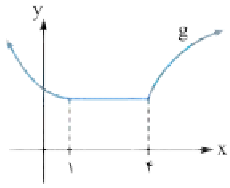
فهرست

درس ۶

توابع یکنوا

توابع صعودی و نزولی



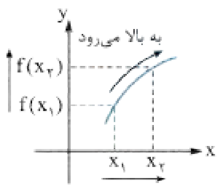
به نمودار مقابل دقت کنید:

وقتی x در دامنهٔ تابع افزایش می‌یابد، یعنی روی نمودار از چپ به راست حرکت می‌کنیم، روند تغییرات تابع بررسی می‌شود.

الف) اگر با افزایش x، مقدار y هم زیاد شود، با حرکت از چپ به راست روی نمودار، نقاط منحنی به بالا می‌روند.

یعنی با فرض $x_2 > x_1$ داریم: $f(x_2) > f(x_1)$

در این وضعیت می‌گوییم تابع اکیداً صعودی است.



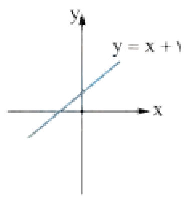
دوتا ویژگی از تابع اکیداً صعودی یاد بگیرید:

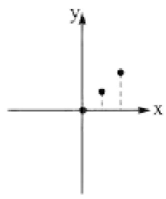
1. **تابع حتماً یک‌به‌یک است و y تکراری ندارد.**
2. **اگر از دو طرف نامساوی، تابع f را بزنیم یا از دو طرف نامساوی f بگیریم، جهت عوض نمی‌شود:**

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

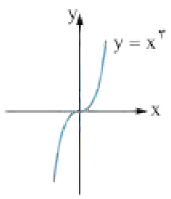
مثلاً تابع g در بالا، در بازهٔ $[4, +\infty)$ و البته هر زیرمجموعهٔ آن، اکیداً صعودی است.

تمام این تابع‌ها اکیداً صعودی‌اند:





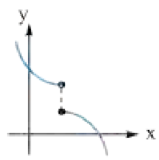
$\{(1,2), (2,5), (3,10)\}$

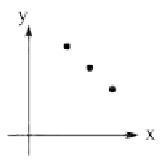


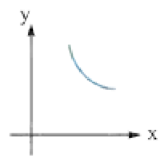
ب) اگر با افزایش x (حرکت از چپ به راست) مقدار y کاهش یابد (نقاط نمودار به پایین بروند) می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

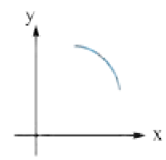
پس با فرض $x_2 > x_1$ داریم: $f(x_2) < f(x_1)$. تابع g در شکل بالا، در بازهٔ $(-\infty, 1]$ و هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است.

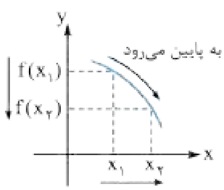
چند قیافهٔ تابع اکیداً نزولی را ببینید:











تمام این تابع‌ها در دامنهٔ خود اکیداً نزولی‌اند.

در مورد تابع اکیداً نزولی نیز همان دو ویژگی بیان می‌شوند:

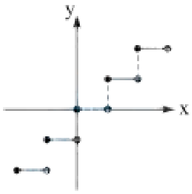
1. **تابع حتماً یک‌به‌یک است و y تکراری ندارد.**
2. **با حذف f از دو طرف نامساوی یا f گرفتن از دو طرف، جهت عوض می‌شود یعنی:** $x_1 < x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$

> **نکته** در اصطلاح می‌گوییم اگر f اکیداً صعودی باشد، تغییرات x و y هم‌جهت هستند. اما در تابع اکیداً نزولی، تغییر y در خلاف جهت تغییر x است.

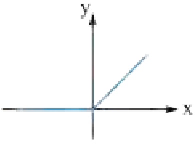
پ) اگر تابع با افزایش x، ثابت بماند یا افزایش یابد، یعنی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ آن را صعودی می‌نامیم. پس فرق صعودی و اکیداً صعودی این است که تابع صعودی می‌تواند دو نقطهٔ هم‌عرض داشته باشد و یک‌به‌یک نباشد.

مثلاً تابع g در فاصلهٔ $[1,4]$ یا $[2,5]$ یا ... صعودی است (و اکیداً صعودی نیست).

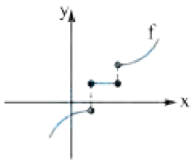
یک مثال عالی برای تابع صعودی، $y=[x]$ است که با افزایش x، مقادیر y ثابت مانده و یا زیاد می‌شوند: $y=[x]$ صعودی است.



هم‌چنین $y=x+|x|$:
$$y=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



و این هم صعودی است:



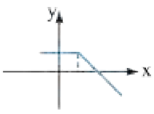
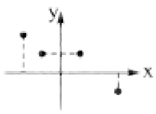
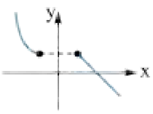
این تابع هم صعودی غیراکید است (گاهی ثابت می‌ماند).

ت) اگر با افزایش x، مقدار y کم شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع نزولی است. پس شرط ریاضی تابع نزولی $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ است.

تابع g در شکل اول، روی بازهٔ $(-\infty,4]$ یا $(-5,2)$ یا ... نزولی است.

در این‌جا هم فرق نزولی و اکیداً نزولی، در امکان ثابت‌بودن مقدار تابع است. تابع نزولی می‌تواند yهای مساوی داشته باشد و یک‌به‌یک نشود.

چندتا شکل نزولی ببینید:

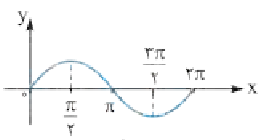




نکته اگر تابع در بازه‌ای صعودی یا نزولی یا صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، می‌گوییم در آن بازه اکیداً یکنوا است و اگر نزولی یا صعودی باشد می‌گوییم در آن بازه **یکنوا** است. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا است ولی هر تابع یکنوا، اکیداً یکنوا نیست.

ث) اگر تابع در قسمت‌هایی از دامنه روند صعودی و در قسمت‌های دیگری روند نزولی داشته باشد، می‌گوییم نه صعودی است و نه نزولی.

این تابع‌ها یکنوا نیستند.

چندتا شکل غیریکنوا ببینید:

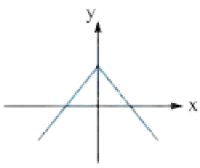


$y=\sin x$

در $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$: اکیداً نزولی

در $(0,\frac{\pi}{2})$: اکیداً صعودی

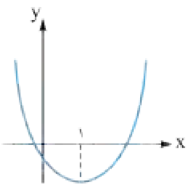
در $(0,\pi)$: غیریکنوا


$y=2-|x|$

در $(-\infty,0)$: اکیداً صعودی

در $(0,+\infty)$: اکیداً نزولی

در $\mathbb{R}$: غیریکنوا


$y=x^2-2x$

در $(-\infty,1)$: نزولی اکید

در $(1,+\infty)$: اکیداً صعودی

در $\mathbb{R}$: غیریکنوا

تست **اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(2a+1)>f(3a-1)$، حدود مقادیر a کدام است؟**

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $(-2,-1)$ ۴) $\mathbb{R}-[-2,-1]$

پاسخ گزینهٔ ۲ می‌خواهیم از دو طرف نامساوی f را ساده کنیم و چون f اکیداً نزولی است جهت عوض می‌شود، پس داریم:

$$f(2a+1)>f(3a-1)\xrightarrow{f\text{ نزولی است}}2a+1<3a-1\Rightarrow a>2\Rightarrow(2,+\infty)$$

تست **اگر $f=\{(1,a-1),(-1,2+3a),(2,2a+2)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟**

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-\frac{2}{3},1)$ ۳) $(-3,-\frac{3}{2})$ ۴) $(-\frac{2}{3},2)$

پاسخ گزینهٔ ۳ باید با افزایش x، yها هم زیاد شوند. پس داریم:

x	y
-۱	$۲+۳a$
۱	$a-۱$
۲	$۲a+۲$

$$\underbrace{۲+۳a < \overbrace{a-۱}^{}}_{\text{الف}}\overbrace{< ۲a+۲}^{\text{ب}}$$

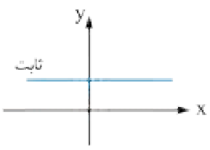
الف) $۲+۳a < a-۱ \Rightarrow ۲a < -۳ \Rightarrow a < -\frac{۳}{۲}$

ب) $a-۱ < ۲a+۲ \Rightarrow -۳ < a$

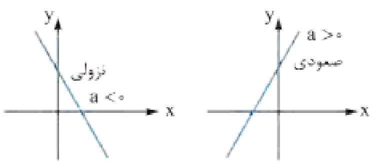
پس داریم: $-۳ < a < -\frac{۳}{۲}$

بررسی یکنوایی در تابع‌های مهم

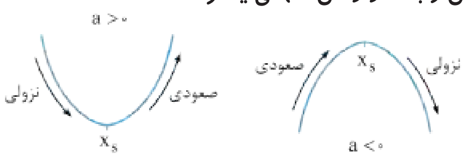
تابع ثابت $f(x)=c$: این تابع در کل دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است؛ اما صعودی یا نزولی اکید نیست.



تابع خطی $f(x)=ax+b$: اگر $a>۰$ باشد، صعودی و اگر $a<۰$ نزولی است.

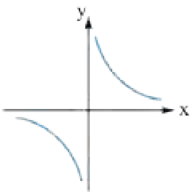


تابع درجه‌دوم: تابع $y=ax^۲+bx+c$ در $\mathbb{R}$ یکنوا نیست اما در بازه‌های قبل از رأس و بعد از رأس سهمی یکنوا است.



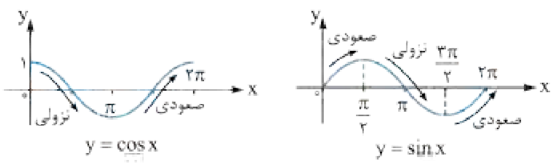
تابع کسری $y=\frac{۱}{x}$: نمودار این تابع را بلدیم:

تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.



تابع‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$:

نمودار این تابع‌ها در اصطلاح نوسانی است و در بازه‌های تکراری به طور متناوب صعودی و نزولی می‌شوند. ببینید:



تابع‌های نمایی و لگاریتمی $y=a^x$ و $y=\log_a x$ را می‌شناسیم.

وقتی $a>۱$ باشد این تابع‌ها صعودی‌اند. **وقتی $۰<a<۱$ باشد این تابع‌ها نزولی‌اند.**

مثال به ازای کدام مقدار a هر دو تابع $y=(-۲a+۷)x+۱$ و $y=(\frac{a-۱}{۲})^x$ اکیداً صعودی‌اند؟

۱) $۳<a<\frac{۷}{۲}$ ۲) $a<۳$ ۳) $a>\frac{۷}{۲}$ ۴) نشدنی

پاسخ گزینهٔ ۱ باید شیب خط مثبت بوده و پایهٔ تابع نمایی بیشتر از ۱ باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a-۱}{۲}>۱ \Rightarrow a-۱>۲ \Rightarrow a>۳\\ -۲a+۷>۰ \Rightarrow -۲a>-۷ \xrightarrow[\text{جهت عوض شود}]{\div(-۲)} a<\frac{۷}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۳<a<\frac{۷}{۲}$$

چند نکته در مورد توابع ترکیبی

۱) اگر f و g هر دو صعودی باشند $f+g$ نیز صعودی است.

۲) اگر f و g هر دو نزولی باشند $f+g$ نزولی است.

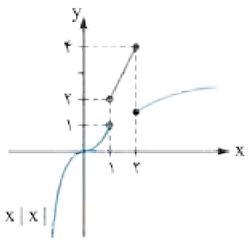
۳) اگر f صعودی و g نزولی باشد $f-g$ صعودی است.

۴) اگر f اکیداً صعودی و g صعودی باشد $f+g$ نیز اکیداً صعودی است.

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x|x| & x<1 \\ 2x & 1<x<2 \\ \sqrt{x} & x\geq 2 \end{cases}$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر یکنوا است؟

۱) $(0,2)$ ۲) $(1,2]$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(-1,1)$

گزینهٔ ۴ نمودار را ببینید:



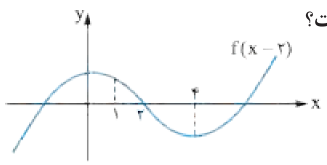
تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود، پس اجازه نداریم بازهٔ $(0,2)$ را انتخاب کنیم و ۱ درست نیست.

در فاصلهٔ $(1,2]$، به خاطر نقطهٔ $x=2$، ابتدا صعود و در پایان نزول داریم.

در فاصلهٔ $(1,3)$ ابتدا تابع بالا و سپس پایین می‌رود.

اما در فاصلهٔ $(-1,1)$ تابع اکیداً صعودی و یکنوا است.

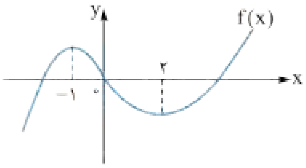
شکل روبه‌رو نمودار $y=f(x-2)$ است. تابع $y=|3f(x+1)|$ در کدام بازه صعودی است؟



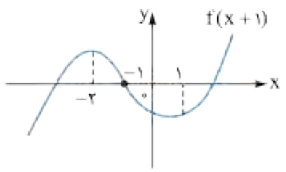
۱) $(1,2)$ ۲) $(-\infty,-5)$ ۳) $(-2,-1)$ ۴) $(-1,1)$

گزینهٔ ۴ نمودار $f(x)$ دو واحد به طرف راست رفته است تا به $f(x-2)$ رسیده‌ایم.

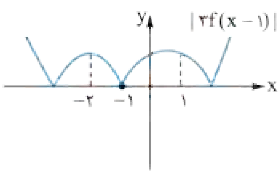
پس خود $f(x)$ این شکلی بوده:



و برای نمودار $f(x+1)$ باید یک واحد به طرف چپ ببریم:



حالا دقت کنید که ضریب ۳ اثری روی صعودی یا نزولی بودن ندارد و به خاطر وجود قدرمطلق، قسمت زیر محور x به بالا می‌آید:



که در $(-1,1)$ صعودی است.

کدام تابع اکیداً یکنوا است؟

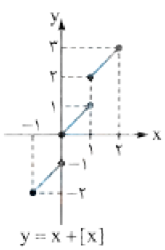
۱) $y=x[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=x+[x]$ ۴) $y=2x^3-x^2$

گزینهٔ ۳ در گزینه‌های ۱ و ۴ تابع اکیداً یکنوا نیست؛ چون مثلاً $f(0)$ و $f(\frac{1}{2})$ هر دو برابر صفرند.

نکته: در تابع اکیداً یکنوا y تکراری نداریم.

در مورد ۲ هم می‌دانیم مقدار تابع برای تمام xهای صحیح صفر است، پس این هم نیست.

اما نمودار ۳ را ببینید:



اکیداً صعودی است.

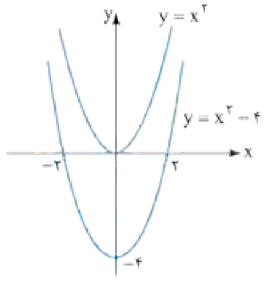
نکته: $[x]$ صعودی و x اکیداً صعودی است، پس جمع آن‌ها اکیداً صعودی خواهد بود.

دامنهٔ تابع $f(x)=|x^2-4|$ را به کدام بازه محدود کنیم تا تابع اکیداً صعودی باشد؟

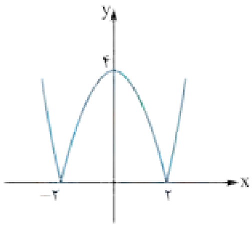
۱) $(-3,-1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(0,2)$

گزینهٔ ۳

نمودار $y=x^2$ و $y=x^2-4$ را بلدیم:

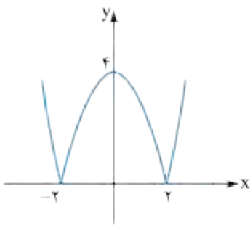


حالا $y=|x^2-4|$ را با آوردن قسمت زیر محور افقی به بالا، رسم می‌کنیم:



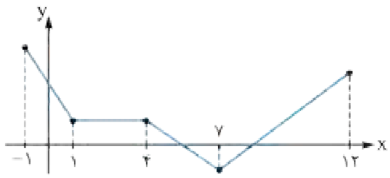
و تابع در $(-2,0)$ و $(2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

حالا $y=|x^2-4|$ را با آوردن قسمت زیر محور افقی به بالا، رسم می‌کنیم:
و تابع در $(-2,0)$ و $(2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۴۱- تابع شکل زیر در بازهٔ $[a,b]$ نزولی و در بازهٔ $[c,d]$ صعودی است. بیشترین مقدار b چند برابر بیشترین مقدار d است؟



۱) $\frac{7}{12}$ ۲) $\frac{12}{7}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{4}{12}$

(کتاب درسی)

۲۴۲- کدام عبارت دربارهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\le x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$ درست است؟

۱) یکنوا است. ۲) معکوس‌پذیر است. ۳) در بازهٔ $(-\infty,2]$ نزولی است. ۴) در بازهٔ $[-4,+\infty)$ صعودی است.

۲۴۳- تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

(کتاب درسی)

۲۴۴- کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

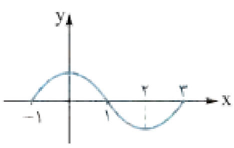
۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=\begin{cases}x-1\,, & x\ge 0\\ x+2\,, & x<0\end{cases}$ ۳) $f(x)=x+|x|$ ۴) $f(x)=x|x|$

۲۴۵- کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً صعودی نیست؟

۱) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x$ ۲) $f(x)=2-|x-1|$ ۳) $f(x)=2x-|x-1|$ ۴) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$

(کانون فرهنگی آموزش)

۲۴۶- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(1-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



۱) $(-3,-1)$
۲) $[-4,-3]$
۳) $(-1,1)$
۴) $[1,2]$

(کتاب درسی)

۲۴۷- کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک و غیریکنوا است؟

۱) $y=2^x-2$ ۲) $y=-\log_2 x+2$ ۳) $y=-2^{-x}$ ۴) $y=\frac{1}{x}$

۲۴۸- تابع $f(x)=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۲۴۹- دو تابع $y=x[x]$ و $y=x+|x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی هستند؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[0,\frac{1}{2}]$ ۴) $[\frac{3}{2},\frac{7}{3}]$

۲۵۰- تابع $f(x)=\begin{cases}-2 & x>1\\ k & x=1\\ +1 & x<1\end{cases}$ به ازای چند مقدار صحیح k، در دامنه‌اش نزولی است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۲۵۱- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ 3x+a & x<0\end{cases}$ بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) 2 ۲) 1 ۳) -1 ۴) -2

۲۵۲- یکنوایی تابع $f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|}$ در بازهٔ $(-1,1)$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۲۵۳- تابع $f(x)=|x|(x-1)$ در بازهٔ (a,b)، اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۲۵۴- تابع $x>0$ و $f(x)=|x^2-2x|$ در بازهٔ (a,b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۲۵۵- تابع $y=|x-1|+|x+1|$ در کدام بازهٔ زیر صعودی است؟

۱) $[-2,+\infty)$ ۲) $[-\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $(-\infty,\frac{3}{2})$

۲۵۶- تابع $g(x)=|x-2|-|x-1|$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی ۳) صعودی ۴) نزولی

۲۵۷- اگر تابع $f=\{(1,1),(3,6),(\sqrt{2},m^2-2),(10,20)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) 2 ۳) 4 ۴) 6

۲۵۸- به ازای $x\in[a,b]$، تابع $f=\{(1,2x+7),(-2,10-x),(0,x^2+4)\}$ یک تابع صعودی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) 1 ۴) 2 (کانون فرهنگی آموزش)

۲۵۹- به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) هیچ مقدار m

۲۶۰- اگر تابع $f(x)=(a^2-3)^x$ هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع $g(x)=a^x$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) اکیداً صعودی ۴) اکیداً نزولی

۲۶۱- تابع $f(x)=3x^2-6x+2$ روی بازهٔ $[-1,2]$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) نزولی ۴) صعودی

۲۶۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x:|x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟

۱) نزولی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) منفی

۲۶۳- اگر تابع $f(x)=(\frac{1}{m})x^2-x+3$ در بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $-2\leq m<0$ ۲) $0<m\leq 2$ ۳) $m\leq -2$ ۴) $m\geq 2$

۲۶۴- اگر تابع $f(x)=(a-2)x^2+2ax+3$ همواره یکنوا باشد، $f(2)$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 7 ۳) 9 ۴) 11

۲۶۵- تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطهٔ $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2$ برقرار است؟

۱) $(-3,-1)$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$

۲۶۶- تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$ در بازهٔ $(-\infty,a)$ اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$　　۲) صفر　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۶۷- کدام‌یک از توابع زیر در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است؟

۱) $y=\frac{x-۱}{x+۳}$　　۲) $y=\frac{۲x-۳}{x+۱}$　　۳) $y=\frac{x+۱}{x-۲}$　　۴) $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$

۲۶۸- تابع $f(x)=|x|(x+\frac{۱}{x})$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی　　۲) اکیداً نزولی　　۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی　　۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۲۶۹- چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است.

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ اکیداً صعودی است.

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۲۷۰- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۳-۲a)>f(۱+a)$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) -۱　　۴) -۲

۲۷۱- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(۳)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۳]$　　۲) $\mathbb{R}-(۰,۳)$　　۳) $(-\infty,۳]$　　۴) $[۳,+\infty)$

۲۷۲- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(۲)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی <u>نیست</u>؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۷۳- در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$ در چند نقطه مشترک هستند؟ *(تجربی ۹۷)*

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۲۷۴- تابع $f(x)=x^۲-(۲m+۱)x+۱$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ غیریکنوا است. بازهٔ m کدام است؟

۱) $-۱\le m\le\frac{۱}{۲}$　　۲) $-۱<m<\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۱}{۲}\le m\le\frac{۳}{۲}$　　۴) $-\frac{۳}{۲}<m<\frac{۳}{۲}$

۲۷۵- تابع $y=x^۲+|x-۱|$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $[-۱,+\infty)$　　۲) $[۰,+\infty)$　　۳) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$　　۴) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$

۲۷۶- اگر f تابعی نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲x+۱)-f(۲-x)}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۳},+\infty)$　　۲) $(-\infty,\frac{۱}{۳}]$　　۳) $[\frac{۲}{۳},+\infty)$　　۴) $(-\infty,\frac{۲}{۳}]$

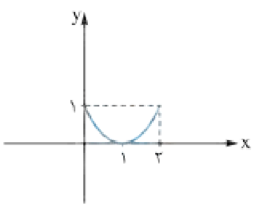
۲۷۷- اگر تابع f نزولی و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲)-f(|x-۱|)}$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش)*

۱) $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$　　۲) $[-۱,۳]$　　۳) $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$　　۴) $\mathbb{R}$

۲۷۸- اگر ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۶x-۵ & ,x>۳\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۸}{۵} & ,-۲\le x\le ۳\\ x^۲+۶x+۸ & ,x<-۲\end{cases}$ باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش)*

۱) ۲　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۳

۲۷۹- نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y=f(f(x))$ با ورودی $۱\le x\le ۲$ چگونه است؟ *(کانون فرهنگی آموزش)*



۱) صعودی

۲) نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۲۸۰- تابع $f(x)=|\frac{|x|}{x}(\frac{۱}{x}-۱)|$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۰)$

۲۸۱- به ازای کدام مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=(۳a-a^۲)x+|۲x-۱|$ اکیداً صعودی است؟

۱) $(\frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲},۱)$ ۲) $(۲,\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲})$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۲۸۲- تابع $f(x)=\frac{|x(x-m)^۲|}{x}$ به ازای چند مقدار صحیح m، صعودی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸۳- تابع $f(x)=\frac{-۱}{x-۲}$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی است، حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۸۴- تابع $f(x)=\frac{۲x+a-۱}{x-a+۱}$ در هر کدام از بازه‌های $(۳,+\infty)$ و $(-\infty,۳)$ یکنوا است، $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۲۸۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۱ \\ g(x) & x>-۱ \end{cases}$ تابعی نزولی باشد، ضابطهٔ g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=|x|$ ۲) $y=-x^۲$ ۳) $y=-|x|-x$ ۴) $y=x+|x|$

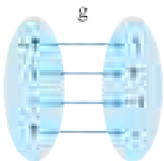
درس ۷

اعمال جبری

با تابع‌های f و g می‌توانیم توابع جدیدی بسازیم. مثلاً دو تابع را ضرب، جمع، تقسیم یا تفریق کنیم. موافقید که برای جمع و تفریق و ... ، باید هر دو عدد وجود داشته باشند؟! پس دامنهٔ تابع‌های $f+g$، $f-g$ و fg (یا همان $f\times g$)، دامنهٔ مشترک f و g است.

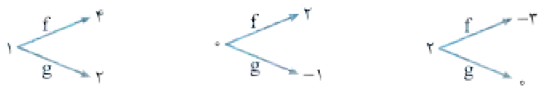
بعد از پیداکردن xهای مشترک، سراغ yها می‌رویم و عملی که می‌خواهیم را روی yها انجام می‌دهیم. مثلاً تابع f و g را با جدول و نمودار پیکانی ببینید:

x	۱	−۱	۲	۰	۳
f(x)	۴	۱	−۳	۲	۰



xهای مشترک عبارت‌اند از: ۱,۰,۲

حالا مثلاً برای ساختن $f+g$، باید yها را جمع کنیم. یک‌بار yها را کنار هم ببینید:



پس داریم:

$۱\xrightarrow{f+g}۴+۲$ $۰\xrightarrow{f+g}۲+(-۱)$ $۲\xrightarrow{f+g}-۳+۰$

بیایید در ادامهٔ همین مثال و با همین تابع‌ها، $۲f-g$ و fg و $\frac{\sqrt{g}}{f}$ و $\frac{f^۲}{g}$ را بسازیم:

$$۲f-g=\{(۱,۲(۴)-۲),(۰,۲(۲)+۱),(۲,۲(-۳)-۰)\}=\{(۱,۶),(۰,۵),(۲,-۶)\}$$

$$fg=\{(۱,۴\times۲),(۰,۲\times(-۱)),(۲,-۳\times۰)\}=\{(۱,۸),(۰,-۲),(۲,۰)\}$$

$$\frac{\sqrt{g}}{f}=\{(۱,\frac{\sqrt{۲}}{۴}),(۰,\frac{\sqrt{-۱}}{۲}),(۲,\frac{\sqrt{۰}}{-۳})\}=\{(۱,\frac{\sqrt{۲}}{۴}),(۲,۰)\}$$

دقت کردید؟ در $x=۰$ نمی‌توانیم $\frac{\sqrt{g}}{f}$ بسازیم، چون $g(۰)$ عددی منفی است و زیر رادیکال نمی‌رود.

$$\frac{f^۲}{g}=\{(۱,\frac{۴^۲}{۲}),(۰,\frac{۲^۲}{-۱}),(۲,\frac{(-۳)^۲}{۰})\}=\{(۱,۸),(۰,-۴)\}$$

حواستان بود که در $x=۲$، تابع $\frac{f^۲}{g}$ ساخته نمی‌شود چون $g(۲)$، صفر است و در مخرج نمی‌رود.

در مورد تقسیم، علاوه بر شرط دامنهٔ مشترک، باید حواسمان باشد که مخرج صفر نشود، ببینید:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ,\ D_{f-g}=D_f\cap D_g \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\} \qquad (fg)(x)=f(x)\times g(x)\ ,\ D_{fg}=D_f\cap D_g$$

پس مثلاً برای دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ داریم:

$$D_g=[۰,+\infty)\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)-\{۱\}$$

در مورد تقسیم $\frac{f}{g}$ حواسمان به $g(۰)=۰$ هست:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g=۰\}=(۰,+\infty)-\{۱\}$$

اگر $f=\{(-۱,۲),(۳,۴),(۱,۰),(۲,۱)\}$ و $g=\{(۱,-۲),(۲,۳),(۰,۴),(-۱,۱)\}$ کدام درست نیست؟

۱) $(-۱,۳)$ در $f+g$ است. ۲) $(۱,-۲)$ عضو $g-f$ است. ۳) $fg(۲)=۳$ ۴) $\frac{g}{f}$ سه عضو دارد.

گزینهٔ ۴ با صبر و حوصله می‌خواهیم $f+g$، $g-f$، fg و $\frac{g}{f}$ را بسازیم. با دقت دنبال کنید:

دامنهٔ مشترک f و g (یعنی مؤلفه‌های اول مشترک) شامل ۱−، ۱ و ۲ است.

$$f+g=\{(-۱,\overset{f}{۲}+\overset{g}{۱}),(۱,\overset{f}{۰}+\overset{g}{(-۲)}),(۲,\overset{f}{۱}+\overset{g}{۳})\}$$

پس ۱ درست می‌گوید و $(-۱,۳)$ در $f+g$ هست.

$$g-f=\{(-۱,\overset{g}{۱}-\overset{f}{۲}),(۱,\overset{g}{-۲}-\overset{f}{۰}),(۲,\overset{g}{۳}-\overset{f}{۱})\}$$

پس ۲ هم درست گفته و $(۱,-۲)$ در $g-f$ هست.

$$fg=f\times g=\{(-۱,۲\times۱),(۱,۰\times(-۲)),(۲,۱\times۳)\}$$

پس ۳ هم راست می‌گوید و $(f\times g)(۲)$ واقعاً می‌شود ۳.

خب ۴ مانده! حتماً ۴ غلط است. ببینید:

$$\frac{g}{f}=\{(-۱,\frac{۱}{۲}),(۱,\frac{-۲}{۰}),(۲,\frac{۳}{۱})\}$$

اما $\frac{-۲}{۰}$ که معنی ندارد! در واقع $\frac{g}{f}(۱)$ وجود ندارد و $\frac{g}{f}$ دوعضوی است:

$$\frac{g}{f}=\{(-۱,\frac{۱}{۲}),(۲,۳)\}$$

وقتی تابع‌ها با زوج‌مرتب داده می‌شوند، مؤلفه‌های اول مشترک را در نظر می‌گیریم و عمل جبری را روی yها انجام می‌دهیم. مثلاً اگر $(a,b)\in f$ و $(a,c)\in g$ باشند در تابع $f+g$ زوج‌مرتب $(a,b+c)$ داریم.

اگر $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۴}$ و $g(x)=\frac{x+۳}{x-۳}$، دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{g}-\frac{۱}{f}$ شامل چند نقطه از $\mathbb{R}$ نیست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ ۴ دامنهٔ f اعداد ±۲ را ندارد؛ دامنهٔ g هم عدد ۳ را ندارد؛ چون f و g هر دو در مخرج قرار می‌گیرند. هیچ‌کدام نباید صفر باشند.

در $x=\pm۱$ مقدار f صفر است و در $x=-۳$ مقدار g صفر می‌شود. پس دامنهٔ $\frac{۱}{g}-\frac{۱}{f}$ شامل اعداد ±۲، ±۱، ۳ و ۳−، یعنی ۶ نقطه از $\mathbb{R}$ نیست.

اگر $f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۰,۴),(۲,۰)\}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$، آن‌گاه کدام عدد در برد تابع $۲f-۳g$ نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینهٔ ۲ دامنهٔ f شامل اعداد ۱−، ۱، صفر و ۲ و دامنهٔ g بازهٔ $[-۱,۱]$ است. پس دامنهٔ مشترک آن‌ها می‌شود: $D_f\cap D_g=\{-۱,۱,۰\}$

پس تابع $۲f-۳g$ از سه زوج‌مرتب ساخته می‌شود:

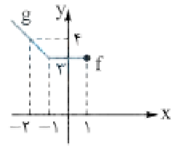
$$x=۱\ \Rightarrow\ ۲f-۳g=۲f(۱)-۳g(۱)=۲(۲)-۳(۰)=۴$$

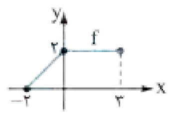
$$x=۰\ \Rightarrow\ ۲f-۳g=۲f(۰)-۳g(۰)=۲(۴)-۳(۱)=۵$$

$$x=-۱\ \Rightarrow\ ۲f-۳g=۲f(-۱)-۳g(-۱)=۲(۱)-۳(۰)=۲$$

پس عدد ۳ در گزینه‌ها، در برد $۲f-۳g$ نیست.

شکل روبه‌رو نمودار دو تابع f و g است. نمودار $f+g$ چگونه است؟

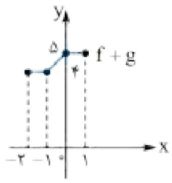




گزینهٔ ۴ می‌خواهیم این نمودار را با نقطه‌یابی بکشیم. طول‌های ۲- و ۱- و ۰ و ۱ را در نظر می‌گیریم (دقت می‌کنید که دامنهٔ مشترک دو تابع $[-۲,۱]$ است)

x	−۲	−۱	۰	۱
f(x)	۰	۱	۲	۲
g(x)	۴	۳	۳	۳
f+g(x)	۴	۴	۵	۵

از کجا فهمیدیم $f(-۱)$ می‌شود ۱؟ پس داریم:



یک مثال نسبتاً سخت ببینید:

اگر $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۲\\ ۲x & x<۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۱\\ x-۳ & x\leq ۱\end{cases}$، آن‌گاه در برد $f-g$، بیشترین عدد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

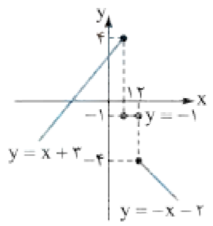
گزینهٔ ۴ دامنهٔ f و g برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنهٔ مشترک آن‌ها هم $\mathbb{R}$ است اما به خاطر ضابطه‌های مختلف، مجبوریم ۳ قسمت کنیم:

الف) $x\geq ۲ \Rightarrow f(x)=x-۱\,,\,g(x)=۲x+۱ \Rightarrow (f-g)(x)=x-۱-(۲x+۱) \Rightarrow (f-g)(x)=-x-۲$

ب) $۱<x<۲ \Rightarrow f(x)=۲x\,,\,g(x)=۲x+۱ \Rightarrow (f-g)(x)=-۱$

پ) $x\leq ۱ \Rightarrow f(x)=۲x\,,\,g(x)=x-۳ \Rightarrow (f-g)(x)=x+۳$

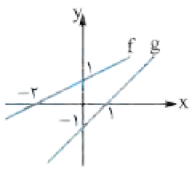
نمودار را هم ببینید:



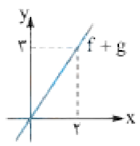
قبول دارید که در برد $f-g$، بیشترین عدد، ۴ است.

در کتاب درسی، نمودار دو تابع خطی f و g داده شده و بعد نمودار $f+g$ را می‌خواهیم. این را ببینید:

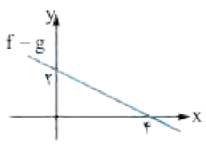
در شکل روبه‌رو $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$ و $g(x)=x-۱$ را داریم.



نمودارهای $f+g$، $f-g$ و fg را ببینید:

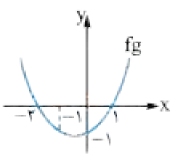


$$(f+g)(x)=\frac{۱}{۲}x+۱+x-۱=\frac{۳}{۲}x$$



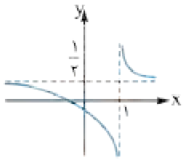
$$(f-g)(x)=\frac{۱}{۲}x+۱-(x-۱)=\frac{-۱}{۲}x+۲$$

یادتان نرود که در مورد تابع‌های خطی همیشه می‌توانیم وضعیت را با دوتا نقطه معلوم کنیم.



$$fg(x)=(\frac{۱}{۲}x+۱)(x-۱)=\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x-۱$$

نمودار $\frac{f}{g}$ را دوست دارید؟



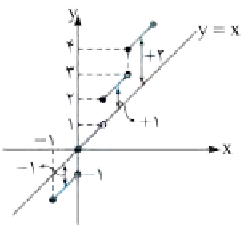
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{2}x+1}{x-1}$$

نکته همان‌طور که دیدید جمع و تفریق دو تابع خطی، تابعی خطی است. اصلاً می‌توانیم دقیق‌تر بگوییم که مجموع دو تابع خطی $f(x)=ax+b$ و $g(x)=a'x+b'$ خطی با شیب $a'+a$ است. تفاضل آن‌ها نیز خطی با شیب $a-a'$ است. ($f-g$ را می‌گوییم.) راستی ضرب آن‌ها یک تابع درجه‌دوم (سهمی) است و تقسیم نیز یک تابع گویا می‌شود.

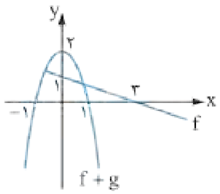
مثال نمودار تابع $y=x+[x]$ کدام خط را قطع نمی‌کند؟

۱) $y=2$ ۲) $y=2/1$ ۳) $y=3/1$ ۴) $y=4/2$

پاسخ گزینهٔ ۳ $y=x+[x]$ از مجموع دو تابع $y=[x]$ و $y=x$ ساخته می‌شود. پس کافی است در بازه‌های $\dots,[-2,-1),[-1,0),[0,1),[1,2),\dots$ مقادیر $y=x$ را با مقدار $y=[x]$ جمع کنیم. با توجه به شکل، برد تابع از بازه‌های $[2k,2k+1)$ ساخته شده و نمودار خط $y=3/1$ را قطع نمی‌کند.



مثال در شکل زیر نمودار توابع $f+g$ و f داده شده است. مقدار $g(-3)$ چند برابر $(fg)(0)$ است؟ (f خط و $f+g$ سهمی است.)



۱) -9

۲) -18

۳) 18

۴) 9

پاسخ گزینهٔ ۲ $y=f(x)+g(x)$ سهمی با رأس $(0,2)$ است که از $(\pm1,0)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ آن $y=-2x^2+2$ است. $y=f(x)$ نیز خط با طول از مبدأ و عرض از مبدأ ۳ و ۱ است. پس معادله‌اش $y=\frac{-1}{3}x+1$ است.

بنابراین:
$$g(x)=(f+g)(x)-f(x)=-2x^2+2-(-\frac{1}{3}x+1)=-2x^2+\frac{1}{3}x+1$$
$$\Rightarrow g(-3)=-2(-3)^2+\frac{1}{3}(-3)+1=-18 \quad \text{و} \quad fg(0)=f(0)g(0)=1\times1=1$$

و جواب می‌شود $\frac{-18}{1}$ یعنی -18 برابر.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۸۶- اگر $f=\{(2,5),(3,4),(0,-2)\}$ و $g=\{(-1,2),(0,3),(2,4),(3,0)\}$ باشد، $(f+g)(2)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۸۷- اگر $f=\{(1,3),(2,5)\}$ و $g=\{(2,3),(5,1)\}$ باشد، مجموعهٔ $f+2g$ کدام است؟

۱) $\{(2,11)\}$ ۲) $\{(2,7)\}$ ۳) $\{(1,4),(2,7)\}$ ۴) $\{(1,4),(2,11)\}$

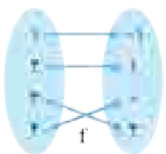
۲۸۸- اگر $f(x)=x+1$ و $g(x)=\sqrt{1-2x}$ باشند، مقدار $(2f-g)(-4)$ کدام است؟

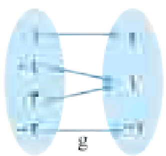
۱) -3 ۲) 3 ۳) -9 ۴) 9

۲۸۹- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ و $g=\{(1,5),(2,6),(3,0)\}$، آن‌گاه تابع $\frac{2f}{g}$ چند زوج‌مرتب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۹۰- با توجه به نمودارهای روبه‌رو، برد تابع $gf-\frac{f}{g}$ کدام است؟





۱) $\{\frac{3}{2},-1\}$ ۲) $\{-\frac{3}{2},0\}$

۳) $\{-\frac{3}{2},0,1\}$ ۴) $\{0,1,\frac{3}{2}\}$

۲۹۱- اگر $f=\{(-1,0),(1,2),(0,1),(2,-1)\}$ باشد، آن‌گاه $f+f^{-1}$ شامل کدام زوج‌مرتب نیست؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,0)$ ۴) $(2,0)$

۲۹۲- اگر $f=\{(1,2),(2,4),(3,4)\}$ و $g=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$، مقدار تابع $(\frac{f+g}{3f})(x)$ به ازای $x=f(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{12}{7}$ ۴) $\frac{12}{5}$

۲۹۳- اگر $g=\{(1,-3),(2,5),(3,4)\}$ و $(\frac{f}{g})(x)=2x+1$، آن‌گاه $f(3)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۲۹۴- اگر $f=\{(1,4),(2,3),(3,4)\}$ و $f-g=\{(1,-4),(3,1)\}$، آن‌گاه تابع $h(x)=\frac{1}{g(x)-8}$ شامل کدام عضو است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $(1,\frac{1}{8})$ ۲) $(3,-\frac{1}{5})$ ۳) $(3,\frac{1}{5})$ ۴) $(1,-\frac{1}{8})$

۲۹۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\leq 0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x & x\geq -2 \\ x-2 & x<-2 \end{cases}$، حاصل $(f+2g)(-1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴- ۳) ۶- ۴) ۳

۲۹۶- اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g=\{(2,-1),(-1,2),(0,1)\}$، مجموع مقادیر برد تابع $(g-f).g(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۹۷- اگر f و g دو تابع باشند که $(f+g)(x)=2x-1$ و $(f-g)(x)=x+2$، $f(1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۴- ۴) ۲-

۲۹۸- f و g دو تابع چندجمله‌ای هستند. اگر $(f+g)(x)=4x^2+1$ و $(f-g)(x)=2x+1$، $g(2)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

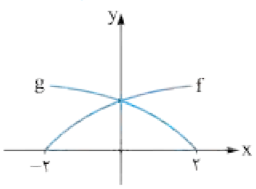
۲۹۹- اگر $f(x)=1+\sqrt{x}$ و $g(x)=1-\sqrt{x}$، برد تابع $(fg)(x)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $\varnothing$

۳۰۰- اگر $f(x)=\log x$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد، دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(-2,2)$

۳۰۱- نمودارهای f و g به صورت زیر است. در دامنهٔ تابع $\frac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}$ چند مقدار صحیح وجود دارد؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) بی‌شمار
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۴

۳۰۲- اگر $f(x)=\sqrt{2x-2}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ باشند، برد تابع $(f^2+g^2)(x)$ دارای چند عضو است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

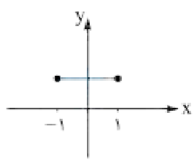
۳۰۳- اگر $f(x)=\sqrt{n-3x}$ و $g(x)=\sqrt{x-3m}$ و تابع $f+g$ به صورت $\{(1,a)\}$ باشد، آن‌گاه مقدار $am+n$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

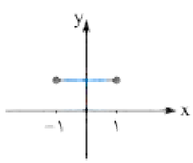
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

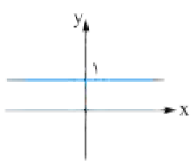
۳۰۴- اگر $f(x)=1-\sqrt{x}$ و $g(x)=1+\sqrt{x}$، ضابطهٔ تابع $\frac{f^3g^2+f^2g^3}{f+g}$ کدام است؟

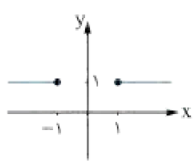
۱) $y=1-x\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=(1-x)^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۳) $y=1-x\ ,\ x\geq 0$ ۴) $y=(1-x)^2\ ,\ x\geq 0$

۳۰۵- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$، آن‌گاه نمودار تابع (fg) کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

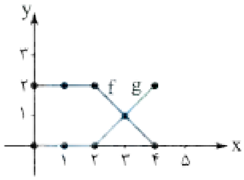
۱)


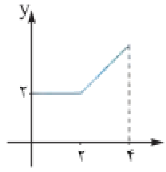
۲)


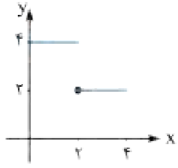
۳)


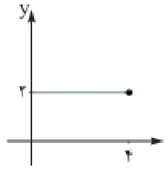
۴)


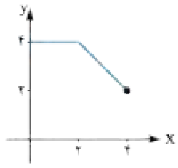
۳۰۶- در شکل زیر، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل‌جمع این دو تابع کدام است؟ *(کتاب درسی)*



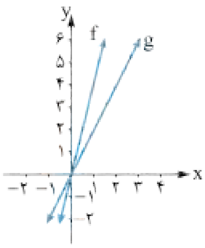
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۰۷- در شکل، دو تابع f و g رسم شده‌اند، ضابطهٔ تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟ *(کتاب درسی)*



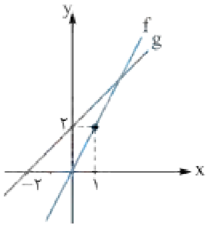
۱) $h(x)=x^{۲}+۴x$

۲) $h(x)=x^{۲}+x+۳$

۳) $h(x)=۵x$

۴) $h(x)=۳x$

۳۰۸- در شکل مقابل نمودار تابع‌های f و g رسم شده‌اند. مقدار $(f+g)(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟



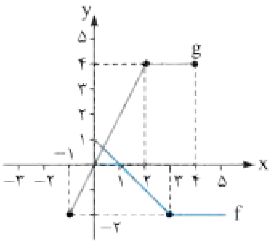
۱) ۱

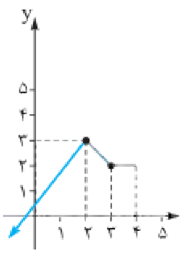
۲) ۳/۵

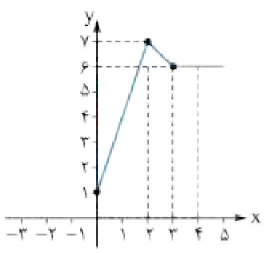
۳) ۲

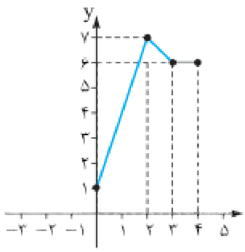
۴) ۲/۵

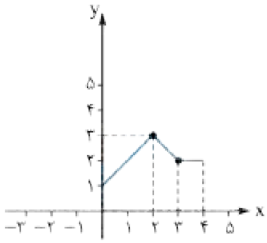
۳۰۹- هرگاه نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشد، نمودار تابع $f+۲g$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش)*



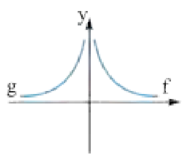
۱) 

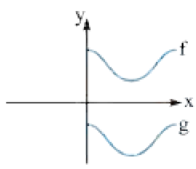
۲) 

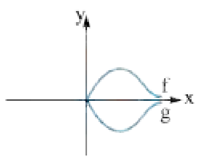
۳) 

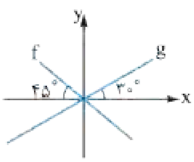
۴) 

۳۱۰- در کدام‌یک از گزینه‌های زیر $(f+g)(x)=۰$ است؟

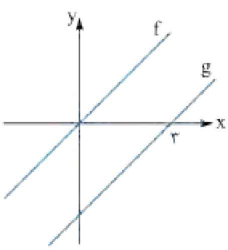
۱) 

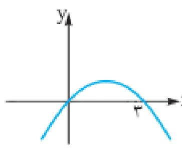
۲) 

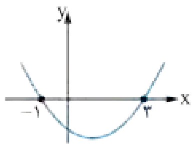
۳) 

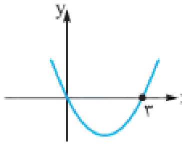
۴) 

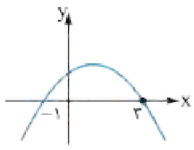
۳۱۱- اگر نمودارهای f و g به صورت مقابل باشد، نمودار fg کدام گزینه است؟



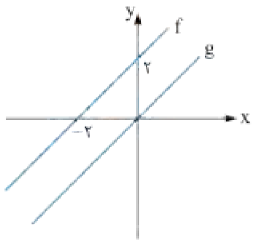
۱) 

۲) 

۳) 

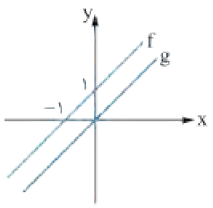
۴) 

۳۱۲- اگر نمودارهای دو تابع f و g به صورت روبه‌رو باشند، نمودار تابع fg از کدام نقطهٔ زیر عبور می‌کند؟



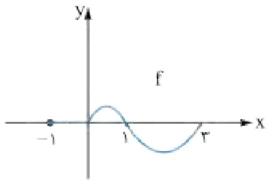
۱) $(۰,۱)$
۲) $(۲,۳)$
۳) $(-۲,۰)$
۴) $(-۳,۵)$

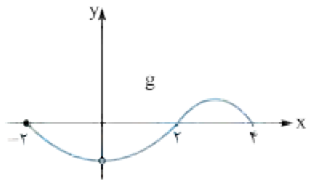
۳۱۳- اگر شکل روبه‌رو نمودار دو تابع f و g باشد، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟



۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

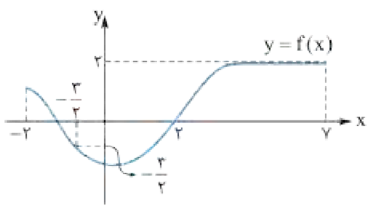
۳۱۴- با توجه به نمودار توابع f و g، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(\frac{f}{g})(x)}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

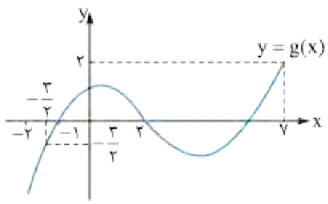




۱) $(-۱,۰)\cup[۱,۲)\cup\{۳\}$
۲) $(-۱,۳)-\{۰\}$
۳) $(۱,۲)$
۴) $(-۱,۰)$

۳۱۵- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر هستند عبارت $y=\frac{۱}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده‌اند؟ (کانون فرهنگی آموزش)



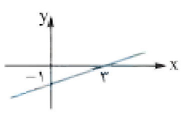


۱) $(-۲,۲)\cup(۲,۷)$
۲) $[-۲,-\frac{۳}{۲})\cup[۲,۷]$
۳) $(-۲,۷)-\{-\frac{۳}{۲},۲\}$
۴) $[-۲,-\frac{۳}{۲})\cup(۲,۷)$

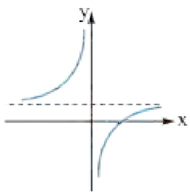
۳۱۶- اگر داشته باشیم: $f=\{(۱,۳),(۴,m),(۲,-n^۲+۱),(-۳,۱)\}$ و $g=\{(۴,۱-n),(-۲,۱),(۲,۵),(-۳,n+۲)\}$ و $\frac{f}{g}=\{(۴,۵),(۲,-\frac{۳}{۵})\}$، آن‌گاه حاصل $n+m$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۸ ۲) ۷- ۳) ۱۷ ۴) ۱۳

۳۱۷- g تابع خطی شکل مقابل است.

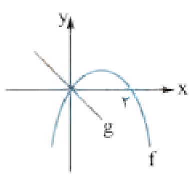


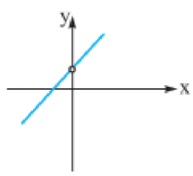
با کدام انتخاب برای f، نمودار $\frac{g}{f}$ به شکل زیر می‌شود؟

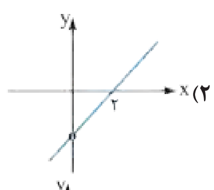


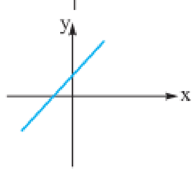
۱) $y=۲x-۶$
۲) $y=x$
۳) $y=-x$
۴) $y=x+۱$

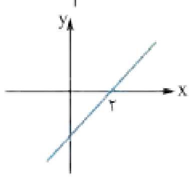
۳۱۸- در شکل روبه‌رو f یک سهمی و g تابع خطی است. نمودار $\frac{f}{g}$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


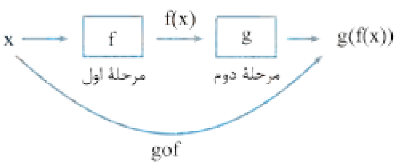
۴)


درس ۸

ترکیب توابع

در سال دهم و یازدهم با مفهوم تابع آشنا شدیم، دامنه و برد تابع را شناختیم و دیدیم که با کمک دو تابع f و g می‌توان تابع‌های $f-g$، $f+g$، fg و $\frac{f}{g}$ را ساخت. امسال با ترکیب توابع آشنا می‌شویم.

در تابع مرکب gof، اول x را به f می‌دهیم، سپس خروجی f یعنی $f(x)$ را به عنوان ورودی به g می‌دهیم و مقدار $g(f(x))$ را حساب می‌کنیم.



این تابع را به صورت gof نشان می‌دهیم و آن را ترکیب g با f می‌نامیم. در این ترکیب، f تابع درونی و g تابع بیرونی است.

نکته دقت کنید که ترکیب دو تابع، خاصیتِ جابه‌جایی ندارد و fog در حالت کلی با gof مساوی نیست.

اول محاسبهٔ gof را در نمایش‌های مختلف تابع یاد می‌گیریم:

۱) محاسبهٔ gof در زوج‌های مرتب یا جدول

برای ساختن gof اول به زوج‌های مرتب f نگاه می‌کنیم. اگر $(a,b)\in f$ باشد، دنبال زوج‌مرتب (b,c) در g می‌گردیم (یعنی مؤلفه‌های دوم f را در مؤلفه‌های اول g پیدا می‌کنیم). حالا ترکیب دو تابع این‌جوری می‌شود:

$$\left.\begin{matrix}(a,b)\in f\\(b,c)\in g\end{matrix}\right\}\Rightarrow (a,c)\in gof \qquad a\xrightarrow{f} b\xrightarrow{g} c \quad (a \xrightarrow{gof} c)$$

این کار را برای تک‌تک عضوهای f انجام می‌دهیم و اگر مؤلفهٔ دوم f، در مؤلفه‌های اول g نبود، ترکیب انجام نمی‌شود.

مثال اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۰),(-۱,۳),(۰,۲)\}$، تابع gof چند عضوی است؟

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
g	۳	۱	−۱	۰	−۲

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳ قرار شد از تابع درونی شروع کنیم:

$$۱\xrightarrow{f}-۱$$
$$۲\xrightarrow{f}۰$$
$$-۱\xrightarrow{f}۳$$
$$۰\xrightarrow{f}۲$$

حالا g را روی مؤلفه‌های دوم f اثر می‌دهیم:

$$۱\xrightarrow{f}-۱\xrightarrow{g}۱$$
$$۲\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{g}-۱$$
$$-۱\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}\times$$
$$۰\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g}-۲$$

پس gof سه عضوی است.

$gof=\{(۱,۱),(۲,-۱),(۰,-۲)\}$، دقت می‌کنید که در g، مؤلفهٔ اول ۳ وجود ندارد و ترکیب gof انجام نمی‌شود.

نکته سؤال‌های بعدی این‌ها است:

دامنهٔ gof؟ $D_{gof}=\{۱,۲,۰\}$

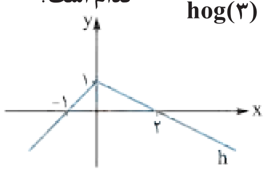
برد gof؟ $R_{gof}=\{۱,-۱,-۲\}$

اعضای fog؟ $fog=\{(-۱,-۱),(۰,۳),(۱,۲)\}$

تابع fof؟ $fof=\{(۱,۳),(۲,۲),(۰,۰)\}$

نکته ممکن است یکی از تابع‌ها با نمودار یا ضابطه هم داده شود.

مثال اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۱),(۳,۲),(-۱,۰)\}$ و $g(x)=۲x-۱$ و تابع h به شکل زیر باشد، مقدار $\frac{hof(۲)+gof(۱)}{hog(۳)}$ کدام است؟



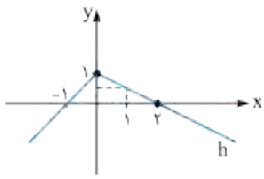
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

گزینهٔ ۲ مسیر پاسخ سؤال کمی طولانی است، پس صبور باشید:

الف) $gof(۱)=g(f(۱)) \xrightarrow[f(۱)=-۱]{(۱,-۱)\in f} =g(-۱) \xrightarrow{g(x)=۲x-۱} ۲(-۱)-۱=-۳$

ب) $hof(۲)=h(f(۲)) \xrightarrow[f(۲)=۱]{(۲,۱)\in f} =h(۱)=\frac{۱}{۲}$



در نمودار h با دقت به نقاط $(۲,۰)$ و $(۰,۱)$ می‌توانیم تشخیص بدهیم که $h(۱)=\frac{۱}{۲}$.

پ) $hog(۳)=h(g(۳)) \xrightarrow[g(۳)=۵]{g(x)=۲x-۱} =h(۵)=-\frac{۳}{۲}$

معادلهٔ نیم‌خط h در xهای مثبت به صورت $\frac{x}{۲}+y=۱$ یا $y=۱-\frac{x}{۲}$ است. پس $h(۵)=۱-\frac{۵}{۲}=-\frac{۳}{۲}$.

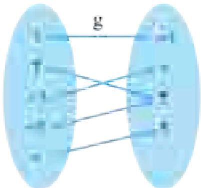
و جواب نهایی سؤال می‌شود:

$$\frac{-۳+\frac{۱}{۲}}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-\frac{۵}{۲}}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۵}{۳}$$

یک مثال از ترکیب و اعمال جبری هم ببینید:

تابع f با جدول زیر و g با نمودار زیر داده شده‌اند. جمع اعضای برد تابع $\frac{fog-gof}{f+g}(x)$ کدام است؟

x	-۱	-۲	۰	۱	۲	۳
f(x)	۲	۰	۱	-۳	۳	-۲



۱) ۱

۲) -۱

۳) $-\frac{۲}{۳}$

۴) $-\frac{۴}{۳}$

گزینهٔ ۲ اول تشکیل fog و gof را ببینید:

$$-۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۳$$
$$-۲ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} ۲$$
$$۰ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{g} -۱$$
$$۱ \xrightarrow{f} -۳ \xrightarrow{g} \times$$
$$۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} \times$$
$$۳ \xrightarrow{f} -۲ \xrightarrow{g} ۳$$

gof

$$۱ \xrightarrow{g} -۱ \xrightarrow{f} ۲$$
$$۲ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} -۲$$
$$-۲ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} -۲$$
$$-۱ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} ۱$$
$$۰ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳$$

fog

حالا مؤلفه‌های اول مشترک gof و fog را در نظر می‌گیریم و تابع تفاضل آن‌ها یعنی $fog-gof$ را می‌سازیم:

$D_{fog}=\{۱,۲,-۱,-۲,۰\}$ $\qquad D_{gof}=\{-۱,-۲,۰,۳\}$ $\qquad$ اشتراک $=\{-۱,-۲,۰\}$

$$fog-gof=\{(-۱,۱-۳),(-۲,-۲-۲),(۰,۳-(-۱))\}=\{(-۱,-۲),(-۲,-۴),(۰,۴)\}$$

حالا $f+g$ را هم می‌بینیم:

$$f+g=(۱,(-۳)+(-۱)),(۲,۳+۳),(-۱,۰+۲),(-۲,۳+۰),(۰,۲+۱)\}=\{(۱,-۴),(۲,۶),(-۱,۲),(-۲,۳),(۰,۳)\}$$

و تقسیم دو تابع می‌شود:

$$\frac{fog-gof}{f+g}=\{(-۱,-\frac{۲}{۲}),(-۲,-\frac{۴}{۳}),(۰,\frac{۴}{۳})\}$$

و جمع عناصر برد این تابع $-۱-\frac{۴}{۳}+\frac{۴}{۳}=-۱$ است.

۲) محاسبهٔ gof با استفاده از ضابطه

برای ساختن ضابطهٔ $gof(x)$ باید در ضابطهٔ $g(x)$ به جای xها، $f(x)$ را قرار دهیم. پس مثلاً ترکیب‌های دو تابع $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۳x+۱}$ به صورت‌های مقابل قابل محاسبه است:

$$gof(x)=g(f(x)) \xrightarrow[x^۲-۱\text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در g به جای x،}} =\sqrt{۳(x^۲-۱)+۱}=\sqrt{۳x^۲-۲}$$

$$fog(x)=f(g(x)) \xrightarrow[\sqrt{۳x+۱}\text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در f به جای x،}} =\sqrt{۳x+۱}^{\,۲}-۱=۳x+۱-۱=۳x$$

$$fof(x)=f(f(x)) \xrightarrow[x^۲-۱\text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در f به جای x،}} =(x^۲-۱)^۲-۱=x^۴-۲x^۲$$

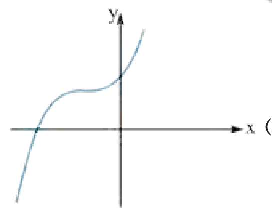
$$gog(x)=g(g(x)) \xrightarrow[\sqrt{۳x+۱}\text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در g به جای x،}} =\sqrt{۳\sqrt{۳x+۱}+۱}$$

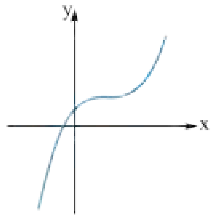
تست اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۱}$، ضابطهٔ $gof(x)$ کدام است؟

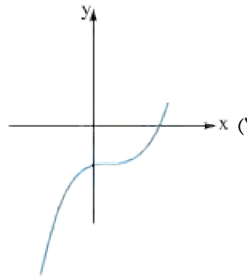
۱) $\sqrt{\cos^۲ x+۱}$ ۲) $\sqrt{۱-\cos^۲ x}$ ۳) $\sqrt{۲+\cos^۲ x}$ ۴) $\sqrt{۲-\cos^۲ x}$

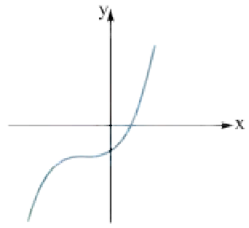
پاسخ گزینهٔ ۴ باید در g به جای x، $\sin x$ را قرار دهیم:
$$g(f(x))=\sqrt{\sin^۲ x+۱}$$
اما چنین چیزی در گزینه‌ها نیست. اگر به جای $\sin^۲ x$ بنویسیم $۱-\cos^۲ x$ داریم:
$$g(f(x))=\sqrt{۱-\cos^۲ x+۱}=\sqrt{۲-\cos^۲ x}$$

تست اگر $f(x)=x^۳+۲$ و $g(x)=x-۱$، نمودار تابع $fog(x)$ کدام است؟

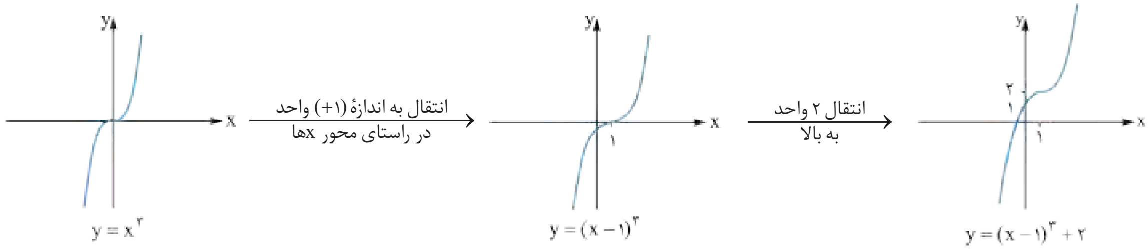
۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع fog را پیدا می‌کنیم:
$$\begin{cases}f(x)=x^۳+۲\\ g(x)=x-۱\end{cases}\Rightarrow (fog)(x)=(x-۱)^۳+۲$$
حالا نمودار تابع $y=(x-۱)^۳+۲$ را با انتقال رسم می‌کنیم:



تست اگر $f(x)=x^۲-۳x$ و $g(x)=۲x-۱$، جمع جواب‌های معادلهٔ $fog(x)=۱$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ ۳ اول $fog(x)$ را بسازیم:
$$fog(x)=f(g(x))=f(۲x-۱)\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم } (۲x-۱)]{\text{در f به جای xها}}=(۲x-۱)^۲-۳(۲x-۱)=۴x^۲-۴x+۱-۶x+۳=۴x^۲-۱۰x+۴$$
حالا معادلهٔ $fog(x)=۱$ به صورت $۴x^۲-۱۰x+۴=۱$ درمی‌آید که جمع جواب‌هایش برابر است با:
$$۴x^۲-۱۰x+۳=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S=-\frac{b}{a}=+\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

تست اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{۳x-۱}$، آن‌گاه دو تابع fog و g در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۱ ضابطهٔ fog را می‌سازیم:
$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲(\frac{x+۱}{۳x-۱})-۱}{(\frac{x+۱}{۳x-۱})+۳}=\frac{\frac{۲x+۲}{۳x-۱}-۱}{\frac{x+۱}{۳x-۱}+۳}=\frac{\frac{۲x+۲-۳x+۱}{۳x-۱}}{\frac{x+۱+۹x-۳}{۳x-۱}}=\frac{-x+۳}{۱۰x-۲}$$
و آن را مساوی $g(x)$ می‌گذاریم:
$$\frac{-x+۳}{۱۰x-۲}=\frac{x+۱}{۳x-۱}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}\underbrace{(-x+۳)(۳x-۱)}_{-۳x^۲+۱۰x-۳}=\underbrace{(۱۰x-۲)(x+۱)}_{۱۰x^۲+۸x-۲}\Rightarrow ۱۳x^۲-۲x+۱=۰$$
اما دلتای این معادله منفی است و ریشه ندارد. پس fog و g نقطهٔ مشترکی ندارند.

اگر $f(x)=x^2+x+b$ و $g(x)=2x+1$ و معادلهٔ $fog(x)=7$ فقط یک ریشه داشته باشد، b کدام است؟

۱) $9/25$ ۲) $8/25$ ۳) $10/25$ ۴) $7/25$

گزینهٔ ۴

$$fog(x)=f(g(x))=(2x+1)^2+(2x+1)+b=4x^2+4x+1+2x+1+b=4x^2+6x+b+2=7$$

$$\Rightarrow 4x^2+6x+b-5=0 \xrightarrow{\text{فقط یک ریشه}} \Delta=0$$

$$6^2-4(4)(b-5)=0 \Rightarrow 36=16(b-5) \Rightarrow b-5=\frac{36}{16}=\frac{9}{4} \Rightarrow b=5+\frac{9}{4}=\frac{29}{4}=7/25$$

تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x^2+4x+5}$ از ترکیب چندتا از جفت‌های زیر ساخته می‌شود؟

الف) $\begin{cases} f(x)=x^2+4x \\ g(x)=\sqrt{x+5} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+1} \\ g(x)=x+2 \end{cases}$ پ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+17} \\ g(x)=(x-2)(x+6) \end{cases}$

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینهٔ ۴ از ترکیب هر سه جفت می‌توان این تابع را ساخت. در (الف) ترکیب gof را ببینید: $g(f(x))=\sqrt{(x^2+4x)+5}$

در (ب) ترکیب fog را کنترل کنید: $f(g(x))=\sqrt{(x+2)^2+1}=\sqrt{x^2+4x+4+1}$

در (پ) نیز به ترکیب fog توجه کنید: $f(g(x))=\sqrt{(x-2)(x+6)+17}=\sqrt{x^2+4x-12+17}=\sqrt{x^2+4x+5}$

هر تابع دلخواه می‌تواند به صورت ترکیبی از بی‌شمار جفت تابع نوشته شود. به قول کتاب درسی برای نوشتن تابع f به صورت ترکیب توابع f و g، جواب، منحصر به فرد نیست.

مسائل ضابطهٔ تابع مرکب وقتی یکی از تابع‌ها را نداریم

تا الان دیدیم که با داشتن f و g چگونه ضابطهٔ fog یا gof ساخته می‌شود. حالا دو نوع سؤال دیگر داریم:

اگر ضابطهٔ f و fog را بدهند و g را بخواهند. **اگر ضابطهٔ g و fog را بدهند و f را بخواهند.**

روش حل را در دو مثال زیر مقایسه کنید:

اگر $f(x)=2x-1$ و $fog(x)=2x^2-6x+5$، آن‌گاه ضابطهٔ g کدام است؟

۱) x^2-3x+2 ۲) x^2-3x+1 ۳) x^2-3x+3 ۴) x^2-3x+6

گزینهٔ ۳ باید در $f(x)$ به جای xها، $g(x)$ قرار دهیم: $f(x)=2x-1 \Rightarrow f(g(x))=2g(x)-1$

صورت سؤال به ما fog را داده: $2g(x)-1=2x^2-6x+5 \Rightarrow 2g(x)=2x^2-6x+6 \Rightarrow g(x)=x^2-3x+3$

اگر $g(x)=2x-1$ و $fog(x)=4x^2-6x+5$، آن‌گاه ضابطهٔ f کدام است؟

۱) x^2-x+1 ۲) x^2-x+2 ۳) x^2-x ۴) x^2-x+3

گزینهٔ ۴ اگر در ضابطهٔ f، تابع g را قرار دهیم، داریم: $f(2x-1)=4x^2-6x+5$

حالا برای رسیدن به ضابطهٔ f، باید $2x-1$ را مثلاً t بگیریم: $2x-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{2}$

حالا کل عبارت را برحسب t می‌نویسیم و تمام: $f(t)=4(\frac{t+1}{2})^2-6(\frac{t+1}{2})+5$

پس داریم: $f(t)=t^2+2t+1-3t-3+5=t^2-t+3$

در تست اگر حوصلهٔ حل نداشته باشیم، می‌شود گزینه‌ها را با عددگذاری هم کنترل کرد.

اگر $fog(x)=\frac{x-1}{x+2}$ و $g(x)=2x-1$، آن‌گاه ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2x-2}{2x+1}$ ۲) $\frac{x+1}{x-5}$ ۳) $\frac{x-1}{x+5}$ ۴) $\frac{x-4}{x+2}$

گزینهٔ ۳ سؤال گفته: $f(2x-1)=\frac{x-1}{x+2}$، ما به جای x در این عبارت، ۱ قرار می‌دهیم و می‌شود $f(1)=0$. پس گزینه‌ای جواب است که به ازای $x=1$ بشود صفر که فقط گزینه‌های ۱ و ۳ می‌خورند. حالا به جای x یک عدد دیگر، مثلاً صفر قرار می‌دهیم: $f(-1)=-\frac{1}{2}$ که فقط به ۳ می‌خورد.

نکته حل عادی را هم دیده باشید:

$$2x-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{2}$$

$$f(2x-1)=\frac{x-1}{x+2}\xrightarrow{\text{برحسب } t} f(t)=\frac{\frac{t+1}{2}-1}{\frac{t+1}{2}+2}=\frac{t+1-2}{t+1+4}=\frac{t-1}{t+5}$$

اگر $f(x)=x^2-x-6$ و $f(g(x))=x^2-5x$، تابع $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $1-x$ ۲) $2-x$ ۳) $3-x$ ۴) $4-x$

پاسخ گزینهٔ ۳ سؤال می‌گوید:

$$f(g(x))=g^2(x)-g(x)-6=x^2-5x$$
$$\Rightarrow g^2-g=x^2-5x+6$$

برای سادگی به جای $g(x)$ می‌نویسیم g:

حالا دو راه برای حل این معادله داریم:

روش اول به اتحاد جمله‌مشترک فکر کنیم:

$$g^2\overbrace{-1}^{\text{جمع}}g\underbrace{-(x^2-5x+6)}_{\text{ضرب}}=0 \Rightarrow (g+(x-3))(g-(x-2))=0 \Rightarrow \begin{cases} g(x)=x-2 \\ g(x)=3-x \end{cases}$$

روش دوم به مربع کامل فکر کنیم:

$$\xrightarrow{+\frac{1}{4}} g^2-g+\frac{1}{4}=x^2-5x+\frac{25}{4} \Rightarrow (g-\frac{1}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} g(x)-\frac{1}{2}=\pm(x-\frac{5}{2}) \Rightarrow \begin{cases} g(x)-\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2} \Rightarrow g(x)=x-2 \\ g(x)-\frac{1}{2}=-(x-\frac{5}{2})=\frac{5}{2}-x \Rightarrow g(x)=3-x \end{cases}$$

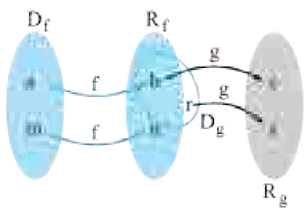
پس در هر حال $g(x)$ یکی از دو تابع $3-x$ یا $x-2$ است.

در عبارت $f(g(x))=g^2-g-6=x^2-5x$ یک عدد امتحان کنیم. مثلاً با قراردادن $x=0$ داریم: $g^2(0)-g(0)-6=0 \Rightarrow g(0)=-2$ یا ۳

که فقط در (۳) مقدار $g(0)$ برابر ۳ می‌شود.

دامنهٔ تابع مرکب

تابع مرکب gof چه کار می‌کند؟ اول x را به f می‌دهد (پس x باید در دامنهٔ f باشد) بعد $f(x)$ را به g می‌دهد (پس $f(x)$ باید در دامنهٔ g باشد) به قول کتاب درسی باید برد f و دامنهٔ g اشتراک داشته باشند. پس باید $R_f \cap D_g$ تهی نباشد. این را ببینید:



پس دامنهٔ gof زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ f و برد آن زیرمجموعه‌ای از برد g است. برای درک بهتر، ترکیب دو تابع $g(x)=\sqrt{x-1}$ و $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ را ببینید:

$$x \longrightarrow \boxed{f(x)=\frac{x+2}{x-3}} \longrightarrow \boxed{g(x)=\sqrt{x-1}} \longrightarrow y$$

اگر ورودی $x=4$ باشد:

$$4 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{6} \boxed{g} \longrightarrow \sqrt{5}$$

اگر ورودی $x=3$ باشد:

$$3 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{\text{تعریف‌نشده}} \boxed{g} \longrightarrow \text{هیچی}$$

دیدید؟ تابع f، $x=3$ را نپذیرفت چون ۳ در دامنهٔ f نیست.

اگر ورودی $x=2$ باشد:

$$2 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{-4} \boxed{g} \longrightarrow \text{هیچی}$$

این دفعه چه اتفاقی افتاد؟ f با $x=2$ مشکلی ندارد اما خروجی f می‌شود -4 و تابع g ورودی $x=-4$ را نمی‌پذیرد. پس در دو مرحله باید دقت کرد. اولاً $x \in D_f$ باشد و ثانیاً $f(x) \in D_g$ باشد. این‌طوری:

$$D_{gof}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

چندتا دامنهٔ gof برای امتحان تشریحی ببینید:

(الف) $f(x)=2x-1 \quad D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\frac{3x}{x-2} \quad D_g=\{x \mid x \neq 2\}$

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}|2x-1\neq 2\}=\{x|x\neq\frac{3}{2}\}=\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$$

(ب) $f(x)=۲x+۱ \quad D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x-۳} \quad D_g=\{x \mid x\geq ۳\}$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid ۲x+۱\geq ۳\}=\{x \mid x\geq ۱\}=[۱,+\infty)$$

(پ) $f(x)=\dfrac{x}{x-۱} \quad D_f=\mathbb{R}-\{۱\}=\{x \mid x\neq ۱\}$

$g(x)=\dfrac{۲x}{x+۱} \quad D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}=\{x \mid x\neq -۱\}$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\neq ۱ \mid \frac{x}{x-۱}\neq -۱\}=\{x\neq ۱ \mid x\neq \frac{۱}{۲}\}=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۱}{۲}\}$$

از معادلهٔ $\dfrac{x}{x-۱}=-۱$ داریم: $x=\dfrac{۱}{۲}$

(ت) $f(x)=\sqrt{x+۲} \quad D_f=\{x \mid x\geq -۲\}$

$g(x)=\sqrt{۳-x} \quad D_g=\{x \mid x\leq ۳\}$

$$D_{gof}=\{x\geq -۲ \mid \sqrt{x+۲}\leq ۳\}=\{x\geq -۲ \mid x\leq ۷\}=[-۲,۷]$$

اما در تست به اختلاف گزینه‌ها فکر می‌کنیم. ببینید:

اگر $f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{۲x+۱}$، آن‌گاه دامنهٔ **fog** کدام بازه است؟

۱) $[-۲,۱]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},۱]$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۰]$ ۴) $[۰,۱]$

گزینه ۳ اول شرط دامنه‌های f و g را می‌نویسیم:

$g: ۲x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۲}$

$f: ۲-x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲+x-۲\leq ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)\leq ۰ \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -۲\leq x\leq ۱$

حالا فرمول دامنهٔ fog:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq -\frac{۱}{۲} \mid \underbrace{-۲\leq}_{\text{این بدیهی است}} \sqrt{۲x+۱}\leq ۱\}=\{x\geq -\frac{۱}{۲} \mid \sqrt{۲x+۱}\leq ۱\}$$

از نامعادلهٔ $\sqrt{۲x+۱}\leq ۱$ داریم $x\leq ۰$. پس:

$$D_{fog}=\{x\geq -\frac{۱}{۲} \mid x\leq ۰\}=[-\frac{۱}{۲},۰]$$

قرار شد به اختلاف گزینه‌ها فکر کنیم. در تابع مرکب $x \to \boxed{\sqrt{۲x+۱}} \to \boxed{\sqrt{۲-x-x^۲}} \to y$ اصلاً عددهای کم‌تر از $-\frac{۱}{۲}$ را نمی‌شود وارد کرد. اگر $x=۱$ قرار دهیم، در مرحلهٔ اول $\sqrt{۳}$ بیرون می‌آید که زیر رادیکال دومی را منفی می‌کند: $\sqrt{۲-\sqrt{۳}-۳<۰}$

پس $x=۱$ در جواب نیست و فقط ۳ می‌تواند باشد.

در تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ با انتخاب کدام دامنه ترکیب **fof** قابل انجام است؟

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[-۲,۰]$

گزینه ۲ شرط دامنهٔ f به صورت $x\leq ۲$ است، پس:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x\leq ۲ \mid \sqrt{۲-x}\leq ۲\}$$

از نامعادلهٔ $\sqrt{۲-x}\leq ۲$ داریم: $۲-x\leq ۴$ و در نتیجه $x\geq -۲$. پس جواب می‌شود:

$$D_{fof}=\{x\leq ۲ \mid x\geq -۲\}=[-۲,۲]$$

دامنهٔ تابع $f(x)=۲^x$ را به کدام بازه محدود کنیم تا برای تابع $g(x)=\dfrac{\sqrt{۴-x}}{x-۲}$ ترکیب **gof** قابل انجام باشد؟

۱) $(۲,۴]$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۰]$

گزینه ۴ دامنهٔ تابع g، از شرط‌های $x\leq ۴$ و $x\neq ۲$ (با توجه به رادیکال و مخرج) به دست می‌آید. پس برای ترکیب gof باید $f(x)$ در این شرط‌ها صدق کند یعنی باید $f(x)\leq ۴$ و $f(x)\neq ۲$ باشد. پس داریم:

$۲^x\leq ۴ \Rightarrow x\leq ۲$

$۲^x\neq ۲ \Rightarrow x\neq ۱$

پس دامنهٔ f باید به $(-\infty,۲]-\{۱\}$ یا $(-\infty,۱)\cup(۱,۲)$ محدود شود. اما در گزینه‌های ۲ و ۳ عدد ۱ آمده و در ۱ عدد بیشتر از ۲ داریم پس این‌ها مناسب نیستند ولی بازهٔ ۴ مناسب است.

با کدام انتخاب برای دامنهٔ x ترکیب دو تابع به شکل روبه‌رو قابل انجام است؟

$x \to \underset{f}{\boxed{۳x-۱}} \to \underset{g}{\boxed{\sqrt{۵x-x^۲}}} \to y$

۱) $[۰,۵]$ ۲) $[-۱,۱۴]$ ۳) $[\frac{۱}{۳},۲]$ ۴) $(-\infty,۲]$

پاسخ گزینهٔ ۳ سؤال از ما دامنهٔ gof را می‌خواهد پس باید x در دامنهٔ f باشد و جواب $f(x)$ در دامنهٔ g بخورد: اول دامنهٔ $g(x)=\sqrt{5x-x^2}$ را به دست می‌آوریم:

$$5x-x^2\ge 0 \Rightarrow x(5-x)\ge 0$$

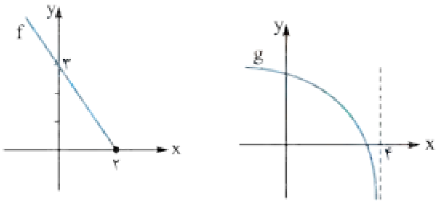
x		0		5	
$x(5-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

پس دامنهٔ آن $[0,5]$ است و برای ترکیب باید داشته باشیم:

$$0\le 3x-1\le 5 \xrightarrow{+1} 1\le 3x\le 6 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3}\le x\le 2$$

یعنی دامنهٔ محدودشده برای $3x-1$ به صورت $[\frac{1}{3},2]$ است.

پرسش شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g است. طول بازهٔ دامنهٔ تابع gof کدام است؟



۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{10}{3}$

پاسخ گزینهٔ ۲ دامنهٔ f شامل مقادیر $x\le 2$ و دامنهٔ g شامل $x<4$ است، پس داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\le 2|f(x)<4\}$

f به شکل نیم‌خطی است که از $(2,0)$ و $(0,3)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ آن $y=3(1-\frac{x}{2})$ است. بنابراین جواب نامعادلهٔ $f(x)<4$ به صورت زیر است:

$$3-\frac{3x}{2}<4 \Rightarrow -1<\frac{3x}{2} \Rightarrow x>-\frac{2}{3}$$

و دامنهٔ gof می‌شود $-\frac{2}{3}<x\le 2$ یا $(-\frac{2}{3},2]$ که طول این بازه $2-(-\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

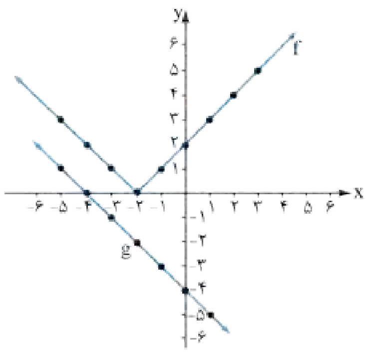
۳۱۹- اگر $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، حاصل $gof(0)+fog(0)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2}$

۳۲۰- اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$، تعداد زوج مرتب‌های تابع fog چندتا بیشتر از تعداد زوج‌مرتب‌های تابع gof است؟ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲۱- با توجه به نمودار f و g، حاصل $\frac{fog(-1)+gof(0)}{fof(1)}$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۱
۲) -1
۳) $\frac{5}{9}$
۴) $-\frac{5}{9}$

۳۲۲- برای دو تابع $f=\{(-1,a),(2,1),(b,2)\}$ و $g=\{(-2,-1),(c,3),(-3,\frac{1}{2})\}$ اگر داشته باشیم: $(fog)(-2)+(fog)(1)=5$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

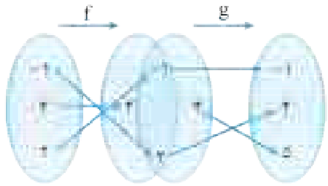
۳۲۳- کدام گزینه درست است؟ (کتاب درسی)

۱) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$، آن‌گاه $fog(4)=35$.
۲) برای دو تابع f و g که $f\ne g$، تساوی $fog(x)=gof(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.
۳) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$، آن‌گاه $fog(5)=g(2)$.
۴) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$، آن‌گاه $fog(x)=-x^2$.

۳۲۴- اگر $x \xrightarrow{1} \boxed{} \xrightarrow{2} (3x^2-4x+1)^5$، به جای شماره‌های ۱ و ۲ به ترتیب می‌توان تابع‌های .... و .... را قرار داد. (کتاب درسی)

۱) $\sqrt[5]{x}$ و $3x^2-4x+1$ ۲) $3x^2-4x+1$ و $\sqrt[5]{x}$ ۳) x^5 و $3x^2-4x+1$ ۴) $3x^2-4x+1$ و x^5

۳۲۵- با توجه به نمایش تابع‌های f و g، تابع fog کدام است؟



۱) $\{(-۱,۳),(۲,-۱)\}$
۲) $\{(۳,۳),(۲,-۱)\}$
۳) $\{(۱,-۲),(-۲,۳)\}$
۴) $\{(۱,-۲),(-۲,۳),(۴,۱)\}$

۳۲۶- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=\frac{x}{۱-x}$، آن‌گاه $fog(\sqrt{۲})$ کدام است؟ (سراسری ۸۶)

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۳۲۷- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$ باشد، حاصل $fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۲۸- اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\geq -۱ \\ x-۴ & x<-۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} \frac{x+۱}{x-۱} & x\geq ۲ \\ x^۲+۲ & x<۲ \end{cases}$، حاصل $(fog-f^۲)(-۲)$ چه‌قدر است؟

۱) ۵۵ ۲) -۵۵ ۳) ۱۷ ۴) -۱۷

۳۲۹- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $x-۱$ ۲) $x+۱$ ۳) x ۴) $۲x$

۳۳۰- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $g(x)=\tan x$، ضابطهٔ تابع $fog(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ برابر کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۳۳۱- اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، مقدار $(gof)(\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۳۲- اگر $f(\frac{۱}{x})=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}$ و $g(x)=۲\cos^۲ x$ باشد، مقدار $fog(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۲

۳۳۳- اگر $f(x)=۲x+۲a$ و $g(x)=x^۲+bx+c$ و $fog(x)=۲x^۲+x+۱$ باشند، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۳

۳۳۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x\geq ۰ \\ x^۲ & x<۰ \end{cases}$، حاصل $fofof(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۱۳

۳۳۵- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f=\{(x,۲x-۱),x\in A\}$، تابع $fof(x)$ چند زوج‌مرتب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳۶- در تابع $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$، حاصل $fof(\sin^۲ x)$ کدام است؟ $(\cos x\neq ۰)$

۱) $\sin^۲ x$ ۲) $\cos^۲ x$ ۳) $-\sin^۲ x$ ۴) $\cos^۲ x$

۳۳۷- اگر $f(x)=|x|-x$، ضابطهٔ تابع $(fof)(x)$ برابر کدام است؟

۱) x ۲) $-x$ ۳) $x+|x|$ ۴) صفر

۳۳۸- اگر $f(x)+f(۲)=۳x+۲$ باشد، تابع $fof(x)$ محور yها را در کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) -۸

۳۳۹- اگر $f(x)$ تابعی درجه‌اول و $fof(x)=۴x+۱۵$ باشد، حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۲۷ ۴) -۲۷

۳۴۰- اگر $f(x)=۳x+a$ و $g(x)=۲-x$ و بدانیم $fog(x)-gof(x)=۶$، a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۴۱- اگر $f(x)=3x^2+x-1$ و $g(x)=1-2x$، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(gof)(x)=-5$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) 1 ۴) -1

۳۴۲- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۷)

۱) -7 و -1 ۲) -7 و 1 ۳) 7 و -1 ۴) 7 و 1

۳۴۳- اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع‌اند؟ (سراسری ۹۲)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

۳۴۴- در تابع خطی f داریم: $f(2)=0$ و $f(0)=1$، جواب معادلهٔ $fof(x)=0$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۳۴۵- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^2+x-2$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x))=-2$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۳۴۶- اگر $f(x)=[x]+[2-x]$ و $g(x)=3^x$، جواب‌های معادلهٔ $(gof)(x)=27$ چگونه است؟

۱) فقط یک جواب مثبت ۲) فقط یک جواب منفی

۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴) جواب ندارد.

۳۴۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 0 \\ 2x+1 & x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\frac{x-1}{2}$، آن‌گاه مجموع طول نقاط برخورد تابع fog با محور xها کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) 3 ۴) 2

۳۴۸- اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$، مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می‌گیرد برابر کدام بازه است؟

۱) $(-4,1)$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-1,4)$ (سراسری ۹۱)

۳۴۹- اگر $f(x)=x^2+x-2$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$، مجموعهٔ طول نقاط از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟ (خارج ۹۱)

۱) $(-5,1)$ ۲) $(-1,5)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,5)$

۳۵۰- اگر $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\sqrt{4x+1}$ باشد، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=3$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

۳۵۱- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $4,\frac{1}{9}$ ۲) $9,\frac{1}{4}$ ۳) $4,\frac{1}{4}$ ۴) $4,9$

۳۵۲- یک مادهٔ غذایی از داخل یخچال که خارج شود، تعداد باکتری‌های آن برحسب دما به صورت $N(d)=20d^2-80d+500$ است و هم‌چنین دمای این مادهٔ غذایی برحسب زمان با تابع $d(t)=4t+3$ افزایش می‌یابد. تعداد باکتری‌های مادهٔ غذایی که ۳ ساعت قبل از یخچال بیرون آمده، در حال حاضر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۳۳۰۰ ۲) ۲۲۰۰ ۳) ۳۸۰۰ ۴) ۲۴۰۰

۳۵۳- الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت دو میلیون و چهارصد هزار تومان خریداری نماید. اگر الناز یک کارت تخفیف ۲۰ درصدی داشته باشد و از طرفی فروشگاه برای خریدهای بیش از یک‌ونیم میلیون تومان ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی دهد، الناز در بهترین حالت لپ‌تاپ را با چه قیمتی خریداری می‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۷۶۰۰۰۰ ۲) ۱۷۲۰۰۰۰ ۳) ۱۶۸۰۰۰۰ ۴) ۱۶۴۰۰۰۰

۳۵۴- اگر $f(x^2-1)=2x$، برای $x\ge 0$ ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{1+x}$ ۲) $1+x^2$ ۳) $2-x^2$ ۴) $1+2x$

۳۵۵- اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+6x+5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) $2x^2+3x+1$ ۲) $2x^2-2x+3$ ۳) $2x^2-x+4$ ۴) $2x^2+x+3$

۳۵۶- اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$، آن‌گاه $f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) x^2-4x+5 ۲) x^2+3 ۳) x^2+4x+5 ۴) x^2+1

۳۵۷- اگر $f(x)=\frac{x}{2-x}$ و $(gof)(x)=\frac{x}{2}$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{x}{x+1}$ ۲) $\frac{x-1}{x}$ ۳) $\frac{x}{x-1}$ ۴) $\frac{x+1}{x}$

۳۵۸- اگر $fog(x)=x^4$ و $f(x)=(x+1)^2$، ضابطهٔ $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^4+1 ۴) $(x+1)^4$

۳۵۹- اگر $f(x)=\frac{x}{1-x}$ و $(fog)(x)=\frac{x+2}{x}$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{x-2}{2x+2}$ ۲) $g(x)=\frac{x+2}{2x-2}$ ۳) $g(x)=\frac{x+2}{2x+2}$ ۴) $g(x)=\frac{2-x}{2x+2}$

۳۶۰- اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (خارج ۹۰)

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x

۳۶۱- اگر $g(x)=2x-1$ و $fog(x)=\frac{x}{x-3}$، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۳۶۲- اگر $f(x)=2x^2+4$ و $f(g(x))=4x^2+6x$، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۳۶۳- اگر $f=\{(5,2),(3,4),(1,8),(6,9)\}$ و $g(x)=2f(x+2)-3$ باشد و داشته باشیم $(gof)(a)=15$، a کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) 6 ۲) 4 ۳) 3 ۴) 5

۳۶۴- توابع $f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ و $g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4,2)\in fog$ و $(4,1)\in gof$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(3,4)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(4,3)$ ۴) $(5,4)$

۳۶۵- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد، عدد a کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۶۶- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ و $g=\{(2,-1),(-1,4),(-2,3),(-4,-3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g(f(a))=3$ باشد، a کدام است؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 4

۳۶۷- در ماشین شکل مقابل، ورودی کدام است؟

ورودی $\rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \rightarrow \frac{4}{3}$

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) 3 ۴) 4

۳۶۸- با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 3x+1$، اگر $f(x)=2x-1$ باشد، حاصل $g(3)$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{2}$ ۲) 5 ۳) 7 ۴) $\frac{9}{2}$

۳۶۹- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 2x$ و $g(x)=3x+4$، مقدار $f(5)$ کدام است؟ (خارج ۹۱)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۷۰- فرض کنیم $f=\{(1,5),(2,3),(4,7),(8,9)\}$ و $gof=\{(1,1),(4,7),(8,9)\}$ باشند، تابع g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{(5,1),(3,5),(7,7),(9,0)\}$ ۲) $\{(0,9),(7,4),(3,1),(5,5)\}$ ۳) $\{(2,3),(8,9),(1,1),(4,7)\}$ ۴) $\{(5,1),(2,3),(7,7),(9,9)\}$

۳۷۱- اگر $f(x)=x-2$ و $g(x)=x^2-1$، ضابطه و دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $gof(x)=(x-1)^2-2$ و $D_{gof}=\mathbb{R}$

۲) $gof(x)=x^2-4x+3$ و $D_{gof}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

۳) $gof(x)=x^2-4x+3$ و $D_{gof}=\mathbb{R}$

۴) $gof(x)=(x-1)^2-2$ و $D_{gof}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

۳۷۲- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$، $D_{fog}\cap D_{gof}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۳۷۳- اگر $f(x)=\sqrt{3-2x}$ و $g(x)=\frac{6}{x-5}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\mathbb{R}-\{5\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-11\}$ ۳) $(-\infty,\frac{3}{2}]-\{5\}$ ۴) $(-\infty,\frac{3}{2}]-\{-11\}$

۳۷۴- اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، دامنهٔ تابع fog شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷۵- اگر $f(x)=x^۲, ۰\le x\le ۱$ و $g(x)=x^۲+۱, ۰\le x\le ۲$، در این صورت دامنهٔ تعریف fog کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $(۰,۲]$

۳۷۶- اگر $f(x)=\sqrt{۳-۲x}$ و $g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$ باشد، تابع fog، برای چند عدد صحیح تعریف‌نشده است؟ (کتاب درسی)

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۳۷۷- اگر $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، دامنهٔ تعریف $gof(x)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-۱,۱)$

۳۷۸- اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{۲-x^۲}$، تابع $fog(x)$ برای چند عدد حقیقی تعریف‌نشده است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۷۹- اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، تابع gof در تمامی نقاطِ کدام بازهٔ زیر تعریف‌شده است؟ (کتاب درسی)

۱) $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(۰,\frac{۳\pi}{۲})$ ۳) $(\frac{\pi}{۲},۲\pi)$ ۴) $(-۲\pi,-\pi)$

۳۸۰- اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ باشد، دامنهٔ تابع $fof(x)$ شامل چند عضو صحیح است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۳۸۱- اگر $f(x)=\sqrt{x}-x$، دامنهٔ تابع fof کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\{۰,۱\}$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[۱,+\infty)$

۳۸۲- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (خارج ۸۷)

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰,۸\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

۳۸۳- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

۳۸۴- اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

۳۸۵- اگر دامنهٔ $f(x)$ برابر $D_f=[-۲,۶]$ باشد، دامنهٔ $f(۲x+۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۱۷ ۳) ۹ ۴) ۲۵

۳۸۶- دامنهٔ تعریف تابع $y=f(۱-۲x)$ با فرض $f(x)=\sqrt{۶+x-x^۲}$ کدام است؟

۱) $[-۵,۵]$ ۲) $[-۳,۲]$ ۳) $[-۲,۳]$ ۴) $[-۱,\frac{۳}{۲}]$

۳۸۷- اگر دامنهٔ تابع $y=f(۲-x)$ بازهٔ $[۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=۳f(۳x-۴)$ کدام است؟

۱) $[۲,۵]$ ۲) $[\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۳}]$ ۳) $[\frac{۵}{۳},\frac{۸}{۳}]$ ۴) $[۵,۸]$

۳۸۸- اگر در بازهٔ $[a,b]$ برای تابع $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$، تابع fof قابل تعریف باشد، حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ∞

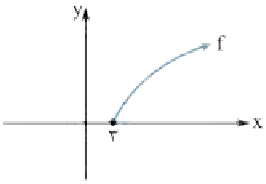
۳۸۹- اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$، برد تابع fog کدام است؟

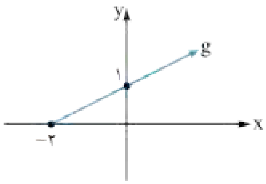
۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,+\infty)$

۳۹۰- اگر $f(x)=۴-x^۲$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، برد تابع $fog(x)$ کدام است؟

۱) $[۴,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $(-\infty,۴]$ ۴) $[۰,۴]$

۳۹۱- اگر توابع f و g به شکل مقابل باشند، دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ کدام است؟





۱) $[۳,+\infty)$

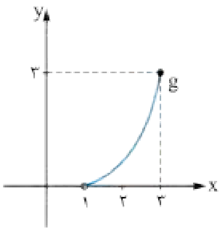
۲) $[۴,+\infty)$

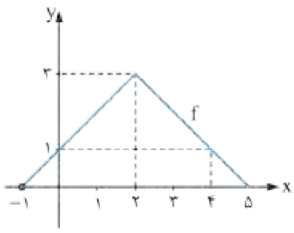
۳) $[-۲,۳]$

۴) $[۰,+\infty)$

۳۹۲- اگر نمودار دو تابع f و g به صورت مقابل باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش)





۱) $[-۱,۵]$

۲) $(۰,۴]$

۳) $(۱,۳]$

۴) $(۰,۴)$

۳۹۳- اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی باشد، تابع $y=f(-x^۳)$ چگونه تابعی است؟

۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی ۳) غیریکنوا ۴) نامشخص می‌باشد.

۳۹۴- اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع $(f+g)of$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[-۱,۰]$ ۴) $[-۱,۱]-\{۰\}$

۳۹۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ و $g(\frac{۱}{x})=x+\frac{۱}{x}$ باشند، تابع fog به ازای چند مقدار صحیح قابل تعریف است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۹۶- اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تعریف تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰,۱)$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $R-\{۱,-۱\}$

۳۹۷- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ و تابع $g(x)=\tan x\,;|x|<\frac{\pi}{۲}$ باشند. دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ ۳) $[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$ ۴) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

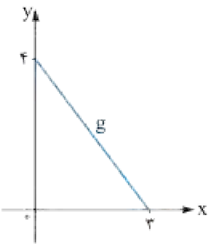
۳۹۸- اگر $f(\frac{x-۱}{x})=\sqrt{۲x-۱}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟

۱) $[-۱,۰)$ ۲) $[۰,۱)$ ۳) $[-۱,۱)$ ۴) $[۱,+\infty)$

۳۹۹- اگر $f(x)=\log_۲ x-۱$ و $g(x)=\sqrt{۳-x}$، دامنهٔ تابع $f(x)$ کدام بازه باشد تا ترکیب $gof(x)$ تعریف شود؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(۱,۹]$ ۳) $(-\infty,۳]$ ۴) $[۹,+\infty)$

۴۰۰- اگر نمودار تابع $y=g(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=gog(x)$ کدام است؟



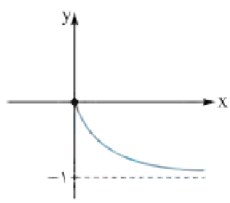
۱) $[۰,۳]$

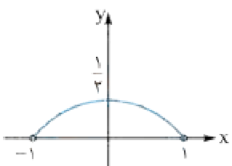
۲) $[۳,۴]$

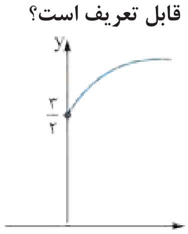
۳) $[\frac{۳}{۴},۳]$

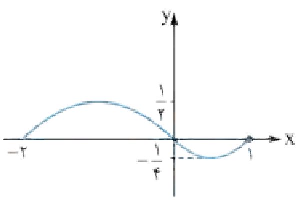
۴) $[۰,\frac{۳}{۴}]$

۴۰۱- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۱}$ باشد، با انتخاب کدام تابع به جای $g(x)$، تابع $fog(x)$ قابل تعریف است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴۰۲- اگر f تابعی نزولی و غیرثابت باشد که نمودار آن بالای محور xها قرار دارد، توابع $g(x)=x-f(x)$ و $h(x)=\frac{۱}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

(کانون فرهنگی آموزش)

۱) نزولی ـ نزولی ۲) صعودی ـ نزولی ۳) نزولی ـ صعودی ۴) صعودی ـ صعودی

۴۰۳- ترکیب کدام تابع با $f(x)=\sqrt{-x-x^{۲}}$ به صورت fog قابل تشکیل است؟

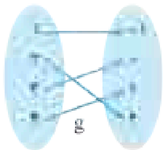
۱) $g(x)=x^{۲}+x+۱$ ۲) $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ ۳) $g(x)=۳+\sin x$ ۴) $g(x)=\sqrt{x-۱}$

درس ۹
تابع یک به یک و وارون تابع

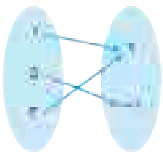
گفتیم که در تابع، هر عضو A به یک عضو از B نسبت داده می‌شود. حالا در تابع‌های یک‌به‌یک، هر عضو A به یک عضو منحصربه‌فرد از B نسبت داده می‌شود، یعنی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب، تکراری نیست و به هیچ عضوی در B، بیش از یک پیکان وارد نمی‌شود.

پس این‌ها یک‌به‌یک‌اند:

x	۵	۷	-۲	۳
y	۲	-۱	۴	۰



$f=\{(۱,-۱),(۲,۴),(۰,۲)\}$



اما $\{(۳,۲),(۵,-۱),(۱,۲)\}$ یک‌به‌یک نیست (چون عدد ۲ در مؤلفه‌های دوم تکرار شده). به بیان دیگر در نمودار پیکانی دوتا فلش به ۲ وارد می‌شود.

پس در تابع یک‌به‌یک، تعداد اعضای دامنه و برد برابر است و در زوج‌های مرتب، بین مؤلفه‌های اول، تکراری نداریم و هم‌چنین بین مؤلفه‌های دوم نیز تکراری نداریم.

نکته پس اگر تعداد اعضای دامنه بیشتر از تعداد اعضای برد باشد، تابع قطعاً یک‌به‌یک نیست.

تست اگر تابع $f=\{(۲,۳),(a^{۲}+a,۳),(a,۱),(۱,۴)\}$ یک‌به‌یک باشد. مقدار(های) a کدام است؟

۱) نشدنی ۲) فقط ۱ ۳) فقط -۲ ۴) -۲ و ۱

پاسخ **گزینهٔ ۳** در بین زوج‌های مرتب، دو بار مؤلفهٔ دوم ۳ است؛ پس تنها راه این است که مؤلفهٔ اول آن‌ها برابر باشد:

$$y_{۱}=y_{۲}\Rightarrow x_{۱}=x_{۲}: a^{۲}+a=۲\Rightarrow a^{۲}+a-۲=۰\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}}a=۱,-۲$$

اما به ازای $a=۱$، در زوج‌های مرتب $(۱,۱)$ و $(۱,۴)$ را داریم که باعث می‌شوند اصلاً تابع نباشد.

به ازای $a=-۲$ داریم: $\{(۲,۳),(۲,۳),(-۲,۱),(۱,۴)\}$، که تابعی سه‌عضوی و یک‌به‌یک است. پس فقط $a=-۲$ قبول شد.

تست می‌خواهیم با حذف تعدادی از عضوها، از تابع $f=\{(۲,۱),(۴,۲),(-۱,۱),(۵,۱),(۷,۳),(۰,۲)\}$ به تابعی یک‌به‌یک برسیم. حداقل چندتا از اعضای f باید حذف شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۳** زوج‌هایی که مؤلفهٔ دومشان یکسان است زیر هم بیاوریم: پس باید حداقل ۳تا از اعضای f را حذف کرد تا به تابعی یک‌به‌یک و سه‌عضوی برسیم.

$$f=\left\{\begin{array}{ccc}(۲,۱) & (۴,۲) & (۷,۳)\\ (-۱,۱) & \underset{\text{از بین این‌ها یکی باید برود.}}{(۰,۲)} & \\ \underset{\text{از بین این‌ها دوتا باید برود.}}{(۵,۱)} & & \end{array}\right\}$$

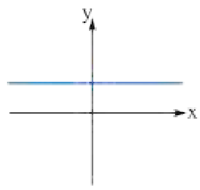
نکته برای انتخاب دوتا از بین ۳ زوج‌مرتب، به تعداد $\binom{۳}{۲}$ حالت و برای انتخاب یک زوج‌مرتب از میان دو زوج، به تعداد $\binom{۲}{۱}$ حالت داریم.

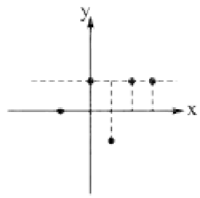
پس این عمل (یک‌به‌یک ساختن با حذف ۳ زوج‌مرتب) به $۶=\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۲}$ حالت امکان دارد. می‌توانستیم بپرسیم با حذف ۳ عضو از f، چند تابع یک‌به‌یک مختلف می‌توان ساخت.

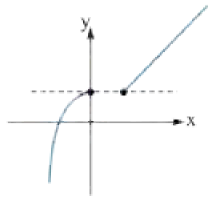
در نمودار هم می‌توانیم شرط یک‌به‌یک بودن را بررسی کنیم.

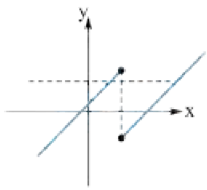
قرار بود زوج‌های مرتب yهای مساوی نداشته باشند پس باید yها تکرار نشوند یعنی هر خط افقی به معادلهٔ $y=k$، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند نه بیشتر. بنابراین اگر حتی یک خط افقی پیدا شود که نمودار f را در دو نقطه یا بیشتر قطع می‌کند، آن‌گاه f یک‌به‌یک نیست.

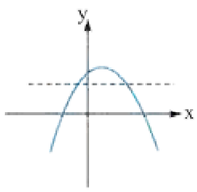
مثلاً این نمودارها، تابع یک‌به‌یک نیستند:


بی‌شمار بار قطع می‌کند.


سه‌بار قطع می‌کند.


دوبار قطع می‌کند.

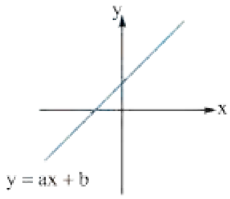

دوبار قطع می‌کند.


دوبار قطع می‌کند.

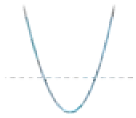
پس می‌توانیم در مورد تابع‌های خاص، این‌ها را به خاطر بسپاریم:

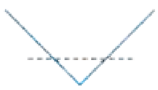
1. **تابع ثابت $f(x)=c$ یک‌به‌یک نیست. (مگر این‌که دامنه‌اش تک‌عضوی شود.)**

2. **تابع خطی غیرثابت، یعنی $y=ax+b$ همواره یک‌به‌یک است. ببینید: $(a\neq 0)$**

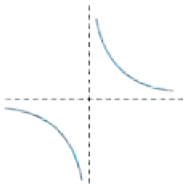


3. **سهمی و قدرمطلق x، یک‌به‌یک نیستند:**



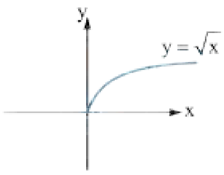


4. **تابع گویای $y=\frac{1}{x}$ یک‌به‌یک است:**



هر تابع به شکل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن x در مخرج باقی می‌ماند و ساده نمی‌شود حتماً یک‌به‌یک است.

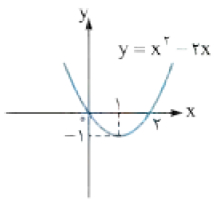
5. **تابع $y=\sqrt{x}$ و انتقال‌های آن (به صورت $y=\sqrt{ax+b}$) یک‌به‌یک هستند:**



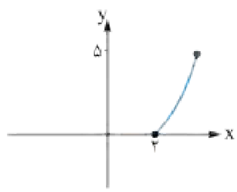
6. **توابع نمایی $y=a^x$ و توابع لگاریتمی $y=\log_a x$ همیشه یک‌به‌یک هستند.**

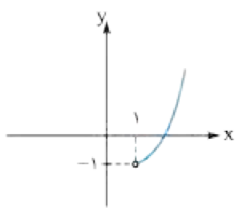
7. **توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و $y=\tan x$ یک‌به‌یک نیستند.**

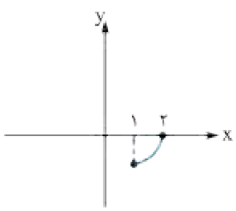
حالا اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، می‌توانیم دامنهٔ آن را طوری محدود کنیم که یک‌به‌یک شود، مثلاً $y=x^2-2x$ یک‌به‌یک نیست:

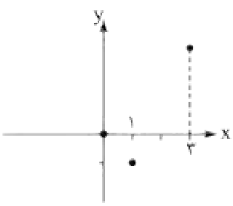


حالا نمودار این تابع را با دامنه‌های $D_1=[2,5)$، $D_2=(1,+\infty)$، $D_3=[1,2]$ و $D_4=\{0,3,1\}$ ببینید:









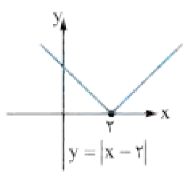
موافقید که این تابع‌ها یک‌به‌یک هستند؟

اگر $x_s\notin(a,b)$، آن‌گاه سهمی در (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$ و $[a,b]$ یک‌به‌یک است. بگویید چرا؟

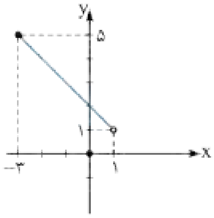
تابع $y=|x-2|$ با کدام دامنه یک‌به‌یک است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $\{1,2,3\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{2\}$ ۴) $[-3,1)$

گزینهٔ ۴ نمودار تابع را در دامنهٔ $\mathbb{R}$ ببینید:



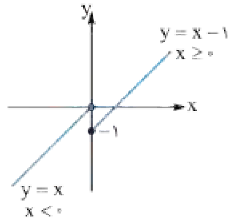
الان واضح است که در $(\circ,+\infty)$ تابع یک‌به‌یک نیست، مثلاً $f(1)=f(3)$. همین مثال را برای ردّ دامنه‌های $\{1,2,3\}$ و $\mathbb{R}-\{2\}$ هم داریم. پس تابع در این دامنه‌ها یک‌به‌یک نشد. حالا در $[-3,1)$ بکشیم:



خب یک‌به‌یک است!

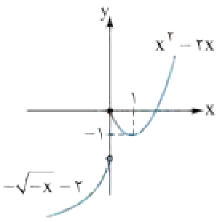
نکته در مورد توابع قطعه‌ای (چندضابطه‌ای) بهترین روش رسم شکل است. اما این جمله را بشنوید: «باید تک‌تک ضابطه‌ها با توجه به دامنهٔ خودشان، یک‌به‌یک باشند و بردها اشتراک نداشته باشند.»

مثلاً $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq \circ \\ x & x<\circ \end{cases}$ یک‌به‌یک نیست:



مشکل این‌جا است که برد این ضابطه‌ها اشتراک داشتند؛ یعنی yهای بین -1 تا صفر، دو بار به دست می‌آیند.

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq \circ \\ -\sqrt{-x}-2 & x<\circ \end{cases}$ هم یک‌به‌یک نیست.

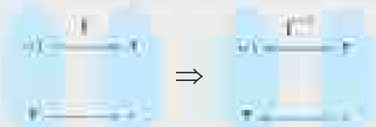
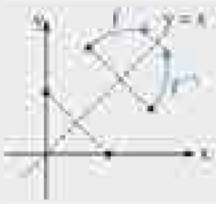


این بار مشکل فقط از ضابطهٔ بالایی است که در دامنهٔ خودش یک‌به‌یک نبود.

وارون یک تابع

یک تابع به نام f داریم، وارون تابع f را f^{-1} می‌نامیم و برای ساختن f^{-1}، جای x و y را عوض می‌کنیم.

این‌ها را ببینید:

بازنمایی تابع	نحوهٔ وارون‌کردن	مثال
نمودار پیکانی	جهت پیکان‌ها را عوض می‌کنیم	
زوج‌های مرتب	جای مؤلفه‌ها را عوض می‌کنیم	$f=\{(-1,2),(3,\circ)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(2,-1),(\circ,3)\}$
مقدار در یک نقطه	به جای $f(a)=b$ می‌نویسیم $f^{-1}(b)=a$	$f(-1)=2, f(3)=\circ \Rightarrow f^{-1}(2)=1, f^{-1}(\circ)=3$
نمودار مختصاتی	نمودار را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم	
رابطهٔ بین x و y	جای x و y را عوض می‌کنیم	$y=x^3 \Rightarrow x=y^3$ $x+2y=5 \Rightarrow y+2x=5$

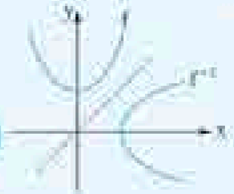
نکته وارون یک تابع همیشه تابع نیست. این‌ها را ببینید:

f تابع است اما f^{-1} تابع نیست چون دوتا زوج‌مرتب با مولفهٔ اولِ ۲ دارد. $f=\{(1,2),(-1,3),(\circ,2)\}$

$f^{-1}=\{(2,1),(3,-1),(2,\circ)\}$

الف) 

f^{-1} تابع نیست چون از ۱− دوتا فلش بیرون می‌آید.

ب) 

f^{-1} تابع نیست چون خط عمودی آن را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

پ) $y = |x - ۱|$

وارون این تابع، تابع نیست چون برای $x = ۱$، دوتا y می‌دهد. $x = |y - ۱|$: وارون

حالا بگویید در چه صورت وارون یک تابع، تابع است؟ خب باید تابع خودمان y تکراری نداشته باشد یعنی ۱ به ۱ باشد. پس این‌طوری یاد بگیرید که جملات زیر معادل‌اند:

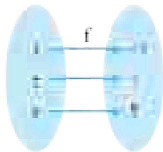
۱ f وارون‌پذیر است. **۲ f یک‌به‌یک است.** **۳ وارون f، تابع است.**

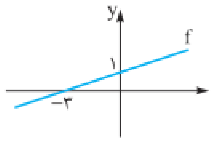
۴ f معکوس‌پذیر است. **۵ در تابع f برای هر x فقط یک y و برای هر y فقط یک x وجود دارد.**

نکته برای پیداکردن $f^{-۱}(b)$ باید از خودمان بپرسیم چه عددی رابطهٔ $f(a) = b$ را برقرار می‌کند. به بیان ساده‌تر $f^{-۱}(b)$ از ما می‌پرسد به f چه عددی بدهیم تا جوابش b شود؟

مثال در تابع‌های زیر مقدار $f^{-۱}(۲)$ را پیدا کنید.

الف) $f = \{(۲,۱),(-۱,۴),(۰,۲),(۴,۱)\}$

ب) 

پ) 

ت) $f(x) = x^۳ + x$

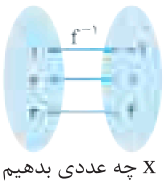
ث) $f(x) = ۴^{x-۱}$

پاسخ قدم‌های اول آشنایی با تابع وارون را محکم بردارید.

الف) در تابع f زوج‌مرتب $(۰,۲)$ داریم، پس در $f^{-۱}$ زوج‌مرتب $(۲,۰)$ وجود دارد و بنابراین $f^{-۱}(۲) = ۰$. بد نیست $f^{-۱}$ را ببینید:

$f^{-۱} = \{(۱,۲),(۴,-۱),(۲,۰),(۱,۴)\}$

ب) تابع f عدد ۳ را به ۲ نظیر کرده پس $f^{-۱}$ عدد ۲ را به ۳ نظیر می‌کند یعنی $f^{-۱}(۲) = ۳$. نمایش $f^{-۱}$ را از دست ندهید:



پ) تابع f خط است و از $(۰,۱)$ و $(-۳,۰)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ آن $f(x) = \frac{۱}{۳}x + ۱$ است. حالا $f^{-۱}(۲)$ از ما می‌پرسد به x چه عددی بدهیم تا $f(x)$ بشود ۲؟ خُب فکر کنید ... اگر $\frac{۱}{۳}x + ۱$ بخواهد ۲ بشود باید x چند باشد؟

$\frac{۱}{۳}x + ۱ = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۳}x = ۱ \Rightarrow x = ۳$

پس $f^{-۱}(۲) = ۳$، راستی اگر کسی اصرار دارد معادلهٔ $f^{-۱}$ را بنویسد باید در $y = \frac{۱}{۳}x + ۱$، جای x و y را عوض کند، این‌جوری: $x = \frac{۱}{۳}y + ۱$

ت) $f^{-۱}(۲)$ یعنی چه؟ در $f(x) = x^۳ + x$ مقدار x چه‌قدر باشد تا $f(x)$ بشود ۲؟

خب اگر $x^۳ + x = ۲$ باشد با $x = ۱$ موافقید؟ پس $f^{-۱}(۲) = ۱$

نکته نگران ریشه‌های دیگر $x^۳ + x = ۲$ نباشید! ریشهٔ دیگری وجود ندارد:

$x^۳ + x - ۲ = \underbrace{(x-۱)}_{x=۱}\underbrace{(x^۲ + x + ۲)}_{\Delta<۰} = ۰$

ث) در $f(x) = ۴^{x-۱}$ می‌خواهیم $f(x)$ بشود ۲. پس داریم:

$۴^{x-۱} = ۲ \Rightarrow x - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

پس $f^{-۱}(۲) = \frac{۳}{۲}$.

باز هم تأکید کنیم که $f^{-۱}(b)$ از ما می‌خواهد $f(x) = b$ قرار دهیم و x را پیدا کنیم.

اگر (a,b) نقطه‌ای روی نمودار f باشد (b,a) نقطهٔ متناظر آن روی نمودار f^{-1} است. دوباره ببینید:

اگر $f(x)=2x+\sqrt{x}$، کدام نقطه روی نمودار f^{-1} قرار دارد؟

۱) $(\frac{1}{4},1)$ ۲) $(1,\frac{1}{4})$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(1,3)$

گزینهٔ ۲ اگر نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} باشد، باید مختصات (a,b) در f صدق کند. پس گزینه‌ها را برعکس می‌کنیم و در f قرار می‌دهیم:

۱) $(\frac{1}{4},1) \xrightarrow{\text{معکوس}} (1,\frac{1}{4}) \xrightarrow{f \text{ در}} \frac{1}{4}=2(1)+\sqrt{1}$

۲) $(1,\frac{1}{4}) \Rightarrow (\frac{1}{4},1) \Rightarrow 1=2(\frac{1}{4})+\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1=1$

۳) $(0,1) \Rightarrow (1,0) \Rightarrow 0=2(1)+\sqrt{1}$

۴) $(1,3) \rightarrow (3,1) \rightarrow 1=2(3)+\sqrt{3}$

پس ۲ درست است.

اگر $f(x)=x^3+bx$ و نمودار f^{-1} از نقطهٔ $(1,-1)$ بگذرد، $f(2)$ کدام است؟

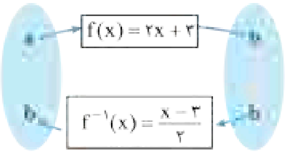
۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 4

گزینهٔ ۴ چون f^{-1} از $(1,-1)$ می‌گذرد f باید از $(-1,1)$ بگذرد. پس داریم:

$$f(x)=x^3+bx \xrightarrow{(-1,1)} 1=(-1)^3+b(-1) \Rightarrow b=-2$$

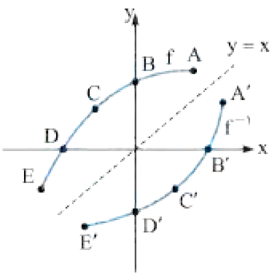
پس داریم: $f(x)=x^3-2x$ و در نتیجه: $f(2)=2^3-2(2)=8-4=4$

این‌جوری هم به تابع وارون نگاه کنید:



عملکرد تابع f^{-1}، برعکس عملکرد f است. مثلاً اگر f سه‌تا اضافه کند f^{-1} سه‌تا کم می‌کند. اگر f دو برابر کند f^{-1} نصف می‌کند. اگر f به توان ۳ برساند f^{-1} ریشهٔ سوم می‌گیرد.

دربارهٔ نمودار هم می‌توانیم حرف‌های دقیق‌تری بزنیم:



۱) **نقطهٔ A در ربع اول است و نقطهٔ متناظر آن در f^{-1} هم در ربع اول است.**

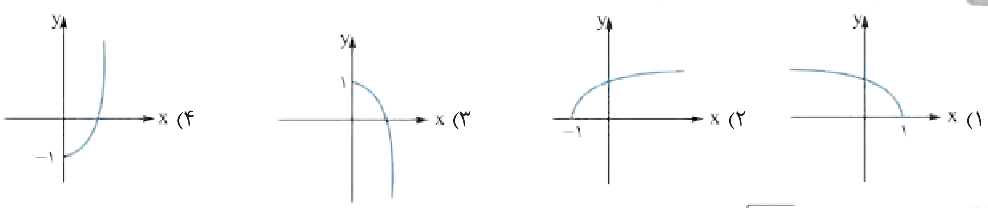
۲) **نقطهٔ B روی محور yها است و نقطهٔ متناظرش در تابع وارون روی محور x است.**

۳) **نقطهٔ C در ربع دوم و نقطهٔ C' در تابع وارون، در ربع چهارم است.**

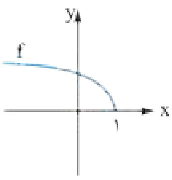
۴) **نقطهٔ D روی محور x است و متناظرش در f^{-1}، روی محور y قرار دارد.**

۵) **نقطهٔ E در ربع سوم و نقطهٔ وارون هم در ربع سوم است.**

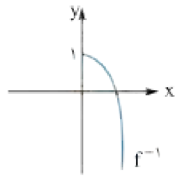
وارون تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ به کدام شکل است؟



گزینهٔ ۳ خود تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ این شکلی است:

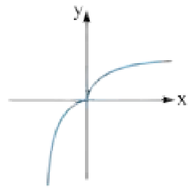


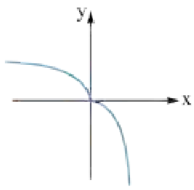
پس وارون آن به شکل روبه‌رو در می‌آید:

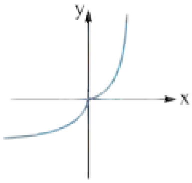


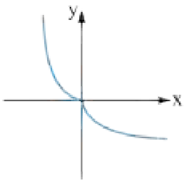
خب قبل از این‌که سراغ ضابطهٔ تابع وارون برویم، چندتا مثال دیگر ببینید:

نمودار وارون تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & x<۰\\ \sqrt{x} & x\geq ۰\end{cases}$ کدام است؟

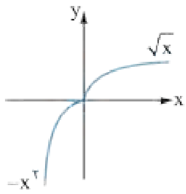
۱) 

۲) 

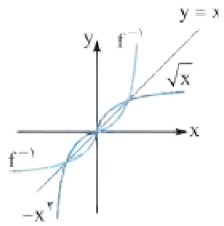
۳) 

۴) 

گزینهٔ ۳ نمودار خود f را ببینید:



حالا نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم:



اگر $f=\{(۲,-۱),(۳,۱),(۰,۲),(۱,۰)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(۲,۰),(-۱,۳),(-۳,۴)\}$، آن‌گاه جمع اعداد موجود در برد $y=(f^{-۱}-g^{-۱})(x)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) -۱　　۴) ۲

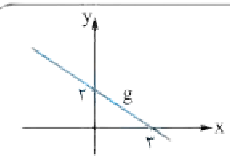
گزینهٔ ۱ $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را ببینید: $f^{-۱}=\{(-۱,۲),(۱,۳),(۲,۰),(۰,۱)\}$ و $g^{-۱}=\{(-۱,۱),(۰,۲),(۳,-۱),(۴,-۳)\}$

برای $f^{-۱}-g^{-۱}$ سراغ مؤلفه‌های اول مشترک می‌رویم در بین xها، اعداد -۱ و صفر مشترک‌اند.

$$-۱\xrightarrow{f^{-۱}}۲\ ,\ ۰\xrightarrow{f^{-۱}}۱\ ,\ -۱\xrightarrow{g^{-۱}}۱\ ,\ ۰\xrightarrow{g^{-۱}}۲$$

پس داریم: $f^{-۱}-g^{-۱}=\{(-۱,۱),(۰,-۱)\}$ و جمع عناصر برد $f^{-۱}-g^{-۱}$ می‌شود: $۱+(-۱)=۰$

اگر $f=\{(a^{۲}-a,۳),(a,۲),(۲,۳),(۱,۴)\}$ تابعی وارون‌پذیر و نمودار g به شکل مقابل باشد، $g^{-۱}(f(a^{۲}))$ کدام است؟



۱) -۴　　۲) -۳　　۳) -۲　　۴) -۱

گزینهٔ ۲ اولاً f باید ۱ به ۱ باشد؛ نگران زوج‌های مرتب $(a^{۲}-a,۳)$ و $(۲,۳)$ هستیم. پس باید داشته باشیم:

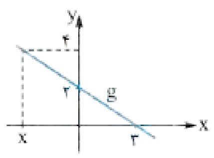
$$a^{۲}-a=۲\Rightarrow a^{۲}-a-۲=۰\Rightarrow a=-۱\ \text{یا}\ ۲$$

اما به ازای $a=۲$ داریم: $f=\{(۲,۳),(۲,۲),(۲,۳),(۱,۴)\}$ که اصلاً تابع نیست.

به ازای $a=-۱$: $f=\{(۲,۳),(-۱,۲),(۲,۳),(۱,۴)\}$ که مشکلی ندارد.

پس $a=-۱$ و سؤال از ما $g^{-۱}(f(۱))$ را می‌خواهد. با توجه به f، مقدار $f(۱)$ می‌شود ۴ و باید $g^{-۱}(۴)$ را حساب کرد. یعنی باید ببینیم به ازای کدام مقدار از x، جواب $g(x)$ می‌شود ۴؟

با توجه به شکل موافقید که $x=-۳$؟ (به شیب خط دقت کنید!) پس جواب می‌شود -۳.



محاسبهٔ ضابطهٔ f^{-1}

قبلاً هم گفتیم که برای محاسبهٔ ضابطهٔ f^{-1}، باید در ضابطهٔ f جای x و y را عوض کنیم.

اما معمولاً چیزی که به دست می‌آید کمی بی‌ریخت است، خودمان باید مرتبش کنیم و آن را به صورت $f^{-1}(x)=\cdots$ در بیاوریم. این‌ها را ببینید:

ضابطهٔ تابع	$y=2x-1$	$y=\frac{2}{x-1}$	$y=2^{x+1}$	$y=x^3-1$	$y=x^2-2x$ $x>1$
جای x و y را عوض کنیم	$x=2y-1$	$y=\frac{2}{y-1}$	$x=2^{y+1}$	$x=y^3-1$	$x=y^2-2y$ $y>1$
مرتب کنیم	$\Rightarrow 2y=x+1$ $\Rightarrow y=\frac{x+1}{2}$	$\Rightarrow y-1=\frac{2}{x}$ $\Rightarrow y=1+\frac{2}{x}$	$\Rightarrow \log_2 x=y+1$ $\Rightarrow y=\log_2 x-1$	$\Rightarrow y^3=x+1$ $\Rightarrow y=\sqrt[3]{x+1}$	$\Rightarrow y^2-2y+1=x+1$ $\Rightarrow (y-1)^2=x+1$ $\xrightarrow{\text{جذر}} y-1=\sqrt{x+1}$ $\Rightarrow y=1+\sqrt{x+1}$
ضابطهٔ وارون	$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$	$f^{-1}(x)=1+\frac{2}{x}$	$f^{-1}(x)=\log_2 x-1$	$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$	$f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+1}$

در مورد آخری دقت کردید؟ وقتی وارون داریم، شرط $x>1$ را هم وارون کردیم و به جایش نوشتیم $y>1$.

نکته همین اول کار بگوییم که در تست، می‌توانیم از رد گزینه‌ها استفاده کنیم.

مثلاً می‌خواهیم وارون تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x$ را از بین گزینه‌های زیر انتخاب کنیم:

۱) $\sqrt[3]{x+1}-1$ ۲) $\sqrt[3]{x+1}+1$ ۳) $\sqrt[3]{x-1}+1$ ۴) $\sqrt[3]{x-1}-1$

اگر $x=1$ را در f قرار دهیم، داریم: $f(1)=7$

پس در f^{-1} باید $f^{-1}(7)$ بشود ۱، یعنی گزینه‌ای جواب است که به ازای $x=7$ بشود ۱. یعنی در بین این گزینه‌ها فقط ۱ می‌خورد:

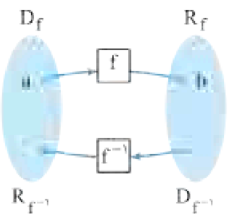
$\sqrt[3]{7+1}-1=2-1=1$

نکته گفتیم در f و f^{-1} جای x و y عوض می‌شود.

پس دامنهٔ f همان برد f^{-1} است و برد f همان دامنهٔ f^{-1} است.

به زبان ریاضی: $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$

در نمودار پیکانی هم ببینید:



پس اگر خواستیم در مقابل ضابطهٔ f^{-1}، دامنه‌اش را بنویسیم باید برد f را بنویسیم.

یعنی ضابطهٔ f^{-1} این شکلی است:

$f^{-1}(x)=\underbrace{\qquad}_{\text{ضابطهٔ وارون}}\ ,\ \underbrace{\qquad}_{\text{دامنهٔ وارون همان برد f است}}$

محاسبهٔ ضابطهٔ وارون $f(x)=x^2-4x\ ,\ x\le 1$ را با دقت دنبال کنید:

تست ضابطهٔ وارون $f(x)=x^2-4x\ ,x\le 1$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{x-4}$ ، $x\ge -3$ ۲) $2+\sqrt{x+4}$ ، $x\ge -3$ ۳) $2-\sqrt{x+4}$ ، $x\ge -3$ ۴) $2-\sqrt{x-4}$ ، $x\ge -3$

پاسخ گزینهٔ ۳ اول جای x و y را عوض کنیم:

$$\underset{x\le 1}{y=x^2-4x}\xrightarrow{\text{وارون}}\underset{y\le 1}{x=y^2-4y}$$

$$\xrightarrow{\text{+۴ می‌کنیم تا مربع کامل شود}}\underset{y\le 1}{x+4=y^2-4y+4=(y-2)^2}\xrightarrow{\text{جذر}}\sqrt{x+4}=|y-2|$$

یادتان بود که $\sqrt{a^۲}$ می‌شود $|a|$؟

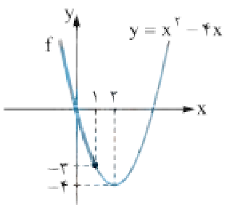
حالا دقت کنید که $|y-۲|$ با شرط $y \le ۱$ می‌شود $-(y-۲)$ (چون $y-۲$ منفی است) پس داریم:

$$\sqrt{x+۴} = -(y-۲) = ۲-y$$

و در نتیجه:

$$f^{-۱}(x) = y = ۲-\sqrt{x+۴}$$

حالا جلوی این ضابطه، باید دامنهٔ $f^{-۱}$ یعنی برد f را بنویسیم. به نمودار f نگاه کنید:



پس برد f می‌شود $[-۳,+\infty)$ و باید در مقابل ضابطهٔ وارون شرط $x \ge -۳$ بنویسیم. این‌جوری:

$$f^{-۱}(x) = ۲-\sqrt{x+۴}\ ,\ x \ge -۳$$

باز هم تأکید کنیم که در تست، سراغ ریشه‌ها می‌رویم.

وارون همین تابع $f(x) = x^۲ - ۴x$ ، $x \le ۱$ را از بین گزینه‌های زیر انتخاب کنید:

۱) $۲+\sqrt{x+۴}$ ، $x \le ۱$

۲) $۲+\sqrt{x+۴}$ ، $x \ge -۳$

۳) $۲-\sqrt{x+۴}$ ، $x \le ۱$

۴) $۲-\sqrt{x+۴}$ ، $x \ge -۳$

گزینهٔ ۴ خب قرار شد عدد بدهیم. اگر $x = ۰$ قرار بدهیم $f(x)$ می‌شود ۰. پس گزینه‌ای جواب است که به ازای $x = ۰$، صفر شود که به گزینه‌های ۳ و ۴ می‌خورد. حالا فرق گزینه‌های ۳ و ۴ در دامنه است. اگر حوصلهٔ فکرکردن به برد f نداریم، باز هم عدد می‌دهیم. مثلاً به ازای $x = -۲$ داریم: $y = ۱۲$ پس گزینه‌ای درست است که به ازای ۱۲، به ما ۲- بدهد که فقط به ۴ می‌خورد. دقت می‌کنید که شرط ۳ اصلاً اجازه نمی‌دهد ۱۲ بگذاریم.

وارون توابع خاص

۱- تابع خطی و غیرثابت $f(x) = ax+b$

وارون تابع خطی، یک تابع خطی است. ضابطه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$y = ax+b \xrightarrow{\text{وارون}} x = ay+b \xrightarrow{\text{مرتب}} y = f^{-۱}(x) = \frac{x-b}{a}$$

پس شیب $f^{-۱}$، عکس شیب f است. مثلاً اگر f خطی با شیب ۲ باشد $f^{-۱}$ خطی با شیب $\frac{۱}{۲}$ است.

وارون خط با شیب ۱-، خودش می‌شود. وارون خط $y = x$ نیز خودش است. اگر شیب خطی ۱ باشد، با وارونش موازی است و اگر شیب خطی ± ۱ نباشد، حتماً وارونش را روی $y = x$ قطع می‌کند. ببینید:

خط با شیب $a \ne \pm ۱$ وارونش را در نقطه‌ای روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند.	$y = x$ نیز وارون خودش است.	خط با شیب ۱- وارون خودش است.	خط با شیب ۱+ و وارونش، موازی‌اند.

وارون تابع $f(x) = ۲x-۱$ با دامنهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

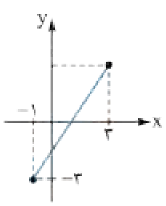
۱) $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\ ,\ -۳ \le x \le ۳$

۲) $f^{-۱}(x) = ۲x+۱\ ,\ -۳ \le x \le ۳$

۳) $f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲}\ ,\ -۱ \le x \le ۲$

۴) $f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲}\ ,\ -۱ \le x \le ۲$

گزینهٔ ۱ برد تابع $f(x) = ۲x-۱$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ به صورت $[f(-۱),f(۲)]$ یعنی $[-۳,۳]$ است.



پس در مقابل وارون آن باید $-۳ \le x \le ۳$ نوشته شود. برای ضابطه هم کار سختی نداریم:

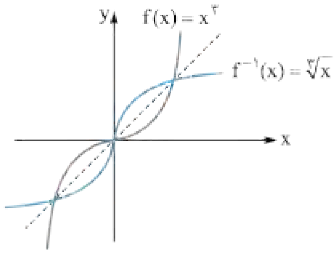
$$y = ۲x-۱ \Rightarrow ۲x = y+۱ \Rightarrow x = \frac{y+۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲}$$

در تابع f داریم $f(۲) = ۳$، پس در وارونش باید $f^{-۱}(۳) = ۲$ داشته باشیم که فقط به ۱ می‌خورد.

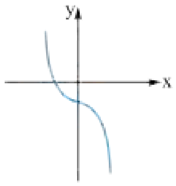
وارون تابع درجه سوم

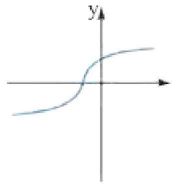
۲- تابع‌های درجه‌سوم مانند $y=x^3$ و انتقال‌های آن، وارون‌پذیر هستند.

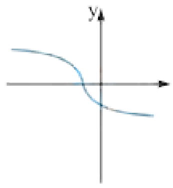
ضابطهٔ وارون $y=x^3$ به صورت $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ است. آن‌ها را با هم در یک دستگاه ببینید:

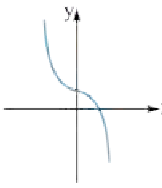


نمودار وارون تابع $y=-x^3-1$ کدام است؟

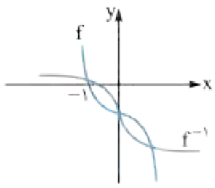
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

گزینهٔ ۳ (۱) نمودار خود تابع است و (۳) شکل وارون آن است. ببینید:



نکته ضابطهٔ وارونش را هم ببینید:

$$y=-x^3-1 \xrightarrow{\text{وارون}} x=-y^3-1 \xrightarrow{\text{مرتب}} y^3=-x-1 \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} y=\sqrt[3]{-x-1}=-\sqrt[3]{x+1}$$

ضابطهٔ وارون $y=x^3-3x^2+3x$ به صورت $y=\sqrt[3]{x+\alpha}+\beta$ است. $\beta-\alpha$ کدام است؟

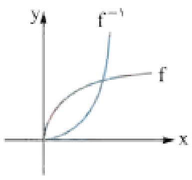
۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

گزینهٔ ۲ بیایید اول با کمی دقت، ضابطهٔ تابع را به صورت مکعب دوجمله‌ای در بیاوریم (این کار لازم است وگرنه نمی‌توانیم ضابطهٔ f^{-1} را بنویسیم):

$$y=x^3-3x^2+3x \Rightarrow y=(x-1)^3+1 \xrightarrow[\text{کنیم}]{\text{حالا وارون}} x=(y-1)^3+1 \Rightarrow x-1=(y-1)^3$$

$$y-1=\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y=\sqrt[3]{x\underbrace{-1}_{\alpha}}+\underbrace{1}_{\beta} \Rightarrow \beta-\alpha=2$$

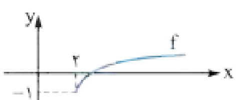
۳- وارون تابع‌های رادیکالی به شکل $f(x)=\sqrt{ax+b}$ به صورت نیمی از یک سهمی است. مثلاً وارون $f(x)=\sqrt{x}$ به صورت $f^{-1}(x)=x^2\ (x\ge 0)$ است. ببینید:



ضابطهٔ وارون $f(x)=\sqrt{x-2}-1$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x^2+2x-1\ ,\ x\ge -1$
۲) $f^{-1}(x)=x^2+2x+3\ ,\ x\ge 2$
۳) $f^{-1}(x)=x^2+2x-1\ ,\ x\ge 2$
۴) $f^{-1}(x)=x^2+2x+3\ ,\ x\ge -1$

گزینهٔ ۴ کارهای تستی یادتان نرود! دامنهٔ تابع وارون، برد خود تابع بود. نگاهی به نمودار $y=\sqrt{x-2}-1$ کنید:



(نمودار $\sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد پایین بردیم)

برد تابع $[-1,+\infty)$ است. پس دامنهٔ f^{-1} باید $x\ge -1$ باشد و تا این‌جا گزینه‌های (۲) و (۳) غلط هستند. حالا یک مقدار را کنترل کنیم: اگر در $f(x)$ به جای x مثلاً ۲ قرار دهیم داریم: $f(2)=-1$

پس در وارونش باید ۲ = $f^{-1}(-۱)$ باشد. یعنی گزینه‌ای درست است که به ازای ۱− بشود ۲، که فقط به گزینه‌های ۴ و ۳ می‌خورد. با این شرایط، ۴ انتخاب می‌شود.

اما راه‌حل را ببینید:

$f(x)=\sqrt{x-۲}-۱$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} x=\sqrt{y-۲}-۱ \Rightarrow x+۱=\sqrt{y-۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x+۱)^۲=y-۲$$

$$\Rightarrow y=(x+۱)^۲+۲=x^۲+۲x+۳$$

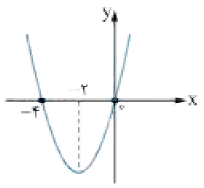
و در مقابل ضابطهٔ $f^{-۱}$، برد f را می‌نویسیم:

$$f^{-۱}(x)=x^۲+۲x+۳, \underbrace{x\geq -۱}_{\text{برد تابع f}}$$

۴- وارون قسمتی در تابع درجه‌دوم که ۱ به ۱ باشد، به صورت تابع رادیکالی در می‌آید.

تابع $y=x^۲+۴x$ در فاصلهٔ $(a,+\infty)$ وارون‌پذیر است، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۳−　　۲) ۴−　　۳) ۲−　　۴) ۱−

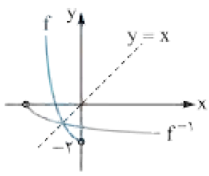


گزینهٔ ۳ نمودار این تابع، یک سهمی رو به بالاست که رأسش در $s(-۲,-۴)$ قرار دارد:

با توجه به شکل این تابع در فاصلهٔ $[-۲,+\infty)$ اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است و وارون‌پذیر می‌شود.

پس حداقل مقدار a می‌شود ۲−.

مثلاً وارون $y=x^۲-۲$ ، $x<۰$ را ببینید:



$$y=x^۲-۲ \quad , \quad x<۰ \xrightarrow{\text{وارون}} x=y^۲-۲, y<۰$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} y^۲=x+۲$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |y|=\sqrt{x+۲}$$

$$\xrightarrow{y<۰} -y=\sqrt{x+۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۲}$$

ضابطهٔ وارون $f(x)=x(x-۲)$ به ازای $x\geq ۲$ کدام است؟

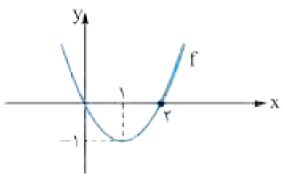
۱) $\sqrt{x}-۱-۱$، $x\geq ۰$　　۲) $\sqrt{x+۱}-۱$، $x\geq ۰$　　۳) $\sqrt{x-۱}-۱$، $x\geq ۲$　　۴) $\sqrt{x+۱}-۱$، $x\geq ۲$

گزینهٔ ۲ اول محاسبهٔ ضابطه را ببینید:

$$y=x(x-۲)=x^۲-۲x , x\geq ۲ \xrightarrow{\text{وارون}} x=y^۲-۲y , y\geq ۲$$

$$\xrightarrow[\text{مربع کامل بسازیم}]{+۱} x+۱=y^۲-۲y+۱=(y-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x+۱}=|y-۱| \xrightarrow{y\geq ۲}$$

$$\sqrt{x+۱}=y-۱ \Rightarrow y=\sqrt{x+۱}-۱$$



حالا به شرط دامنه هم احتیاج داریم. از نمودار f بردش را می‌فهمیم:

برای $x\geq ۲$ برد f به صورت $y\geq ۰$ است.

پس در $f^{-۱}$ شرط دامنه به صورت $x\geq ۰$ باید باشد که به ۲ می‌خورد.

اما ۱ با قراردادن $x=۳$ داریم: $f(۳)=۳$ پس $f^{-۱}(۳)=۳$.

و در گزینه‌ها باید $x=۳$ به $y=۳$ برسد و این در گزینه‌های ۲ و ۴ برقرار است. برای شرط دامنه هم با توجه به نمودار یا وضعیت صعودی‌بودن f در فاصلهٔ $x\geq ۱$، می‌شود یک کارهایی کرد!

۵- تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ هم وارون‌پذیر است (چون ۱ به ۱ است) وارونش هم تابع هموگرافیک است. این شکلی:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

دقت کردید؟ جای ضریب x صورت و عدد ثابت مخرج عوض شده و هر دو قرینه می‌شوند.

مثلاً وارون $y=\dfrac{۲x-۱}{۳x+۴}$ به صورت $y=\dfrac{-۴x-۱}{۳x-۲}$ است.

نکته اگر $a+d=۰$ باشد f و $f^{-۱}$ بر هم منطبق می‌شوند یعنی f وارون خودش می‌شود.

مثلاً $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$ وارون خودش است.

وارون تابع $y=۱+\frac{۱-۲x}{۱-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲+x}{۳+x}$ ۲) $\frac{۲-x}{۳-x}$ ۳) $\frac{۲+x}{۳-x}$ ۴) $\frac{۲-x}{۳+x}$

گزینهٔ ۲ اول ضابطه را درست کنیم:

$$y=۱+\frac{۱-۲x}{۱-x}=\frac{۱-x+۱-۲x}{۱-x}=\frac{-۳x+۲}{-x+۱}$$

حالا جای a و d عوض می‌شود و هر دو را قرینه می‌کنیم:

$$y=\frac{-۱x+۲}{-x+۳}=\frac{۲-x}{۳-x}$$

در تابع اول به ازای $x=۰$ داریم $y=۲$. پس در وارونش هم باید $(۲,۰)$ بخورد.

در تابع اول برای $x=\frac{۱}{۲}$ مقدار y می‌شود ۱، پس در وارونش باید $(۱,\frac{۱}{۲})$ بخورد و فقط ۲ مناسب است.

اگر وارون $f(x)=\frac{kx-۲}{x+k+۲}$ خودش باشد، k چه‌قدر است؟

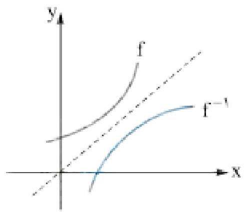
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

گزینهٔ ۲ این اتفاق وقتی می‌افتد که $a+d=۰$ شود، یعنی جمع ضریب x صورت و عدد ثابت مخرج، صفر شود:

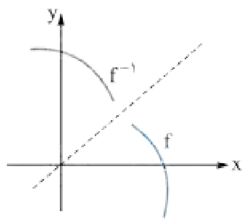
$$a+d=k+k+۲=۰ \Rightarrow k=-۱$$

ویژگی‌های تابع وارون

- **همان‌طور که قبلاً هم دیدیم از $f(a)=b$ نتیجه می‌شود $f^{-1}(b)=a$.**
- **دامنه و برد f و f^{-1} عکس هم هستند:** $R_f=D_{f^{-1}}\ ,D_f=R_{f^{-1}}$
- **اگر f صعودی باشد f^{-1} هم صعودی است و اگر f نزولی باشد f^{-1} هم نزولی است. ببینید:**



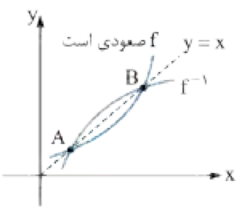
وارون تابع صعودی، صعودی است.



وارون تابع نزولی، نزولی است.

- **اگر f یک‌به‌یک باشد وارون f، تابع است (یک‌به‌یک هم هست).**
- **تابع و وارونش ممکن است هم دیگر را قطع کنند.**

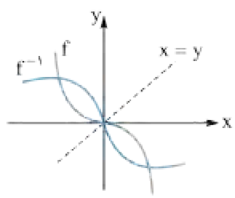
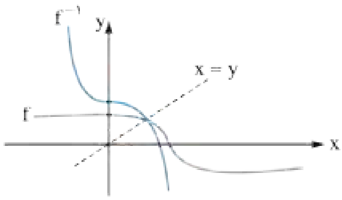
الف) اگر f اکیداً صعودی باشد محل برخورد f و f^{-1} حتماً روی $y=x$ است، یعنی به جای حل معادلهٔ $f=f^{-1}$ می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم. ببینید:



نقاط برخورد تابع صعودی f و وارون آن روی $y=x$ هستند.

ب) اگر f اکیداً نزولی باشد، محل برخورد f و f^{-1} می‌تواند هر جا باشد. (نقطه‌های برخورد نسبت به $y=x$ متقارنند)

یعنی f و f^{-1} علاوه بر روی $y=x$، ممکن است جای دیگری متقاطع باشند، ببینید:

	
این تابع نزولی و معکوسش، علاوه بر روی $y=x$، در نقاط دیگری هم متقاطع‌اند.	این تابع نزولی و معکوسش فقط روی $y=x$ متقاطع‌اند.

- **این را هم در ذهن داشته باشید که اگر f و f^{-1} در نقطهٔ (a,b) متقاطع باشند، این نقطه در هر دو تابع صدق می‌کند یعنی هم $f(a)=b$ و هم $f^{-1}(a)=b$ است. به بیان ساده‌تر باید نقطه‌های (a,b) و (b,a) در f صدق کنند.**

تابع $f(x)=x^{2}-3x$ با دامنهٔ $(2,8)$ وارون خود را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(6,6)$ ۲) $(5,5)$ ۳) $(4,4)$ ۴) $(3,3)$

گزینهٔ ۳ $y=x^{2}-3x$ در دامنهٔ $(2,8)$ افزایشی است:


$S(\frac{3}{2},\frac{-9}{4})$

(کلاً این سهمی از رأسش به بعد، افزایشی است.) پس محل تلاقی f و f^{-1} روی $y=x$ است و کافی است f را با $x=y$ برخورد دهیم:

$$\begin{cases} y=f(x)=x^{2}-3x \\ y=x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^{2}-3x=x \Rightarrow x^{2}=4x \xrightarrow[\text{x را می‌زنیم}]{2<x<8} x=4$$

پس f^{-1} و f در $(4,4)$ متقاطع‌اند.

تابع $f(x)=ax^{3}+bx$ وارون خود را در $(-1,2)$ قطع می‌کند. $f(4)$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۴ ۳) ۳۲ ۴) ۲۲

گزینهٔ ۴ طبق اشارهٔ بالا باید $f(-1)=2$ و $f(2)=-1$ باشد:

$$f(x)=ax^{3}+bx \Rightarrow \begin{cases} f(2)=8a+2b=-1 \\ f(-1)=-a-b=2 \end{cases}$$

از حل این دستگاه ۲ معادلهٔ دومجهولی داریم:

$$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}$$

پس $f(x)=\frac{1}{2}x^{3}-\frac{5}{2}x$ و در نتیجه:

$$f(4)=\frac{1}{2}(4)^{3}-\frac{5}{2}(4)=\frac{64}{2}-10=32-10=22$$

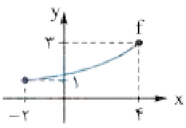
۷ وقتی تابع و وارونش را ترکیب کنیم به تابع همانی می‌رسیم، یعنی: $f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=x \quad , \quad fof^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x$

اول به دامنهٔ این‌ها دقت کنید: در $fof^{-1}(x)$ باید x را اول به f^{-1} بدهیم پس x عضو دامنهٔ f^{-1} یعنی عضو برد f است اما در $f^{-1}of(x)$ اول f روی x عمل می‌کند پس باید $x\in D_f$ باشد. دوباره ببینید:

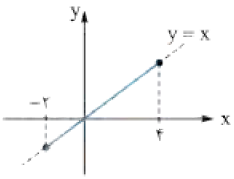
$$f^{-1}(f(x))=x \quad , \quad (x\in D_f) \qquad\qquad f(f^{-1}(x))=x \quad , \quad (x\in R_f)$$

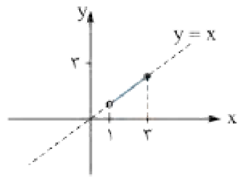
پس $f^{-1}of$ و fof^{-1} هر دو، قسمتی از تابع همانی $y=x$ هستند.

مثلاً در شکل روبه‌رو نمودار تابع f را می‌بینید که دامنهٔ آن $(-2,4]$ و بردش $(1,3]$ است.



حالا نمودارهای fof^{-1} و $f^{-1}of$ را ببینید:

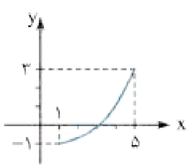


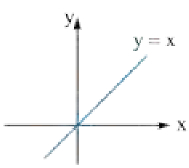


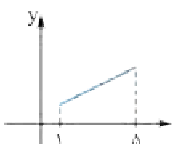
$y=f^{-1}of(x)=x$
$x\in D_f \Rightarrow -2<x\leq 4$

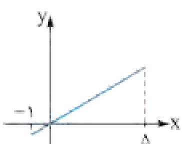
$y=fof^{-1}(x)=x$
$x\in R_f \Rightarrow 1<x\leq 3$

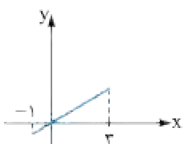
شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $y=fof^{-1}(x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


گزینهٔ ۴ گفتیم $fof^{-1}(x)$ همان $y=x$ فقط دامنهٔ آن، دامنهٔ f^{-1} یعنی برد f است. در شکل صورت سؤال برد f بازهٔ $[-1,3]$ است.

نکته در همین سؤال نمودار $f^{-1}of$، با دامنهٔ f یعنی $[1,5]$ رسم می‌شود که در ۲ آمده است.

اگر $f=\{(۳,۴),(-۱,۱),(۲,۰)\}$ باشد چندتا از زوج‌های مرتب زیر در $f^{-1}of$ هستند؟ $(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰),(۳,۳),(۴,۴)$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

گزینهٔ ۴ $f^{-1}of$ تابع همانی با دامنهٔ D_f است. پس xهای f را داریم یعنی $f^{-1}of=\{(۳,۳),(-۱,-۱),(۲,۲)\}$ و از بین زوج‌های موجود ۲تای آن‌ها هستند.

۸ شرط‌های $fof^{-1}(x)=x$ و $f^{-1}of(x)=x$ شرط‌های کنترلی هستند یعنی اگر $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$ باشد g و f وارون هم هستند.

وارون تابع مرکب

فرض کنید ماژیک را از جیبمان در می‌آوریم و در آن را باز می‌کنیم. اگر فیلم را برعکس پخش کنیم چه می‌بینیم؟ اول در ماژیک بسته می‌شود و سپس ماژیک به جیب برمی‌گردد. متوجه شدید؟ کاری که اول انجام دادیم، در پخش معکوس فیلم، دوم شد و کاری که دوم انجام داده بودیم اول شد. با همین توجه شهودی، دلیل رابطهٔ $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ را بگویید. وقتی ترکیب دو تابع را وارون می‌کنیم، تک‌تک توابع وارون‌شده و جای آن‌ها با هم عوض می‌شود.

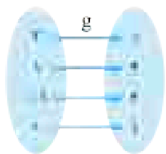
اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۴,۱)\}$ و $g^{-1}(x)=\sqrt{۵+x}$ مقدار $(fog)^{-1}(-۱)$ کدام است؟

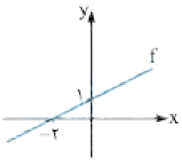
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ ۳ گفتیم $(fog)^{-1}$ می‌شود $g^{-1}of^{-1}$. پس داریم:

$$(fog)^{-1}(-۱)=g^{-1}(f^{-1}(۱))\xrightarrow[f^{-1}(۱)=۴]{(۴,۱)\in f}=g^{-1}(۴)=\sqrt{۵+۴}=۳$$

در توابع روبه‌رو مقدار $(g^{-1}of)^{-1}(۲)$ کدام است؟





۱) ۱
۲) ۲
۳) −۱
۴) −۲

گزینهٔ ۴ به جای $(g^{-1}of)^{-1}$ می‌توانیم $f^{-1}og$ را حساب کنیم. (هر تابع را وارون و جای آن‌ها را عوض کردیم.) پس داریم:

$$(g^{-1}of)^{-1}(۲)=(f^{-1}og)(۲)=f^{-1}(g(۲))\xrightarrow{g(۲)=۰}=f^{-1}(۰)\xrightarrow[\text{داریم } (-۲,۰)]{\text{در نمودار f نقطه}}=-۲$$

این مدل سؤال را هم ببینید:

f تابع وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن است. وارون تابع $y=f(۳x-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}f^{-1}(x)+۱$ ۲) $f^{-1}(\frac{x+۱}{۳})$ ۳) $\frac{f^{-1}(x)+۱}{۳}$ ۴) $f^{-1}(x)+\frac{۱}{۳}$

گزینهٔ ۳ روش اول دقت کنید که $f(۳x-۱)$ ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)=۳x-۱$ است. پس می‌توانیم بگوییم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(۳x-۱)\xrightarrow{\text{وارون}}(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$

وارون تابع $g(x)=۳x-۱$ را بلدیم: $g^{-1}(x)=\frac{x+۱}{۳}$

پس $g^{-1}(f^{-1}(x))$ می‌شود: $g^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{f^{-1}(x)+۱}{۳}$

روش دوم مثل همیشه جای x و y را عوض و بعد مرتب کنیم:

$$y=f(۳x-۱)\xrightarrow{\text{وارون}}x=f(۳y-۱)$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف } f^{-1} \text{ بگیریم}}f^{-1}(x)=\underbrace{f^{-1}(f}_{\text{همدیگر را از بین می‌برند}}(۳y-۱))=۳y-۱\Rightarrow y=\frac{f^{-1}(x)+۱}{۳}$$

نکته یک بار دیگر به راه دوم نگاه کنید. از شرّ f چه‌طوری خلاص شدیم؟ از دو طرف f^{-1} گرفتیم. این جمله را به ذهن بسپارید! هر جا تابع وارون‌پذیر f مزاحم است از دو طرف f^{-1} بگیرید. f^{-1}، f را از بین می‌برد.

نکته این برای چند تابع هم درست است؛ یعنی $(fogoh)^{-1}=h^{-1}og^{-1}of^{-1}$.

نکته جالب‌ترین سؤال‌های تابع وارون در ترکیب با صعودی و نزولی مطرح می‌شوند.

اگر $f(x)=|۲x-۶|-x$ در بازه‌ای نزولی باشد، ضابطهٔ معکوس f در این بازه کدام است؟

۱) $۲-\frac{۱}{۳}x\,,\,x>۲$ ۲) $۲-\frac{۱}{۳}x\,,\,x>-۱$ ۳) $۲-\frac{۱}{۳}x\,,\,x>-۳$ ۴) $۲-\frac{۱}{۳}x\,,\,x<۲$

گزینهٔ ۳ اول ضابطه‌های f را با توجه به قدرمطلق، جدا می‌کنیم:

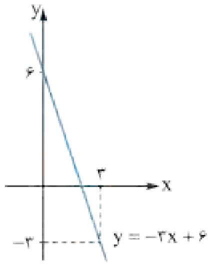
$$f(x)=\begin{cases}۲x-۶-x & ۲x-۶\ge ۰\\ -(۲x-۶)-x & ۲x-۶<۰\end{cases}=\begin{cases}x-۶ & x\ge ۳\\ -۳x+۶ & x<۳\end{cases}$$

پس قسمت نزولی (خط با شیب منفی) ضابطهٔ پایین است و داریم: $f(x)=-۳x+۶\,,\,x<۳$

$$y=۳x+۶ \Rightarrow x=\frac{۶-y}{۳} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۶-x}{۳}\xrightarrow{\text{تفکیک}} =۲-\frac{۱}{۳}x$$

در مقابل این f^{-1} باید برد f را بنویسیم:

با توجه به نمودار، برای $x<۳$ برد تابع به صورت $(-۳\,,+\infty)$ است. پس در مقابل این تابع باید $x>-۳$ بنویسیم.

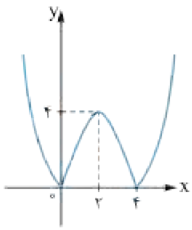


تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۲-۴x|$ در بازهٔ $(۲\,,b)$ نزولی است. اگر b بیشترین مقدار را داشته باشد ضابطهٔ معکوس f در این بازه کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\sqrt{۴-x}+۲\;;\;۲<x<۴$ ۲) $f^{-1}(x)=\sqrt{۴-x}-۲\;;\;۲<x<۴$

۳) $f^{-1}(x)=\sqrt{۴-x}-۲\;;\;۰<x<۴$ ۴) $f^{-1}(x)=\sqrt{۴-x}+۲\;;\;۰<x<۴$

گزینهٔ ۴ اول نمودار $y=|x^۲-۴x|$ را ببینید:



پس بازهٔ نزولی به صورت $(۲\,,b)=(۲\,,۴)$ است و داریم:

$$y=-(x^۲-۴x)=-(x-۲)^۲+۴ \Rightarrow -y+۴=(x-۲)^۲$$
$$۲<x<۴$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{-y+۴}\xrightarrow[x-۲>۰]{۲<x<۴} x-۲=\sqrt{-y+۴}\Rightarrow x=۲+\sqrt{-y+۴}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{۴-x}+۲\,,\,\underbrace{۰<x<۴}_{\text{برد } f}$$

وارون تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱\,, & x\ge ۲\\ x-۲\,, & x\le ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}\frac{x+۱}{۲}\,, & x\ge ۰\\ x-۲\,, & x\le ۰\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\frac{x+۱}{۲}\,, & x\ge ۳\\ x-۲\,, & x\le ۰\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\frac{x+۱}{۲}\,, & x\ge ۲\\ x-۲\,, & x\le -۲\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\frac{x+۱}{۲}\,, & x\ge ۳\\ x-۲\,, & x\le -۲\end{cases}$

گزینهٔ ۴ قرار شد در مقابل ضابطهٔ وارون، برد تابع را بنویسیم. $۲x-۱$ و $x-۲$ هر دو اکیداً صعودی‌اند. برای $x\ge ۲$ برد ضابطهٔ بالا $y\ge ۳$ است؛ برای $x\le ۰$ برد ضابطهٔ پایین $y\le -۲$ است، پس دامنه‌ها فقط در ۴ درست هستند.

وارون تابع $f(x)=۳x+|x-۲|$ کدام ضابطه را دارد؟

۱) $\frac{۱}{۳}x+|x+۲|$ ۲) $۳x-|x-۲|$ ۳) $\frac{۳x-۲-|x-۶|}{۸}$ ۴) $\frac{۳x+۲+|x-۶|}{۸}$

گزینهٔ ۳ اول : $f(۰)$ می‌شود ۲ پس در تابع وارون باید $f^{-1}(۲)$ بشود صفر که فقط به ۳ می خورد.

اما حل تشریحی: مجبوریم قدرمطلق را باز کنیم:

$$f(x)=۳x+|x-۲|=\begin{cases}۳x+(x-۲)\,, & x-۲\ge ۰\\ ۳x-(x-۲)\,, & x-۲<۰\end{cases}=\begin{cases}۴x-۲\,, & x\ge ۲\\ ۲x+۲\,, & x<۲\end{cases}$$

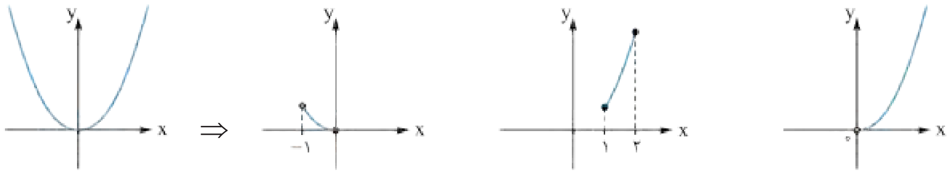
حالا تک‌تک خط‌ها را وارون می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x+۲}{۴}\,, & x\ge ۶\\ \frac{x-۲}{۲}\,, & x<۶\end{cases}$$

عدد ۶ از کجا اومده؟ خب به ازای $x=6$ جواب هر دو ضابطه می‌شود ۶ و ما باید جلوی ضابطه‌های f^{-1}، برد f را بنویسیم.
حالا فهمیدیم که ضابطهٔ f^{-1} در $x=6$ دو قسمت می‌شود پس حتماً $|x-6|$ دارد و با کنترل ۴، ۳ درست است.

محدودکردن دامنهٔ تابع

بعضی از تابع‌ها یک‌به‌یک نیستند اما می‌توانیم قسمتی از دامنهٔ آن‌ها را در نظر بگیریم و تابع وارون‌پذیر شود مثلاً $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست اما با محدودکردن دامنه به هر یک از فاصله‌های $(-1,0)$ یا $[1,2]$ یا $(0,+\infty)$ یا ...، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر می‌شود:

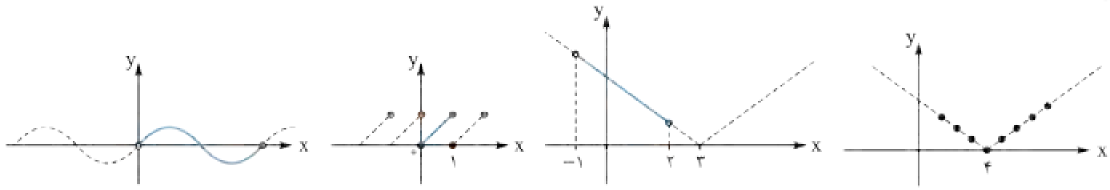


$y=x^2$ وارون‌ناپذیر — $y=x^2$، $-1<x<0$ وارون‌پذیر — $y=x^2$، $1\le x\le 2$ وارون‌پذیر — $y=x^2$، $x>0$ وارون‌پذیر

کدام تابع در دامنهٔ داده‌شده، تابع معکوس دارد؟

۱) $y=|x-4|$ روی $\mathbb{N}$　۲) $y=|x-3|$ روی $(-1,2)$　۳) $y=x-[x]$ روی $[0,1]$　۴) $y=\sin x$ روی $(0,2\pi)$

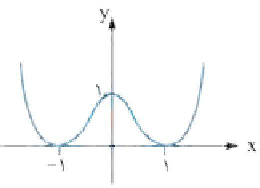
گزینهٔ ۲ خب نمودارها را ببینید: (نمودار اصلی به صورت نقطه‌چین و دامنهٔ انتخابی پر رنگ است.)



وارون ندارد. — وارون‌پذیر — وارون ندارد. — وارون ندارد.

یک مثال فوق‌العاده دیگر هم ببینید.

تابع $f(x)=(x^2-1)^2$ یک‌به‌یک نیست. این نمودارش است:



اما می‌توانیم آن را در بازه‌های $(-\infty,-1)$ یا $(0,1)$ که نزولی است و نیز $(-1,0)$ یا $(1,+\infty)$ که صعودی است وارون کنیم.

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=(x^2-1)^2$ به $(-1,0)$ محدود شود ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $y=-\sqrt{1+\sqrt{x}}\ ;\ 0<x<1$　۲) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}\ ;\ 0<x<1$

۳) $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}\ ;\ 0<x<1$　۴) $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}\ ;\ -1<x<0$

گزینهٔ ۳

$$y=(x^2-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=|x^2-1| \xrightarrow[x^2-1<0]{-1<x<0} \sqrt{y}=-(x^2-1) \Rightarrow x^2=1-\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{x<0} -x=\sqrt{1-\sqrt{y}} \Rightarrow x=-\sqrt{1-\sqrt{y}} \Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

موافق هستید که برد تابع در این بازه به صورت $(0,1)$ است. پس داریم: $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-\sqrt{x}}\ ,\ 0<x<1$

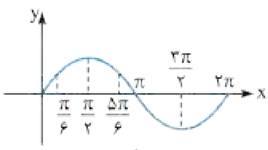
با کدام دامنه تابع $y=\sin x$ وارون‌پذیر است؟

۱) $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$　۲) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$　۳) $(0,\pi)$　۴) $(\pi,2\pi)$

گزینهٔ ۲ نمودار را ببینید:

موافقید که در $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ اکیداً نزولی و یک‌به‌یک است؟

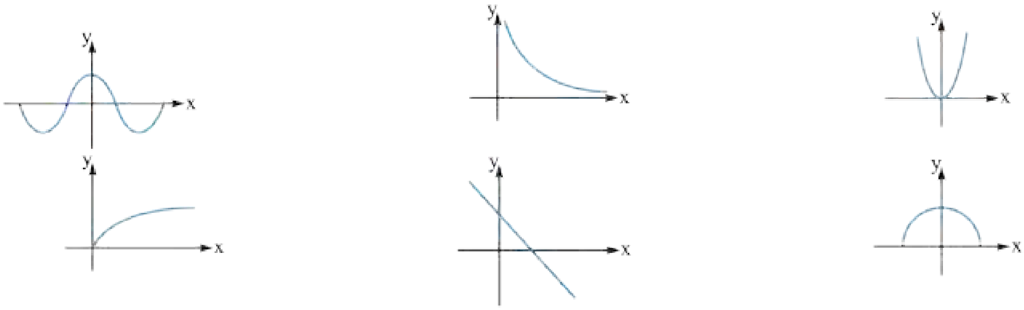
پس در این بازه وارون‌پذیر است اما در سایر گزینه‌ها، یک‌به‌یک نیست.



$y=\sin x$

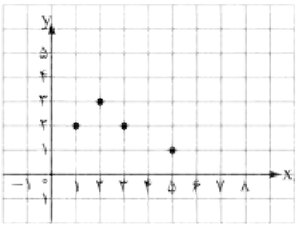
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۰۴- چندتا از توابع زیر یک‌به‌یک هستند؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۵- با حذف تنها یک نقطه، نمودار تابع مقابل به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل می‌شود، این کار به چند روش ممکن است؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۶- اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۰۷- تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ چگونه است؟ *(کانون فرهنگی آموزش)*

۱) یک‌به‌یک ـ صعودی ۲) یک‌به‌یک ـ نزولی ۳) غیر یک‌به‌یک ـ صعودی ۴) غیر یک‌به‌یک ـ نزولی

۴۰۸- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۳|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟ *(خارج ۹۵)*

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

۴۰۹- کدام‌یک از توابع زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^۲$ ۲) $y=x|x|$ ۳) $y=\begin{cases}x^۲ & x<۰\\ \sqrt{x} & x\geq ۰\end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases}x^۲+۲x & x\geq ۱\\ x+۵ & x<۱\end{cases}$

۴۱۰- تابع $f(x)=|x+۱|-|x-۱|$ در بازهٔ $[a,b]$، یک‌به‌یک است. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۱۱- در تابع $f(x)=x^۲-۳x+۵$ با محدودکردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازهٔ زیر، می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

۱) $[۱,۵]$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[-۷,۱]$ ۴) $[-۲,۲]$

۴۱۲- تابع $f(x)=(x-۱)(x+۳)+x$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ یک‌به‌یک است، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۴۱۳- چندتا از توابع زیر در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ وارون‌پذیرند؟ *(کتاب درسی)*

الف) $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=-x^۲$ پ) $h(x)=x^۲+۴x+۳$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱۴- تابع $f(x)=x^۲-۴x+۳$ با کدام دامنه معکوس‌پذیر است؟

۱) $[-۲,۳]$ ۲) $[۰,۲]\cup[۵,۶]$ ۳) $[۰,۱]\cup[۲,۴]$ ۴) $[۱,۵]$

۴۱۵- تابع $f(x)=(a-۱)x^۲-۲x+(a+۴)$ بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. مقدار $af(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴۱۶- به ازای چه حدودی از a، تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+a & x>۲\\ x+۲ & x\leq ۲\end{cases}$ یک‌به‌یک نیست؟ *(کانون فرهنگی آموزش)*

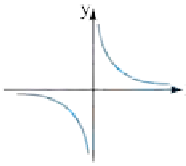
۱) $(-\infty,۴)$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $(۴,+\infty)$

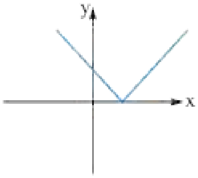
۴۱۷- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq a\\ ۲x+۱ & x<a\end{cases}$ یک‌به‌یک است. مقدار a کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۱۸- کدام‌یک از توابع زیر، تابع وارون دارد؟

۱) $f=\{(1,2),(3,4),(0,2),(-1,5)\}$

۲) 

۳) 

۴) $y=x^2-2x$

۴۱۹- کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=x[x]$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=x-[x]$

۴۲۰- کدام تابع، تابعِ وارون ندارد؟

۱) $y=2^x$ ۲) $y=\log x$ ۳) $y=\dfrac{2x+4}{x+2}$ ۴) $y=x+[x]$

۴۲۱- توابع زیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها معکوس‌پذیر است؟ (خارج ۸۹)

۱) $y=x^4-2x^2$ ۲) $y=[x]$ ۳) $y=x^3-3x^2$ ۴) $y=x^3+x+1$

۴۲۲- کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) برای رسم تابع f^{-1} باید نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه کنیم.

۲) برد f^{-1} همان دامنهٔ f است.

۳) اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$.

۴) اگر f تابع باشد، f^{-1} هم حتماً تابع است.

۴۲۳- اگر $f=\{(1,2),(-3,-1),(3,4),(4,-3)\}$ باشد، مقدار $2f^{-1}(-3)+f(3)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) ۱۳ ۳) ۴ ۴) ۱۲

۴۲۴- اگر $f=\{(-1,0),(1,2),(0,1),(2,-1)\}$ باشد، آن‌گاه $f+f^{-1}$ شامل کدام زوج‌مرتب نیست؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $(1,2)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,0)$ ۴) $(2,0)$

۴۲۵- اگر $f=\{(2,a+1),(\sqrt{b},3)\}$ و $f^{-1}=\{(a-1,c+1),(d,b-2)\}$ یک رابطه و وارون آن باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۴۲۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -5 ۳) -2 ۴) تعریف‌نشده

۴۲۷- اگر $f(x)=\begin{cases}4x+3 & x\geq 3\\ x+1 & x<3\end{cases}$، آن‌گاه $f^{-1}(-5)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) -6 ۴) ۴

۴۲۸- در تابع خطی $f(x)=ax+b$ اگر $f^{-1}(6)=1$ و $f^{-1}(21)=4$، b کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۵ ۴) -5

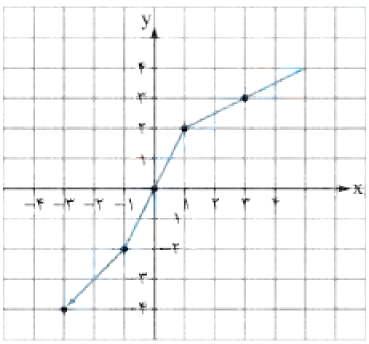
۴۲۹- اگر f به شکل مقابل باشد، نمودار تابع f^{-1} از کدام‌یک از نقاط زیر عبور نمی‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) $(2,1)$

۲) $(3,3)$

۳) $(2,2/5)$

۴) $(-2,-1)$



$y=f(x)$

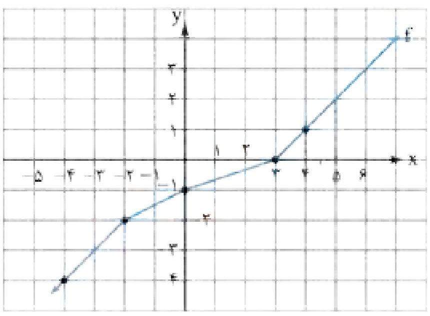
۴۳۰- نمودار تابع f مفروض است. حاصل $\dfrac{f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)}{f^{-1}(\frac{3}{2})}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{4}{9}$

۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{8}{9}$

۴) $\frac{5}{9}$



۴۳۱- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=۲x^۳+x-۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۰,-۱)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۲,۱)$

۴۳۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax+۲a$ مفروض است. اگر نمودار تابع $f^{-۱}$ محور عرض‌ها را در (-۱) قطع کند، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۳۳- به ازای چند مقدار a، نمودار تابع وارون $f(x)=\frac{x-۴}{۲x-۱}$ از نقطهٔ $(a+۲,a)$ می‌گذرد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۴۳۴- دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۳۵- اگر $f(x)=f^{-۱}(۳)+۲x-۱$ باشد، آن‌گاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۴۳۶- نمودار تابع $f(x)=-x^۳+ax+b$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) -۱ ۴) ۲

۴۳۷- اگر تابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$ تابع وارونش را در $(۱,۲)$ قطع کند، $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۴۳۸- دو تابع $g(x)=\frac{x^۲+b}{۲x}\,;\,x>۰$ و $f(x)=ax+\sqrt{x^۲+۱}$ وارون یکدیگرند. حاصل $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۳۹- وارون تابع $y=x^۳+۲x-۳$، محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۴۰- برد تابع وارون $f(x)=\sqrt{x-۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $[۲,+\infty)$

۴۴۱- دامنهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$ کدام است؟

۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳]$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $[-۱,+\infty)$

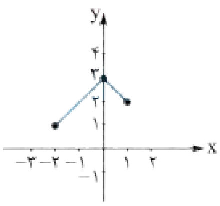
۴۴۲- تابع $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ مفروض است. در تابع $g^{-۱}(x)$، برد و دامنه چند عضو صحیح غیرمشترک دارند؟ (کتاب درسی)

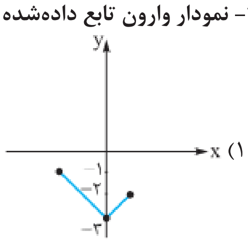
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

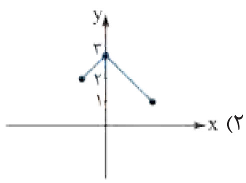
۴۴۳- تابع f با دامنهٔ $(۲,۳)$ و ضابطهٔ $f(x)=[-x]x+[x]$ تعریف شده است. مقدار $f^{-۱}(-۵)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

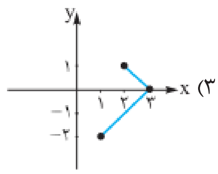
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ناموجود

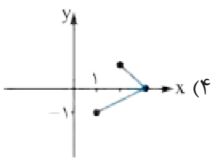
۴۴۴- نمودار وارون تابع داده‌شده در شکل زیر کدام است؟ (کتاب درسی)



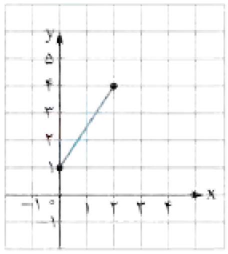
۱)


۲)


۳)


۴)


۴۴۵- ضابطهٔ وارون تابع داده‌شده، کدام است؟ *(کتاب درسی)*



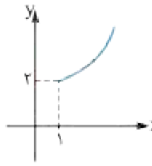
۱) $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

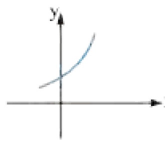
۲) $y=\frac{2}{3}x+1$

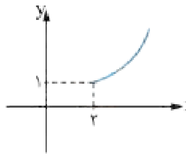
۳) $y=\frac{3}{2}x+1$

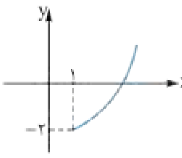
۴) $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

۴۴۶- نمودار تابع معکوس تابع $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

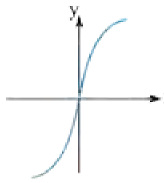
۳) 

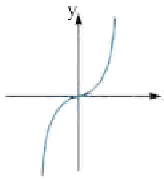
۴) 

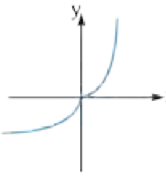
۴۴۷- تابع $f(x)=x^2-4x$ با دامنهٔ $[2,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع معکوس f از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

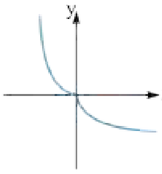
۱) فقط اول ۲) اول و دوم ۳) فقط چهارم ۴) اول و چهارم

۴۴۸- نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ کدام است؟

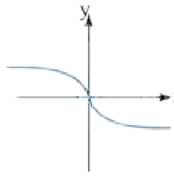
۱) 

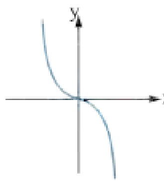
۲) 

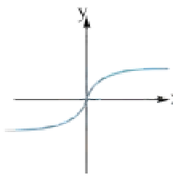
۳) 

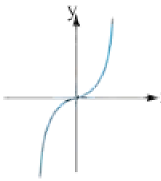
۴) 

۴۴۹- اگر $f(x)=x|x|$، آن‌گاه نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۵)*

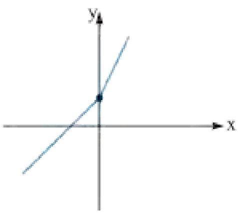
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۵۰- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار $2f^{-1}(x-1)$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟



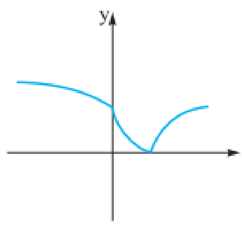
۱) اول

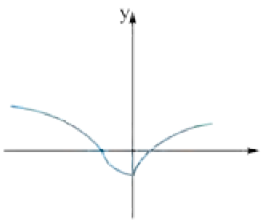
۲) دوم

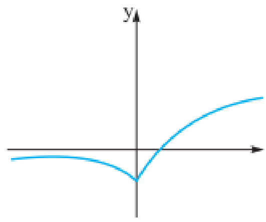
۳) سوم

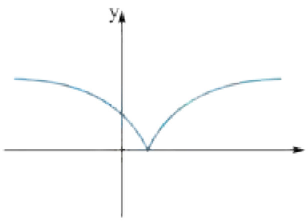
۴) چهارم

۴۵۱- اگر $f(x)=-x^3+1$ باشد، نمودار تابع $y=|f^{-1}(x)|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۵۲- چندتا از جملات زیر درست است؟ (کتاب درسی)

الف) اگر f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه f^{-1} نیز یک‌به‌یک است.

ب) اگر f تابعی یک‌به‌یک و صعودی باشد، آن‌گاه f^{-1} نیز صعودی است.

پ) اگر g تابعی یک‌به‌یک و نزولی باشد، آن‌گاه g^{-1} نیز نزولی است.

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

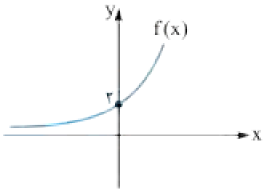
۴۵۳- نمودار $y=-(x+۱)^{۳}+۱$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۳　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

۴۵۴- تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f(x-۱)$ و $f^{-1}(-x)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) غیرمتقاطع

۴۵۵- شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f^{-1}(x)}$ کدام است؟



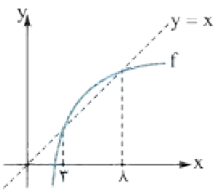
۱) $\mathbb{R}$

۲) $x>۰$

۳) $۲\geq x\geq ۰$

۴) $x\geq ۲$

۴۵۶- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)



۱) $[۰,۲]$

۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$

۴) $[۳,۸]$

۴۵۷- اگر $f(x)=۳-۲^{x}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۲)$　　۲) $[۰,۳)$　　۳) $[۲,۳)$　　۴) $[۱,۳)$

۴۵۸- تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+۴$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-۴}{۲}\ ;\ -۱\leq x\leq ۳$

۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-۴}{۲}\ ;\ -۲\leq x\leq ۶$

۳) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-۴}{۲}\ ;\ ۲\leq x\leq ۱۰$

۴) در این بازه تابع معکوس ندارد.

۴۵۹- ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\geq ۰\end{cases}$ کدام است؟

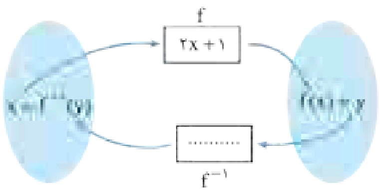
۱) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & x<۰\\ \frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴} & x\geq ۰\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} & x<۰\\ \frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۴} & x\geq ۰\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۴} & x\geq ۱\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴} & x\geq ۱\end{cases}$

۴۶۰- در شکل زیر ارتباط بین f و f^{-1} نشان داده شده است. در کادر بالای f^{-1} کدام عبارت قرار می‌گیرد؟ (کتاب درسی)



۱) $\dfrac{x-۱}{۲}$　　۲) $\dfrac{x+۱}{۲}$

۳) $\dfrac{y-۱}{۲}$　　۴) $\dfrac{y+۱}{۲}$

۴۶۱- قرینهٔ خط d به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

۴۶۲- اگر وارون تابع خطی $f(x)=ax+۱$ بر خودش منطبق باشد، a کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) فقط -۱ ۳) ۱ یا -۱ ۴) این اتفاق ممکن نیست.

۴۶۳- اگر دو خط به معادلات $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینهٔ یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) ±۳ ۲) ±۲ ۳) -۳ و ۲ ۴) ۳ و -۲

۴۶۴- تابع وارون تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{x-۱}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۱-\frac{۱}{x}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱+\frac{۱}{x}$

۴۶۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱) -۴ و -۱ ۲) ۴ و -۱ ۳) -۴ و ۱ ۴) ۴ و ۱

۴۶۶- اگر تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x+b}$ وارون خودش باشد، $f(۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۴۶۷- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}-۱$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۱$ ۲) $f^{-۱}(x)=x^{۲}+۱$ ۳) $f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲}$ ۴) $f^{-۱}(x)=(x+۱)^{۲}$

۴۶۸- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^{۲}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱]$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x}$ ۲) $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x}$ ۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt{-x}$ ۴) $f^{-۱}(x)=-\sqrt{-x}$

۴۶۹- معکوس تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۳ \quad , \quad x\ge -۳$
۲) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۳ \quad , \quad x\ge ۰$
۳) $f^{-۱}(x)=x^{۲}+۳ \quad , \quad x\ge -۳$
۴) $f^{-۱}(x)=x^{۲}+۳ \quad , \quad x\ge ۰$

۴۷۰- ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$، به کدام صورت است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵ \ ; \ x\le ۲$
۲) $f^{-۱}(x)=-x^{۲}+۴x-۵ \ ; \ x\le ۲$
۳) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵ \ ; \ x\ge ۱$
۴) $f^{-۱}(x)=-x^{۲}+۴x-۵ \ ; \ x\ge ۱$

۴۷۱- تابع معکوس تابع $y=x^{۲}-۲x$ وقتی $x\ge ۱$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x+۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{x+۱}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x-۱}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{x-۱}$

۴۷۲- ضابطهٔ تابع معکوس تابع $x\ge ۲$، $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۲ \,,\, x\ge ۱$
۲) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}-۲ \,,\, x\ge -۱$
۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}-۱ \,,\, x\ge ۲$
۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}-۲ \,,\, x\ge ۱$

۴۷۳- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$، کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $f^{-۱}(x)=-x^{۲}$ ۲) $f^{-۱}(x)=x^{۲}$ ۳) $f^{-۱}(x)=x|x|$ ۴) $f^{-۱}(x)=-x|x|$

۴۷۴- در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x+|x+۲|$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $y=\frac{x-۲}{۲}, x\ge -۲$ ۲) $y=\frac{x+۲}{۲}, x\ge -۲$ ۳) $y=\frac{x-۲}{۲}, x\ge ۰$ ۴) $y=\frac{x+۲}{۲}, x\ge ۰$

۴۷۵- تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱+x} \quad , \quad x<۰$
۲) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x} \quad , \quad x<۱$
۳) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x} \quad , \quad ۰<x<۱$
۴) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x} \quad , \quad ۰<x<۱$

۴۷۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$، در یک بازه صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $f^{-۱}(x)=x+۷ \quad , \quad x>۸$
۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x+۲ \quad , \quad x>۳$
۳) $f^{-۱}(x)=x+۷ \quad , \quad x>-۴$
۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x-۱ \quad , \quad -۴<x<۸$

۴۷۷- ضابطهٔ وارون تابع $y=3x-|x|$ کدام است؟

۱) $y=\frac{3x+|x|}{4}$ ۲) $y=\frac{3x+|x|}{8}$ ۳) $y=\frac{x+|x|}{4}$ ۴) $y=\frac{2x-|x|}{4}$

۴۷۸- ضابطهٔ معکوس $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (خارج ۹۲)

۱) $f(x)=x\sqrt{|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۲) $f^{-1}(x)=x\sqrt{|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

۳) $f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ۴) $f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۴۷۹- ضابطهٔ وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\ ,\ |x|<1$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{1-|x|}{|x|}\ ,\ |x|>1$

۳) $f^{-1}(x)=\frac{x}{|x|-1}\ ,\ |x|>1$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{|x|-1}{x}\ ,\ |x|<1$

۴۸۰- معکوس تابع $y=x^3+3x^2+3x+2$ کدام است؟

۱) $y=1-\sqrt[3]{x-1}$ ۲) $y=1-\sqrt[3]{x+1}$ ۳) $y=-1+\sqrt[3]{x-1}$ ۴) $y=-1-\sqrt[3]{x+1}$

۴۸۱- ضابطهٔ وارون تابع $y=x^4-2x^2+1$ روی دامنهٔ $(-1,0)$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt{\sqrt{x}+1}$ ۲) $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$ ۳) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ ۴) $y=-\sqrt{\sqrt{x}+1}$

۴۸۲- تابع معکوس تابع $y=10^{x+1}-2$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\log(x+1)+2$ ۲) $f^{-1}(x)=\log(x+1)-2$

۳) $f^{-1}(x)=\log(x+2)+1$ ۴) $f^{-1}(x)=\log(x+2)-1$

۴۸۳- طول نقطهٔ تلاقی نمودار $f(x)=\sqrt{x+2}$ با نمودار معکوس آن کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -1 و 2 ۴) فاقد نقطهٔ تلاقی

۴۸۴- تابع $f(x)=(a+1)x^4+(a+2)x^3+(a+4)x^2+3x$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی معکوس‌پذیر است. تابع f^{-1} خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸۵- اگر $f=\{(1,2),(2,3)\}$، تابع fof^{-1} کدام است؟

۱) $\{(2,2),(3,3)\}$ ۲) $\{(1,1),(2,2)\}$ ۳) $\{(2,1),(3,2)\}$ ۴) $\{(1,1),(3,3)\}$

۴۸۶- اگر $f=\{(1,4),(2,3),(3,5)\}$ و g تابعی باشد که $fog(x)=x$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟ (کتاب درسی)

۱) $g=\{(4,1),(2,2),(3,3)\}$ ۲) $g=\{(4,1),(3,2),(5,3)\}$

۳) $g=\{(4,4),(3,3),(5,5)\}$ ۴) $g=\{(4,1),(3,2),(5,5)\}$

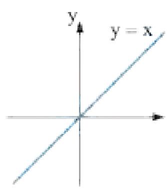
۴۸۷- با توجه به ماشین $x\rightarrow\boxed{g}\rightarrow\boxed{f}\rightarrow x$، اگر $f(x)=2x-1$ باشد، $g(0)$ کدام است؟

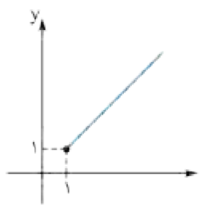
۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

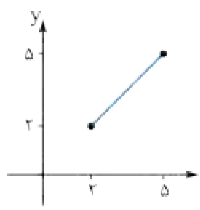
۴۸۸- اگر $f(x)=x+x|x|$ با دامنهٔ $[-1,2)$ در نظر گرفته شود، تعداد اعضای صحیح دامنهٔ تابع $f^{-1}of$ کدام است؟

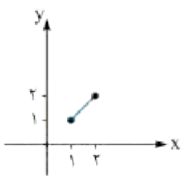
۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۲

۴۸۹- در تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ با دامنهٔ $[2,5]$ نمودار تابع fof^{-1} چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۹۰- اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$، آن‌گاه دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{1+f^{-1}of(x)}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $(-\infty,1]$

۴۹۱- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(0,3),(4,-1)\}$ و $g=\{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$، تابع gof^{-1} کدام است؟ (سراسری ۸۵)

۱) $gof^{-1}=\{(0,0),(1,3)\}$ ۲) $gof^{-1}=\{(2,4),(3,5)\}$ ۳) $gof^{-1}=\{(2,0),(-1,4)\}$ ۴) $gof^{-1}=\{(5,3),(-1,1)\}$

۴۹۲- اگر $f=\{(0,-1),(2,\frac{1}{2}),(-3,\sqrt{2}),(1,5)\}$ و $g=\{(-1,-3),(5,2),(\frac{1}{2},0),(4,6)\}$، تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\{(-1,\frac{1}{2}),(5,2),(\sqrt{2},-3)\}$ ۲) $\{(\frac{1}{2},5),(5,2),(-1,\frac{1}{2})\}$

۳) $\{(\sqrt{2},-1),(\frac{1}{2},5),(-1,-3)\}$ ۴) $\{(-1,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},5),(\sqrt{2},-1)\}$

۴۹۳- اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، حاصل $(fog)^{-1}(5)+(f^{-1}og^{-1})(1)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۶۵ ۴) ۶۸

۴۹۴- دو تابع $f=\{(2,a+1),(3,7)\}$ و $g=\{(2a-1,-1),(6,2)\}$ مفروض‌اند. اگر $(-1,2)\in(gof)^{-1}$، مقدار a کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۵-

۴۹۵- اگر $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\frac{5x+2}{2x-1}$، آن‌گاه حاصل $(fog^{-1})(4)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲ ۴) ۱۲

۴۹۶- دو تابع $f=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ و $g(x)=\sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ باشد، a کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۹۷- اگر $f=\{(2,3),(-1,2),(-4,1),(3,0)\}$ و $g=\{(0,2),(2,-4),(3,2),(-4,-2)\}$، آن‌گاه حاصل $(fogof^{-1})(3)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۴۹۸- اگر $f(x)=x+4$ و $g(x)=2x-5$، ضابطهٔ تابع $f^{-1}og^{-1}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $y=\frac{x-2}{3}$ ۲) $y=\frac{x-3}{2}$ ۳) $y=\frac{x+1}{2}$ ۴) $y=x+2$

۴۹۹- اگر $f(x)=1+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ و $x>0$، آن‌گاه ضابطهٔ $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x^2-1 ۴) x^2+1

۵۰۰- اگر $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x}$ و $g^{-1}(x)=x^2$ و $x\geq 0$، آن‌گاه ضابطهٔ $fog(x)$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) x^2-1 ۳) $x+1+2\sqrt{x}$ ۴) $x+1-2\sqrt{x}$

۵۰۱- اگر $f(x)=x+2$ و $g(x)=2x^2-8x+1$ باشند، آن‌گاه حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $(fog^{-1})^{-1}(x)=0$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰- ۳) ۸ ۴) ۸-

۵۰۲- اگر f تابعی یک‌به‌یک و $g(x)=f(2x+1)+1$ است. اگر $f^{-1}(5)=3$ و $g^{-1}(a)=1$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۵ ۴) ۶

۵۰۳- به ازای چند مقدار صحیح a، تابع $f(x)=|3x+a|$ در بازهٔ $(-1,1)$ یک‌به‌یک نیست؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۰۴- کدام‌یک از توابع زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۲) $g(x)=x-\sqrt{x}$ ۳) $h(x)=2x+\frac{1}{x}$ ۴) $p(x)=\frac{x}{x^2+1}$

۵۰۵- اگر $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq 1 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$، با کدام انتخاب برای $g(x)$، تابع f یک‌به‌یک است؟

۱) $|x-2|$ ۲) $x-3$ ۳) x^2-4x+3 ۴) $x+7$

۵۰۶- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=k(x-\frac{1}{x})$ وارون هم باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۰۷- f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن است. وارون تابع $g(x)=2f(3x-1)+1$ کدام است؟

۱) $2f^{-1}(3x-1)+1$ ۲) $\frac{1}{2}f^{-1}(\frac{x+1}{3})-1$ ۳) $\frac{1}{3}f^{-1}(\frac{x-1}{2})+\frac{1}{3}$ ۴) $3f^{-1}(\frac{x-1}{2})+1$

۵۰۸- به ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم: $(fog)^{-1}(2x-4)=\frac{x}{2}$ و $g(x)=2x^3+1$، آن‌گاه نمودار وارون تابع $f(x)$، محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰۹- اگر داشته باشیم: $g(x)=f(2x+5)$ و $f^{-1}(x)=\frac{x^3}{9}+\sqrt[3]{9x}$، آن‌گاه حاصل عبارت $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) صفر ۲) -2 ۳) -3 ۴) -6

۵۱۰- اگر g وارون‌پذیر باشد، ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)=3+4g(\frac{x}{2})$ کدام است؟

۱) $2g^{-1}(\frac{x-3}{4})$ ۲) $6+4g^{-1}(x)$ ۳) $g^{-1}(\frac{x-3}{4})$ ۴) $\frac{1}{2}g^{-1}(\frac{x-3}{4})$

۵۱۱- وارون تابع $f(x)=x+4\sqrt{x}+8$ به صورت $f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}\,;\,x\ge c$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۵۱۲- اگر f^{-1} وارون تابع $f(x)=x^2+2x+4\,;\,x\le -1$ باشد، مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $f^{-1}(x)-x=2$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) -7 ۳) ۱۲ ۴) معادله جواب حقیقی ندارد.

۵۱۳- نمودار $f(x)=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}$ و وارون آن در نقاط A و B متقاطع‌اند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۵۱۴- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و g وارون تابع f باشد و داشته باشیم: $f(a)=g(\frac{1}{\sqrt{3}})$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

۵۱۵- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+3}$، مقدار $f(1+2f^{-1}(3))$ کدام است؟

۱) $2+3\sqrt{2}$ ۲) $3+2\sqrt{3}$ ۳) $2+\sqrt{2}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

۵۱۶- اگر $f(x)=2x+|x|$ باشد، معادلهٔ $f^{-1}(x)=3x$ چند جواب دارد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۵۱۷- اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) x^2+1 ۴) صفر

۵۱۸- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ کدام است؟

۱) $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$ ۲) $y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$ ۳) $y=\log_x\frac{2+x}{2-x}$ ۴) $y=\log_x\frac{2-x}{2+x}$

۵۱۹- ضابطهٔ وارون تابع $y=f(x)=5^{\log_x 5}$ کدام است؟

۱) $y=5^{\log_5 x}$ ۲) $y=5^x$ ۳) $y=5^{\log_x 5}$ ۴) $y=5^{\frac{1}{x}}$

۵۲۰- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۵۲۱- اگر $f(x)=x+[x]$ باشد، حاصل $(fof^{-1})(4/5)$ کدام است؟

۱) $4/5$ ۲) $6/5$ ۳) ۶ ۴) موجود نیست.

۵۲۲- اگر $g(x)=f(3x-4)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۲۳- اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴