

آشنایی با منطق ریاضی

درس اول

گزاره و مفاهیم مرتبط

- ۱- کدام یک از جملات زیر، یک گزاره می باشد؟
- (۱) لطفاً برای رفتن به شهر بازی بلیط بخر.
 (۲) لباس های علی خیلی زیبا بود.
 (۳) عدد ۵ بزرگ ترین عدد اول یک رقمی است.
 (۴) به نظر شما چه غذایی برای درمان سرماخوردگی مناسب است؟
- ۲- چه تعداد از جمله های زیر یک گزاره هستند؟
- (الف) خودروی جدید علیرضا گران قیمت است.
 (ب) زمین تنها سیاره منظومه شمسی است که حیات در آن جریان دارد.
 (ج) هر عدد زوج بزرگ تر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.
 (د) صفر (۱) (۲) (۳) (۴) ۲ (۳) ۳ (۴)
- ۳- چه تعداد از عبارات های زیر گزاره نیستند؟
- (الف) تعداد سیارات کل هستی هفتاد و هشت میلیارد است.
 (ب) ای کاش می توانستیم در یک هوای پاک زندگی کنیم.
 (ج) هر انسان ۱۰ تا چشم دارد.
 (د) صفر (۱) (۲) (۳) ۲ (۳) ۳ (۴)
- ۴- جدول ارزش های ۱-۳n گزاره دارای ۳۲ حالت مختلف است. جدول ارزش های n گزاره دارای چند حالت مختلف می باشد؟
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶ (۴) ۲۴
- ۵- در گزاره نمای «احتمال آن که در پرتاب یک تاس پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{4}$ است»، مجموعه جواب گزاره نما دارای چند عضو است؟
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴
- ۶- مجموعه جواب گزاره نمای « $0 < 2x^2 - 5x + 3$ » با دامنه IR، شامل چند عدد صحیح است؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۷- اگر دامنه متغیر گزاره نما، مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب کدام گزاره نما با دامنه متغیر گزاره نما برابر است؟
- (۱) $n(n+1) \notin p$ (۲) $2^n + 1 \in p$ (۳) $2^n > n^2$ (۴) $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- ۸- اگر r یک گزاره درست باشد، تحت چه شرایطی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ نادرست است؟
- (۱) p و q دو گزاره نادرست باشند. (۲) p درست و q نادرست باشد. (۳) p نادرست و q درست باشد. (۴) نشدنی
- ۹- اگر r یک گزاره درست باشد، تحت چه شرایطی گزاره $(p \wedge r) \vee (q \vee r)$ نادرست است؟
- (۱) p و q دو گزاره درست باشند. (۲) p درست و q نادرست باشد. (۳) p نادرست و q درست باشد. (۴) نشدنی
- ۱۰- اگر p یک گزاره درست و q یک گزاره نادرست باشد، کدام گزاره درست است؟
- (۱) $[p \wedge (q \vee p)] \wedge q$ (۲) $(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge q)$ (۳) $q \wedge [p \wedge (p \vee q)]$ (۴) $(p \wedge q) \wedge (p \vee p)$
- ۱۱- اگر r گزاره ای درست و p و q دو گزاره دلخواه باشند، ارزش گزاره $[(r \wedge p) \vee \sim p] \wedge q$ چگونه است؟
- (۱) نادرست است. (۲) درست است. (۳) p با هم ارز است. (۴) q با هم ارز است.
- ۱۲- نقیض کدام یک از گزاره های زیر با گزاره $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ هم ارز است؟
- (۱) $(p \vee q) \wedge \sim p$ (۲) $q \wedge \sim (p \vee q)$ (۳) $\sim p \wedge (\sim p \vee p)$ (۴) $\sim (\sim p \vee q)$
- ۱۳- تعداد حالت های درست گزاره $\sim p \vee [q \vee (p \vee \sim q)]$ با تعداد حالت های نادرست کدام یک از گزاره های زیر برابر است؟
- (۱) $p \wedge (\sim p \vee q)$ (۲) $p \wedge (\sim p \wedge q)$ (۳) $p \vee (\sim p \wedge q)$ (۴) $p \vee (\sim p \vee q)$

۱۴- برای این که ارزش گزاره $p \vee [(\sim q \vee X) \wedge \sim (\sim q \wedge \sim X)]$ همواره درست باشد، به جای X کدام یک از گزاره های زیر را می توان قرار داد؟

$$\begin{array}{cccc} p \wedge q & (۱) & \sim p & (۲) \\ q & (۳) & \sim q & (۴) \end{array}$$

۱۵- ارزش گزاره $[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \wedge [r \vee (p \wedge \sim r)]$ در کدام حالت درست است؟

(۱) ارزش گزاره p نادرست، q دلخواه و r درست باشد.

(۲) ارزش گزاره p درست، q نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد.

(۳) ارزش گزاره p نادرست، q درست و r گزاره ای دلخواه باشد.

(۴) ارزش گزاره p درست، q دلخواه و r گزاره ای درست باشد.

۱۶- تعداد حالت های درست گزاره $(p \wedge \sim q) \vee [r \vee (\sim p \vee q)]$ چه قدر بیشتر از تعداد حالت های نادرست آن است؟

$$\begin{array}{cccc} ۸ & (۱) & ۶ & (۲) \\ ۴ & (۳) & ۲ & (۴) \end{array}$$

۱۷- تعداد حالت های درست گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ چه قدر کم تر از تعداد حالت های نادرست گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge q)$ است؟

$$\begin{array}{cccc} ۱ & (۱) & ۱ & (۲) \\ ۲ & (۳) & ۳ & (۴) \end{array}$$

۱۸- تفاضل تعداد حالت های درست و نادرست گزاره $(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} ۸ & (۱) & ۶ & (۲) \\ ۴ & (۳) & ۲ & (۴) \end{array}$$

۱۹- گزاره «اگر $x > ۲$ باشد، آن گاه $x^2 > ۴$ » معادل کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{cccc} (۱) \text{ اگر } x^2 < ۴ \text{ آن گاه } x < ۲ & (۲) \text{ اگر } x^2 \geq ۴ \text{ آن گاه } x \geq ۲ & (۳) \text{ اگر } x^2 \leq ۴ \text{ آن گاه } x \leq ۲ & (۴) \text{ اگر } x^2 > ۴ \text{ آن گاه } x > ۲ \end{array}$$

۲۰- ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

(۱) اگر $۳^۲ = ۶$ آن گاه ۲ اول است.

(۲) اگر ۶ فرد باشد آن گاه $۳ > ۵$ است.

(۳) اگر ۱۱ اول باشد آن گاه ۱۲ اول است.

(۴) اگر $۴^۲ = ۲^۴$ آن گاه $۳^۲ > ۳^۳$ است.

۲۱- گزاره $\sim q \Rightarrow p$ با کدام یک از گزاره های زیر هم ارزش است؟

$$\begin{array}{cccc} p \vee q & (۱) & p \vee \sim q & (۲) \\ \sim p \vee q & (۳) & \sim p \vee \sim q & (۴) \end{array}$$

۲۲- گزاره $\sim (p \Rightarrow q)$ با کدام گزاره هم ارزش است؟

$$\begin{array}{cccc} p \wedge \sim q & (۱) & \sim p \wedge \sim q & (۲) \\ p \vee \sim q & (۳) & \sim p \vee \sim q & (۴) \end{array}$$

۲۳- نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} \sim p \wedge q & (۱) & p \wedge \sim q & (۲) \\ \sim p \Rightarrow q & (۳) & \sim p \Rightarrow \sim q & (۴) \end{array}$$

۲۴- نقیض هر گزاره شرطی کدام است؟

(۱) ترکیب فصلی نقیض مقدم و تالی آن.

(۲) ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی آن.

(۳) ترکیب فصلی مقدم و نقیض تالی آن.

(۴) ترکیب عطفی مقدم و تالی آن.

۲۵- نقیض گزاره « $q \Rightarrow \sim p$ » برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{cccc} (۱) \text{ ترکیب فصلی } p \text{ و } q & (۲) \text{ ترکیب فصلی } p \text{ و } \sim q & (۳) \text{ ترکیب عطفی } p \text{ و } q & (۴) \text{ ترکیب عطفی } p \text{ و } \sim q \end{array}$$

۲۶- گزاره « $\sim p \Rightarrow p \wedge q$ » هم ارز کدام گزاره است؟

$$\begin{array}{cccc} p & (۱) & q & (۲) \\ \sim p & (۳) & \sim q & (۴) \end{array}$$

۲۷- ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee p$ در چند حالت نادرست است؟

$$\begin{array}{cccc} ۱ & (۱) & ۲ & (۲) \\ ۳ & (۳) & ۴ & (۴) \end{array}$$

۲۸- ارزش گزاره $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r$ در چند حالت درست است؟

$$\begin{array}{cccc} ۲ & (۱) & ۴ & (۲) \\ ۸ & (۳) & ۴ & (۴) \end{array}$$

۲۹- اگر p یک گزاره درست و q گزاره دلخواه باشد، کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

$$\begin{array}{cccc} \sim p \Rightarrow q & (۱) & p \Rightarrow q & (۲) \\ q \Rightarrow \sim p & (۳) & \sim q \Rightarrow \sim p & (۴) \end{array}$$

۳۰- اگر p یک گزاره درست و q و r گزاره های دلخواه باشند، ارزش کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

$$\begin{array}{cccc} \sim p \wedge q \Rightarrow r & (۱) & p \wedge q \Rightarrow r & (۲) \\ \sim p \vee q \Rightarrow r & (۳) & p \vee q \Rightarrow r & (۴) \end{array}$$

۳۱- اگر ارزش دو گزاره « $p \Rightarrow q$ » و « $\sim p \Rightarrow q$ » درست باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

$$\begin{array}{cccc} p & (۱) & q & (۲) \\ \sim p & (۳) & \sim q & (۴) \end{array}$$

۳۲- عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} p \Rightarrow p \vee q & (۱) & p \Rightarrow p \wedge q & (۲) \\ \sim p \Rightarrow p \wedge q & (۳) & p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) & (۴) \end{array}$$

۳۳- اگر گزاره « $p \Rightarrow q$ » نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

$$\begin{array}{cccc} (p \wedge \sim q) \vee r & (۱) & r \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) & (۲) \\ (p \vee \sim q) \wedge r & (۳) & p \Rightarrow (q \wedge r) & (۴) \end{array}$$

۳۴- ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست نیست؟

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \quad (۴) \quad [p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p \vee r \quad (۳) \quad [(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow p \quad (۲) \quad [(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q \quad (۱)$$

۳۵- در مورد گزاره $(p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge \sim r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ کدام گزینه درست است؟

(۱) با گزاره $p \vee q$ هم‌ارزش است. (۲) ارزش آن همواره درست است. (۳) نقیض گزاره $p \vee q$ است. (۴) ارزش آن در ۵ حالت درست است.

۳۶- در رابطه با گزاره $p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q]$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هم‌ارز گزاره $\sim(p \Rightarrow q)$ است. (۲) هم‌ارز گزاره $(p \Rightarrow q)$ است. (۳) در دو حالت درست است. (۴) همواره نادرست است.

۳۷- اگر ارزش دو گزاره p و r درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۱) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad (۲) \quad (p \vee q) \Rightarrow \sim r \quad (۳) \quad (p \wedge q) \Rightarrow r \quad (۴) \quad (۴)$$

۳۸- در چه صورت ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

(۱) اگر p گزاره درست و q و r گزاره‌های دلخواه باشند. (۲) اگر p گزاره دلخواه و q و r گزاره‌های نادرست باشند.

(۳) اگر p گزاره درست و q و r گزاره‌های نادرست باشند. (۴) اگر p گزاره نادرست و q و r گزاره‌های درست باشند.

۳۹- گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p)$ در چند حالت نادرست است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۰- گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ در چند حالت نادرست است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۱- با توجه به گزاره «اگر خانم بنیادی با تاکسی به اداره برود، دیر خواهد رسید» کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر خانم بنیادی تاکسی نگیرد، دیر نخواهد رسید. (۲) اگر خانم بنیادی دیر نکند، او نباید تاکسی گرفته باشد.

(۳) اگر خانم بنیادی دیر کند، او باید تاکسی گرفته باشد. (۴) اگر خانم بنیادی دیر نکند، او باید تاکسی گرفته باشد.

۴۲- نقیض گزاره «اگر a زوج باشد، $a+1$ فرد خواهد بود» کدام است؟

(۱) نه a زوج است و نه $a+1$ فرد است. (۲) هم a زوج است و هم $a+1$ فرد است.

(۳) a زوج است و $a+1$ فرد نیست. (۴) a زوج نیست و $a+1$ فرد است.

۴۳- با توجه به گزاره «اگر ورزش کنید، بدن سالمی خواهید داشت» کدام گزینه صحیح است؟

(۱) ورزش نمی‌کنید یا بدن سالمی خواهید داشت. (۲) اگر ورزش نکنید، بدن سالمی نخواهید داشت.

(۳) اگر بدن سالمی داشته باشید، ورزش کرده‌اید. (۴) ورزش می‌کنید و بدن سالمی خواهید داشت.

۴۴- اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

$$(q \wedge r) \Rightarrow r \quad (۱) \quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \quad (۲) \quad (\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \quad (۳) \quad (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \quad (۴) \quad (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q \quad (۴)$$

۴۵- اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r) \quad (۱) \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \quad (۲) \quad (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r \quad (۳) \quad (r \Rightarrow p) \wedge p \quad (۴)$$

۴۶- اگر p, q, r, s چهار گزاره و $p \Rightarrow [q \Rightarrow r]$ نادرست باشد، ارزش نقیض کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow s \quad (۱) \quad [(\sim p \vee s) \wedge r] \Rightarrow q \quad (۲) \quad [(q \wedge \sim r) \vee s] \Rightarrow r \quad (۳) \quad [(q \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow r] \Rightarrow p \quad (۴)$$

۴۷- اگر p گزاره‌ای دلخواه و « $q \Leftrightarrow r$ » نادرست باشد، ارزش گزاره $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q]$ در چند حالت نادرست است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۴۸- اگر گزاره « $p \Rightarrow r \vee p$ » همواره درست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r)$ در کدام حالت درست است؟

(۱) ارزش گزاره‌های p و r درست و ارزش q نادرست باشد. (۲) ارزش گزاره‌های p و r نادرست و ارزش q درست باشد.

(۳) ارزش گزاره‌های p و q نادرست و ارزش r درست باشد. (۴) ارزش گزاره‌های p و q درست و ارزش r نادرست باشد.

۴۹- اگر گزاره $p \Rightarrow r$ نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $[r \Leftrightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ در چند حالت نادرست است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۰- گزاره $(p \Leftrightarrow q) \vee (\sim p)$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارزش است؟

$$p \Rightarrow \sim q \quad (۱) \quad \sim q \Rightarrow p \quad (۲) \quad \sim q \Rightarrow \sim p \quad (۳) \quad \sim p \Rightarrow q \quad (۴)$$

۵۱- در رابطه با گزاره $(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر p و r گزاره‌هایی درست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش آن نادرست است.

(۲) ارزش آن فقط زمانی درست است که p, q و r نادرست باشند.

(۳) ارزش آن در ۸ حالت نادرست است.

(۴) یک گزاره همواره درست است.

۵۲- ارزش گزاره $(p \wedge r \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q \vee r)$ در چند حالت درست است؟

۱) صفر (۲) ۲) ۲ (۳) ۳) ۴ (۳) ۴) ۸ (۴)

۵۳- نقیض گزاره $(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$ کدام است؟

۱) $p \Leftrightarrow q$ (۲) $p \Leftrightarrow \sim q$ (۳) $p \Rightarrow q$ (۴) $\sim q \Rightarrow p$ (۴)

۵۴- ارزش گزاره « $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ » در چند حالت درست است؟

۱) ۴ (۲) ۲) ۳ (۳) ۳) ۲ (۴) ۴) ۱ (۴)

سورها

۵۵- گزاره سوری $\exists x \in P; x = 2k + 1$ که در آن P مجموعه اعداد اول است، به کدام یک از صورت‌های زیر بیان می‌شود؟

۱) همه اعداد اول فرد هستند. ۲) همه اعداد اول هستند.
۳) عدد فردی وجود دارد که اول باشد. ۴) عدد اولی وجود دارد که فرد باشد.

۵۶- نقیض گزاره سوری «همه کسانی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم هم لذت می‌برند» کدام است؟

۱) همه کسانی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند.
۲) برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند.
۳) هیچ فرد علاقمند به موسیقی کلاسیک، از تماشای فیلم لذت نمی‌برد.
۴) برخی از افرادی که از تماشای فیلم لذت می‌برند، از موسیقی کلاسیک لذت نمی‌برند.

۵۷- ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $(\exists x \in \mathbb{R}; x + 2 = 2) \Rightarrow (\forall x \in (0, +\infty); x - \frac{1}{x} \geq 2)$ (۲) $(\exists x \in \mathbb{N}; \sqrt{3-x} \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 = 1)$ (۴)
۲) $(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}; 2x < x)$ (۳) $(\exists x \in \mathbb{R}; (x+1)^2 = x^2 + 2x - 1) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > x)$ (۴)

۵۸- نقیض گزاره $(\exists x \in \mathbb{R}, x > 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0)$ کدام است؟

۱) $(\exists x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$ (۲) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$ (۳)
۳) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$ (۴) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$ (۴)

۵۹- نقیض گزاره سوری $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ کدام است؟

۱) $\forall x \in [0, +\infty); x - \frac{1}{x} \leq -2$ (۲) $\forall x \in (-\infty, 0); x + \frac{1}{x} \leq -2$ (۳) $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$ (۴) $\exists x \in (0, +\infty); x + \frac{1}{x} \geq 2$ (۴)

۶۰- اگر P مجموعه اعداد اول باشد، نقیض کدام گزاره سوری زیر، به درستی در مقابل آن نوشته نشده است؟

۱) $\sim[\exists x \in \mathbb{R}; x < 0 \wedge x^2 \leq 1] \equiv \forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \vee x^2 > 1$ (۲) $\sim[\forall x \in \mathbb{N}; (2^{2^x} + 1) \in P] \equiv \exists x \in \mathbb{N}; (2^{2^x} + 1) \notin P$ (۳)
۲) $\sim[\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1] \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$ (۴) $\sim[\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} = 0] \equiv \exists x \notin \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} \neq 0$ (۴)

۶۱- نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^3 - 8 = 0)$ کدام است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 \neq 0) \Rightarrow (x^3 - 8 \neq 0)$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 \neq 0) \wedge (x^3 - 8 = 0)$ (۳)
۲) $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \wedge (x^3 - 8 \neq 0)$ (۴) $\exists x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \wedge (x^3 - 8 \neq 0)$ (۴)

۶۲- اگر P مجموعه اعداد اول و O مجموعه اعداد فرد باشند، ارزش کدام یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟

۱) $\forall x \in O; x^2 \in O$ (۲) $\exists x \in \mathbb{N}; \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z}$ (۳) $\forall x \in P; x \in O$ (۴) $\exists x \in \mathbb{W}; 2^{2^x - 1} \in P$ (۴)

۶۳- نقیض گزاره $(\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b) \Rightarrow (a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2)$ برابر کدام است؟

۱) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge (a^2 \leq b^2 \wedge a^2 > b^2)$ (۲) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a \geq b) \vee (a^2 > b^2 \vee a^2 \leq b^2)$ (۳)
۲) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a \not< b) \Rightarrow (a^2 > b^2 \wedge a^2 \leq b^2)$ (۴) $\exists a, b \in \mathbb{Z}; (a^2 > b^2 \vee a^2 \leq b^2) \Rightarrow (b < a)$ (۴)

۶۴- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\exists x \in A; x + 7 = 20$ (ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$ (ج) $\exists x \in A; x + 3 \leq 6$ (د) $\forall x \in A; x + 3 \geq 8$
۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

مجموعه - زیرمجموعه

درس دوم

مقدمات مجموعه (پایه دهم)

۶۵- اگر دامنه متغیر مجموعه اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب کدام یک از گزینه‌های زیر تعداد اعضای بیشتری دارد؟

(۱) $\{k(k-1) \mid k-1 < 2\}$ (۲) $\left\{x \mid \frac{x-1}{2} < 1, x \in \mathbb{W}\right\}$ (۳) $\{x \mid 0 < x < 3\}$ (۴) $\{x \mid x^2 - x = 0\}$

۶۶- کدام یک از عبارات زیر بیانگر یک مجموعه است؟

- (۱) سه شاعر معروف ایران
(۲) پنج شهر زیبای ایران
(۳) دو عدد اول یک‌رقمی
(۴) دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون بزرگ گاج در سال ۹۶

۶۷- تعداد اعضای مجموعه $A = \{\emptyset, \{\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\}\}\}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۸- اگر مجموعه A به صورت $A = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\{\} \subseteq A$ (۲) $\{\} \in A$ (۳) $\{\{\}\} \in A$ (۴) $\{\{\}\} \subseteq A$

خارج ۸۶

۶۹- اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in B$ (۴) $B \in C$

داخل ۹۵

۷۰- مجموعه $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟

(۱) $A \in B$ (۲) $A \in C$ (۳) $B \in C$ (۴) $A \subseteq C$

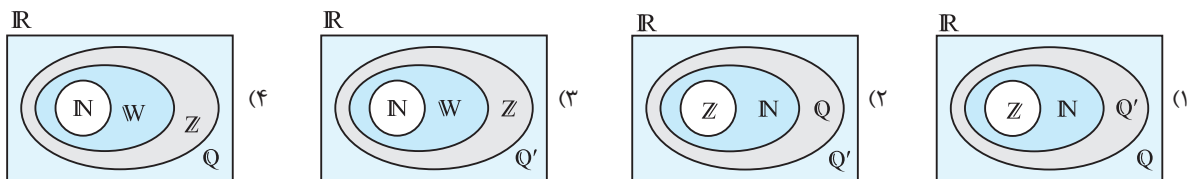
۷۱- اگر $A = \{1, \emptyset\}$ ، $B = \{1, \{\emptyset, 1\}\}$ و $C = \{\emptyset, \{\{1, \emptyset\}\}, \{1, \emptyset\}\}$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $A \subseteq C$ (۲) $B \in C$ (۳) $B \subseteq C$ (۴) $A \in B$

۷۲- کدام گزینه درست است؟

(۱) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ (۳) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{W}$

۷۳- کدام گزینه درست است؟



۷۴- اگر $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{Q}'$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $A \subseteq \mathbb{W}$ (۲) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}' = A$ (۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = A$ (۴) $\mathbb{Z} \subseteq A$

۷۵- اعضای مجموعه $A = \{x \in \mathbb{P} \mid \sqrt{x-1} - 2 < 1\}$ که در آن \mathbb{P} مجموعه اعداد اول می‌باشد، کدام است؟

(۱) $\{3, 5, 7, 9\}$ (۲) $\{4, 6, 8\}$ (۳) $\{2, 3, 5, 7\}$ (۴) $\{3, 5, 7\}$

۷۶- اگر $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ و $B = \{x \in A \mid x \subseteq A\}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\{a\} \in B$ (۲) $\{a, b\} \in B$ (۳) $\{a\} \subseteq B$ (۴) $\{a, b\} \subseteq B$

۷۷- مجموعه $A = \left\{-4, -2, -\frac{4}{3}, -1, \dots\right\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

(۱) $\left\{\frac{5-n}{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (۲) $\left\{\frac{-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (۳) $\left\{\frac{4}{1-n} \mid n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ (۴) $\left\{\frac{3n+1}{n-1} \mid n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$

پاسخ تشریحی

۳ ۱

درسنامه

گزاره

گزاره: به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، درست یا نادرست باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهیم.

نکته جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

ارزش گزاره: درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

نکته یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، پس گزاره فقط یک ارزش دارد.

عبارت موجود در گزینه (۳) یک جمله خبری است پس گزاره می‌باشد. دقت کنید که ارزش این گزاره نادرست است. در گزینه (۱) یک جمله امری، در گزینه (۲) یک جمله عاطفی و در گزینه (۴) یک جمله پرسشی مطرح شده است پس گزاره نیستند.

۲ ۳ در مورد (الف)، از آنجایی که افراد با توجه به وضع اقتصادی، نظرهای متفاوتی نسبت به درستی این عبارت دارند، این عبارت یک گزاره نمی‌باشد. در مورد (ب)، یک جمله خبری داریم که به هر حال ارزش آن یا درست است یا نادرست پس گزاره می‌باشد. در قسمت (ج)، این حدس تاکنون اثبات نشده است، از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است ولی این جمله به هر حال یا درست است یا نادرست. در نتیجه این عبارت نیز یک گزاره می‌باشد.

۲ ۳ در عبارت (الف) هنوز کسی به‌طور قطع این موضوع را نمی‌داند ولی این جمله یا درست است یا نادرست، پس یک گزاره است. عبارت (ب)، جمله خبری نیست، در نتیجه گزاره محسوب نمی‌شود. اما عبارت (ج) گزاره است زیرا یک جمله خبری است گرچه ارزش آن نادرست می‌باشد.

۲ ۴

درسنامه

جدول ارزش گزاره‌ها

همان‌طور که دیدیم، هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره از نظر ارزش، دارای ۲ حالت است. حال اگر n گزاره داشته باشیم، ارزش آن‌ها طبق اصل ضرب دارای 2^n حالت مختلف می‌تواند باشد. بنابراین ارزش هر گزاره مانند p دارای دو حالت، ارزش‌های گزاره‌های p و q دارای ۴ حالت و هم‌چنین ارزش‌های گزاره‌های p, q و r دارای ۸ حالت مختلف هستند.

p	p	q	p	q	r
د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
	ن	د	د	ن	د
	ن	ن	د	ن	ن
			ن	د	د
			ن	د	ن
			ن	ن	د
			ن	ن	ن

با توجه به درسنامه فوق داریم:

$$2^{3n-1} = 32 \Rightarrow 2^{3n-1} = 2^5 \Rightarrow 3n-1 = 5 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$$

می‌دانیم جدول ارزش‌های دو گزاره دارای $2^2 = 4$ حالت مختلف است.

دستنامه

گزاره‌نما

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر یا متغیرها به یک گزاره تبدیل شود را گزاره‌نما می‌نامیم. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم. مثلاً جمله « a عددی فرد است»، یک گزاره‌نما است، با قرار دادن $a = 3$ در آن، به یک گزاره درست و با قرار دادن $a = 4$ در آن، به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود.

دامنه متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف « D » نمایش می‌دهند. مثلاً دامنه متغیر گزاره‌نمای « p عددی اول است» مجموعه اعداد طبیعی، دامنه متغیر گزاره‌نمای « x عددی زوج است» مجموعه اعداد صحیح می‌توان در نظر گرفت.

مجموعه جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف « S » نشان می‌دهیم. واضح است که همواره $S \subseteq D$ می‌باشد. مثلاً در گزاره‌نمای $4x^2 + x - 5 = 0$ دامنه متغیر گزاره‌نما مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه جواب آن برابر $S = \left\{1, -\frac{5}{4}\right\}$ است.

می‌دانیم فضای نمونه پرتاب یک تاس، مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌باشد. از آن‌جایی که احتمال وقوع پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است، پس داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{n(A)}{6} \Rightarrow n(A) = 1$$

بنابراین باید تعداد پیشامدهای سه‌عضوی را به‌دست آوریم که برابر تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه S است، پس داریم:

$$\text{تعداد پیشامدهای سه‌عضوی} = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

ابتدا عبارت $2x^2 - 5x + 3$ را تعیین علامت می‌کنیم: ۱ ۶

$$2x^2 - 5x + 3 < 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) < 0 \Rightarrow x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

واضح است مجموعه جواب گزاره‌نما شامل عدد صحیح نیست.

در گزینه (۱) با قراردادن $n = 1$ ، عبارت $n(n+1)$ برابر ۲ می‌شود که عددی اول است. در گزینه (۲) با قراردادن $n = 3$ ، عبارت $2^n + 1$ برابر ۹ می‌شود ۴ ۷

که عددی اول نیست و در گزینه (۳) با قراردادن $n = 2$ ، عبارت 2^n با n^2 برابر می‌شود. بنابراین در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مجموعه جواب برابر با مجموعه اعداد طبیعی نیست. اما گزینه (۴) به‌ازای هر عدد طبیعی n برقرار است، پس مجموعه جواب با دامنه متغیر گزاره‌نما برابر است.

دستنامه

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند. با دانستن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و توجه به ادات ربط می‌توان ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کرد.

نقیض یک گزاره: نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. ارزش $\sim p$ همواره عکس ارزش p است. با توجه به جدول مقابل داریم:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

نکته نقیض اعمال ریاضی به صورت جدول زیر می‌باشند:

p	$=$	\neq	$<$	$>$	\geq	\leq
$\sim p$	\neq	$=$	\geq	\leq	$<$	$>$

دو گزاره هم‌ارز: اگر دو گزاره p و q هم‌ارز باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم: p هم‌ارز است با q .

نکته دو گزاره p و $(\sim p)$ هم‌ارز می‌باشند. به جدول مقابل دقت کنید:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب فصلی دو گزاره: گزاره‌ای که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم و با « $p \vee q$ » نشان می‌دهیم. به رابط منطقی « \vee » فاصل گفته می‌شود.

نکته ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \vee q$ درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره‌ای که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «و» تشکیل شده است را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم و با « $p \wedge q$ » نشان می‌دهیم. به رابط منطقی « \wedge » عطف گفته می‌شود.

نکته ارزش ترکیب عطفی دو گزاره p و q وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

← نتایج

۱) ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش همواره درست و ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش همواره نادرست است.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن

۲) قوانین دمورگان و جذب

قانون دمورگان	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
قانون جذب	$p \wedge (q \vee p) \equiv p$	$p \vee (q \wedge p) \equiv p$

چون گزاره‌ای درست است، پس $p \wedge r \equiv p$ و $q \wedge r \equiv q$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ در صورتی نادرست است که هر دو گزاره $p \wedge r$ و $q \wedge r$ نادرست باشند. بنابراین گزاره مورد نظر در صورتی نادرست است که دو گزاره p و q نادرست باشند.

چون گزاره‌ای با ارزش درست است، پس $p \wedge r \equiv p$ است و داریم:

$$(p \wedge r) \vee (q \vee r) \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee (d) \equiv d$$

بنابراین ارزش گزاره $(p \wedge r) \vee (q \vee r)$ همواره درست است.

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: ۲ ۱۰

$$۱) [p \wedge (q \vee p)] \wedge q \equiv [d \wedge (d \vee n)] \wedge n \equiv d \wedge n \equiv n$$

$$۲) (p \wedge q) \vee \sim(p \wedge q) \equiv (d \wedge n) \vee \sim(d \wedge n) \equiv n \vee \sim(n) \equiv n \vee d \equiv d$$

بنابراین گزینه (۲) درست است. به عنوان تمرین گزینه‌های (۳) و (۴) را بررسی می‌کنیم:

$$۳) q \wedge [p \wedge (p \vee q)] \equiv n \wedge [d \wedge (d \vee n)] \equiv n \wedge [d \wedge d] = n \wedge d \equiv n$$

$$۴) (p \wedge q) \wedge (p \vee p) \equiv (d \wedge n) \wedge (d \vee d) \equiv n \wedge d \equiv n$$

چون گزاره‌ای درست است پس ارزش $r \wedge p \equiv p$ با ارزش p یکسان است، یعنی $r \wedge p \equiv p$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $p \vee \sim p$ همواره درست

است. لذا ارزش ترکیب عطفی آن با q همواره با ارزش q برابر است. نگاه کنید:

$$[(r \wedge p) \vee \sim p] \wedge q \equiv [p \vee \sim p] \wedge q \equiv [d] \wedge q \equiv q$$

ابتدا گزاره $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ را ساده می‌کنیم: ۳ ۱۲

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (\sim q \vee q) \equiv p \wedge (\text{د}) \equiv p$$

همواره درست

حال نقیض گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$۱) \sim [(p \vee q) \wedge \sim p] \equiv \sim [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \equiv \sim [(ن) \vee (q \wedge \sim p)] \equiv \sim (q \wedge \sim p) \equiv \sim q \vee p$$

همواره نادرست

$$۲) \sim [q \wedge \sim (p \vee q)] \equiv \sim [q \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \equiv \sim [(q \wedge \sim q) \wedge \sim p] \equiv \sim [(ن) \wedge \sim p] \equiv \sim (ن) \equiv \text{د}$$

$$۳) \sim [\sim p \wedge (\sim p \vee p)] \equiv \sim (\sim p) \equiv p$$

$$۴) \sim [\sim (\sim p \vee q)] \equiv \sim p \vee q$$

گزاره داده شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم: ۲ ۱۳

$$[q \vee (p \vee \sim q)] \vee \sim p \equiv [(q \vee \sim q) \vee p] \vee \sim p \equiv (\text{د}) \vee p \vee \sim p \equiv (\text{د}) \vee (\sim p) \equiv \text{د}$$

پس این گزاره در ۴ حالت درست است. حال تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \equiv (ن) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q \Rightarrow \text{در ۳ حالت نادرست است.}$$

$$۲) p \wedge (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim p) \wedge q \equiv (ن) \wedge q \equiv ن \Rightarrow \text{این گزاره در ۴ حالت نادرست است.}$$

$$۳) p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q \Rightarrow \text{در ۱ حالت نادرست است.}$$

$$۴) p \vee (\sim p \vee q) \equiv (p \vee \sim p) \vee q \equiv \text{د} \Rightarrow \text{این گزاره در ۴ حالت درست است.}$$

همواره درست

ابتدا گزاره داده شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم: ۲ ۱۴

$$p \vee [(\sim q \vee X) \wedge \sim (\sim q \wedge \sim X)] \equiv p \vee [(\sim q \vee X) \wedge (q \vee X)] \equiv p \vee [(\sim q \wedge q) \vee X] \equiv p \vee [(ن) \vee X] \equiv p \vee X$$

می‌دانیم ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش همواره درست است. بنابراین $X = \sim p$ می‌باشد.

گزاره داده شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم: ۱ ۱۵

$$\sim [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \wedge [r \vee (p \wedge \sim r)] \equiv \sim [p \wedge (\sim q \vee q)] \wedge [(r \vee p) \wedge (r \vee \sim r)] \equiv \sim [p \wedge (\text{د})] \wedge [(r \vee p) \wedge (\text{د})]$$

$$\equiv \sim p \wedge (r \vee p) \equiv (\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge p) \equiv (\sim p \wedge r) \vee (ن) \equiv \sim p \wedge r$$

می‌دانیم ترکیب عطفی $\sim p \wedge r$ فقط زمانی درست است که هر دو گزاره $\sim p$ و r درست باشند، بنابراین ارزش گزاره p نادرست، ارزش گزاره r درست و q می‌تواند درست یا نادرست باشد.

گزاره داده شده در صورت سؤال را به کمک قوانین منطق ساده می‌کنیم: ۱ ۱۶

$$(p \wedge \sim q) \vee [r \vee (\sim p \vee q)] \equiv [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \vee r \equiv [(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)] \vee r$$

می‌دانیم ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش همواره درست است. بنابراین داریم:

$$[\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)] \vee r \equiv (\text{د}) \vee r \equiv \text{د}$$

پس تعداد حالت درست $۸ - ۰ = ۸$ واحد بیشتر از تعداد حالت‌های نادرست آن است.

ابتدا گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ را ساده می‌کنیم: ۲ ۱۷

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q) \equiv [(p \vee q) \wedge q] \wedge \sim p \equiv q \wedge \sim p$$

ترکیب عطفی $\sim p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره $\sim p$ و q درست باشند، بنابراین ارزش p نادرست و ارزش q درست است. پس این گزاره فقط در یک حالت درست است. حال گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ را ساده می‌کنیم:

$$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

چون ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ به راحتی قابل بررسی نیست، از جدول ارزش گزاره‌ها کمک می‌گیریم:

p	q	~p	~q	p ∧ q	~p ∧ ~q	(p ∧ q) ∨ (~p ∧ ~q)
د	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

با توجه به جدول بالا واضح است ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ در ۲ حالت نادرست است. بنابراین تعداد حالت‌های درست گزاره $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$ یک واحد کم‌تر از تعداد حالت‌های نادرست گزاره $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ است.

۱۸ ۴ گزاره $\sim(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q)$ را ساده می‌کنیم:

$$\sim(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q) \equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p \vee (r \wedge q)$$

جدول ارزش گزاره‌ها را برای $\sim p \vee (r \wedge q)$ رسم می‌کنیم و داریم:

p	q	r	$\sim p$	$r \wedge q$	$\sim p \vee (r \wedge q)$
د	د	د	ن	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	ن	د

با توجه به جدول بالا، ارزش گزاره $\sim(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee q)$ در ۵ حالت درست و در ۳ حالت نادرست است، بنابراین تفاضل تعداد حالت‌های درست و نادرست این گزاره برابر $5 - 3 = 2$ است.

۱۹ ۳

دستنامه

ترکیب شرطی دو گزاره: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را که به صورت « اگر p آن‌گاه q » خوانده می‌شود، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » گزاره p را مقدم یا فرض و گزاره q را، تالی یا حکم می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره شرطی: جدول ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

با توجه به جدول می‌توان نتایج زیر را گرفت:

۱ هرگاه ارزش مقدم (p) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش $p \Rightarrow q$ درست است و این یعنی ارزش $p \Rightarrow q$ در صورتی که p نادرست باشد، به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت به اصطلاح می‌گوییم ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به انتهای مقدم درست است.

۲ هرگاه ارزش تالی (q) درست باشد، آن‌گاه ارزش $p \Rightarrow q$ درست است و به ارزش p بستگی ندارد.

۳ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

🔍 نکته ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » هم‌ارز منطقی ترکیب فصلی $\sim p \vee q$ است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

عکس ترکیب شرطی: اگر در یک گزاره شرطی جای مقدم و تالی را عوض کنیم، عکس ترکیب شرطی به دست می‌آید. یعنی گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است.

عکس نقیض ترکیب شرطی: گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است و داریم:

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$$

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ با عکس نقیض آن یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارز است. بنابراین داریم:

$$(x > 2) \Rightarrow (x^2 > 4) \equiv \sim(x^2 > 4) \Rightarrow \sim(x > 2) \equiv (x^2 \leq 4) \Rightarrow (x \leq 2)$$

پس می‌توان گفت: «اگر $x^2 \leq 4$ ، آن‌گاه $x \leq 2$ ».

۲۰ ۳ ارزش یک ترکیب شرطی وقتی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشد. بنابراین گزینه (۳) نادرست است زیرا مقدم آن درست و تالی آن نادرست است. دقت کنید که گزینه‌های (۱) و (۲) بنابر انتهای مقدم درست هستند و گزینه (۴) نیز به علت درست بودن تالی، درست است.

با تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی داریم:

$$p \Rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$$

می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، بنابراین:

$$\sim(\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim(p \vee q) \stackrel{\text{دمورگان}}{=} \sim p \wedge \sim q$$

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ با ترکیب فصلی $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، بنابراین داریم:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q$ با $\sim p \vee q$ هم‌ارز است. بنابراین برای به دست آوردن نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ داریم:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \stackrel{\text{دمورگان}}{=} p \wedge \sim q$$

پس نقیض هر گزاره شرطی با ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی آن برابر است.

ترکیب شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\sim(q \Rightarrow \sim p) \equiv \sim(\sim q \vee \sim p) \equiv q \wedge p$$

بنابراین نقیض گزاره $\sim p \Rightarrow q$ برابر ترکیب عطفی دو گزاره p و q است.

ترکیب شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$\sim p \Rightarrow p \wedge q \equiv p \vee (p \wedge q) \stackrel{\text{پذب}}{=} p$$

با تبدیل ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به ترکیب فصلی $\sim p \vee q$ داریم:

$$(p \Rightarrow q) \vee p \equiv (\sim p \vee q) \vee p \stackrel{\text{شرکت پذیری}}{=} (\sim p \vee p) \vee q \equiv (د) \vee q \equiv د$$

پس ارزش این گزاره همواره درست است.

همه ترکیب‌های شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)] \wedge r \stackrel{\text{عکس توزیع پذیری}}{=} [(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge r \stackrel{\text{پذب}}{=} r$$

بنابراین ارزش این گزاره در ۴ حالت درست است.

چون ارزش گزاره p درست است پس $\sim p$ نادرست می‌باشد. بنابراین در گزینه (۱) ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ بنابر انتفای مقدم درست است.

بنابراین پاسخ گزینه (۱) است. حال به عنوان تمرین سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینه (۲) اگر q نادرست باشد، چون p درست است

پس گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست می‌شود. در گزینه (۳) اگر q درست باشد، چون $\sim p$ نادرست است پس گزاره $\sim p \Rightarrow q$ نادرست می‌شود. در

گزینه (۴) نیز اگر q نادرست باشد، $\sim q$ درست و چون $\sim p$ نادرست است، گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ نادرست می‌شود.

چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست می‌باشد. بنابراین در گزینه (۱) ترکیب عطفی $\sim p \wedge q$ نادرست و $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ بنابر انتفای مقدم

درست است. بنابراین پاسخ گزینه (۱) است. حال به عنوان تمرین سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در گزینه (۲) چون p درست است، پس $p \wedge q \equiv q$ می‌باشد و در صورتی که ارزش q درست و r نادرست باشد، گزاره $p \wedge q \Rightarrow r$ نادرست

است. در گزینه (۳)، $\sim p \vee q \equiv q$ است و زمانی که ارزش q درست و r نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim p \vee q \Rightarrow r$ نادرست است. در گزینه (۴)

نیز چون ارزش p درست است، پس ارزش $p \vee q$ درست می‌باشد و اگر r نادرست باشد، ارزش گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نادرست می‌شود.

می‌دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ وقتی درست است که مقدم آن نادرست یا تالی آن درست باشد. چون گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ ارزش

مقدم‌ها مخالف هم است (حتماً یکی درست و یکی نادرست است)، پس در صورتی دو گزاره درست می‌شوند که تالی آن‌ها یعنی q درست باشد.

برای به دست آوردن عکس نقیض یک ترکیب شرطی، جای مقدم و تالی را با هم عوض و آن‌ها را هم‌زمان نقیض می‌کنیم، بنابراین عکس نقیض

گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ برابر است با:

$$p \Rightarrow \sim(p \wedge q) \stackrel{\text{دمورگان}}{=} p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

گزاره $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) (p \wedge \sim q) \vee r \equiv (د \wedge ن) \vee r \equiv (د \wedge د) \vee r \equiv د \vee r \equiv د$$

بنابراین پاسخ گزینه (۱) است. حال به عنوان تمرین سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۲) r \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv r \Rightarrow (\sim ن \Rightarrow \sim د) \equiv r \Rightarrow (د \Rightarrow ن) \equiv r \Rightarrow ن$$

بنابراین اگر ارزش r درست باشد، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

$$۳) (p \vee \sim q) \wedge r \equiv (د \vee ن) \wedge r \equiv (د \vee د) \wedge r \equiv د \wedge r \equiv r$$

بنابراین اگر ارزش r نادرست باشد، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

$$۴) p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv د \Rightarrow (ن \wedge r) \equiv د \Rightarrow ن \equiv ن$$

می‌دانیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد. بنابراین گزینه‌ای پاسخ است که ارزش مقدم آن بتواند درست و ارزش تالی آن بتواند نادرست باشد. گزاره گزینه (۲) را ساده می‌کنیم:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow p \stackrel{\text{توزیع پذیری}}{\equiv} [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \Rightarrow p \equiv q \wedge \sim p \Rightarrow p$$

در گزاره $q \wedge \sim p \Rightarrow p$ اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش مقدم یعنی $q \wedge \sim p$ درست و ارزش تالی نادرست می‌شود، پس در این حالت ارزش گزاره نادرست می‌شود. گزاره‌های موجود در سایر گزینه‌ها همواره درست هستند.

می‌دانیم ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش همواره نادرست است، پس $(r \wedge \sim r)$ یک گزاره همواره نادرست است، بنابراین:

$$[(p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge \sim r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv [(p \wedge \sim q) \wedge \text{ن}] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

همچنین می‌دانیم ترکیب عطفی هر گزاره با یک گزاره نادرست، همواره نادرست است، پس داریم:

$$[(p \wedge \sim q) \wedge \text{ن}] \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \text{ن} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

حال چون در گزاره به دست آمده مقدم نادرست است، پس ترکیب شرطی « \Rightarrow » بنا بر انتفای مقدم همواره درست است.

با کمک جدول زیر، ارزش گزاره $p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q]$ را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge q$	$p \wedge [(p \Rightarrow \sim q) \wedge q]$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین ارزش این گزاره همواره نادرست است.

۱) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \Rightarrow (\text{ن} \Rightarrow \text{د}) \equiv \text{د} \Rightarrow \text{د} \equiv \text{د}$

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲) $(p \vee q) \Rightarrow \sim r \equiv (\text{د} \vee \text{ن}) \Rightarrow \sim \text{د} \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{ن}$

بنابراین پاسخ گزینه (۲) است. اما به عنوان تمرین، سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم:

۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (\text{د} \wedge \text{ن}) \Rightarrow \text{د} \equiv \text{ن} \Rightarrow \text{د} \equiv \text{د}$

۴) $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \wedge (\text{ن} \Rightarrow \text{د}) \equiv \text{د} \wedge \text{د} \equiv \text{د}$

می‌دانیم ارزش ترکیب شرطی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ زمانی نادرست است که مقدم آن یعنی $p \wedge \sim q$ درست و تالی آن یعنی r نادرست باشد.

همچنین $p \wedge \sim q$ زمانی درست است که گزاره‌های p و $\sim q$ هر دو درست باشند. پس باید ارزش p درست و ارزش دو گزاره q و r نادرست باشد.

همه ترکیب‌های شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم:

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p) \equiv (q \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim p) \stackrel{\text{عکس توزیع پذیری}}{\equiv} (q \wedge r) \vee \sim p$$

p	q	r	$\sim p$	$q \wedge r$	$(q \wedge r) \vee \sim p$
د	د	د	ن	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	ن	د

پس ارزش این گزاره در ۳ حالت نادرست است.

ابتدا با تبدیل ترکیب‌های شرطی به ترکیب‌های فصلی، گزاره را ساده می‌کنیم:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \stackrel{\text{عکس توزیع پذیری}}{\equiv} \sim p \vee (q \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \text{ن} \equiv \sim p$$

بنابراین ارزش این گزاره در ۲ حالت نادرست است.

۲ ۴۱ می دانیم ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ با عکس نقیضش یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارزش است، بنابراین داریم:

(خانم بنیادی با تاکسی به اداره برود.) $\Rightarrow \sim$ (دیر خواهد رسید.) $\equiv \sim$ (دیر خواهد رسید.) \Rightarrow خانم بنیادی با تاکسی به اداره برود.

خانم بنیادی با تاکسی به اداره نرفته \Rightarrow دیر نکند. \equiv

بنابراین می‌توان گفت: «اگر خانم بنیادی دیر نکند، او نباید تاکسی گرفته باشد.»

۳ ۴۲ می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره $\sim p \vee q$ هم‌ارزش است، بنابراین:

\sim (a فرد است) $\wedge \sim$ (a زوج است) \equiv (a + 1 فرد است) \vee (a زوج است) $\equiv \sim$ (a + 1 زوج باشد)

\equiv «a زوج است و a + 1 فرد نیست» \Rightarrow (a زوج است) \wedge (a + 1 فرد نیست)

۱ ۴۳ گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره $\sim p \vee q$ هم‌ارزش است، بنابراین:

بدن سالمی خواهید داشت \vee ورزش نمی‌کنید \equiv (بدن سالمی خواهید داشت) \vee (ورزش کنید) \sim \equiv بدن سالمی خواهید داشت \Rightarrow ورزش کنید

بنابراین می‌توان گفت: «ورزش نمی‌کنید یا بدن سالمی خواهید داشت.»

۲ ۴۴

دراستنامه

ترکیب دو شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره

« $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) اگر p آن‌گاه q و برعکس. ۲) شرط لازم و کافی برای q است. ۳) p اگر و تنها اگر q

ارزش ترکیب دو شرطی: گزاره $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q ارزش‌های یکسان داشته باشند، یعنی یا

هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

🔍 نکته برای ساختن نقیض گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ ، کافی است فقط p یا فقط q را نقیض کنیم:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(q \wedge r) \Rightarrow r \equiv (n \wedge r) \Rightarrow r \equiv r \equiv n \Rightarrow r$ انتقای مقرر

۲) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv (d \Rightarrow d) \Leftrightarrow (d \Leftrightarrow d) \equiv d \Leftrightarrow d \equiv d$

بنابراین گزینه (۲) پاسخ تست است. اما به عنوان تمرین گزینه‌های (۳) و (۴) را نیز بررسی می‌کنیم:

۳) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv (n \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow d) \equiv r \Rightarrow d \equiv d$

۴) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q \equiv (\sim d \Rightarrow r) \Rightarrow \sim n \equiv (n \Rightarrow r) \Rightarrow d \equiv d \Rightarrow d \equiv d$

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۳ ۴۵

۱) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r) \equiv (d \wedge n) \Leftrightarrow (\sim d \wedge r) \equiv n \Leftrightarrow (n \wedge r) \equiv n \Leftrightarrow d$

۲) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (d \Rightarrow n) \Leftrightarrow (\sim n \Rightarrow \sim d) \equiv n \Leftrightarrow (d \Rightarrow n) \equiv n \Leftrightarrow d$

۳) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r \equiv (\sim n \Rightarrow \sim d) \wedge r \equiv (d \Rightarrow n) \wedge r \equiv n \wedge r \equiv n$

پاسخ تست گزینه (۳) است. اما به عنوان تمرین گزینه (۴) را نیز بررسی می‌کنیم:

۴) $(r \Rightarrow p) \wedge p \equiv (r \Rightarrow d) \wedge d \equiv d \wedge d \equiv d$

چون می‌خواهیم گزاره‌ای را پیدا کنیم که ارزش نقیضش درست باشد، پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که ارزش گزاره‌اش نادرست باشد،

۳ ۴۶

بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow s \equiv (d \Rightarrow n) \Rightarrow s \equiv n \Rightarrow s$ انتقای مقرر

۲) $(\sim p \vee s) \wedge r \Rightarrow q \equiv ((\sim d \vee s) \wedge n) \Rightarrow d \equiv n \Rightarrow d$ انتقای مقرر

۳) $(q \wedge \sim r) \vee s \Rightarrow r \equiv ((d \wedge \sim n) \vee s) \Rightarrow n \equiv ((d \wedge d) \vee s) \Rightarrow n \equiv (d \vee s) \Rightarrow n \equiv d \Rightarrow n \equiv n$

بنابراین گزینه (۳) درست است. اما به عنوان تمرین گزینه (۴) را بررسی می‌کنیم:

۴) $(q \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow r \Rightarrow p \equiv ((d \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow n) \Rightarrow d$ تالی درست

۱ ۴۷ می‌دانیم گزاره $r \Leftrightarrow q$ وقتی نادرست است که r و q ارزش‌های یکسان نداشته باشند. بنابراین مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم. در حالت اول فرض می‌کنیم ارزش q درست و ارزش r نادرست باشد، بنابراین:

$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q] \equiv [p \Rightarrow (d \vee n)] \Rightarrow [(p \wedge n) \Rightarrow \sim d] \equiv [p \Rightarrow d] \Rightarrow [n \Rightarrow d] \equiv [d] \Rightarrow [d] \equiv d$$

در حالت دوم فرض می‌کنیم ارزش q نادرست و ارزش r درست است، پس داریم:

$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q] \equiv [p \Rightarrow (n \vee d)] \Rightarrow [(p \wedge d) \Rightarrow \sim n] \equiv [p \Rightarrow d] \Rightarrow [p \Rightarrow d] \equiv [d] \Rightarrow [d] \equiv d$$

بنابراین ارزش گزاره $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow \sim q]$ همواره درست است.

۴ ۴۸ می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow r \vee p$ همواره درست است، بنابراین r و p نیز گزاره‌هایی دلخواه هستند. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (d \wedge n) \vee (n \Leftrightarrow d) \equiv n \vee n \equiv n$$

$$۲) (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (d \wedge n) \vee (d \Leftrightarrow n) \equiv n \vee n \equiv n$$

$$۳) (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (n \wedge n) \vee (n \Leftrightarrow d) \equiv n \vee n \equiv n$$

$$۴) (p \wedge q) \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (d \wedge d) \vee (d \Leftrightarrow n) \equiv d \vee n \equiv d$$

۳ ۴۹ می‌دانیم گزاره شرطی $p \Rightarrow r$ وقتی نادرست است که p درست و r نادرست باشد. بنابراین داریم:

$$\sim q \Rightarrow [(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))] \equiv \sim q \Rightarrow [(n \Leftrightarrow q) \Rightarrow (d \Rightarrow (q \vee n))]$$

حال مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم. در حالت اول فرض می‌کنیم q گزاره‌ای درست باشد:

$$\sim d \Rightarrow [(n \Leftrightarrow d) \Rightarrow (d \Rightarrow (d \vee n))] \equiv n \Rightarrow [n \Rightarrow (d \Rightarrow d)] \equiv n \Rightarrow [n \Rightarrow d] \equiv d$$

در حالت دوم فرض می‌کنیم ارزش گزاره q نادرست است. پس:

$$\sim n \Rightarrow [(n \Leftrightarrow n) \Rightarrow (d \Rightarrow (n \vee n))] \equiv d \Rightarrow [d \Rightarrow (d \Rightarrow d)] \equiv d \Rightarrow [d \Rightarrow d] \equiv d \Rightarrow d \equiv n$$

بنابراین ارزش گزاره $[(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))]$ با ارزش q یکسان است، پس در یک حالت درست و در یک حالت نادرست است.

۴ ۵۰ می‌دانیم گزاره $p \Leftrightarrow q$ با گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز است. بنابراین:

$$(p \Leftrightarrow q) \vee (\sim p) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \vee (\sim p) \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p)$$

حال با کمک قانون توزیع‌پذیری داریم:

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p) \equiv [(\sim p \vee q) \vee (\sim p)] \wedge [(\sim q \vee p) \vee (\sim p)] \equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim q \vee (p \vee \sim p)]$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim q \vee d] \equiv (\sim p \vee q)$$

می‌دانیم سه گزاره $p \Rightarrow q$ ، $p \vee q$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ با یکدیگر هم‌ارز اند، بنابراین با توجه به گزینه‌ها $\sim p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$ است.

۴ ۵۱ می‌دانیم گزاره $p \Leftrightarrow q$ با گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز است. بنابراین:

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$$

همچنین می‌دانیم $p \wedge q \Rightarrow p$ یک گزاره همواره درست است، پس داریم:

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv x \wedge r \Rightarrow x \equiv \text{همواره درست}$$

۴ ۵۲ می‌دانیم ارزش دو گزاره $p \wedge q \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است، بنابراین داریم:

$$(p \wedge r \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q \vee r) \equiv d \Leftrightarrow d \equiv d$$

پس گزاره $(p \wedge r \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q \vee r)$ همواره درست است.

ابتدا گزاره را ساده می‌کنیم:

$$\sim [(\underbrace{p \wedge r}_{\text{دمورگان}}) \vee \sim(p \vee q)] \equiv \sim(p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$

می‌دانیم دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ با یکدیگر هم‌ارز هستند، بنابراین داریم:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p)$$

حال با توجه به هم‌ارز بودن دو گزاره $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ داریم:

$$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

۳ ۵۴ گزاره $p \Leftrightarrow \sim q$ زمانی درست است که $\sim p$ و $\sim q$ ارزش‌های یکسان داشته باشند. یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. بنابراین

ارزش این گزاره در ۲ حالت درست است.

درسنامه

سور

سورها عبارت‌هایی هستند که قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند.

سور عمومی: به عبارت‌های «به‌ازای هر» یا «به‌ازای جمیع مقادیر» یا ... سور عمومی می‌گوییم و با علامت \forall نشان می‌دهیم.

نکته گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هیچ مثال نقضی نداشته باشد، یعنی هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند.

سور وجودی: به عبارت‌های «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» یا ... سور وجودی می‌گوییم و با علامت \exists نشان می‌دهیم.

نکته گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

نقیض سورها: برای ساختن نقیض یک گزاره سوری، کافی است سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کرده و گزاره‌نما را نقیض کنیم.

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

معنی $\exists x$ عبارت « x ای وجود دارد» است. پس معنی کل گزاره $\exists x \in P; x = 2k + 1$ به صورت «عدد اولی وجود دارد که فرد باشد» می‌باشد.

می‌دانیم نقیض گزاره $\forall x; p(x)$ به صورت $\exists x; \sim p(x)$ است، بنابراین نقیض گزاره «همه کسانی که از موسیقی لذت می‌برند، از تماشای فیلم هم لذت می‌برند» است.

فیلم هم لذت می‌برند» به صورت «برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند» است.

که به صورت «برخی از افرادی که از موسیقی کلاسیک لذت می‌برند، از تماشای فیلم لذت نمی‌برند.» بیان می‌شود.

می‌دانیم گزاره‌نمایی که شامل سور عمومی است، زمانی درست است که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند یعنی هیچ مثال نقضی نداشته باشد و همچنین گزاره‌نمایی که شامل سور وجودی است، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. در گزینه (۱) مقدم

ترکیب شرطی درست است، زیرا به‌ازای $x = 0$ دارای ارزش درست می‌شود اما تالی آن نادرست است زیرا $x = 1$ گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش

نادرست تبدیل می‌کند. پس ارزش این ترکیب شرطی نادرست است. در گزینه (۲) عبارت $\exists x \in \mathbb{N}; \sqrt{3-x} \in \mathbb{N}$ به ازای $x = 2$ به گزاره‌ای

با ارزش درست تبدیل می‌شود، پس ارزش آن درست است. اما عبارت $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 = 1)$ درست نیست، چون مثلاً $x = 2$ این گزاره‌نما را به

گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌کند. بنابراین ارزش این ترکیب دو شرطی نادرست است.

در گزینه (۳) مقدم درست است، زیرا حداقل یک عضو $x = 0$ وجود دارد که به‌ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود اما

تالی نادرست است زیرا به‌ازای هیچ مقدار x از دامنه، ارزش گزاره‌نما درست نمی‌شود پس این ترکیب شرطی نیز نادرست است.

در گزینه (۴) هر دو عبارت نادرست هستند. چون در طرف چپ به‌ازای هیچ مقدار از دامنه، ارزش گزاره‌نما درست نمی‌شود و در عبارت سمت

راست $x = \frac{1}{p}$ یک مثال نقض محسوب می‌شود. پس ارزش این ترکیب دوشروطی درست است.

نقیض ترکیب فصلی $p \vee q$ ، عبارت $p \wedge \sim q$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\sim[(\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)] \equiv \sim(\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \wedge \sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$$

همچنین می‌دانیم نقیض گزاره $\forall x; P(x)$ به صورت $\exists x; \sim P(x)$ و نقیض گزاره $\exists x; P(x)$ به صورت $\forall x; \sim P(x)$ است، پس:

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \wedge \sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$$

نقیض گزاره $\forall x; P(x)$ به صورت $\exists x; \sim P(x)$ است. بنابراین داریم:

$$\sim(\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$$

نقیض گزاره $\forall x; P(x)$ به صورت $\exists x; \sim P(x)$ و نقیض گزاره $\exists x; P(x)$ به صورت $\forall x; \sim P(x)$ می‌باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم

تا گزینه نادرست مشخص شود:

$$۱) \sim[\exists x \in \mathbb{R}; x < 0 \wedge x^2 \leq 1] \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \sim(x < 0 \wedge x^2 \leq 1) \stackrel{\text{دومورگان}}{\equiv} \forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \vee x^2 > 1$$

$$۲) \sim[\forall x \in \mathbb{N}; (2^{2^x} + 1) \in P] \equiv \exists x \in \mathbb{N}; 2^{2^x} + 1 \notin P$$

$$۳) \sim[\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1] \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

$$۴) \sim[\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} = 0] \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} \neq 0$$

نقیض گزاره $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} = 0$ به صورت $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} \neq 0$ است که در گزینه (۴) به درستی در مقابل آن نوشته نشده است.

نقیض گزاره $\forall x; P(x); \sim P(x)$ برابر $\exists x$ است. در این گزاره $P(x)$ برابر $(x^3 - 8 = 0) \Rightarrow (x^2 - 4 = 0)$ است. پس لازم است نقیض

ترکیب شرطی $(x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^3 - 8 = 0)$ را به دست آوریم. می‌دانیم نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

حال نقیض گزاره داده شده در صورت سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\sim[\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^3 - 8 = 0)] \equiv \exists x \in \mathbb{R}; (x^2 - 4 = 0) \wedge (x^3 - 8 \neq 0)$$

گزینه (۱) درست است، زیرا برای هر عضو از دامنه متغیر (O)، گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود. گزینه (۲) نیز درست است،

زیرا حداقل یک عضو $x = 1$ وجود دارد که به‌ازای آن، گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل شود. اما گزینه (۳) نادرست است، زیرا $x = 2$

این گزاره‌ها را به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌کند. بنابراین گزینه (۳) پاسخ است اما به‌عنوان تمرین، گزینه (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. در

گزینه (۴) به‌ازای $x = 1$ گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

نقیض گزاره $\forall x; P(x)$ به صورت $\exists x; \sim P(x)$ است. در این گزاره $P(x)$ برابر ترکیب شرطی $(a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2) \Rightarrow a < b$ می‌باشد.

بنابراین باید نقیض $P(x)$ را مشخص کنیم. می‌دانیم نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ برابر $p \wedge \sim q$ است. بنابراین داریم:

$$\sim[\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b \Rightarrow (a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2)] \equiv \exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge \sim(a^2 \leq b^2 \vee a^2 > b^2)$$

$$\equiv \exists a, b \in \mathbb{Z}; (a < b) \wedge (a^2 > b^2 \wedge a^2 \leq b^2)$$

عبارت (الف) نادرست است، زیرا مجموعه جواب گزاره‌ها تهی است. عبارت (ب) درست است، چون به‌ازای هر عضو از دامنه A، گزاره‌ها به

گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود. عبارت (ج) نیز درست است، چون حداقل یک عضو $x = 1$ وجود دارد که به‌ازای آن گزاره‌ها به گزاره‌ای با ارزش

درست تبدیل می‌شود. اما عبارت (د) نادرست است، زیرا $x = 1$ ، گزاره‌ها را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند. بنابراین ارزش گزاره‌های (ب) و

(ج) درست است.

۲ ۶۵

دستنامه

مقدمات مجموعه

مجموعه: دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز، به طوری که عضویت اشیاء در مجموعه کاملاً مشخص باشد، مجموعه می‌گوییم.

اعضای مجموعه را در داخل دو آکولاد قرار داده و با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً اعداد فرد یک‌رقمی یک مجموعه هستند که به صورت $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ نوشته می‌شوند.

نکته تغییر ترتیب عضوهای مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً مجموعه $\{1, 3, 5\}$ با مجموعه $\{5, 1, 3\}$ هیچ فرقی ندارند. همچنین تکرار اعضا در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً مجموعه $\{1, 2, 3, 3, 3, 1\}$ همان مجموعه $\{1, 2, 3\}$ است.

عضویت: اگر x درون مجموعه A باشد، می‌گوییم x عضو A است و می‌نویسیم $x \in A$. اگر x عضو مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$.

زیرمجموعه: مجموعه B را زیرمجموعه A می‌گوییم، اگر هر عضوی از B عضو مجموعه A نیز باشد و می‌نویسیم $B \subseteq A$.

مجموعه مرجع: در هر بحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم. مثلاً اگر در مورد کتاب‌های میکرو طبقه‌بندی گاج صحبت می‌کنیم، مجموعه مرجع تمام کتاب‌های انتشارات بین‌المللی گاج است.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می‌نامیم و با \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

عدد اصلی مجموعه: به تعداد اعضای مجموعه A عدد اصلی مجموعه A می‌گویند و با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه موجود در هر گزینه را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

$$۱) \{k(k-1) \mid k-1 < 2\} = \{0, 2\}$$

$$۲) \left\{x \mid \frac{x-1}{4} < 1, x \in \mathbb{W}\right\} = \{0, 1, 2\}$$

$$۳) \{5x - 1 \mid 0 < x < 3\} = \{4, 9\}$$

$$۴) \{x \mid x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}$$

واضح است مجموعه جواب گزینه (۲) تعداد اعضای بیشتری دارد.

دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون بزرگ گاج در سال ۹۶ کاملاً مشخص هستند، پس می‌توانند یک مجموعه باشند ولی سه شاعر معروف ایران،

پنج شهر زیبای ایران و دو عدد اول یک‌رقمی دارای اعضای مشخصی نیستند.

می‌دانیم تکرار اعضا در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد، پس \emptyset و $\{\}$ یک عضو و همچنین $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset, \{\}\}$ نیز یک عضو

هستند. لذا مجموعه A را می‌توان به صورت $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نمایش داد، پس $n(A) = 2$ می‌باشد.

۴ ۶۶

۳ ۶۷

۱ ۶۸

دیم نگاه

برای تشخیص این که مجموعه $\{\emptyset\}$ زیرمجموعه A می باشد یا خیر، کافی است بیرونی ترین آکولاد را حذف کنید. اگر \emptyset عضو مجموعه A باشد، حتماً مجموعه $\{\emptyset\}$ زیرمجموعه A است.

در گزینه (۱) اگر آکولاد را حذف کنیم، عدد ۱ عضو مجموعه A نیست، پس $\{1\}$ زیرمجموعه A نمی باشد.

گزینه های (۳) و (۴) درست هستند، زیرا $\{2\}$ در مجموعه B وجود دارد، همچنین $\{2, \{2\}\}$ نیز در بین اعضای C دیده می شود. در گزینه (۱)

اگر بیرونی ترین آکولاد B را برداریم $\{2, \{2\}\}$ باقی می ماند که به این صورت در مجموعه C دیده نمی شوند. در مورد گزینه (۲) هم اگر آکولاد A را برداریم ۲ باقی می ماند که در مجموعه B حضور دارد.

واضح است که $\{2\}$ در مجموعه C وجود ندارد، پس $A \not\subseteq C$.

آکولادهای مجموعه A را برمی داریم. عضو ۱ در مجموعه C نیست، پس گزینه (۱) نادرست است. $B = \{1, \{\emptyset, 1\}\}$ در مجموعه C دیده

نمی شود، پس گزینه (۲) نیز نادرست است. اگر بیرونی ترین آکولادهای B را برداریم، ۱ و $\{\emptyset, 1\}$ باقی می ماند که در مجموعه C دیده نمی شوند لذا گزینه (۳) نیز نادرست است. اما واضح است که $A = \{1, \emptyset\}$ در مجموعه B حضور دارد، پس $A \in B$ صحیح است.

۳ ۷۲

دستنامه

مجموعه اعداد معروف

مجموعه های اعداد معروف به صورت زیر تعریف می شوند:

۱ مجموعه اعداد طبیعی که با \mathbb{N} نشان داده می شود: ۴

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۲ مجموعه اعداد حسابی که با \mathbb{W} نشان داده می شود:

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

۳ مجموعه اعداد صحیح که با \mathbb{Z} نشان داده می شود:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

۴ مجموعه اعداد گویا که با \mathbb{Q} نشان داده می شود:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

۵ مجموعه اعداد گنگ که با \mathbb{Q}' نشان داده می شود و شامل اعدادی است که نتوان آن ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

۶ مجموعه اعداد حقیقی که با \mathbb{R} نشان داده می شود:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

۱ یادآوری اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B می باشد. اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان می دهیم.

۲ اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نشان می دهیم.

۳ تفاضل دو مجموعه A و B یعنی $A - B$ ، مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. به همین ترتیب $B - A$ مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه B هستند ولی عضو مجموعه A نیستند.

متمم مجموعه A که با A' نشان می دهیم، شامل عضوهایی از مجموعه مرجع است که در مجموعه A نیستند.

نکته بین مجموعه های \mathbb{N} ، \mathbb{W} ، \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} و \mathbb{R} ، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

با توجه به رابطه $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ، گزینه (۳) صحیح است.

۴ ۷۳ با توجه به این که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ می باشد، گزینه (۴) صحیح است.

۴ ۷۴ واضح است که مجموعه A برابر \mathbb{Q} می باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است، زیرا $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ است.

۴ ۷۵ ابتدا x هایی که در نامساوی $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ صدق می کنند را به دست می آوریم:

$$|\sqrt{x-1}-2| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x-1}-2 < 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{x-1} < 3 \Rightarrow 1 < x-1 < 9 \Rightarrow 2 < x < 10$$

حال در بازه $2 < x < 10$ ، x هایی که اول هستند را به عنوان اعضای مجموعه A معرفی می کنیم. پس $A = \{3, 5, 7\}$ است.

دستنامه

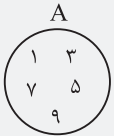
نمایش مجموعه

مجموعه‌ها را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد:

۱) **نمایش تفصیلی:** در این نمایش اعضای مجموعه را درون یک آکولاد نمایش می‌دهند. مثلاً اعداد فرد یک‌رقمی در این نمایش به صورت $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ می‌باشد.

۲) **نمایش به صورت گزاره‌ها:** در این نمایش به جای نوشتن تک تک اعضاء ویژگی مشترک آن‌ها را بیان می‌کنیم. مثلاً اعداد فرد یک‌رقمی در این نوع نمایش به صورت $A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$ نشان داده می‌شود.

۳) **نمودار ون:** در این نمایش، اعضای مجموعه را درون منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش می‌دهند. مثلاً نمودار ون مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ به صورت مقابل است:



تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A و B را مساوی می‌گویند اگر و تنها اگر اعضای آن‌ها یکسان باشد و می‌نویسیم $A = B$.

ابتدا مجموعه B را با اعضا مشخص می‌کنیم. مجموعه B شامل اعضای A است که زیرمجموعه A بوده و در عین حال عضو A نیز باشند. واضح است که فقط $\{a, b\}$ در مجموعه B حضور خواهد داشت یعنی $B = \{a, b\}$ خواهد بود. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تک تک گزینه‌ها را با اعضا مشخص می‌کنیم تا ببینیم اعضای کدام مجموعه با اعضای مجموعه $\{-4, -2, -\frac{4}{3}, -1, \dots\}$ برابر است: ۳ ۷۷

$$1) \left\{ \frac{5-n}{2n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 4, 1, \frac{2}{5}, \dots \right\} \neq A$$

$$2) \left\{ \frac{-n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -4, -\frac{1}{2}, -2, \dots \right\} \neq A$$

$$3) \left\{ \frac{4}{1-n} \mid n > 1, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -4, -2, -\frac{4}{3}, -1, \dots \right\} = A$$

اگر A و B دو مجموعه و $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ و $A = B$ و بالعکس. ۳ ۷۸

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

چون $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ پس $A = B$ است. با توجه به اعضای A و B واضح است که یا $x = 0$ است و یا $x = 1$. حال بررسی می‌کنیم به‌ازای کدام مقدار x ، عبارت $3x^2 - 5x + 2$ برابر عضو دیگر مجموعه A می‌شود:

$$x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 3(0)^2 - 5(0) + 2 = 2 \neq 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 3(1)^2 - 5(1) + 2 = 0$$

بنابراین $x = 1$ می‌باشد و مجموعه C به صورت $C = \{1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ خواهد شد، پس مجموعه C دارای ۲ عضو است، یعنی عدد اصلی مجموعه C برابر ۲ می‌باشد. ۳ ۷۹

دستنامه

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه متناهی می‌نامیم و مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می‌گوییم.

باید ببینیم در کدام گزینه تعداد اعضای مجموعه یک عدد حسابی است، یعنی اولاً تعداد اعضای آن قابل شمارش است و ثانیاً تا $\pm\infty$ نمی‌رود:

$$1) \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow$$
 نامتناهی است.

$$2) \mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cap \{1, 2, 3, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \Rightarrow$$
 نامتناهی است.

$$3) \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\} \Rightarrow$$
 متناهی است.

$$4) \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \Rightarrow$$
 نامتناهی است.

چون مجموعه A نامتناهی است و B مجموعه متناهی است، پس $A - B$ حتماً نامتناهی است. زیرا مجموعه A دارای بی‌شمار عضو است. ۳ ۸۰

حال اگر عضوهای مجموعه B را از A برداریم، باز هم بی‌شمار عضو برای A باقی می‌ماند.