^۴$ عضو دارد، یعنی $n(S)=۲^۴$. از طرفی پیشامد آنکه «فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد» که آن را A می‌نامیم بصورت:

$$A=\{bgbg, gbgb, bggb, gbbg, ggbb, bbgg\}$$

است که همانطور که مشاهده می‌شود $n(A)=۶$، پس

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

توجه: پیشامد آنکه «فرزندان خانواده‌ی ۴ فرزندی یک در میان پسر باشند»، زیرمجموعه‌ی پیشامد «خانواده‌ی ۴ فرزندی، ۲ فرزند پسر داشته باشد» است، بنابراین اجتماع آنها، برابر پیشامد «خانواده‌ی ۴ فرزندی، ۲ فرزند پسر داشته باشد» است.

۸۶۲- گزینه‌ی «۱»

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به صورت زیر است:

$$S=\{\underline{۱۱},\underline{۱۲},\underline{۱۴},\underline{۱۵},\underline{۲۱},\underline{۲۲},\underline{۲۴},\underline{۲۵},۴۱,۴۲,\underline{۴۴},۴۵,۵۱,\underline{۵۲},۵۴,۵۵\}\Rightarrow n(S)=۱۶$$

در حالت‌هایی که زیر آنها خط کشیده شده است، عدد ساخته شده کوچکتر از ۴۰ یا مضرب ۴ است، یعنی $n(A)=۱۰$، بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

۸۶۳- گزینه‌ی «۴»

مجموع دو عدد روشده	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم با توجه به جدول بالا، $n(A)=۶+۵=۱۱$.

همچنین در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای $n(S)=۶^۲=۳۶$ عضو دارد.

پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۳۶}$

۸۶۴- گزینه‌ی «۳»

برای آنکه دو عدد انتخاب شده اول یا بر ۷ بخش‌پذیر باشند، باید از مجموعه‌ی زیر انتخاب شوند:

$$\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۴,۱۷,۱۹,۲۱,۲۳,۲۸,۲۹\}$$

ملاحظه می‌شود که این مجموعه ۱۳ عضو دارد، پس اگر پیشامد عددی اول یا بر ۷ بخش‌پذیر بودن دو عدد انتخابی را A بنامیم، آنگاه

$$n(A)=\binom{۱۳}{۲}=\frac{۱۳\times۱۲}{۲}$$

از طرفی اگر هیچ شرطی اعمال نشود، انتخاب همزمان ۲ عدد از بین ۳۰ عدد به $n(S)=\binom{۳۰}{۲}=\frac{۳۰\times۲۹}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است، بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۱۳\times۱۲}{۲}}{\frac{۳۰\times۲۹}{۲}}=\frac{۱۳\times۲}{۵\times۲۹}=\frac{۲۶}{۱۴۵}$$

توجه کنید همانطور که در متن درس اشاره شد $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$.

۸۶۵- گزینه‌ی «۳»

در حالت کلی برای دو پیشامد داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A)=۳P(A\cap B)\quad \text{و}\quad P(B)=\frac{۳}{۲}P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۳P(A\cap B)+\frac{۳}{۲}P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۷}{۲}P(A\cap B)\Rightarrow \frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{۷}{۲}$$

۸۶۶– گزینه‌ی «۱»

هر دو هم رشته باشند یعنی اجتماع دو پیشامد ناسازگار «هر دو تجربی باشند» و «هر دو ریاضی باشند» است. فضای نمونه‌ای هم در هر دو حالت که انتخاب دو نفر از کل یعنی $\binom{۵}{۲}$ است.

هر دو تجربی یا هر دو ریاضی

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}+\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳+۱}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۸۶۷– گزینه‌ی «۳»

ابتدا پیشامد A را مشخص می‌کنیم:

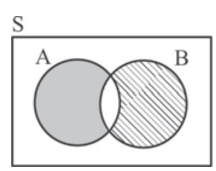
$$A=\{\underline{gggg},\underline{bggg},\underline{gbgg},bbgg\}$$

برای بدست آوردن پیشامد $A-C$، باید حالت‌هایی را که در آنها تعداد فرزندان دختر بیش از تعداد فرزندان پسر است، (حالت‌هایی کـه زیر آنها خط کشیده شده است) را از A حذف کنیم، پس $A-C=\{bbgg\}$، یعنی $n(A-C)=۱$.

از طرفی می‌دانیم کـه فضـای نمونـه‌ای جنسـیت فرزنـدان در یـک خـانواده‌ی ۴ فرزندی، $n(S)=۲^۴$ حالت دارد، پس: $P(A-C)=\frac{n(A-C)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۶}$

۸۶۸– گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم که پیشامد $A\cup B$ یعنی «A رخ دهد یا B رخ دهـد یـا هـر دوی آنها رخ دهند»، حال اگر بخواهیم «فقـط A رخ دهـد یـا فقـط B رخ دهد»، باید قسـمتی کـه «هـم A و هم B رخ می‌دهند» (یعنی $A\cap B$) را از $A\cup B$ حذف کنیم.



که در این صورت اجتماع دو قسمت سایه خورده و هاشورخورده در شـکل بالا به‌دست می‌آید. قسـمت سـایه خـورده مجموعـه‌ی $A-B$ و قسـمت هاشـــورخورده مجموعـــه‌ی $B-A$ اســـت و اجتمـــاع آنهـــا یعنی $(A-B)\cup(B-A)$ پیشامد مورد نظر سؤال است.

۸۶۹– گزینه‌ی «۲»

متمم پیشامد آنکه «حداقل یکی از ۳ مهره‌ی انتخابی آبی باشد»، آن است که «هیچ‌کدام از ۳ مهره‌ی خارج شده آبی نباشند» یا به عبارت دیگر «هـر ۳ مهره» از بین مهره‌های زرد و سبز انتخاب شوند»، پس:

$$P(\text{حداقل یکی آبی})=۱-P(\text{هیچ آبی})$$

$$=۱-\frac{\binom{۵+۲}{۳}}{\binom{۵+۴+۲}{۳}}=۱-\frac{۳۵}{۱۶۵}=۱-\frac{۷}{۳۳}=\frac{۲۶}{۳۳}$$

۸۷۰– گزینه‌ی «۳»

احتمال این‌که مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی ۱۱ باشد را حساب کرده و از یک کم می‌کنیم: $n(S)=۶\times۶=۳۶$

مجموع بزرگتر یا مساوی ۱۱ $:A=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(\text{کوچکتر از ۱۱})=P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

راهبرد حل تیپ (۱۴)

به قسمت «تعریف احتمال شرطی» در متن درس مراجعه کنید.

۸۷۱– گزینه‌ی «۲»

وقتی دو پیشامد ناسازگارند داریم: $P(A\cap B)=۰$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰$$

۸۷۲– گزینه‌ی «۳»

با توجه به این که می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، فضای نمونـه‌ای بـه صورت مقابل خواهد بود: $S=\{bb,gb,bg\}\Rightarrow n(S)=۳$

فضای پیشامد داشتن دختر یعنی $\{gb,bg\}$ است. بنابراین داریم:

$$n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳}$$

۸۷۳– گزینه‌ی «۴»

با توجه به این که می‌دانیم حداقل یکـی از فرزنـدان دختـر اسـت، فضـای نمونه‌ای به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S=\{gbb,bgb,bbg,gbg,ggb,bgg,ggg\}$$

$$\Rightarrow n(S)=۷$$

پیشامد حداقل ۲ دختر یعنی ۲ دختر یا ۳ دختر. بنابراین پیشامد به‌صورت زیر است: $A=\{ggb,bgg,gbg,ggg\}\Rightarrow n(A)=۴$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۷}$$

۸۷۴– گزینه‌ی «۴»

چون جنسیت فرزند اول مشخص است در واقع با فضای نمونه‌ای دو فرزند دیگر روبه‌رو هستیم: $n(S)=۴$

$$A=\{\text{حداقل یک پسر باشد}\}=\{(\text{د،پ}) \text{ و } (\text{پ،د}) \text{ و } (\text{پ،پ})\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۳\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۴}$$

۸۷۵– گزینه‌ی «۳»

پیشامد A را ظاهر شدن عدد ۲ و پیشامد B را مضرب ۳ نبـودن تعریـف می‌کنیم. سؤال، $P(A|B)$ را خواسته است.

$$A=\{۲\}\quad \text{و}\quad B=\{۱,۲,۴,۵\}\Rightarrow A\cap B=\{۲\}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۴}{۶}}=\frac{۱}{۴}$$

راهبرد حل تیپ (۱۵)

به قسمت‌های «قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسـازگار» و «نتیجـه‌ی مهم تعریف احتمال شرطی» در متن درس مراجعه کنید.

۸۷۶– گزینه‌ی «۴»

از دو موش باید یکی سالم و دیگری دیـابتی باشـد. بیمـار یـا سـالم بـودن موش‌ها نیز مستقل از هم‌دیگر است. در ضمن دو حالت در مورد دو مـوش وجود دارد. یا موش اول دیابتی و موش دوم سالم است و یا برعکس.

$$P(\text{دومی سالم و اولی دیابتی})+P(\text{دومی دیابتی و اولی سالم})$$

$$=P(\text{اولی سالم}).P(\text{دومی دیابتی}|\text{اولی سالم})$$

$$+P(\text{اولی دیابتی}).P(\text{دومی سالم}|\text{اولی دیابتی})$$

$$=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۸۷۷- گزینه‌ی «۴»

دو حالت داریم:

۱- موش اول سفید، موش دوم سفید، موش سوم سیاه:

$$P_1 = \left(\frac{۵}{۳+۵}\right)\left(\frac{۴}{۳+۴}\right)\left(\frac{۳}{۳+۳}\right) = \frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶} = \frac{۵}{۲۸}$$

۲- موش اول سفید، موش دوم سیاه، موش سوم سیاه:

$$P_2 = \left(\frac{۵}{۳+۵}\right)\left(\frac{۳}{۳+۴}\right)\left(\frac{۲}{۲+۴}\right) = \frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۵۶}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{۵}{۲۸} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۰}{۵۶} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

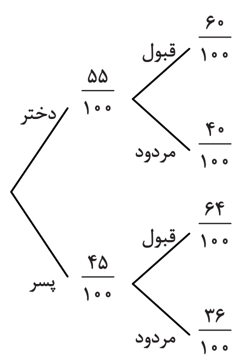
دقت کنید که چون موش‌ها متوالیاً انتخاب شده‌اند، یعنی یکی یکی انتخاب شده‌اند، پس در هر انتخاب یکی از تعداد کل کم می‌شود.

راهبرد حل تیپ (۱۶)

به قسمت «قانون احتمال کل» در متن درس مراجعه کنید.

۸۷۸- گزینه‌ی «۲»

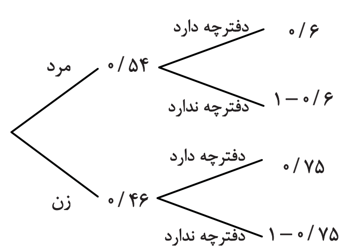
۵۵ درصد دختر هستند پس ۴۵ درصد پسر هستند. به نمودار زیر دقت کنید:



$$P(\text{تمام واحدها را گذرانده‌اند})$$
$$= P(\text{دختر و گذراندن تمام واحدها}) + P(\text{پسر و گذراندن تمام واحدها})$$
$$= \frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰} + \frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۶۴}{۱۰۰} = \frac{۳۳۰۰}{۱۰۰۰۰} + \frac{۲۸۸۰}{۱۰۰۰۰}$$
$$= \frac{۶۱۸۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۶۱۸}{۱۰۰۰} \xrightarrow{\times ۱۰۰} \frac{۶۱۸}{۱۰} = ۶۱/۸ \text{ درصد}$$

۸۷۹- گزینه‌ی «۲»

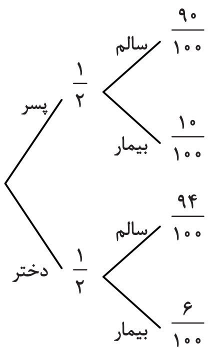
با استفاده از نمودار درختی، مسأله را حل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر}: P = ۰/۵۴\times۰/۶۰ + ۰/۴۶\times۰/۷۵ = ۰/۶۶۹$$

۸۸۰- گزینه‌ی «۲»

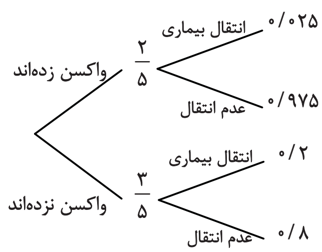
فرزندی که به دنیا می‌آید پسر است یا دختر. به نمودار زیر توجه کنید.



$$P(\text{فرزند سالم}) = P(\text{پسر و سالم}) + P(\text{دختر و سالم})$$
$$= \frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۹۴}{۱۰۰} = ۰/۹۲$$

۸۸۱- گزینه‌ی «۱»

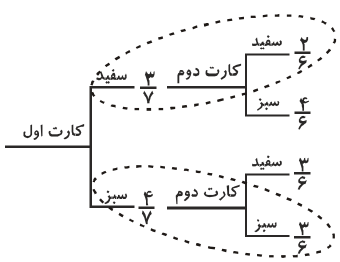
$\frac{۲}{۵}$ کارگران واکسن زده‌اند، پس $\frac{۳}{۵}$ آنها واکسن نزده‌اند. به نمودار زیر دقت کنید:



$$P(\text{انتقال بیماری})$$
$$= P(\text{واکسن زده است و منتقل شده}) + P(\text{واکسن نزده و منتقل شده})$$
$$= \frac{۲}{۵}\times۰/۰۲۵ + \frac{۳}{۵}\times۰/۲ = \frac{۵۰}{۵۰۰۰} + \frac{۶}{۵۰} = \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱۲}{۱۰۰} = \frac{۱۳}{۱۰۰}$$

۸۸۲- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: با استفاده از نمودار درختی، مساله را حل می‌کنیم:



پس احتمال همرنگ بودن دو کارت انتخاب شده، برابر است با:

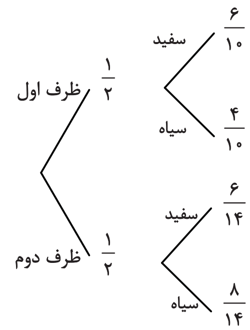
$$P = \frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶} + \frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۷} + \frac{۲}{۷} \Rightarrow P = \frac{۳}{۷}$$

راه حل دوم: احتمال اینکه دو کارت را به صورت یکی یکی و بدون جاگذاری انتخاب کنیم با احتمال اینکه دو کارت را به صورت هم‌زمان انتخاب کنیم برابر است.

$$P(\text{دو کارت همرنگ}) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۳+۶}{۲۱} = \frac{۹}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$$

۸۸۳– گزینه‌ی «۲»

به روش نمودار درختی عمل می‌کنیم:

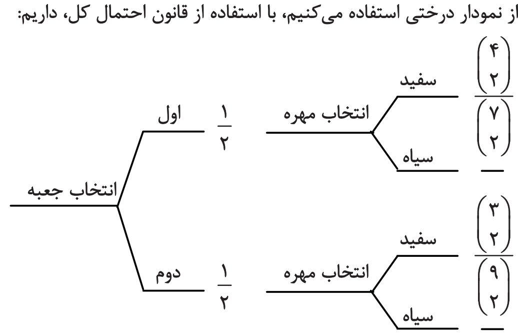


سفید از ظرف دوم «یا» سفید از ظرف اول

$$\Rightarrow P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۴}=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۴}=\frac{۳۶}{۷۰}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

۸۸۴– گزینه‌ی «۱»

از نمودار درختی استفاده می‌کنیم، با استفاده از قانون احتمال کل، داریم:

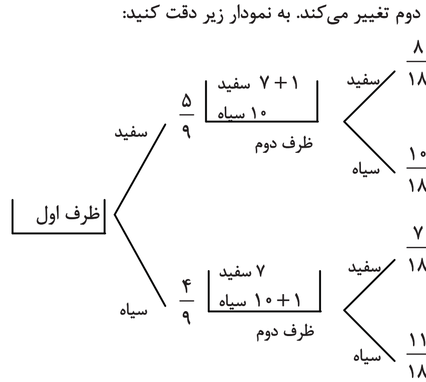


$$\text{احتمال مورد نظر}: P=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{\frac{۷\times۶}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{\frac{۹\times۸}{۲}}=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

۸۸۵– گزینه‌ی «۳»

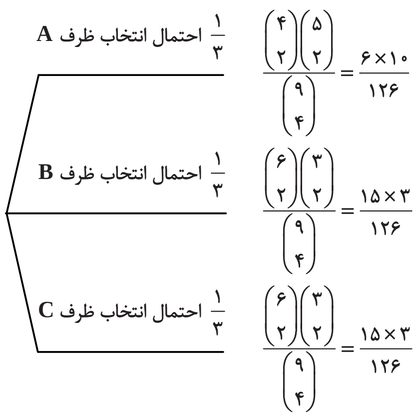
اولین شاخه مربوط به برداشتن مهره از ظرف اول است. در هر حالت تعداد مهره‌های ظرف دوم تغییر می‌کند. به نمودار زیر دقت کنید:



$$\Rightarrow P\ (\text{سفید})=\frac{۵}{۹}\times\frac{۸}{۱۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۷}{۱۸}=\frac{۴۰+۲۸}{۹\times۱۸}=\frac{۶۸}{۹\times۱۸}=\frac{۳۴}{۸۱}$$

۸۸۶– گزینه‌ی «۱»

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهره‌ی انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهره‌ی دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هر یک از ۳ ظرف $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم.



$$\Rightarrow P(E)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۶۰}{۱۲۶}+\frac{۴۵}{۱۲۶}+\frac{۴۵}{۱۲۶}\right)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۵۰}{۱۲۶}=\frac{۵۰}{۱۲۶}=\frac{۲۵}{۶۳}$$

توجه کنید:

$$\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}\Rightarrow \begin{cases}\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵\\ \binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰\end{cases}$$

راهبرد حل تیپ (۱۷)
به قسمت «پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۸۸۷– گزینه‌ی «۴»

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه:

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

۸۸۸– گزینه‌ی «۱»

هرگاه $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$، دو پیشامد را مستقل گوییم.

$$P(A\cap B)=۰/۲۴=۰/۳\times۰/۸=P(B)\times P(A)$$

۸۸۹– گزینه‌ی «۴»

چون A و B مستقل هستند، داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$
$$=۰/۶+۰/۳-۰/۶\times۰/۳=۰/۹-۰/۱۸=۰/۷۲$$

۸۹۰– گزینه‌ی «۲»

جنسیت فرزندان مستقل از هم‌دیگر است. این‌که دو فرزند اول پسر هستند، تأثیری در فرزندان سوم و چهارم ندارد.

$$P\ (\text{فرزند سوم و چهارم دختر})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۸۹۱– گزینه‌ی «۱»

$$P\ (\text{هر دو دستگاه کار کنند})=۰/۴\times۰/۴=۰/۱۶$$

۸۹۲- گزینه‌ی «۱»

اعداد روشده در پرتاب تاس‌ها، مستقل از هم هستند.هر تاس چهار حالت ۱ و ۲ و ۴ و ۵ دارد که مضرب ۳ نمی‌باشند.

$$P(\text{هیچ‌یک مضرب ۳ نیستند})=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

۸۹۳- گزینه‌ی «۴»

$$P(A)=\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{6}{7}$$

تعداد انتخاب‌های نفر دوم ۶ روز هفته می‌باشد. زیرا نمی‌بایستی در روزی که نفر اول متولد شده است به دنیا آمده باشد و یک انتخاب کمتر دارد.

۸۹۴- گزینه‌ی «۳»

روز تولد هر فرد ربطی به روز تولد فرد دیگر ندارد، بنابراین مستقل از هم هستند. نفر اول آزاد است در هریک از روزهای هفته به دنیا بیاید ولی نفرات بعدی در روزهایی که نفرات قبلی به دنیا آمده‌اند، نباید به دنیا بیایند و به همین دلیل از حالت‌های کلی کم می‌شود. بنابراین داریم:

$$P(\text{روزهای مختلف})=\overset{\text{نفر اول}}{\frac{7}{7}}\times\overset{\text{نفر دوم}}{\frac{6}{7}}\times\overset{\text{نفر سوم}}{\frac{5}{7}}=\frac{30}{49}$$

۸۹۵- گزینه‌ی «۳»

فضای نمونه‌ای هر یک از این سه نفر ۱۲ است و نفر اول ۱۲ حق انتخاب دارد. اما نفرات دوم و سوم یک حق انتخاب خواهند داشت زیرا باید در ماهی به دنیا آیند که نفر اول به دنیا آمده است.

$$P(A)=\frac{12}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{144}$$

۸۹۶- گزینه‌ی «۳»

پرتاب سکه و تاس مستقل از هم‌دیگر است. بنابراین داریم:

$$\underset{\frac{3}{4}}{\text{حداقل یک «رو»}}\quad\text{و}\quad\underset{\frac{5}{6}}{\text{تاس ۶ نیاید}}\quad\Rightarrow\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$$

راهبرد حل تیپ (۱۸)

به قسمت‌های «متمم یک پیشامد» و «قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۸۹۷- گزینه‌ی «۳»

احتمال آنکه در هر تاس عدد ۵ و ۶ ظاهر نشود $\frac{4}{6}$ است، پس:

احتمال ظاهر نشدن ۵ و ۶ در هر دو تاس: $P(A')=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

احتمال ظاهرشدن ۵ یا ۶ یا هر دو: $P(A)=1-P(A')=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

۸۹۸- گزینه‌ی «۳»

احتمال بازنده شدن در هر دو دوره را حساب کرده و از یک کم می‌کنیم. چون اگر در یکی از دوره‌ها نیز ببرد، به مرحله‌ی نهایی می‌رود. برد و باخت در دوره‌ها نیز مستقل از هم هستند.

$$P(\text{باختن در هر دوره})=1-0/4=0/6$$

$$P(\text{رفتن به مرحله‌ی نهایی})=1-P(\text{بازنده شدن در هر دو دوره})$$
$$=1-0/6\times0/6=1-0/36=0/64$$

۸۹۹- گزینه‌ی «۲»

احتمال آنکه ماه تولد این ۴ نفر متفاوت باشد، برابر است با:

$$\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}=\frac{55}{96}$$

متمم پیشامد آنکه «ماه تولد حداقل دو نفر از ۴ نفر یکسان باشد» آن است که «ماه تولد هر ۴ نفر متفاوت باشد»، پس با توجه به خواص پیشامد متمم، می‌توان نوشت:

احتمال مورد نظر: $P=1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$

راهبرد حل تیپ (۱۹)

به قسمت‌های «قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسازگار» و «قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۹۰۰- گزینه‌ی «۳»

گروه خونی افراد مستقل از یک‌دیگر است. احتمال گروه خونی A، ۴۰ درصد و احتمال گروه‌خونی‌غیرA، ۶۰ درصد است.

$$P(\text{اولی A و دومی غیر A})+P(\text{اولی غیر A و دومی A})$$
$$=0/4\times0/6+0/6\times0/4=0/48$$

۹۰۱- گزینه‌ی «۴»

انتخاب مهره‌ها از دو جعبه‌ی متمایز، دو پیشامد مستقل هستند. مهره‌ها هر دو سفید هستند یا هر دو سیاه. داریم:

$$P(\text{هر دو سفید})+P(\text{هر دو سیاه})$$
$$=P(\text{سفید از A})\times P(\text{سفید از B})+P(\text{سیاه از A})\times P(\text{سیاه از B})$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{35}+\frac{12}{35}=\frac{18}{35}$$

۹۰۲- گزینه‌ی«۲»

ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ است.

سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

۱) در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند: $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

۲)در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_2=\underbrace{(1-\overset{\overset{\text{هر دو زوج}}{\uparrow}}{\frac{1}{4}})}_{\text{پرتاب اول}}\;\underbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})}_{\text{پرتاب دوم}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_3=\underbrace{(1-\overset{\overset{\text{هر دو زوج}}{\uparrow}}{\frac{1}{4}})}_{\text{پرتاب اول}}\;\underbrace{(1-\overset{\overset{\text{هر دو زوج}}{\uparrow}}{\frac{1}{4}})}_{\text{پرتاب دوم}}\;\underbrace{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})}_{\text{پرتاب سوم}}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$\Rightarrow$ احتمال مورد نظر: $P=P_1+P_2+P_3$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}=\frac{16}{64}+\frac{12}{64}+\frac{9}{64}=\frac{16+12+9}{64}=\frac{37}{64}$$

راهبرد حل تیپ (۲۰)

به قسمت‌های «اجتماع دو پیشامد » و «پیشامدهای مستقل» در متن درس مراجعه کنید.

۹۰۳- گزینه‌ی «۳»

رنگ چشم و گروه خونی مستقل از هم‌دیگر است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&P(\text{چشم مشکی یا گروه خونی } A)\\&=P(\text{چشم مشکی})+P(\text{گروه خونی } A)\\&-P(\text{چشم مشکی وگروه خونی } A)\\&=۰/۴۰+۰/۷۵-۰/۴۰\times۰/۷۵=۱/۱۵-۰/۳۰=۰/۸۵\end{aligned}$$

۹۰۴- گزینه‌ی «۱»

A: پیشامد آن‌که فرد انتخاب شده، تحصیلات ابتدایی داشته باشد.

B: پیشامد آن‌که فرد انتخاب شده، مهارت قالی‌بافی داشته باشد.

پس $A\cup B$، پیشامد آن است که فرد انتخاب شده تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی داشته باشد، داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

از آن‌جا که دو پیشامد A و B مستقلند، پس $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

بنابراین:

$$\begin{aligned}&P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)\\&=۰/۶+۰/۲۵-(۰/۶)(۰/۲۵)=۰/۸۵-۰/۱۵=۰/۷\end{aligned}$$

۹۰۵- گزینه‌ی «۴»

اعداد ظاهر شده در هر تاس باید کم‌تر از ۴ باشد یعنی ۱، ۲ و یا ۳، بنابراین برای هر یک از دو تاس سه حالت وجود دارد، پس:

$$n(S)=۳\times۳=۹$$

اگر A پیشامد این باشد که قدر مطلق تفاضل اعداد ظاهر شده برابر یک نباشد، آنگاه داریم:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳)\}\Rightarrow n(A)=۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۹}$$

۹۰۶- گزینه‌ی «۳»

نکته برای هر دو پیشامد ناتهی A و B در فضای نمونه‌ای S، داریم:

$$\frac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

زیرا:

$$\begin{cases}P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\\[2mm] P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}=\frac{\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}{\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}}=\frac{\dfrac{۱}{P(B)}}{\dfrac{۱}{P(A)}}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

دقت کنید که $(A\cap B)=(B\cap A)$

$$P(A')=۰/۷\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۰/۳$$

$$P(B')=۰/۸\Rightarrow P(B)=۱-P(B')=۰/۲$$

با استفاده از نکته‌ی بالا، داریم:

$$\frac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}=\frac{P(A)}{P(B)}\Rightarrow\frac{۰/۶}{P(B\mid A)}=\frac{۰/۳}{۰/۲}$$

$$\Rightarrow P(B\mid A)=۰/۴$$

۹۰۷- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم $A\cap B'=A-B$ و $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$، همچنین $P(B')=۱-P(B)$، پس:

$$\begin{aligned}P(A\mid B')&=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{P(B')}\\&=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}\qquad(*)\end{aligned}$$

طبق فرض $P(A\mid B')=۰/۴$ و $P(B)=۰/۳$، بنابراین از $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$۰/۴=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-۰/۳}\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=۰/۲۸\qquad(**)$$

از طرفی $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$، پس اگر به طرفین تساوی $(**)$، $P(B)$ را اضافه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۲۸+P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۰/۲۸+۰/۳=۰/۵۸$$

۹۰۸- گزینه‌ی «۱»

$$P(\{b,c\})=P(\{a,b,c\})-P(\{a\})=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(\{c,b,d\}\mid\{a,b,c\})=\frac{P(\{c,b,d\}\cap\{a,b,c\})}{P(\{a,b,c\})}$$

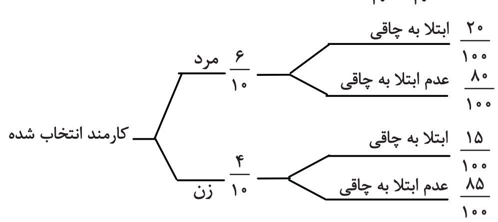
$$=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{a,b,c\})}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

۹۰۹- گزینه‌ی «۳»

تعداد کارمندان مرد را با x و تعداد کارمندان زن را با y نشان می‌دهیم، داریم:

$$\frac{x}{y}=۱/۵\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{x}{x+y}=\frac{۳}{۳+۲}=\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}$$

یعنی احتمال مرد بودن کارمند انتخاب شده برابر $\frac{۶}{۱۰}$ و در نتیجه احتمال زن بودن او $\frac{۴}{۱۰}=۱-\frac{۶}{۱۰}$ است، داریم:



$$\Rightarrow \text{احتمال ابتلا به چاقی}: P=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۱۸$$

۹۱۰- گزینه‌ی «۳»

$$A=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۶^۲}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۶^۲}=\frac{۱}{۶}$$

$$A\cap B=\{(۴,۳)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۶^۲}=\frac{۱}{۳۶}$$

A و B مستقل از یک‌دیگرند. $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow$

توجه کنید که چون $A\cap B\neq \phi$ ، پس A و B ناسازگار نیستند و چون $P(A)+P(B)\neq ۱$ ، دو پیشامد A و B متمم یک‌دیگر نیستند.

۹۱۱- گزینه‌ی «۳»

احتمال آنکه که در هر بار پرتاب یک تاس عددی زوج (۲، ۴ یا ۶) رو شود برابر با $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است.

از آنجا که عدد رو شده در پرتاب دو تاس مستقل از هم هستند، پس احتمال آنکه هر دو تاس عددی زوج رو شوند، برابر است با $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$.

۹۱۲- گزینه‌ی «۱»

هر تاس دارای ۶ حالت است که ۳ تای آن‌ها زوج و ۳ تای آن‌ها فرد هستند.

$$n(S)=۶\times ۶=۳۶$$

$$n(A)=۳\times ۳=۹\ \ (\text{هر دو زوج})\Rightarrow P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

$$n(B)=۳\times ۳=۹\ \ (\text{هر دو فرد})\Rightarrow P(B)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow P^۲(A)+P^۲(B)=\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

۹۱۳- گزینه‌ی «۲»

برای آنکه در پرتاب هر کدام از تاس‌ها، عدد رو شده مضرب ۳ نباشد، باید یکی از اعداد $\{۱,۲,۴,۵\}$ رو شود، که احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$.

از آنجا که پرتاب دو تاس مستقل از هم است، احتمال آنکه عدد رو شده در پرتاب هر دو تاس مضرب ۳ نباشد، برابر است با: $\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۹}$.

۹۱۴- گزینه‌ی «۱»

کافی است احتمال مساوی بودن را حساب کرده و از یک کم کنیم.

پیشامد مساوی بودن دو تاس $=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

$$P\ (\text{هر دو مساوی})=\frac{۶}{۳۶}$$

$$\Rightarrow P\ (\text{مساوی نبودن})=۱-P\ (\text{مساوی بودن})$$

$$=۱-\frac{۶}{۳۶}=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

۹۱۵- گزینه‌ی «۴»

اگر A پیشامد متمایز بودن عدد رو شده در پرتاب سه تاس باشد:

$$P(A)=\frac{۶}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۶}$$

اگر B پیشامد «مساوی بودن هر ۳ عدد در ۳ بار پرتاب یک تاس باشد»، آنگاه:

$$B=\{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),\dots,(۶,۶,۶)\}\Rightarrow n(B)=۶$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۶^۳}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۶\times ۵\times ۴}{۶^۳}}{\frac{۶}{۶^۳}}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۶}=۵\times ۴=۲۰$$

۹۱۶- گزینه‌ی «۳»

یکی از اعضای تیم را در نظر می‌گیریم. برای این فرد هر ۱۲ ماه از سال مطلوب است، اما نفر بعدی باید در ماهی غیر از ماه نفر اول باشد، پس برای فرد دوم ۱۱ ماه از سال مطلوب است. برای فرد سوم، ۱۰ ماه از سال مطلوب است (ماه‌هایی بجز از ماه‌های تولد نفرات اول و دوم) و ...

به همین ترتیب برای نفر ششم ۷ ماه از سال مطلوب است (ماه‌هایی بجز ماه‌های تولد نفرات اول تا پنجم).

از آنجایی که ماه تولد افراد مستقل از هم است، احتمال پیشامد مورد نظر، برابر است با:

$$\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\dots\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱۲\times ۱۱\times\dots\times ۷}{۱۲^۶}$$

طبق تعریف «ترتیب»، می‌دانیم

$$P(۱۲,۶)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۶)!}=۱۲\times ۱۱\times\dots\times ۷$$

پس احتمال مورد نظر، برابر با $\frac{P(۱۲,۶)}{۱۲^۶}$ است.

۹۱۷- گزینه‌ی «۴»

چون A و B مستقل هستند، داریم:

$$P(A\cap B)=P^۲(A)\Rightarrow P(A)\times P(B)=P^۲(A)$$

$$\Rightarrow P(B)=P(A)$$

$$P(\overline{A})=۱-P(A)=۱-P(B)$$

۹۱۸- گزینه‌ی «۳»

همانطور که در متن درس بیان شد، اگر (B,A) دو پیشامد مستقل از هم باشند، هر کدام از جفت پیشامدهای (B,A') ، (B',A) و (B',A') نیز مستقل از هم هستند، پس گزینه‌های ۲ و ۴ درست هستند.

همچنین در متن درس اشاره شد که دو پیشامد ناتهی و مستقل از هم (B,A) هیچ‌گاه نمی‌توانند ناسازگار باشند. در گزینه‌ی (۳) از آنجا که (B',A) دو پیشامد ناتهی و مستقل از هم هستند، نمی‌توانند ناسازگار باشند، بنابراین گزینه‌ی ۳ نادرست و پاسخ سؤال است. همچنین دقت کنید که گزینه‌ی (۱) نیز درست است. می‌دانیم دو پیشامد در صورتی ناسازگار نامیده می‌شوند که اشتراک آنها تهی باشد، برای دو پیشامد $(A\cap B)$ و $(A\cap B')$ داریم:

$$(A\cap B)\cap(A\cap B')=A\cap(B\cap B')=A\cap\phi=\phi$$

۹۱۹- گزینه‌ی «۲»

پیشامد بهبود شخص A بعد از عمل جراحی را با A و پیشامد بهبود شخص B را با B نمایش می‌دهیم؛ پیشامد $A\cup B$ مورد نظر سؤال است:

می‌دانیم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\quad (*)$

در این مسأله، A و B مستقل از هم هستند، پس

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{*}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$

$$=۰/۸+۰/۶-۰/۸\times ۰/۶=۰/۹۲$$

۹۲۰- گزینه‌ی «۱»

متمم پیشامد آنکه «حداقل یکی از دو فرد A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند»، آن است که «هر دو فرد A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا بکنند»، که با توجه به مستقل بودن دو فرد A و B، احتمال اخیر، برابر است با: $۰/۶\times ۰/۷=۰/۴۲$

بنابراین احتمال مورد نظر سؤال، برابر می‌شود با:

$$P = ۱ - ۰/۴۲ = ۰/۵۸$$

۹۲۱- گزینه‌ی «۲»

متمم «لااقل یکی از دو نفر در آزمایش قبول نشود»، آن است که «هر دو نفر در آزمایش قبول شوند»، پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P' = ۱ - P\ (\text{هر دو قبول شوند})$$
$$= ۱ - ۰/۸ \times ۰/۷ = ۱ - ۰/۵۶ = ۰/۴۴$$

۹۲۲- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم پیشامد عدم وقوع A و B به ترتیب عبارتست از A' و B'، بنابراین پیشامد آنکه هیچ‌یک از دو پیشامد A و B واقع نشود، عبارتست از $A' \cap B'$، بنابراین باید $P(A' \cap B')$ را محاسبه کنیم. همانطور که در متن درس اشاره شد، اگر A و B مستقل از هم باشند، A' و B' مستقل از هم هستند، پس:

$$P(A' \cap B') = P(A').P(B') = (۱ - P(A)).(۱ - P(B))$$
$$= \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right).\left(۱ - \frac{۲}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

۹۲۳- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم برای آنکه فردی دارای RH خون منفی باشد، باید دو ژن منفی داشته باشد. پس احتمال منفی بودن RH خون برابر است با $P = \frac{۳}{۷} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۹}{۴۹}$، بنابراین احتمال آنکه فرد RH خون منفی نداشته باشد، برابر است با:

$$۱ - P = ۱ - \frac{۹}{۴۹} = \frac{۴۰}{۴۹}$$

۹۲۴- گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم برای آنکه فردی دارای RH منفی باشد، لازم است دو ژن منفی داشته باشد و چون این ژن‌ها را از والدین خود به ارث می‌برد، می‌توانیم منفی بودن هر یک از این ژن‌ها را مستقل فرض کنیم، بنابراین:

$$P\ (RH \text{ منفی باشد}) = P\ (\text{هر دو ژن منفی}) = ۰/۴ \times ۰/۴ = ۰/۱۶$$

همچنین:

$$P\ (RH \text{ منفی نباشد}) = ۱ - P\ (RH \text{ منفی باشد})$$
$$= ۱ - ۰/۱۶ = ۰/۸۴$$
$$\Rightarrow \frac{P(RH \text{ منفی نباشد})}{P(RH \text{ منفی باشد})} = \frac{۰/۸۴}{۰/۱۶} = ۵/۲۵$$

۹۲۵- گزینه‌ی «۲»

$$P\ (\text{دختر}) = ۱ - P\ (\text{پسر}) = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$
$$P\ (\text{هر دو دختر یا هر دو پسر}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۹۲۶- گزینه‌ی «۲»

حالت‌ها به صورت زیر خواهند بود:

(دختر * پسر * پسر * پسر) یا (پسر * پسر * دختر * پسر)

$$P_۱ = \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۸}$$

(پسر * دختر * دختر * دختر) یا (دختر*پسر*دختر*دختر)

$$P_۲ = \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۸}$$

$$P = P_۱ + P_۲ = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

راهبرد حل تیپ (۲۱)

به قسمت «متغیرهای تصادفی» و «توزیع احتمال» در متن درس مراجعه کنید.

۹۲۷- گزینه‌ی «۳»

اگر متغیر تصادفی X برابر با تعداد موش‌های سفید انتخاب شده از میان ۴ موش سفید و ۶ موش سیاه باشد، آنگاه X می‌تواند مقادیر صفر، یک و دو را بپذیرد و داریم:

$$P(X = x) = \frac{\binom{۴}{x}\binom{۶}{۲-x}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{\binom{۴}{x}\binom{۶}{۲-x}}{۴۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X = ۰) = \dfrac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{۴۵} = \dfrac{۱ \times ۱۵}{۴۵} = \dfrac{۱۵}{۴۵} \\ P(X = ۱) = \dfrac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{۴۵} = \dfrac{۶ \times ۴}{۴۵} = \dfrac{۲۴}{۴۵} \\ P(X = ۲) = \dfrac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{۴۵} = \dfrac{۶ \times ۱}{۴۵} = \dfrac{۶}{۴۵} \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده در بالا، بیشترین مقدار در توزیع احتمال متغیر تصادفی X، برابر است با: $P(X = ۱) = \frac{۲۴}{۴۵} = \frac{۸}{۱۵}$

۹۲۸- گزینه‌ی «۴»

همواره مجموع همه‌ی احتمال‌های پیشامدهای ممکن، برابر با یک است.

راهبرد حل تیپ (۲۲)

به قسمت «توزیع دوجمله‌ای» در متن درس مراجعه کنید.

۹۲۹- گزینه‌ی «۱»

$$\binom{۵}{۳}(۰/۹)^۳(۱ - ۰/۹)^{۵-۳} = \binom{۵}{۳}(۰/۹)^۳(۰/۱)^۲$$
$$= ۱۰ \times \frac{۹^۳}{۱۰۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۷۲۹$$

۹۳۰- گزینه‌ی «۱»

$$\binom{۳}{۲}(۰/۳)^۲(۱ - ۰/۳)^{۳-۲} = ۳ \times ۰/۰۹ \times ۰/۷ = ۰/۱۸۹$$

۹۳۱- گزینه‌ی «۴»

احتمال این‌که به یک سؤال سه گزینه‌ای درست پاسخ داده شود، $\frac{۱}{۳}$ است.

$$n = ۶ \quad و \quad x = ۴ \quad و \quad p = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(۴) = \binom{۶}{۴} \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴ \times \left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)^{۶-۴} = ۱۵ \times \frac{۱}{۸۱} \times \frac{۴}{۹} = \frac{۲۰}{۲۴۳}$$