فصل اول: آنالیز ترکیبی

بخش اول: درسنامه‌ها و تیپ‌بندی کلیه مطالب درسی

بخش دوم: تست‌های کنکور

بخش سوم: مرحله‌ی تثبیت (تست‌های روتین)

بخش چهارم: تست‌های چالشی و سخت (به امید ۱۰۰٪)

٤ تا سوال اول کنکور یعنی سوالات ١٢٦ تا ١٢٩ از کتاب ریاضی ۲ انتخاب میشه.

ریاضی ۲، ۷ فصل داره که آنالیز ترکیبی فصل آخره. پس اگه تو کنکورتون سوال بیاد میشه سوال ۱۲۹. بنابراین این فصل میتونه یه سهمیه جداگانه توی کنکور داشته باشه.

تو سالهای ۸۲، ٨٤، ۹۰ و ۹۲ داخل و خارج ازش سوال اومده.

اگه فرض کنیم تو کنکور شما اصلا ازش سوال نیاد باز هم لازمه بلد باشین چون پیش نیاز فصل احتماله که حدودا بین ۲ تا ٤ تست توی کنکورتون داره. پس فصل بسیار مهمیه! دوست دارم این فصل رو بخونید چون یه جوری نوشتم که مطمئنم خوبِ خوب یاد میگیرید.

بعد از مسلط شدن روی درسنامه‌ها اول تست‌های کنکور و روتین رو بزنید و بعدش اگه دوست داشتید تو تمام آزمون‌ها ۱۰۰ بزنید برید سراغ غول مرحله‌ی آخر به امید موفقیت‌های روزافزون برای شما عزیزان.

فاکتوریل

آنالیز ترکیبی یعنی شمارش تعداد حالت‌های انجام یک عمل.

با یه مثال خیلی ساده شروع می‌کنم. b,a به چند حالت می‌تونن کنار هم قرار بگیرن؟! خُب معلومه دیگه ab و ba یعنی ۲ حالت. حالا c,b,a به چند حالت می‌تونن کنار هم قرار بگیرن. می‌گیم abc و acb و bac و bca و cab و cba، یعنی ۶ حالت. می‌تونستیم سریع‌تر هم حساب کنیم. بگیم ۳ تا جایگاه دایره‌ای داریم که این ۳ حرف می‌خوان تو اون ۳ جایگاه کنار هم قرار بگیرن. برای خونه‌ی اول ۳ حالت وجود داره. یکشون می‌شینه (مثلاً a). حالا برای خونه‌ی وسط دو حالت وجود داره. بازم یکشون می‌شینه (مثلاً b) و دیگه می‌مونه c و خونه‌ی سوم یعنی فقط یک حالت.

پس داریم: حالا اگه d,c,b,a باشن چه جوری میشه؟!

①	②	③	= ۶
c	b✓	a✓	
	c	b	
		c	

①	②	③	④	= ۲۴
d	c✓	b✓	a✓	
	d	c	b	
		d	c	

همین‌طور که می‌بینی تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن ۲ شیء متمایز شده ۱×۲؛ برای ۳ شیء شد $۱\times۲\times۳$؛ برای ۴ شیء شد $۱\times۲\times۳\times۴$ پس برای n شیء متمایز تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن تو یک صف، ردیف یا لیست می‌شه.

$$۱\times۲\times۳\times\ldots\times n$$

حالا از اونجایی که تو ریاضی همیشه دنبال روش‌هایی برای ساده‌تر نوشتن مطالب می‌گردیم و مثلاً بجای $\overbrace{۲\times۲\times\ldots\times۲}^{n}$ می‌گیم ۲^n یا بجای $\overbrace{۲+۲+\ldots+۲}^{n}$ می‌گیم $۲n$ بجای $۱\times۲\times\ldots\times n$ می‌گیم n فاکتوریل و به صورت $n!$ نشونش می‌دیم.

$۰!$ یعنی تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن هیچ شیء یعنی همون تهی که می‌شه یک حالت. یعنی داریم: $۰!=۱$ از $۱!$ تا $۷!$ رو با هم ببینیم و یاد بگیریم و حفظ باشیم که مهمه!

$$۱!=۱,۲!=۱\times۲=۲,۳!=۱\times۲\times۳=۶,۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$$
$$۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰,۶!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۷۲۰,۷!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷=۵۰۴۰$$

حالا بیا یه ذره باهاش بازی کنیم. مثلاً شروع می‌کنیم با $\frac{۷!}{۶!}$.

$$\frac{۷!}{۶!}=\frac{۷\times۶!}{۶!}=۷$$

چیکار کردیم؟! از اونی که بزرگتره می‌ریم به سمت کوچکتره و هر وقت به کوچیکه رسیدیم همون جا توقف می‌کنیم و سپس سریع تعجب می‌کنیم! (یعنی وامیستیم و یه فاکتوریل می‌ذاریم). اینجا هم چون $۷!$ بزرگتر بود از ۷ رفتیم به سمت کوچکتره یعنی $۶!$ که تو مخرج بود و تا رسیدیم به ۶ وایستادیم و تعجب کردیم (فاکتوریل گذاشتیم) یعنی نوشتیم: $۷!=۷\times۶!$

حالا اگه مخرج $۴!$ بود تا ۴ می‌اومدیم عقب و اینجوری می‌نوشتیم: $۷!=۷\times۶\times۵\times۴!$ و اگه مخرج $۳!$ بود می‌نوشتیم $۷\times۶\times۵\times۴\times۳!$

پس داریم:

$$\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۷\times\underbrace{۶\times۵}=۷\times۳۰=۲۱۰$$

حالا اگه می‌گفت $\frac{۷!}{۴!\times۳!}$ تا کجا باید می‌رفتیم؟! یعنی از $۷!$ که می‌رفتیم به سمت کوچکتره تا $۴!$ می‌رفتیم یا $۳!$؟! همیشه تو اینجور موارد تا اونیکه بزرگتره می‌ریم عقب یعنی مثلاً اینجا تا $۴!$

$$\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\,۳!}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵}{\cancel{۳!}}=۷\times۵=۳۵$$

$۳!$ با ۶ ساده شد. چند تا مثال دیگه حل کنیم که دستمون خوب راه بیافته.

$$\frac{۹!}{۶!۴!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۴!}=\frac{۹\times\cancel{۸}\times۷}{\cancel{۴}\times۳\times\cancel{۲}}=۳\times۷=۲۱$$

اول از $۹!$ اومدیم به سمت $۶!$ و تا رسیدیم به $۶!$ وایستادیم. بعد ساده‌سازی شروع شد حالا یه ذره سختش کنیم:

$$\frac{۹!+۸!}{۶!}$$

تو ریاضی یه قانون خیلی مهمه داریم به اسم تفکیک کسر. فقط یادتون باشه که تفکیک همیشه از آسمون به زمینه یعنی داریم $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

ولی بجای $\frac{a}{b+c}$ نمی‌تونیم بنویسیم $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ و خیلی کار ضایعی از آب در میاد. مثلاً وقتی می‌گن $\frac{۲+۶n}{۲}$ شما نمی‌تونی ۲ رو با ۲ بزنی چون اون ۲ تو مخرج مال هر دو تا عامل صورته و داریم:

$$\frac{۲+۶n}{۲}=\frac{۲}{۲}+\frac{۶n}{۲}=۱+۳n$$

پس داریم:

$$\frac{۹!+۸!}{۶!}=\frac{۹!}{۶!}+\frac{۸!}{۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}}+\frac{۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}}$$

$$=۹\times۸\times۷+۸\times۷\xlongequal{\text{فاکتور از }۸\times۷}۸\times۷(۹+۱)=۵۶\times۱۰=۵۶۰$$

حالا برعکسش کنیم:

$$\frac{۹!}{۷!+۸!}$$

اینجا دیگه نمی‌تونیم تفکیک کنیم و باید تو مخرج !۸ رو بازش کنیم و بعد از !۷ فاکتور بگیریم:

$$\frac{۹!}{۷!+۸\times۷!}=\frac{۹!}{۷!(۱+۸)}=\frac{۹!}{۷!\times۹}=\frac{\cancel{۹}\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times\cancel{۹}}=۸$$

حالا همه‌ی این مسائل رو می‌تونیم با n داشته باشیم. چند تا مثال ضرب با هم ببینیم:

۱) $\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!}=n$

از n اومدیم به سمت $n-۱$ و تا رسیدیم به $n-۱$ واستادیم و تعجب کردیم!

۲) $\frac{(n+۱)!}{n!}=\frac{(n+۱)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=n+۱$

از $n+۱$ اومدیم عقب و تا رسیدیم به مخرج واستادیم و تعجب کردیم!

۳) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۱)n(n-۱)!}{(n-۱)!}=(n+۱)n$

از $n+۱$ اومدیم عقب تا رسیدیم به $n-۱$ و همونجا واستادیم و تعجب کردیم!

۴) $\frac{n!}{(n-۳)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)$

۵) $\frac{n!+(n+۱)!}{(n-۱)!+(n-۲)!}=\frac{n!+(n+۱)n!}{(n-۱)(n-۲)!+(n-۲)!}$ از !n فاکتور می‌گیریم $=\frac{n!(۱+n+۱)}{(n-۲)!(n-۱+۱)}=\frac{n!(n+۲)}{(n-۲)!n}$

$$=\frac{\cancel{n}(n-۱)\cancel{(n-۲)!}(n+۲)}{\cancel{(n-۲)!}\cancel{n}}=(n-۱)(n+۲)$$

تو صورت و مخرج بزرگترارو باز کردیم و بعد از عامل مشترکشون فاکتور گرفتیم. وقتی که یه فاکتوریل تو صورت و مخرج موند !n رو باز کردیم.

مثال ۱ اگر $\frac{(n+۲)!}{n!}=۷۲$ باشد n را بدست آورید؟

$$\frac{(n+۲)(n+۱)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=۷۲\Rightarrow(n+۲)(n+۱)=۷۲$$

به اینکه که رسیدی لازم نیست سمت چپ رو بازکنی و یه معادله‌ی درجه دو رو به سختی حل کنی. سمت چپ حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالیه. پس سمت راست رو هم به همون شکل بنویس:

$$(n+۲)(n+۱)=۹\times۸\Rightarrow n+۱=۸\Rightarrow n=۷$$

مثال ۲ اگر $\frac{(n+۱)!}{(n-۲)!}=۲۴$ باشد n را بدست آورید؟

$$\frac{(n+۱)n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=(n+۱)n(n-۱)=۴\times۳\times۲\Rightarrow n=۳$$

دیدم سمت چپ حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالیه. پس ۲۴ رو هم به همون صورت نوشتم و وسطی شد ۳.

توجه تو مثال قبلی بعضیا با خودشون گفتن «ما که نفهمیدیم چیکار کرد؛ پس همون درجه دومه خودمونو حل می‌کنیم» ولی تو این مثال دیگه نمی‌تونن همون درجه سومه خودشونو حل کنن! و چاره‌ای جز این کار براشون باقی نمی‌مونه.

ترکیب (combination)

ترکیب r از n رو با $\binom{n}{r}$ یا $c(n,r)$ نشون می‌دیم و کارش انتخاب r شیء متمایز از بین n شیء متمایزه و به صورت زیر محاسبه می‌شه.

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

البته اگر بریم تو کار مفهوم ترکیب می‌تونیم روش‌های راحت‌تری برای محاسبه ترکیبات مختلف پیدا کنیم. گفتیم ترکیب کارش انتخاب کردنه و یکی از ساده‌ترین انتخاب‌ها تو ریاضی انتخاب زیر مجموعه‌های یک مجموعه است که تو مقطع راهنمایی با این کار آشنا شدیم و اونجا بود که یاد گرفتیم یک مجموعه‌ی n عضوی ۲^n تا زیرمجموعه داره. مثلاً مجموعه‌ی $S=\{a,b,c\}$ یک مجموعه‌ی ۳ عضویه که $۲^۳$ یعنی ۸ تا زیرمجموعه داره. مجموعه‌ی زیرمجموعه‌هاش به صورت زیره:

$$\text{مجموعه زیرمجموعه‌های } S=\{\{\},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\{a,b,c\}\}$$

حالا می‌خوایم تک‌تک زیرمجموعه‌ها رو بررسی کنیم. اولیش که تُهیه $\{\}$ یعنی انتخاب صفر از n. پس داریم $\binom{n}{۰}=۱$ چون تهی همیشه یه دونست. مجموعمون ۳ عضویه و ۳ تا زیرمجموعه‌ی یک عضوی داره. اگه ۴ عضوی بود ۴ تا زیرمجموعه‌ی یک عضوی داشت؛ اگه ۵ عضوی بود ۵ تا داشت و ... اگه n عضوی بود n تا زیرمجموعه‌ی یک عضوی داشت پس انتخاب ۱ از n همیشه n می‌شه: $\binom{n}{۱}=n$

مجموعمون ۳ عضویه و ۳ تا زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی داره. اگه ۴ عضوی بود ۴ تا زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی داشت. اگه ۵ عضوی بود ۵ تا زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی داشت. اگه n عضوی بود n تا زیرمجموعه‌ی $(n-۱)$ عضوی داشت یعنی انتخاب $n-۱$ از n همیشه می‌شه n: $\binom{n}{n-۱}=n$

مجموعمون ۳ عضویه و یک زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی داره. اگه ۴ عضوی بود هم یک زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی داشت و ... پس هر مجموعه‌ی n عضوی یه‌دونه زیرمجموعه‌ی n عضوی داره یعنی همیشه $\binom{n}{n}=۱$. **پس حالا یه جمع‌بندی کنیم:**

$$\underbrace{\binom{n}{۰}}_{۱},\ \underbrace{\binom{n}{۱}}_{n},\ \underbrace{\binom{n}{۲}}_{a},\ \underbrace{\binom{n}{۳}}_{b},\ \dots,\ \underbrace{\binom{n}{n-۳}}_{b},\ \underbrace{\binom{n}{n-۲}}_{a},\ \underbrace{\binom{n}{n-۱}}_{n}\ \underbrace{\binom{n}{n}}_{۱}$$

اولی و آخری یک می‌شه؛ دومی و یکی مونده به آخری n می‌شه؛ سومی و دو تا مونده به آخری a می‌شه؛ چهارمی و سه تا مونده به آخری b می‌شه و کلاً ترکیب‌های متساوی‌الفاصله از مرکز با هم برابرن. حالا بریم تو کار محاسبه‌ی $\binom{n}{۲}$ تا $\binom{n}{n-۲}$.

اول روش معمولی محاسبه‌ی $\binom{n}{۲}$:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow\binom{n}{۲}=\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

دیدید که اگه روش معمولی رو بازش کنیم می‌رسیم به $\frac{n(n-۱)}{۲}$. پس $\binom{n}{۲}$ به دو طریق قابل محاسبه است.

مثلاً می‌خوایم $\binom{۷}{۲}$ رو حساب کنیم:

روش اول: $\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۲!(۷-۲)!}=\frac{۷!}{۲!۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۲\times۵!}=۲۱$

روش دوم: $\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

بدیهیه که **روش دوم** به مراتب بهتره. پس بریم تو کارش تا بهتر یاد بگیریم این روش رو.

$$\underbrace{\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}}_{\text{دو تا می‌ریم عقب تقسیم بر }۲!},\quad\underbrace{\binom{n}{۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}}_{\text{۳ تا می‌ریم عقب تقسیم بر }۳!},\quad\underbrace{\binom{n}{۴}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۴!}}_{\text{۴تا می‌ریم عقب تقسیم بر }۴!},\dots$$

پس حالا تمرین می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰,\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵,\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$$

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times۳}{۳!}=۱۰,\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳!}=۲۰,\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۳۵$$

$$\binom{۷}{۴}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵\times\cancel{۴}}{\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱}=۳۵,\binom{۸}{۴}=\frac{\cancel{۸}\times۷\times۶\times۵}{\cancel{۴}\times۳\times\cancel{۲}\times۱}=۷۰$$

اینم روش سریع محاسبه‌ی ترکیبات مختلف بجز ۴تای اول یعنی $\binom{n}{۰}$ و $\binom{n}{۱}$ و $\binom{n}{n-۱}$ و $\binom{n}{n}$.

حالا دو تا قانون مهم هم داریم تحت عنوان قوانین پاسکال که اولیش خیلی کاربردی‌تره و دومیش کمتر به کار میاد:

قانون اول پاسکال

$$\boxed{\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}}$$

$$\binom{۱۰}{۷}=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳!}=۱۰\times۳\times۴=۱۲۰\quad \binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵\quad \binom{۱۱}{۷}=\binom{۱۱}{۴}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹\times۸}{۴\times۳\times۲\times۱}=۳۳۰$$

قانون دوم پاسکال

$$\boxed{\binom{n}{r}+\binom{n}{r+۱}=\binom{n+۱}{r+۱}}$$

$$\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۴}=\binom{۹}{۴},\ \binom{۱۰}{۵}+\binom{۱۰}{۶}=\binom{۱۱}{۶},\ \binom{۹}{۴}+\binom{۹}{۵}=\binom{۱۰}{۵}$$

آخرین نکته‌ای که لازمه تو این قسمت یادبگیری اینکه زیرمجموعه‌های صفر عضوی و یک عضوی و ... تا n عضوی کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوین که تعدادشون همونطور که تو راهنمایی یاد گرفتی می‌شه ۲^n پس داریم:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مثال ۱ در یک تیم ۹ نفره چند زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی یا بیشتر موجود است؟

زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یا بیشتر یعنی:

$$x=\binom{۹}{۲}+\binom{۹}{۳}+\dots+\binom{۹}{۹}$$

خُب اگه $\binom{۹}{۱}$ و $\binom{۹}{۰}$ هم به اول این سیستم اضافه می‌شدن جواب می‌شه $۲^۹=۵۱۲$.

حالا $\binom{۹}{۱}$ و $\binom{۹}{۰}$ یعنی ۹ تا و ۱ دونه ازش کم می‌کنیم:

$$x=۵۱۲-(۹+۱)=۵۰۲$$

مثال ۲ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ که شامل عضو a باشند را پیدا کنید؟

وقتی می‌گه شامل عضو a یعنی a عضو سفارشیه و انتخاب شده. پس یک عضو به ما تحمیل شد و باید ۲ عضومون رو از بین ۶ عضو باقیمونده انتخاب کنیم. پس داریم:

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

مثال ۳ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ شامل a و فاقد b را پیدا کنید؟

a که انتخاب شد. پس باید ۲ عضومون‌رو از بین ۵ عضو باقیمونده بجز b,a انتخاب کنیم چون a که انتخاب شده و حق انتخاب b رو هم نداریم. پس داریم:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

مثال ۴ **تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ که شامل b,a باشند را پیدا کنید؟**

فرق این سوال با دو سوال قبلی اینه که اونجا فقط زیرمجموعه‌های ۳ عضوی می‌خواست ولی اینجا کل زیرمجموعه‌ها رو می‌خواد از صفر عضوی گرفته تا ۷ عضوی. پس چون b,a سفارشی هستن کنارشون می‌ذاریم. می‌مونه ۵ عضو که در واقع این مجموعه‌ی ۵ عضوی باقیمونده $۲^۵$ تا زیرمجموعه داره؛ از $\{\}$ گرفته تا خود $\{c,d,e,f,g\}$. حالا تو تک‌تک این ۳۲ تا b,a رو وارد می‌کنیم. پس ۳۲ تا زیرمجموعه‌ی شامل b,a داریم.

سوال خفنی بود!

مثال ۵ **دانش‌آموزی باید به ۷ سوال از ۱۰ سوال آزمون آنالیزترکیبی پاسخ دهد به شرطی که پاسخ به ۳ سوال اول اجباری باشد. این کار به چند حالت ممکن است؟**

خُب سه سوال اول که انتخاب شده و مثل عضو سفارشی می‌مونه. پس باید از بین ۷ سوال باقیمونده به ۴ تاش پاسخ بده یعنی انتخاب $\binom{۷}{۴}$.

$$\binom{۷}{۴}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴}{۴\times۳\times۲}=۳۵$$

مثال ۶ **بر روی یک دایره ۱۰ نقطه متمایز وجود دارد. تعداد ۷ ضلعی‌های محدب که هر راس ۷ ضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد کدام است؟**

کافیه از بین ۱۰ نقطه‌ی متمایز؛ ۷ تا رو انتخاب کنیم و هر انتخاب ۷تایی یک ۷ ضلعی محدب تولید می‌کنه. بنابراین داریم:

$$\binom{۱۰}{۷}=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳!}=۱۲۰$$

مثال ۷ **حاصل $\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۳}+\binom{۹}{۷}$ کدام است؟**

اول دوتای اول رو با استفاده از قانون دوم پاسکال با هم جمع می‌کنیم:

$$\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۳}=\binom{۹}{۳}$$

حالا $\binom{۹}{۳}$ رو که نمی‌تونیم با $\binom{۹}{۷}$ جمع کنیم. کافیه به جای $\binom{۹}{۷}$ بر اساس قانون اول پاسکال بنویسیم $\binom{۹}{۲}$. پس حالا داریم:

$$\binom{۹}{۲}+\binom{۹}{۳}=\binom{۱۰}{۳}$$

اصل ضرب و اصل جمع

در بحث انتخاب‌ها اگه بعد از خوندن صورت سوال به «وَ» رسیدیم بین دو انتخاب از ضرب استفاده می‌کنیم و اگه به «**یا**» رسیدیم بین دو انتخاب از جمع استفاده می‌کنیم. این دو حرکت رو در ریاضیات به اسم اصل ضرب و اصل جمع می‌شناسن که به شکل زیر تعریف می‌شن.

اصل ضرب: هرگاه عملی به $n_۱$ طریق، عمل دومی به $n_۲$ طریق، ... و عمل k اُمی به n_k طریق جداگانه انجام‌پذیر باشند، آنگاه این اعمال با هم به $n_۱\times n_۲\times\ldots\times n_k$ طریق انجام می‌شوند.

اصل جمع: هرگاه عمل A به $n_۱$ طریق و عمل B به $n_۲$ طریق، ... و عمل kاُم به n_k طریق جداگانه انجام‌پذیر باشند، آنگاه اعمال A یا B یا ... یا k به $n_۱+n_۲+\ldots+n_k$ طریق انجام می‌شوند.

پس به زبون ساده اگه بخوایم دو یا چند کار رو با هم انجام بدیم بینشون ضرب می‌ذاریم و اگه بخوایم فقط یکشون رو انجام بدیم بینشون از جمع استفاده می‌کنیم.

مثال ۱ **از میان ۵ دانش‌آموز تجربی و ۴ دانش‌آموز ریاضی به چند طریق می‌توانیم:**

الف **یک کمیته‌ی علمی ۳ نفره تشکیل بدهیم؟**

خُب کافیه فقط ۳ نفر رو از بین ۹ نفر انتخاب کنیم و دیگه نیازی به مرتب کردن نیست:

$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳!}=۸۴$$

ب **یک کمیته‌ی علمی ۳ نفره تشکیل بدهیم که یک نفر دبیر کمیته یک نفر معاون و یک نفر مسئول مکاتبات باشد؟**

اینجا علاوه بر اینکه باید ۳ نفر رو انتخاب کنیم لازمه که اون سه مسئولیت یا جایگاه یا کرسی رو بین اون سه نفر تقسیم کنیم یا در اصطلاح آنالیزی مرتبشون کنیم.

همونطور که تو بحث فاکتوریل دیدیم تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز می‌شه $n!$ که برای ۳ نفر می‌شه !۳. پس دو مرحله کار داریم: مرحله‌ی اول انتخاب کردن: $\binom{۹}{۳}$ و مرحله‌ی دوم مرتب کردن: $(۳!)$ و چون لازمه این دو کار رو با هم انجام بدیم جوابش می‌شه:

$$\binom{۹}{۳}\times ۳! = ۸۴\times ۶ = ۵۰۴$$

در و اقع اگر اون سه نفر رو C,B,A بنامیم ۶ حالت مرتب شدن به شکل مقابله:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دبیر کمیته	A	A	B	B	C	C
معاون کمیته	B	C	A	C	A	B
مسئول مکاتبات	C	B	C	A	B	A

تذکر: اکثر همکاران محترم و عزیز بنده تو این موارد به دانش‌آموزان توصیه می‌کنن که از رابطه‌ی تبدیل استفاده کنن.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow P(۹,۳)=\frac{۹!}{(۹-۳)!}=\frac{۹!}{۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۶!}=۵۰۴$$

بنده به دو دلیل این روش رو توصیه نمی‌کنم:

دلیل اول: تجربه نشون داده اکثر بچه‌ها بعد از اضافه شدن این رابطه در حل مسائل آنالیز ترکیبی به یک مشکل بزرگی برخورد می‌کنن که بالاخره ترکیب یا تبدیل؟! این سؤال ۹۹٪ از بچه‌هاست که با حذف رابطه‌ی تبدیل این مشکل به راحتی حل می‌شه!

دلیل دوم: به طور کلی فرمول‌ها در حالت‌های خاص جوابگوی ما هستن و زمانی که حالت مسئله یه خورده تغییر کنه ناتوان می‌شن. مثلاً تو همین حالت ب اگه بجای اون سوال می‌گفت دو نفر دبیر و یک نفر معاون دیگه فرمول P نمی‌تونست راهگشا باشه که با داشتن استراتژی کلی این مشکل به راحتی قابل حلّه و تو بخش مسائل جایگشت این مسئله رو هم با هم حل می‌کنیم.

توضیح از تبدیل فقط در دو حالت خاص استفاده می‌کنیم که آخر درس و قبل از بخش در حاشیه بهتون می‌گم. پس ما در حل مسائل آنالیز ترکیبی هیچ نیازی به رابطه‌ی P نداریم و همیشه از ترکیب استفاده می‌کنیم. اگر نیاز به مرتب کردن و ترتیب بود از فاکتوریل و جایگشت کمک می‌گیریم. مطمئن باشید این بهترین راه برای یادگیری عمیق و مفهومی آنالیز ترکیبیه.

ج) یک کمیته‌ی ۳ نفره تشکیل بدیم که دو نفر از آنها تجربی باشن:

می‌گیم ۲ نفر تجربی و یک نفر ریاضی. (و) یعنی ضرب:

$$\binom{۵}{۲}\overset{\&}{\times}\binom{۴}{۱}=۱۰\times ۴=۴۰$$

دیگه یادتون باشه که $\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ میشه ۱۰:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times ۴}{۲}=۵\times ۲=۱۰$$

$\binom{n}{۱}$ هم که n میشه دیگه: پس $\binom{۴}{۱}$ میشه ۴.

د) یک کمیته‌ی ۳ نفره تشکیل بدیم که حداقل ۲ نفر از آنها تجربی باشن:

یعنی یا دو نفر تجربی و یک نفر ریاضی. یا هر ۳ تجربی و هیچ ریاضی:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}\overset{\&}{\times}\binom{۴}{۱}}_{(۱۰\times ۴)}\overset{or}{+}\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{۱۰}=۵۰$$

هـ) یک کمیته‌ی ۳ نفره که حداکثر ۲ نفر تجربی باشن:

حداکثر ۲ نفر یعنی یا هیچی تجربی یا یکی تجربی یا دو تا تجربی که حالت‌هاش خیلی زیاد می‌شه و بهتره از شمارش حالت متمم استفاده کنیم یعنی هر ۳ تا تجربی و از کل یعنی $\binom{۹}{۳}=۸۴$ کم کنیم:

حداکثر دو نفر تجربی:

$$\binom{۵}{۳}=۱۰\rightarrow \text{هر سه تجربی}\Rightarrow ۸۴-۱۰=۷۴\rightarrow$$

مثال ۲ **در یک ساختمان ۱۰ زوج زندگی می‌کنند. می‌خواهیم یک کمیته‌ی ۴ نفره از بین آنها انتخاب کنیم به طوریکه: الف) هیچ زوجی در بین آنها نباشد:**

خُب برای اینکه هیچ زوجی انتخاب نشه، استراتژی لازمه. اول باید ۴ زوج رو از بین ۱۰ زوج انتخاب کنیم و تو مرحله‌ی بعد از هر زوج (دو نفر) یک نفر رو انتخاب کنیم. یعنی ۴ بار انتخاب ۱ از !۲ حالا چون این کارها رو با هم انجام می‌دیم داریم:

$$\binom{۱۰}{۴}\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸}\times۷}{\cancel{۴}\times۳\times\cancel{۲}\times۱}\times۲^{۴}=۲۱۰\times۱۶=۳۳۶۰\rightarrow$$ ۳۳۶۰ حالت وجود داره.

ب) یک زوج در بین آنها باشد:

خُب اول باید یک زوج رو از بین ۱۰ زوج انتخاب کنیم. بعد برای اینکه دو نفر دیگه زن و شوهر نباشن، ۲ زوج رو از بین ۹ زوج باقیمونده انتخاب کنیم و سپس از هر زوج یک نفر.

یعنی اول $\binom{۱۰}{۱}$. بعداً $\binom{۹}{۲}$ و آخرش دو تا $\binom{۲}{۱}$. پس داریم:

$$\binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۱۰\times\frac{۹\times۸}{۲}\times۲^{۲}=۱۰\times۳۶\times۴=۱۴۴۰\rightarrow$$ ۱۴۴۰ حالت وجود داره.

ج) دو زوج در بین آنها باشد:

کافیه دو زوج از بین ۱۰ زوج انتخاب کنیم:

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵\rightarrow$$ ۴۵ حالت

مثال ۳ **از هر یک از تیم‌های بارسلون، بایرن، میلان، منچستر و رئال ۴ نفر برای شرکت در تیم منتخب جهان انتخاب شده. به چند طریق می‌توان ۳ بازیکن از بین آنها انتخاب کرد که هم تیمی نباشند؟**

خُب باز هم استراتژی. اول باید ۳ تیم از ۵ تیم رو انتخاب کنیم و بعد از ۴ نفر در هر تیم یک بازیکن.

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴^{۳}=۱۰\times۶۴=۶۴۰\rightarrow$$ ۶۴۰ حالت

مثال ۴ **به چند طریق می‌توان از میان ۴ فوتبالیست، ۴ والیبالیست، ۴ کشتی‌گیر ۲ ورزشکار انتخاب کرد که از ورزش‌های مختلف باشند؟**

خُب مثل مثال قبل عمل می‌کنیم. اول ۲ ورزش رو از بین ۳ تا انتخاب می‌کنیم $\binom{۳}{۲}$ و بعد از هر ورزش یه نفر $\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}$. پس جوابش اینجوری میشه:

$$\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۳\times۴\times۴=۴۸$$

مثال ۵ **به چند طریق می‌توان از میان ۶ فوتبالیست، ۵ والیبالیست و ۴ کشتی‌گیر ۲ ورزشکار انتخاب کرد که از ورزش‌های مختلف باشند؟**

اینجا دیگه نمی‌تونیم مثل دو مثال قبلی عمل کنیم چون تعداد افراد در هر گروه یکسان نیست. پس مجبوریم خودمون افراز کنیم. یعنی بگیم اون دو نفر ۳ حالت می‌تونن داشته باشن:

فوتبالیست & والیبالیست یا فوتبالیست & کشتی‌گیر یا والیبالیست & کشتی‌گیر

$۶\times۵=۳۰ \quad + \quad ۶\times۴=۲۴ \quad + \quad ۵\times۴=۲۰ \quad =۷۴$

پس جواب مساله شد ۷۴ حالت.

مثال ۷ **۶ مسافر وارد شهری می‌شوند که دارای ۴ هتل است. این افراد به چند طریق می‌توانند در هتل‌ها اقامت کنند؟**

خُب هر شخصی ۴ انتخاب داره و ۶ نفر هم که هستن پس جواب چی میشه؟!

$$۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۴^{۶}=(۲^{۲})^{۶}=۲^{۱۲}=۲^{۱۰}\times۲^{۲}=۱۰۲۴\times۴=۴۰۹۶$$

تذکر محاسباتی: توان‌های ۲ رو باید بلد باشی و این جور مسائل رو با این روش حل کنی.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۲^{x}	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	۲۰۴۸	۴۰۹۶

البته تا ۱۰۲۴ کافیه. اونایی که ۲۰۴۸ رو بازی کردن که دیگه توان‌های ۲ رو فول فولن!!

مثال ۸ از میان ۷ کشتی‌گیر و ۵ وزنه‌بردار به چند روش می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۶

خُب این که خیلی زیاد میشه. ما می‌گیم بهتره اینجوری بریم که یک نفر هم کشتی‌گیر نباشه و بعد از کل کم می‌کنیم. حالا کُلش چقدره؟

$$\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳!}=۲۲۰$$

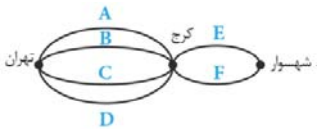
$$n(A')=\binom{۵}{۳}=۱۰\rightarrow \text{هر سه وزنه‌بردار} \Rightarrow n(A)=۲۲۰-۱۰=۲۱۰$$

تذکر خیلی مهم یاد بگیرد که همیشه متمم حداقل یکی می‌شه هیچی!

مثال ۹ (مثال مسیرها): مثلاً من می‌خوام از تهران برم به شهر زیبای تنکابن (شهسوار)

برای این منظور اول باید برم کرج. واسه کرج رفتن ۴ تا راه دارم (همون طریق!). اتوبان (A)، جاده مخصوص (B)، جاده قدیم (C) و جاده شهریار (D). حالا اگه بخوام از کرج برم شهسوار دو تا مسیر دارم. جاده چالوس (E) و جاده رشت (F)

[البته معمولاً کسی از جاده رشت نمی‌ره شهسوار مگر اینکه زمستون باشه یا جاده چالوس ترافیک باشه و ...!] پس می‌خوایم از تهران بریم شهسوار.



$$n_۱=۴ \qquad n_۲=۲ \qquad n_۱\times n_۲=۴\times۲=۸$$

حالا اگه بخوایم بریم و برگردیم:

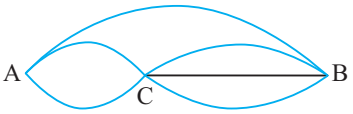
۴	×	۲	×	۲	×	۴	=	۶۴
تهران به کرج		کرج به شهسوار		شهسوار به کرج		کرج به تهران		

حالا اگه یه راننده‌ی خلاف کار بخواد این مسیر رو بره و برگرده به طوریکه اگه از یک جاده‌ای رد بشه تو برگشت دیگه حق استفاده از این جاده رو نداشته باشه:

۴	×	۲	×	۱	×	۳	=	۲۴
تهران به کرج		کرج به شهسوار		شهسوار به کرج		کرج به تهران		
مثلاً مسیر A		مثلاً مسیر E		فقط مسیر F می‌مونه		فقط مسیرهای B و C و D می‌مونن		

مثال ۱۰ (مثال مسیرها): اگه بخوایم از شهر A به B بریم چند راه وجود دارد؟

خُب می‌تونیم مستقیماً از A به B بریم (یا) از طریق شهر C.



مسیر مستقیم که فقط یک حالته. از طریق شهر C هم که براساس اصل ضرب ۳×۲ یعنی ۶ حالت داریم. پس یا اون یک حالت و یا این ۶ حالت. جواب آخر چی می‌شه؟ اصل جمع دیگه: ۷ = ۶ + ۱. پس برای رفتن از A به B، هفت راه داریم.

مثال ۱۱ مثال کدهای ژنتیکی (رمز)

قبل از ابداعات بشر، شناسه‌ها و نشانه‌های منحصر به فردی در عالم خلقت وجود داشته مثل اثر انگشت! ولی بهترین شناسه یا کدی که در وجود جاندارن قرار داره DNA است!

قطعاً کشف DNA یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای علمی انسان تو قرن بیستمه!

DNA (Deoxyribo Nucleic Acid) منبع اطلاعات وراثتی هر شخصی از جمله رنگ چشم، پوست، گروه خونی، قد و ... است و در اجزای مختلف بدن حتی پوست و مو هم یافت می‌شود!

DNA از دو رشته‌ی بسیار طولانی تشکیل شده که اجزای اصلی این دو رشته مارپیچی چهار بازآلی به نام‌های اختصاری G، A، T و C هستند و هر سه حرف متوالی در طول یک رشته، دستور ساخت اسید آمینه‌ی خاصی رو به ما می‌ده (رمز ژنتیک) چند تا اسید آمینه‌ی مختلف می‌شه ساخت؟

خب ۳ تا حرف می‌خوایم و به ازای هر حرف ۴ تا باز آلی می‌تونن بشینن:

$$\underset{\substack{C\\T\\A\\G}}{4} \times \underset{\substack{C\\T\\A\\G}}{4} \times \underset{\substack{C\\T\\A\\G}}{4} = 64$$

پس به طور کلی ۶۴ تا کد می‌تونیم داشته باشیم. البته در حدود ۲۰ نوع اسید آمینه وجود داره!
مثلاً رشته‌ی CCGCAG تو یک قطعه از رشته‌ی DNA نشون دهنده‌ی دو نوع اسید آمینه‌ی خاص گلیسین و والینه! حالا اگه قرار بود DNA به جای یک رشته‌ی سه حرفی از رشته‌ای دو حرفی استفاده کنه می‌تونست ۲۰ نوع اسید آمینه رو نامگذاری کنه؟! خب معلومه که نه! چرا!؟!
چون دو تا حرف جا داریم! پس ۲۰ تا رو دیگه نمی‌شد نامگذاری کرد.

$$\underset{\substack{C\\T\\A\\G}}{4} \times \underset{\substack{C\\T\\A\\G}}{4} = 16$$

مثال ۱۲ (مثال کدون‌ها): اول ببینیم که کدون چیه؟ یک کد ژنتیکی سه تاییه که ۴ باز آلی A (آدنین)، G (گوانین)، (C) سیتوزین و (U) یوراسیل می‌تونن تو هر کدوم از جایگاه‌ها قرار بگیرن.

از کتاب ژنتیکمون یاد می‌گیرین که UAG و UGA که با هم می‌گن UAA (یوهاها!) سه تا کدون بی‌معنا هستن! حالا یه سوال ریاضی! چند تا کدون داریم که بی‌معنا باشه (یا) یوراسیل نداشته باشه! خب بی‌معناها که ۳ تاست و هر ۳ تا هم خداروشکر u دارن! حالا اونایی که u ندارن چند تاست؟
پس جواب می‌شه $۳۰ = ۲۷ + ۳$. از اصل جمع استفاده کردیم چون این (یا) اون (یا) بود.

$$\underset{\substack{A\\G\\C}}{3} \times \underset{\substack{A\\G\\C}}{3} \times \underset{\substack{A\\G\\C}}{3} = 27$$

نکته مهم : تو این مسئله این بود که اشتراک نداشتن، یعنی کدونی نداریم که هم بی‌معنا باشه و هم یوراسیل نداشته باشه.

حالا اگه میگفت کدون‌هایی که بی‌معناست یا سیتوزین نداره مسئله خیلی فرق می‌کرد.
کدون‌هایی که سیتوزین نداره که ۲۷ تاست: $۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

$$\underset{\substack{A\\G\\U}}{3} \times \underset{\substack{A\\G\\U}}{3} \times \underset{\substack{A\\G\\U}}{3} = 27$$

خب ۳ تایی بی‌معناها هم که هیچ‌کدوم سیتوزین ندارن پس تو همین ۲۷ تاست. بنابراین جواب می‌شه همون ۲۷.

مثال ۱۳ چند کدون داریم که حتماً شامل باز آلی یوراسیل هستند؟

۱) ۶۴ ۲) ۴۷ ۳) ۳۷ ۴) ۲۷

طبق مطالب درسنامه، تعداد کل کدون‌ها: ۶۴تاست. بهتره اونایی که U ندارن رو حساب کنیم و از ۶۴ کم کنیم.

$$\underset{\substack{A\\C\\G}}{\boxed{3}} \ \underset{\substack{A\\C\\G}}{\boxed{3}} \ \underset{\substack{A\\C\\G}}{\boxed{3}} = 27$$

$$\underset{\substack{A\\U\\G\\C}}{\boxed{4}} \ \underset{\substack{A\\U\\G\\C}}{\boxed{4}} \ \underset{\substack{A\\U\\G\\C}}{\boxed{4}} = 64$$

تعداد کدون‌های شامل یوراسیل $= ۶۴ - ۲۷ = ۳۷$

مثال ۱۴ از علیرضا منصوریان سر مربی تیم استقلال تهران خواسته شده که به دلیل حضور در جمع ۴ تیم برتر آسیا یک دفاع، یک هافبک و یک فوروارد به کنفدراسیون فوتبال آسیا (AFC) معرفی کنه. امیرخان از بین ۵ دفاع، ۹ هافبک و ۶ فوروارد به چند روش می‌تواند این لیست ۳ نفره را به AFC تحویل بدهد؟

طبق اصل ضرب داریم:

$$\underset{\text{دفاع}}{۵} \times \underset{\text{هافبک}}{۹} \times \underset{\text{فوروارد}}{۶} = ۲۷۰$$

پس امیرخان می‌تونه ۲۷۰ لیست مختلف ارسال کنه! حتماً مثال ۳ اصل جمع رو هم ببینید.

مثال ۱۵ از علی دایی سر مربی تیم فوتبال پرسپولیس خواسته می‌شود به دلیل کسب مقام هفتمی لیگ برتر از بین ۵ دفاع یا ۹ هافبک یا ۶ فوروارد، یک بازیکن را به تیم ملی معرفی کند. این مربی به چند طریق می‌تواند شخص مورد نظر را معرفی کند؟

خُب معلومه دیگه یا ۵ تا دفاع یا ۹ تا هافبک و یا ۶ فوروارد: $۲۰ = ۶ + ۹ + ۵$. پس علی آقا فقط می‌تونه ۲۰ تا فرم ارسال کنه.

مثال ۱۶ ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب زیست متمایز رو به چند طریق می‌تونیم تو یکی از طبقه‌های یک کتابخونه بچینیم؟

خُب ۷ تا کتاب متمایز داریم دیگه! جوابش می‌شها $۷! = ۵۰۴۰$
یعنی این که این ۷ تا کتاب ۵۰۴۰ تا جایگشت دارن که مثلاً:
یکیشون اینه: $R_۴R_۳R_۲R_۱$، $Z_۳Z_۲Z_۱$ یا یکی دیگه $R_۴R_۳R_۲R_۱Z_۳Z_۲Z_۱$. اینا فقط ۲ تا از پنج هزار و چهل تا بود. OK؟!