درسنامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

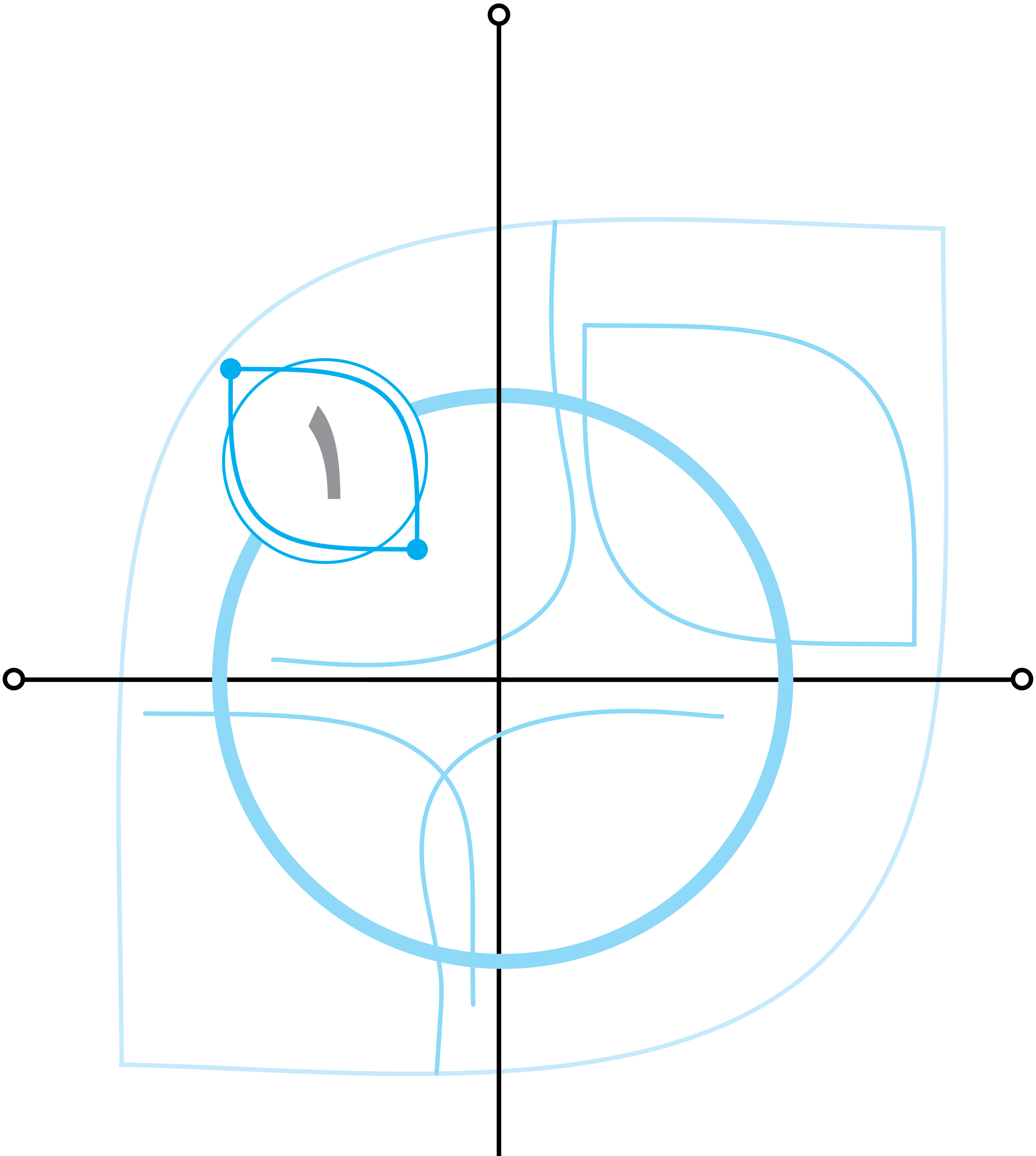
موج آزمون ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

رشته ریاضی

ویژه نظام جدید آموزشی

نشر الگو



بازه، مجموعه و خط راست

فصل ۱

بازه، مجموعه و خط راست

مجموعه‌های زیر از مهم‌ترین مجموعه‌های اعداد هستند که با آن‌ها سر و کار داریم:

مجموعهٔ اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

مجموعهٔ اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=\{a\,|\,a\notin\mathbb{Q}\}$

رابطه‌های زیر بین مجموعه‌های بالا برقرار است:

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

نمادهای $\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Z}^-$، $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^-$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{R}^-$ و ... را نیز می‌توان به کار برد. مثلاً $\mathbb{Z}^-$ یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح منفی. همچنین $\mathbb{Q}^+$ یعنی مجموعهٔ اعداد گویای مثبت و ... .

برخی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی که بسیار کاربرد دارند، بازه‌ها هستند. اگر $a<b$، انواع بازه‌ها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

(a,b) بازهٔ باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$

$[a,b]$ بازهٔ بسته $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\leq b\}$

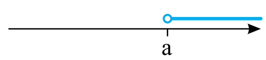
$[a,b)$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b\}$

$(a,b]$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\leq b\}$

$[a,+\infty)$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq a\}$

$(-\infty,a]$ بازهٔ نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq a\}$

$(a,+\infty)$ بازهٔ باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a\}$



$(-\infty,a)$ بازهٔ باز $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<a\}$

کل اعداد حقیقی را با بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ای که تعداد اعضایش عددی حسابی باشد، **مجموعه‌ای متناهی** است و مجموعه‌ای که متناهی نباشد، **مجموعه‌ای نامتناهی** است.

هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای متناهی، خودش متناهی است. پس اگر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، خودش هم نامتناهی است.

- هر مجموعه یا متناهی است یا نامتناهی.
- مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی‌اند. همچنین بازه‌ها، مجموعه‌هایی نامتناهی هستند.
- در هر موضوع، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث در آن موضوع زیرمجموعهٔ آن باشند، **مجموعهٔ مرجع** نامیده می‌شود.
- اگر A زیرمجموعهٔ دلخواهی از مجموعهٔ مرجع U باشد، مجموعهٔ $U-A$ را **متمم** A در U می‌نامند و با A' نشان می‌دهند. پس مجموعهٔ A' از همهٔ عضوهایی از U تشکیل شده است که عضو A نیستند.
- اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.
- تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ A و B از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

- اگر A، B و C سه مجموعهٔ متناهی باشند، تعداد اعضای اجتماع آن‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

- اگر A و B دو مجموعه باشند که عضو مشترک ندارند، گوییم A و B جدا از هم (مجزا) هستند. در این‌صورت $n(A\cap B)=۰$.

- اگر $A(x_A,۰)$ و $B(x_B,۰)$ دو نقطه روی محور x باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط AB برابر است با $AB=|x_A-x_B|$.
- اگر $C(۰,y_C)$ و $D(۰,y_D)$ دو نقطه روی محور y باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط CD برابر است با $CD=|y_C-y_D|$.
- اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند، طول پاره‌خط AB برابر است با

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

- اگر A و B دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB، برابرند با

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\ ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

- اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، چون قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس وسط قطر AC بر وسط قطر BD منطبق است، در نتیجه

$$x_A+x_C=x_B+x_D\ ,\quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

- فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند که روی خطی موازی محور y نیستند. در این صورت شیب خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد برابر است با $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$ و معادلهٔ خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد به‌صورت $y-y_A=m(x-x_A)$ است.
- دو خط غیرموازی با محورهای مختصات **با هم موازی‌اند**، اگر و فقط اگر شیب آن‌ها برابر باشد و **بر هم عمودند**، اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ باشد.
- فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$.
- فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$.

محاسبات

آزمون ۱ بازه و مجموعه (۱)

پاسخ: ۲۳۰ تا ۲۵۰

۱- به‌ازای چند عدد طبیعی مانند n عدد $\frac{۱}{۴}$ در بازهٔ $(\frac{۱}{n+۳}, \frac{۱}{n+۱}]$ قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- اگر $۰<a<۱$، مجموعهٔ $(-a, a)\bigcap(-a^۲, a^۳)$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $(-a, a)$ ۳) $(-a^۲, a^۳)$ ۴) $(-a, -a^۲)$

۳- اگر $A_n=[۱-\frac{۱}{n}, ۱+\frac{۱}{n}]$، حاصل $A_۲\bigcup A_۳\bigcup\dots\bigcup A_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۹}{۱۰}, \frac{۱۱}{۱۰}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$ ۳) $[\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۱۰}]$ ۴) $[\frac{۹}{۱۰}, \frac{۳}{۲}]$

۴- اگر $A=(-۱, ۱]$، $B=[a, b)$، $A\bigcap B=[۰, ۱]$ و $A\bigcup B=(-۱, ۴)$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- اگر اشتراک دو بازهٔ $(-\infty, a+۴]$ و $[-۲a+۱, +\infty)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۶- اگر اشتراک دو بازهٔ $[-۲, ۴)$ و $(۲a, a)$ تهی نباشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-۱, ۰)$ ۲) $(-۲, ۰)$ ۳) $(-۴, ۰)$ ۴) $(-\infty, -۲)$

۷- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$ باشد، $A=\{۱, ۳, ۴, ۵\}$، $B'=\{۱, ۲, ۵, ۷\}$ و $C'=\{۲, ۵\}$، مجموعهٔ $A-(B\bigcap C)$ کدام است؟

۱) $\{۱\}$ ۲) $\{۱, ۵\}$ ۳) $\{۲, ۵\}$ ۴) $\{۵\}$

۸- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشد و $A=\{x \mid |x-۵|>۳\}$، مجموعهٔ A' چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۹- اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) A' ۲) B' ۳) $A\bigcap B'$ ۴) $A'\bigcup B$

۱۰- اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه قطعاً متناهی است؟

۱) $A\bigcap B'$ ۲) $A\bigcup B$ ۳) $A'\bigcup B$ ۴) $A'\bigcap B$

۱۱- اگر A، B و C سه زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، $n(A)+n(B')=۱۷$ و $n(B)+n(A')=۱۳$، مقدار $n(C)+n(C')$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۲- اگر $n(A\bigcup B)+n(A\bigcap B)=۲۴$ و $n(A)=۲n(B)$، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۳- در بررسی ۴۵ محصول معیوب یک کارخانه که عیوب A و B را دارند، مشخص شد ۳۰ عدد از محصولات، عیب A را دارند و ۲۰ عدد از آن‌ها فقط عیب A را دارند. چند محصول این شرکت فقط عیب B را دارند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲۰

۱۴- اگر $\frac{n(A\cap B)}{۴}=\frac{n(B)}{۱۲}=\frac{n(A)}{۷}$ و $n(A\cup B)=۶۰$، مقدار $n(A)$ چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۸ ۴) ۲۴

۱۵- اگر مجموعهٔ مرجع U باشد، $n(U)=۲۶$، $n(A\cup B)=۱۴$ و $n(A)=n(A')$، مقدار $n(B-A)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- اگر $n(A)=۲n(B)$ و $n(A\cup B)=۵n(A\cap B)=۲۰$، مقدار $\frac{n(A-B)}{n(B-A)}$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۷- اگر $n(A)=n(B)+۳$، $n(A-B)=۲n(B-A)$ و $n(A\cap B)=۵$، مقدار $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۸- از ۱۰۰ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم ۸۵ نفر به ریاضی و ۷۰ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

۱۹- اگر U مجموعهٔ مرجع باشد، $n(U)=۲۳$، $n(A)=۱۰$ و $n(B)=۷$، بیشترین مقدار ممکن $n(A'\cap B')$ چقدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۰- اگر $n(A)=۳k-۱$، $n(B)=۳$ و $n(A\cap B)=k-۲$، بیشترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

محاسبات

آزمون ۲ بازه و مجموعه (۲)

پاسخ: ۲۳۰ تا ۲۵۰

۱- اگر نقطهٔ وسط بازهٔ $[-a^{۲}, ۲a^{۲}+۱]$ روی محور اعداد حقیقی متناظر با عدد ۵ باشد، فاصلهٔ دو سر بازه از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۲- اگر عدد a عضو بازهٔ $(۲a-۱, ۳-۳a)$ باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-\infty, ۱)$ ۲) $(-\infty, \frac{۳}{۴})$ ۳) $(-\infty, \frac{۴}{۵})$ ۴) $(-\infty, ۰)$

۳- اگر $(b, ۴)\bigcap[-۲, a)=(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲})$، حاصل $(b, a)\bigcup(-۲a-۱, b)$ کدام است؟

۱) $(-۳, ۱)$ ۲) $(-۲, \frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱, ۴)$ ۴) $(-۲, \frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$

۴- اگر $[a, ۲]\bigcap[a+۲, b]=[-۲, ۱]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) صفر

۵- اگر اجتماع دو بازهٔ $(-\infty, ۲a+۱]$ و $(۳a-۱, +\infty)$ برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی شود، کدام یک درست است؟

۱) $a=۲$ ۲) $a>۲$ ۳) $a\leq۲$ ۴) $a<۲$

۶- اگر اشتراک دو بازهٔ $[۱-۲a, ۱+۲a]$ و $[-۵, -۳]$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۳

۷- اگر مجموعهٔ مرجع $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد، $A=\{۱, ۳, ۵\}$، $B=\{۳, ۵\}$ و $C=\{۱, ۲, ۵\}$، مجموعهٔ $C\bigcap(A\bigcap B)'$ کدام است؟

۱) $\{۱\}$ ۲) $\{۱, ۲\}$ ۳) $\{۱, ۵\}$ ۴) $\{۲, ۵\}$

۸- اگر $A=(۱, ۲]$، $B=(-۱, ۱]$ و $C=(-\infty, ۰)$، حاصل $(A'-B')-C'$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۱]$ ۲) $(۰, ۲)$ ۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(-۱, ۰)$

۹- اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد، $A=\{۱, ۶, ۷\}$، $B=\{۳, ۵, ۷\}$ و $C'=\{۱, ۴, ۵, ۶\}$، مجموعهٔ $(A\bigcap B')\bigcup C$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰- اگر $A=[n-۱, ۲n-۱]$ و $B=[۵, ۷]$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، n چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱- کدام‌یک درست است؟

۱) اگر $A\bigcup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی‌اند.

۲) اگر $A\bigcap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.

۳) اگر $A\bigcup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.

۴) اگر $A\bigcap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یا B می‌توانند متناهی باشند.

۱۲- اگر $n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$ و $n(A)-n(B)=۴$، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۳- اگر $A\subseteq B$، $n(A')=۱۴$، $n(B')=۱۰$ و $n(A\cup B)=۹$، مقدار $n(A)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴- اگر $n(A)+n(B)=۲۴$، $n(A\cup B)=۱۶$ و $n(B-A)=۳$، مقدار $n(A-B)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۵- اگر $n(A\cap B)=۲n(A-B)=۳n(B-A)$ و $n(A\cup B)=۴۴$، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۱۶- در کلاسی که ۳۰ دانش‌آموز دارد، ۱۸ نفر چای دوست دارند و ۱۵ نفر قهوه. حداکثر چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس نه چای دوست دارند نه قهوه؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

۱۷- اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد، $n(A)=۵$ و $n(B)=۷$، مجموع بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۸- اگر $A\subseteq B$ و $n(A)+۲n(B)=۱۴$، کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۹- اگر $n(A)=۲n(B)$ و $n(A\cup B)=۳۵$، بیشترین مقدار ممکن $n(A-B)$ چقدر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۰- اگر $۵n(A\cap B)=۳n(A)=۲n(B)$، کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

محاسبات

آزمون ۳ خط راست

پاسخ: ۲۳۰ تا ۲۵۰

۱- فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ از نقطهٔ $B(m,۰)$ نصف فاصلهٔ A از نقطهٔ $C(۲m-۱,۲)$ است. مقدار m چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۲- نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB، روی خط $۲y+۳x-۱=۰$ قرار دارد. اگر A نقطهٔ $(۲,-۳m)$ و B نقطهٔ $(m,۱)$ باشد، نقطهٔ M کدام است؟

۱) $(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(۲,-\frac{۵}{۲})$ ۳) $(-\frac{۵}{۳},۳)$ ۴) $(-۲,\frac{۷}{۲})$

۳- نقطه‌های $A(-۲,-۳)$، $B(۷-x,۲-y)$، $C(x,y)$ و $D(-۱,۳)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. نقطهٔ C کدام است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۲,۲)$ ۳) $(۳,۳)$ ۴) $(۴,۴)$

۴- نقطه‌های $M(-۲,-۱)$، $N(۵,۴)$ و $P(-۳,-۴)$ به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB، AC و BC از مثلث ABC هستند. معادلهٔ خطی که ضلع BC روی آن قرار دارد کدام است؟

۱) $۷y=۵x-۱۳$ ۲) $۶y=۷x-۳$ ۳) $۵y=۶x+۴$ ۴) $۴y=۳x-۱$

۵- نقطه‌های $A(۴,۱)$، $B(m,-۲)$ و $C(۲,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند و طول میانهٔ نظیر رأس B برابر ۲ است. مقدار m چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) -۱

۶- نقطه‌های $A(۴,۰)$، $B(-۱,-۱)$ و $C(۳,۵)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع این مثلث کدام است؟

۱) فقط متساوی‌الساقین ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۷- نقطه‌ای روی خط $y=x-۱$ وجود دارد که از دو نقطهٔ $A(۱,-۱)$ و $B(-۱,۲)$ به یک فاصله است. مجموع طول و عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸- مساحت مثلث با سه رأس $A(۱,۳)$، $B(۵,-۵)$ و $C(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۹- معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۱,-۴)$ می‌گذرد و بر خط گذرا از نقطه‌های $(-۱,۶)$ و $(-۲,-۳)$ عمود است، کدام است؟

۱) $۹y+x+۳۵=۰$ ۲) $۹y+۲x-۱=۰$ ۳) $۳y+۲x+۵=۰$ ۴) $۳x+y+۱=۰$

۱۰- نقطه‌های $A(۷,۶)$، $B(۴,۴)$ و $C(۲a,a^۲)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر رأس B قائمه باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -۵ ۴) -۶

۱۱- اگر نقطه‌های $A(1,2)$، $B(-1,0)$ و $C(3\ ,-1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع CH کدام است؟

۱) $y=x-4$ ۲) $y=2x-7$ ۳) $y=-x+2$ ۴) $y=-2x+5$

۱۲- نقطهٔ $(4m\,,2m-1)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-3,10)$ و $(-9,-2)$ است. مقدار m چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳- معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های $A(-3,1)$ و $B(1,5)$ کدام است؟

۱) $2x+y=-1$ ۲) $x+y=2$ ۳) $y-x=4$ ۴) $x+y=3$

۱۴- قرینهٔ نقطهٔ $A(-3,4)$ نسبت به خط $y=ax+b$ نقطهٔ $A'(1,2)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۵ ۴) -5

۱۵- مساحت مربعی که یک رأس آن نقطهٔ $A(2,1)$ و یک ضلع آن روی خط $y=2x-1$ است، چقدر است؟

۱) $\frac{16}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{7}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$

۱۶- فاصلهٔ نقطهٔ $A(k\,,1)$ از خط $y=2x-k$ دو برابر فاصلهٔ A از خط $2y=x+3$ است. حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن k چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

۱۷- دو ضلع مستطیلی روی خط‌های $4x+3y=5$ و $3x-4y=2$ هستند. اگر $A(1,2)$ یک رأس آن باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{14}{25}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{7}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۱۸- معادلهٔ یک قطر مربعی $x+y=2$ و یک رأس آن نقطهٔ $(-1,1)$ است. محیط مربع چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) $8\sqrt{2}$

۱۹- فاصلهٔ خط‌های موازی $ax+2y=6$ و $3x+y+k=0$ برابر $\sqrt{10}$ است. اگر $k>0$، مقدار $a+k$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۰- دو ضلع مستطیلی روی دو خط موازی $3x+4y+6=0$ و $3x+4y-6=0$ قرار دارند و مساحت این مستطیل ۱۲ است. طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۵

پاسخ‌های تشریحی

آزمون ۱

۱- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۳}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۳}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۳>۴\Rightarrow n>۱$$

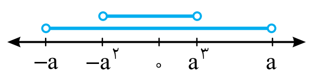
عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۱}$ بیشتر نباشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۱}\geq\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۱\leq۴\Rightarrow n\leq۳$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۲- گزینهٔ ۳ چون $۰<a<۱$، پس $a^۳<a$ و $-a<-a^۲$، بنابراین

$$(-a,a)\bigcap(-a^۲,a^۳)=(-a^۲,a^۳)$$



۳- گزینهٔ ۲ مجموعه‌های $A_۲$، $A_۳$، ... و $A_{۱۰}$ به شکل زیر هستند:

$$A_۲=[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}],\quad A_۳=[\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}],\quad \ldots,\quad A_{۱۰}=[\frac{۹}{۱۰},\frac{۱۱}{۱۰}]$$

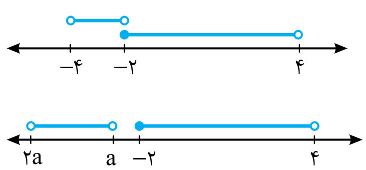
واضح است که مجموعهٔ $A_۲$ شامل تمام مجموعه‌های دیگر است. پس اجتماع تمام این مجموعه‌ها همان $A_۲$ است.

۴- گزینهٔ ۴ از تساوی $(-۱,۱]\bigcap[a,b)=[۰,۱]$ معلوم می‌شود $a=۰$. از تساوی $(-۱,۱]\bigcup[a,b)=(-۱,۴)$ معلوم می‌شود $b=۴$. بنابراین $a+b=۴$.

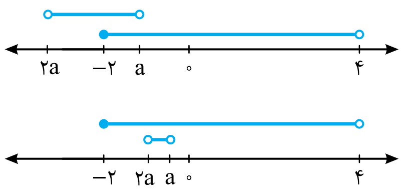
۵- گزینهٔ ۴ اشتراک این دو بازه تنها زمانی تک‌عضوی است که ابتدای بازهٔ $[-۲a+۱,+\infty)$ بر انتهای بازهٔ $(-\infty,a+۴]$ منطبق باشد. در نتیجه

$$-۲a+۱=a+۴\Rightarrow a=-۱$$

۶- گزینهٔ ۲ چون $(۲a,a)$ یک بازه است، پس $۲a<a$ و در نتیجه $a<۰$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a\leq-۲$ اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی است:



بنابراین $a>-۲$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-۲<a<۰$، اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی نیست.



۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$B=\{۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,\ldots\}$$

$$C=\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹,\ldots\}$$

بنابراین $B\bigcap C=\{۳,۴,۶,۸,۹,\ldots\}$ و در نتیجه

$$A-(B\bigcap C)=\{۱,۵\}$$

راه‌حل دوم با توجه به قانون دمورگان،

$$A-(B\bigcap C)=A\bigcap(B\bigcap C)'=A\bigcap(B'\bigcup C')$$

$$=\{۱,۳,۴,۵\}\bigcap\{۱,۲,۵,۷\}=\{۱,۵\}$$

۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$|x-۵|>۳\Rightarrow\begin{cases}x-۵>۳\\x-۵<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۸\\x<۲\end{cases}$$

بنابراین $A=\{\ldots,۰,۱,۹,۱۰,\ldots\}$. در نتیجه

$$A'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

یعنی $n(A')=۷$.

راه‌حل دوم چون $A=\{x\,|\,|x-۵|>۳\}$، پس

$$A'=\{x\,|\,|x-۵|\leq۳\}$$

از نابرابری $|x-۵|\leq۳$ نتیجه می‌شود

$$-۳\leq x-۵\leq۳\Rightarrow۲\leq x\leq۸$$

مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس

$$A'=\{۲,۳,\ldots,۸\}\Rightarrow n(A')=۷$$

۹- گزینهٔ ۴ چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\bigcup B$ نامتناهی است.

۱۰- گزینهٔ ۱ B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\bigcap B'$ متناهی است. توجه کنید که چون A متناهی است، A' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\bigcap B$ مشخص نیست. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\bigcup B$ و $A\bigcup B$ نامتناهی هستند.

۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases}n(A)+n(B')=۱۷\\n(B)+n(A')=۱۳\end{cases}\Rightarrow n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=۳۰$$

$$n(U)+n(U)=۳۰\Rightarrow n(U)=۱۵$$

بنابراین $n(C)+n(C')=n(U)=۱۵$.

۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

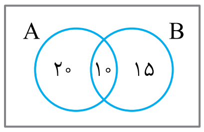
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲n(B)+n(B)$$

$$۲۴=۳n(B)\Rightarrow n(B)=۸$$

۱۳- گزینهٔ ۱ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با ۲۰−۳۰، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر ۲۵=۲۰−۴۵ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند.



۱۴- گزینهٔ ۳ مقدار مشترک نسبت‌ها را برابر t می‌گیریم. در این صورت

$$n(A)=۷t\,,\quad n(B)=۱۲t\,,\quad n(A\cap B)=۴t$$

در نتیجه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۶۰=۷t+۱۲t-۴t\Rightarrow ۶۰=۱۵t\Rightarrow t=۴$$

بنابراین $n(A)=۷t=۲۸$.

۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A)+n(A')=n(U)$$

$$۲n(A)=۲۶\Rightarrow n(A)=۱۳$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۴=۱۳+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(B)-n(A\cap B)=۱\Rightarrow n(B-A)=۱$$

۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۲۰=۲n(B)+n(B)-۴\Rightarrow ۳n(B)=۲۴$$

$$n(B)=۸\Rightarrow n(A)=۱۶$$

بنابراین

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۶-۴=۱۲$$

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۸-۴=۴$$

در نتیجه $\frac{n(A-B)}{n(B-A)}=\frac{۱۲}{۴}=۳$.

۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n(A-B)=۲n(B-A)$$

$$n(A)-n(A\cap B)=۲n(B)-۲n(A\cap B)$$

$$n(A)=۲n(B)-n(A\cap B)=۲n(B)-۵$$

بنابراین

$$\begin{cases}n(A)=۲n(B)-۵\\ n(A)=n(B)+۳\end{cases}$$

$$n(A)=۱۱\,,\ n(B)=۸$$

در نتیجه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=۱۱+۸-۵=۱۴$$

۱۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۰۰-x=۸۵+۷۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۵۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$n(A')=n(U)-n(A)=۲۳-۱۰=۱۳$$

$$n(B')=n(U)-n(B')=۲۳-۷=۱۶$$

اکنون توجه کنید که

$$n(A'\cap B')\le n(A')=۱۳$$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر قانون دمورگان،

$$A'\cap B'=(A\cup B)'$$

بنابراین

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')$$

$$=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$$

$$=۲۳-۱۰-۷+n(A\cap B)$$

$$=۶+n(A\cap B)$$

چون $n(A\cap B)\le n(B)$، پس

$$n(A'\cap B')\le ۶+n(B)$$

$$n(A'\cap B')\le ۱۳$$

۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=۳k-۱+۳-(k-۲)=۲k+۴$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\le n(B)\Rightarrow k-۲\le ۳\Rightarrow k\le ۵$$

بنابراین

$$n(A\cup B)=۲k+۴\le ۲\times ۵+۴=۱۴$$

آزمون ۲

۱- گزینهٔ ۳ نقطهٔ وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{۲a^{۲}+۱+(-a^{۲})}{۲}=\frac{a^{۲}+۱}{۲}=۵\Rightarrow a^{۲}=۹$$

بنابراین بازهٔ مورد نظر $[-۹,۱۹]$ است و فاصلهٔ دو سر آن از یکدیگر برابر است با $۱۹-(-۹)=۲۸$.

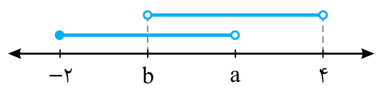
۲- گزینهٔ ۲ چون a عضو بازه است، پس

$$۲a-۱<a<۳-۳a$$

از نابرابری $۲a-۱<a$ نتیجه می‌شود $a<۱$ و از نابرابری $a<۳-۳a$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۳}{۴}$. بنابراین باید $a<\frac{۳}{۴}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(۲a-۱,۳-۳a)$ بازه باشد این است که $۲a-۱<۳-۳a$، یعنی $a<\frac{۴}{۵}$، که اگر $a<\frac{۳}{۴}$، این شرط هم برقرار است. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۴})$ است.

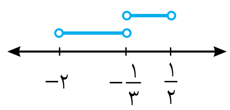
۳- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود

$$(b,۴)\cap[-۲,a)=(b,a)$$



بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$(b,a)\cup(-۲a-۱,b)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(-۲,-\frac{۱}{۳})=(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$$



۴- گزینهٔ ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد ۲- شروع می‌شود و $a<a+۲$، پس $a+۲=-۲$، یعنی $a=-۴$. بنابراین تساوی داده شده به صورت زیر است:

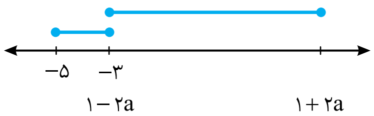
$$[-۴,۲]\cap[-۲,b]=[-۲,۱]$$

چون اشتراک سمت چپ به عدد ۱ ختم شده است و $۱<۲$، پس $b=۱$. در نتیجه $a-b=-۵$.

۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود اجتماع دو بازهٔ داده شده وقتی برابر $\mathbb{R}$ می‌شود که $۳a-۱\le ۲a+۱$، یعنی $a\le ۲$.

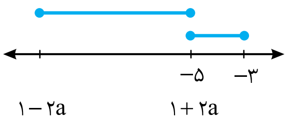
۶- گزینهٔ ۳ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.

حالت اول



$$۱-۲a=-۳\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۱+۲a=-۵\Rightarrow a=-۳$$

اکنون توجه کنید که شرط اینکه $[۱-۲a,۱+۲a]$ بازه باشد این است که $۱-۲a<۱+۲a$، یعنی $a>۰$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر ۲ است.

۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $A\cap B=\{۳,۵\}$، پس $(A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۶\}$ و

$$C\cap(A\cap B)'=\{۱,۲\}$$

۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مجموعه‌های A'، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty)$$

$$B'=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

$$C'=[۰,+\infty)$$

بنابراین

$$A'-B'=(-۱,۱]$$

و در نتیجه

$$(A'-B')-C'=(-۱,۰)$$

۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مجموعهٔ مرجع $\{۱,۲,۳,\dots,۹\}$ است، پس

$$B'=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\},\quad C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

در نتیجه

$$A\cap B'=\{۱,۶\}$$

$$(A\cap B')\cup C=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$$

بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$A\cap B'=A-B=\{۱,۶\}$$

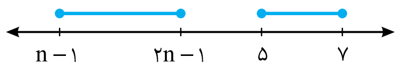
$$C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

بنابراین

$$(A\cap B')\cup C=\{۱,۶\}\cup\{۲,۳,۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$$

۱۰- گزینهٔ ۴ اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$2n-1<5 \Rightarrow n<3$$

حالت دوم

$$n-1>7 \Rightarrow n>8$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B قطعاً متناهی هستند. چون اگر یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی می‌شود.

۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A)+n(B)=24 \\ n(A)-n(B)=4 \end{cases} \Rightarrow n(B)=10$$

۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=9$، پس $n(B)=9$. از طرف دیگر،

$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')$$

$$n(A)+14=9+10 \Rightarrow n(A)=5$$

۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$16=24-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=8$$

از طرف دیگر،

$$n(B-A)=n(B)-n(B\cap A) \Rightarrow 3=n(B)-8 \Rightarrow n(B)=11$$

در نتیجه $n(A)=24-n(B)=13$. به این ترتیب،

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=13-8=5$$

۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cap B)=2n(A-B)=2n(A)-2n(A\cap B)$$

$$n(A)=\frac{3}{2}n(A\cap B)$$

همین‌طور

$$n(A\cap B)=3n(B-A)=3n(B)-3n(A\cap B)$$

$$n(B)=\frac{4}{3}n(A\cap B)$$

اکنون توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$44=\frac{3}{2}n(A\cap B)+\frac{4}{3}n(A\cap B)-n(A\cap B)$$

$$=\frac{11}{6}n(A\cap B)$$

$$n(A\cap B)=24$$

در نتیجه $n(B)=\frac{4}{3}n(A\cap B)=32$.

۱۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=12+15-n(A\cup B)$$

$$=27-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\geq n(B)=15$، بنابراین

$$n(A\cap B)=27-n(A\cup B)\leq 27-15=12$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=12-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)=12-n(A\cap B)\leq 12$$

و در این نابرابری تساوی وقتی پیش می‌آید که $n(A\cap B)=0$، یعنی $A\cap B=\varnothing$. از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\leq n(A)=5$$

البته، توجه کنید که در این نابرابری تساوی وقتی برقرار است که $A\cap B=A$، یعنی $A\subseteq B$، که طبق فرض درست نیست. بنابراین $n(A\cap B)\leq 4$ و در نتیجه

$$n(A\cup B)=12-n(A\cap B)\geq 8$$

یعنی بیشترین مقدار $n(A\cup B)$ برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر ۸ است و مجموع آن‌ها برابر ۲۰ است.

۱۸- گزینهٔ ۳ چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B \Rightarrow n(A)\leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که

$$14=n(A)+2n(B)\leq n(B)+2n(B)=3n(B)$$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\geq 5$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(B)\geq 5$$

۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۳۵=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A)-n(A\cap B)=۳۵-n(B)$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)\le n(A)+n(B)$$

$$۳۵\le ۲n(B)+n(B)$$

بنابراین $۳n(B)\ge ۳۵$. در نتیجه، چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\ge ۱۲$. به این ترتیب

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۳۵-n(B)$$

در نتیجه

$$n(A-B)\le ۳۵-۱۲=۲۳$$

۲۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید

$$۵n(A\cap B)=۳n(A)=۲n(B)=t$$

در این صورت

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=\frac{t}{۳}+\frac{t}{۲}-\frac{t}{۵}=\frac{۱۹t}{۳۰}$$

چون $n(A\cup B)$ عددی طبیعی است، پس $\frac{۱۹t}{۳۰}$ نیز عددی طبیعی است. کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند t که این ویژگی را دارد برابر ۳۰ است، که به ازای آن کمترین مقدار $n(A\cup B)$ به‌دست می‌آید که برابر ۱۹ است.

آزمون ۳

۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(m-۲)^۲+۱^۲}$$

$$AC=\sqrt{(۲m-۱-۲)^۲+۱^۲}=\sqrt{(۲m-۳)^۲+۱}$$

بنابراین

$$AB=\frac{۱}{۲}AC\Rightarrow\sqrt{(m-۲)^۲+۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲m-۳)^۲+۱}$$

$$۴(m-۲)^۲+۴=(۲m-۳)^۲+۱$$

$$۴(m^۲-۴m+۴)+۴=۴m^۲-۱۲m+۹+۱$$

$$-۴m=-۱۰\Rightarrow m=\frac{۵}{۲}$$

۲- گزینهٔ ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+m}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۳m+۱}{۲}$$

چون M روی خط $۲y+۳x-۱=۰$ است، پس

$$۲(\frac{-۳m+۱}{۲})+۳(\frac{۲+m}{۲})-۱=۰$$

$$-۳m+۱+۳+\frac{۳m}{۲}-۱=۰$$

$$-\frac{۳m}{۲}=-۳\Rightarrow m=۲$$

بنابراین M نقطهٔ $(\frac{۲+۲}{۲},\frac{-۳\times۲+۱}{۲})$، یعنی $(۲,-\frac{۵}{۲})$ است.

۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطهٔ وسط پاره‌خط AC همان نقطهٔ وسط پاره‌خط BD است. بنابراین

$$(\frac{-۲+x}{۲},\frac{-۳+y}{۲})=(\frac{۷-x-۱}{۲},\frac{۲-y+۳}{۲})$$

در نتیجه

$$-۲+x=۶-x\Rightarrow x=۴$$

$$-۳+y=۵-y\Rightarrow y=۴$$

یعنی C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

راه‌حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$AB\parallel CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow\frac{-۳-۲+y}{-۲-۷+x}=\frac{y-۳}{x+۱}$$

$$\frac{-۵+y}{-۹+x}=\frac{y-۳}{x+۱}\Rightarrow -x+۵y=۱۶$$

به همین ترتیب،

$$AD\parallel BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}\Rightarrow\frac{-۳-۳}{-۲+۱}=\frac{۲-y-y}{۷-x-x}$$

$$۶=\frac{۲-۲y}{۷-۲x}\Rightarrow ۶x-y=۲۰$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}-x+۵y=۱۶\\ ۶x-y=۲۰\end{cases}$ به دست می‌آید $x=۴$ و $y=۴$. بنابراین C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

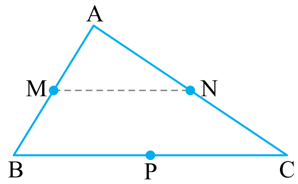
۴- گزینهٔ ۱ چون خط‌های MN و BC موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-۱-۴}{-۲-۵}=\frac{۵}{۷}$$

معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $P(-۳,-۴)$ با شیب $\frac{۵}{۷}$ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y+۴=\frac{۵}{۷}(x+۳)\Rightarrow ۷y=۵x-۱۳$$

پس معادلهٔ خطی که BC روی آن است $۷y=۵x-۱۳$ است.



۵- گزینهٔ ۳ مختصات نقطهٔ M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۱-۱}{۲}=۰$$

بنابراین طول میانهٔ BM برابر است با

$$BM=\sqrt{(m-۳)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{(m-۳)^۲+۴}$$

چون $BM=۲$، پس

$$\sqrt{(m-۳)^۲+۴}=۲\Rightarrow (m-۳)^۲+۴=۴$$

$$(m-۳)^۲=۰\Rightarrow m=۳$$

۶- گزینهٔ ۴ طول ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(۴+۱)^۲+(۰+۱)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

$$AC=\sqrt{(۴-۳)^۲+(۰-۵)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(-۱-۵)^۲}=\sqrt{۵۲}$$

توجه کنید که $AB=AC$ و تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۷- گزینهٔ ۴ اگر این نقطه $C(x,x-۱)$ باشد، آن‌گاه

$$AC=\sqrt{(x-۱)^۲+(x-۱+۱)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+x^۲}$$

$$BC=\sqrt{(x+۱)^۲+(x-۱-۲)^۲}=\sqrt{(x+۱)^۲+(x-۳)^۲}$$

چون $AC=BC$، پس

$$(x-۱)^۲+x^۲=(x+۱)^۲+(x-۳)^۲$$

$$x^۲-۲x+۱+x^۲=x^۲+۲x+۱+x^۲-۶x+۹$$

$$۲x=۹\Rightarrow x=\frac{۹}{۲}$$

پس نقطهٔ C $(\frac{۹}{۲},\frac{۷}{۲})$ است و مجموع طول و عرض آن برابر ۸ است.

۸- گزینهٔ ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=\sqrt{۸۰}$$

$$AC=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(۲+۵)^۲}=\sqrt{۸۵}$$

واضح است که تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۵}=۱۰$$

۹- گزینهٔ ۱ شیب خطی که از نقطه‌های $(-۱,۶)$ و $(-۲,-۳)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۶+۳}{-۱+۲}=۹$. بنابراین شیب خطی که بر این خط عمود است برابر است با $-\frac{۱}{۹}$. معادلهٔ خطی که شیب آن $-\frac{۱}{۹}$ است و از نقطهٔ $(۱,-۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y+۴=-\frac{۱}{۹}(x-۱)\Rightarrow ۹y+x+۳۵=۰$$

۱۰- گزینهٔ ۳ اگر AB بر BC عمود باشد، حاصل‌ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر ۱- است:

$$m_{AB}=\frac{۶-۴}{۷-۴}=\frac{۲}{۳},\quad m_{BC}=\frac{۴-a^۲}{۴-۲a}$$

توجه کنید که اگر $a=۲$، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست نیست. بنابراین $a\neq ۲$ و در نتیجه $m_{BC}=\frac{۲+a}{۲}$. به این ترتیب

$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}(\frac{۲+a}{۲})=-۱\Rightarrow a=-۵$$

۱۱- گزینهٔ ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۲}{-۱-۱}=۱$$

پس شیب ارتفاع CH برابر ۱- است، زیرا $CH\perp AB$. اکنون معادلهٔ خطی را که از رأس C با شیب ۱- می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-y_C=m_{CH}\times(x-x_C)$$

$$y+۱=-(x-۳)\Rightarrow y=-x+۲$$

۱۲- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول وسط پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ نقطهٔ $(\frac{-۳-۹}{۲},\frac{۱۰-۲}{۲})$، یعنی $(-۶,۴)$ است. چون نقطهٔ $(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط مورد نظر است، پس حاصل ضرب شیب خطی که از نقطه‌های $(۴m,۲m-۱)$ و $(-۶,۴)$ می‌گذرد و شیب خطی که از نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ می‌گذرد برابر ۱- است:

$$\frac{۲m-۱-۴}{۴m+۶}\times\frac{۱۰+۲}{-۳+۹}=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۵}{۴m+۶}\times۲=-۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم چون نقطهٔ $P(۴m, ۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقاط $A(-۳,۱۰)$ و $B(-۹,-۲)$ است، پس

$$PA=PB$$

$$\sqrt{(۴m+۳)^۲+(۲m-۱-۱۰)^۲}=\sqrt{(۴m+۹)^۲+(۲m-۱+۲)^۲}$$

$$(۴m+۳)^۲+(۲m-۱۱)^۲=(۴m+۹)^۲+(۲m+۱)^۲$$

$$۱۶m^۲+۲۴m+۹+۴m^۲-۴۴m+۱۲۱$$

$$=۱۶m^۲+۷۲m+۸۱+۴m^۲+۴m+۱$$

$$۹۶m=۴۸ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۱۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این پاره‌خط یعنی نقطهٔ $M(-۱,۳)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ اســت، بنابراین شـیب عمودمنصف برابر -۱ است. در نتیجــه معادلهٔ این خط به صورت $y-۳=-۱(x+۱)$ یا به طور ساده‌تر $x+y=۲$ است.

راه‌حــل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو ســر آن به یک فاصله اســت. فرض می‌کنیم نقطهٔ $P(x\,,y)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت

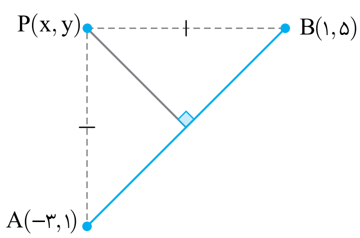
$$PA=PB$$

$$\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۵)^۲}$$

$$(x+۳)^۲+(y-۱)^۲=(x-۱)^۲+(y-۵)^۲$$

$$x^۲+۶x+۹+y^۲-۲y+۱=x^۲-۲x+۱+y^۲-۱۰y+۲۵$$

$$۸x+۸y=۱۶ \Rightarrow x+y=۲$$



۱۴- گزینهٔ ۱ اگر نقطهٔ H وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H=\frac{۱-۳}{۲}=-۱,\quad y_H=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

مختصات نقطهٔ H در معادلهٔ خط $y=ax+b$ صدق می‌کنند:

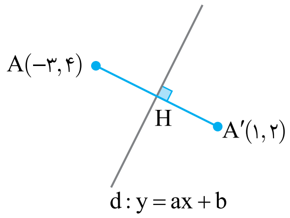
$$۳=a(-۱)+b \Rightarrow b=a+۳$$

از طرف دیگر، شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، عکس و قرینهٔ شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}=\frac{۲-۴}{۱-(-۳)}=-\frac{۱}{۲}$$

$$m_d=a \Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۵$ و در نتیجه $ab=۱۰$.

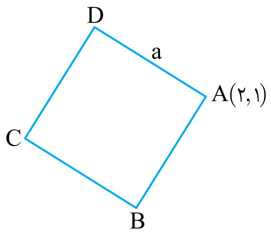


۱۵- گزینهٔ ۲ چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط داده شده صدق نمی‌کنند، پس $y=۲x-۱$ معادلهٔ AD و AB نیست. پس یا معادلـهٔ BC اســت یــا DC. هر کدام که باشــد، اگــر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ تا خط $y=۲x-۱$ را حســاب کنیم، طـول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$۲x-y-۱=۰$$

$$a=\frac{|۴-۱-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین مساحت مربع ABCD برابر است با $S=a^۲=\frac{۴}{۵}$.



۱۶- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ خط‌ها را به صورت $۲x-y-k=۰$ و $x-۲y+۳=۰$ می‌نویســیم. اکنون اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(k,۱)$ از این دو خط به ترتیب برابر s و t باشد، آن‌گاه

$$s=\frac{|۲k-۱-k|}{\sqrt{۴+۱}},\quad t=\frac{|k-۲+۳|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$s=۲t \Rightarrow |k-۱|=۲|k+۱|$$

$$\begin{cases} k-۱=۲(k+۱) \Rightarrow k=-۳ \\ k-۱=-۲(k+۱) \Rightarrow k=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن k برابر ۱ است.

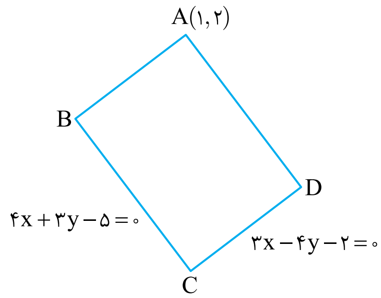
۱۷- گزینهٔ ۳ رأس A روی هیچ‌کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا مختصات آن در معادله‌های داده شــده صدق نمی‌کنند. پس برای محاســبهٔ طول ضلع‌های مستطیل کافی است فاصلهٔ A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB=\frac{|۴+۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

$$AD=\frac{|۳-۸-۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۷}{۵}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S=۱\times\frac{۷}{۵}=\frac{۷}{۵}$$



۱۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، اندازهٔ AH را حساب می‌کنیم:

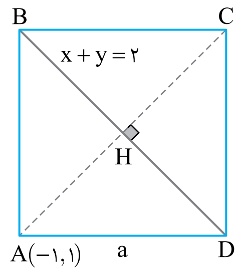
$$AH=\frac{|-۱+۱-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^۲+a^۲=(۲\sqrt{۲})^۲\Rightarrow ۲a^۲=۸$$

$$a^۲=۴\Rightarrow a=۲$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۱۹- گزینهٔ ۴ چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها برابر است، در نتیجه $-\frac{a}{۲}=-۳$، پس $a=۶$. اگر دو طرف معادلهٔ خط دوم را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $۶x+۲y+۲k=۰$ درمی‌آید. چون فاصلهٔ این دو خط $\sqrt{۱۰}$ است، پس (چون $k>۰$)

$$\frac{|۲k+۶|}{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\frac{۲k+۶}{\sqrt{۴۰}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow k=۷$$

بنابراین $a+k=۱۳$.

۲۰- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ خط‌های موازی $۳x+۴y+۶=۰$ و $۳x+۴y-۶=۰$ برابر است با

$$\frac{|۶+۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$$

در نتیجه، چون مساحت مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین، طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

آزمون ۴

۱- گزینهٔ ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل n ام، $۴+۹(n-۱)$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۲- گزینهٔ ۱ در شکل n ام تعداد مثلث‌های رنگ شده برابراست با

$$۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

برای این‌که بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n^۲-n-۷۲=۰\Rightarrow(n-۹)(n+۸)=۰$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=۹$، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۳- گزینهٔ ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل n ام برابر است با

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل n ام برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل n ام برابر است با

$$\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$$

به این ترتیب

$$\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۸}{۱۷}\Rightarrow n=۱۷$$

۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=۳n^۲-n+۲a_۱\xrightarrow{n=۱}a_۱=۳-۱+۲a_۱\Rightarrow a_۱=-۲$$

بنابراین

$$a_۴=۳\times۱۶-۴+۲(-۲)=۴۰$$

۵- گزینهٔ ۳ چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_۱=a_۲\Rightarrow\frac{۲-k}{۸}=\frac{۴-k}{۱۳}\Rightarrow۲۶-۱۳k=۳۲-۸k$$

$$۵k=-۶\Rightarrow k=-\frac{۶}{۵}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{۶}{۵}$، آن‌گاه $a_n=\frac{۲}{۵}$.