# فصل ۲

## قسمت سوم

## احتمال شرطی

### احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه)

در بعضی مواقع ممکن است به ما اطلاعاتی بدهند که این اطلاعات در احتمال وقوع پیشامد مورد نظر ما مؤثر باشد.

به عنوان مثال، در پرتاب یک تاس احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۶}$ است. اما اگر بدانیم عدد رو شده عددی اول است، در واقع عدد ظاهرشده یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ (۳ حالت) می‌باشد، در این صورت احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. پس گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامد دیگر تأثیر می‌گذارد.

**احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه**

در حالتی‌که فضای احتمال، هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه در نظر بگیریم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

### محاسبهٔ احتمال شرطی در فضاهای نمونه‌ای هم‌شانس

در محاسبهٔ احتمال شرطی، همهٔ حالت‌های ممکن برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آن‌ها B رخ داده است. در واقع B فضای نمونه‌ای جدید ما خواهد بود و تمام حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی از B است که در A باشند.

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس داریم:

$$P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

در حل مسائل احتمال شرطی، پیشامد B (پیشامدی که می‌دانیم رخ داده است) را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم و اعضای پیشامد A را در فضای نمونه‌ای جدید مشخص می‌کنیم (در واقع $A\cap B$) و سپس احتمال را در فضای نمونه‌ای جدید به‌دست می‌آوریم.

**مثال**

**در پرتاب دو تاس با هم، اگر مجموع دو عدد رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که هر دو عدد رو شده زوج باشد را به‌دست آورید.**

**پاسخ:** فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس (بدون هیچ شرطی)، $۶\times۶=۳۶$ عضو به‌صورت زیر دارد:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۱,۶),\dots,(۶,۱),\dots,(۶,۶)\}$$

طبق فرض، مجموع دو عدد رو شده کم‌تر از ۶ است، پس همهٔ حالت‌های ممکن، تمام زوج‌مرتب‌هایی از S است که مجموع آن‌ها کم‌تر از ۶ باشد، داریم:

$$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}\Rightarrow n(B)=۱۰$$

حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی از B (فضای نمونه‌ای جدید) است که هر دو عدد رو شده زوج باشند. اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۲,۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۱۰}$$

**تذکر مهم** در حل مثال قبل، نیازی به نوشتن فضای نمونه‌ای S نداریم، اما باید از روی S، پیشامد B را مشخص کنیم.

**تست**

**یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر سه عدد رو شده زوج باشند، احتمال آن‌که هیچ‌یک از اعداد رو شده ۶ نباشند، کدام است؟**

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

**پاسخ:** اگر B پیشامد زوج بودن عدد رو شده در هر سه پرتاب تاس باشد، آن‌گاه عدد رو شده در هر پرتاب یکی از سه عدد زوج است و در نتیجه:

$$n(B)=\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}=۲۷$$

اگر A پیشامدی باشد که هیچ‌یک از سه عدد رو شده ۶ نباشد، آن‌گاه در هر حالت یکی از دو عدد ۲ یا ۴ رو شده است (می‌دانیم عدد رو شده، زوج است):

$$\Rightarrow n(A\cap B)=\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}=۸\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۸}{۲۷}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

**مثال**

**در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد، با چه احتمالی عدد ۲ ظاهر می‌شود؟**

**پاسخ:** اگر B پیشامد رو شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاس باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}\Rightarrow n(B)=۱۱$$

اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۲ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۲,۵),(۵,۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۱۱}$$

**مثال**

**در یک خانواده با سه فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با چه احتمالی این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟** (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

**پاسخ:** فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن، فرزند اول پسر باشد، آن‌گاه:

B = { (پ، پ، پ) ، (پ، پ، د) ، (پ، د، پ) ، (پ، د، د) } $\Rightarrow n(B)=۴$

اگر A پیشامدی باشد که در آن، خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر داشته باشد، آن‌گاه:

A∩B = { (پ، پ، د) ، (پ، د، پ) } $\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

**مثال**

**از بین ۵ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و ۳ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی، سه نفر به تصادف انتخاب‌شده‌اند. اگر حداقل دو دانش‌آموز رشتهٔ تجربی در بین انتخاب‌شدگان باشند، با کدام احتمال دقیقاً دو نفر از انتخاب‌شدگان از رشتهٔ تجربی می‌باشند؟**

**پاسخ:** می‌دانیم از بین ۳ نفر انتخاب‌شده، حداقل ۲ نفر آنان از رشتهٔ تجربی هستند، بنابراین اگر B پیشامدی باشد که رخ داده باشد (حداقل دو دانش‌آموز رشتهٔ تجربی، بین انتخاب‌شدگان وجود دارند)، آن‌گاه:

B : ۲ نفر از رشتهٔ تجربی و ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی یا هر سه نفر از رشتهٔ تجربی $\Rightarrow n(B)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}=۱۰\times۳+۱۰=۴۰$

اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو نفر از انتخاب‌شدگان از رشتهٔ تجربی باشند، آن‌گاه:

A∩B : ۲ نفر از رشتهٔ تجربی و ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی $\Rightarrow n(A\cap B)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۳۰\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$

**مثال**

**اعداد ۱ تا ۸ را روی هشت کارت نوشته و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که دقیقاً ۲ کارت با شمارهٔ زوج باشد به شرط این‌که مجموع آن‌ها فرد باشد.**

**پاسخ:** اگر B (شرط) پیشامد آن باشد که مجموع ۳ عدد انتخاب‌شده فرد و A (پیشامد مطلوب) پیشامد آن باشد که دقیقاً ۲ کارت با شمارهٔ زوج انتخاب‌شده باشد، آن‌گاه داریم:

(اگر هر سه عدد فرد یا دو عدد زوج و دیگری فرد باشد، آن‌گاه جمع سه عدد فرد است.)

$$n(B)=\overset{\text{انتخاب ۳ عدد فرد از ۴ عدد فرد}}{\binom{۴}{۳}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب ۲ عدد زوج و یک عدد فرد}}=۴+۶\times۴=۲۸$$

در این صورت A∩B، پیشامدی است که باید دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب شود، داریم:

$$n(A\cap B)=\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}=۲۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲۴}{۲۸}=\frac{۶}{۷}$$

**تست**

**از ۹ کلید درون کیسه‌ای، ۴ تای آن‌ها طلایی‌رنگ است. قفلی داریم که فقط با کلیدهای طلایی‌رنگ باز می‌شود. اگر به تصادف دو کلید از این کیسه خارج کنیم و بتوان قفل را باز کرد، با چه احتمالی با هر دو کلید می‌توان قفل را باز کرد؟**

۱) $\frac{۷}{۲۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۳}{۱۳}$

**پاسخ:** اگر حداقل یکی از دو کلید طلایی‌رنگ باشد، آن‌گاه می‌توان قفل را باز کرد. پس اگر B پیشامد آن باشد که حداقل یکی از دو کلید انتخاب‌شده، طلایی‌رنگ باشد، آن‌گاه داریم:

$$n(B)=\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۲}=۴\times۵+۶=۲۶$$

اگر A پیشامدی باشد که بتوان با هر دو کلید، قفل را باز کرد، آن‌گاه A پیشامدی است که در آن هر دو کلید انتخاب‌شده طلایی‌رنگ می‌باشد، بنابراین داریم:

$n(A\cap B)=\binom{۴}{۲}=۶\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۶}{۲۶}=\frac{۳}{۱۳}\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) به‌صورت زیر است:

**تعریف** فرض کنید $A$ و $B$ دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > ۰$، در این صورت اگر $B$ رخ داده باشد، احتمال وقوع $A$ را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی $A$ به شرط وقوع $B$ می‌گوییم و از دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

**تذکر** در حالتی‌که $P(B) = ۰$، احتمال هیچ پیشامدی به شرط $B$ تعریف نمی‌شود.

**مثال**

**اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند به طوری‌که $P(A) = ۲P(B) = ۰/۴$ و $P(A\cup B) = ۰/۵$، مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آورید.**

**پاسخ:** با توجه به فرمول $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و مقدار $P(B) = ۰/۲$، باید مقدار $P(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \xrightarrow[P(A\cup B)=۰/۵]{P(A)=۰/۴ ,\, P(B)=۰/۲} ۰/۵ = ۰/۴ + ۰/۲ - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = ۰/۶ - ۰/۵ = ۰/۱ \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۱}{۰/۲} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

**مثال**

**یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد $a$، $b$، $c$ و $d$ است. اگر $P(a) = P(b) = \frac{۱}{۳}$ و $P(c) = P(d) = \frac{۱}{۶}$، مطلوب است:**

**آ) محاسبهٔ $P(\{a,b,c\})$**

**ب) محاسبهٔ $P(\{a,b,c\}|\{b,c,d\})$**

**پاسخ:** فضای نمونه‌ای به‌صورت $S = \{a,b,c,d\}$ است. $S$ یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است.

آ) طبق محاسبهٔ احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{a,b,c\}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۴+۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

ب) برای محاسبهٔ احتمال شرطی داده‌شده، با فرض $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{b,c,d\}$، باید مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{b,c\})}{P(\{b,c,d\})} \quad (۱)$$

طبق تعریف احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{b,c\}) = P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲+۱}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad (۲)$$

$$P(\{b,c,d\}) = P(b) + P(c) + P(d) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۶} = \frac{۲}{۳} \quad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

**تست**

**کارخانه‌ای به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به احتمال ۰/۲۵ به متخصصین جدید و به احتمال ۰/۴ به کارگران جدید و به احتمال ۰/۱۵ هم به متخصصین جدید و هم به کارگران جدید نیاز دارد. اگر این کارخانه به متخصصین جدید نیاز داشته باشد، با کدام احتمال به کارگران جدید نیاز دارد؟**

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

**پاسخ:** احتمال مورد نظر، احتمال شرطی است. پیشامدهای $A$ و $B$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$A$: کارخانه به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به متخصصین جدید نیاز داشته باشد.

$B$: کارخانه به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به کارگران جدید نیاز داشته باشد.

طبق فرض $P(A) = ۰/۲۵$، $P(B) = ۰/۴$ و $P(A\cap B) = ۰/۱۵$ می‌باشد. احتمال مطلوب، $P(B|A)$ است. طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{۰/۱۵}{۰/۲۵} = \frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

**مثال** در یخچال یک شیرینی‌فروشی ۱۴ کیک تولد وجود دارد که وزن هیچ دوتایی برابر نیستند. اگر یکی از این کیک‌ها را به تصادف انتخاب کنیم: (مشابه مثال صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

آ) احتمال این‌که وزن آن کیک از همه بیش‌تر باشد، چقدر است؟

ب) کیک دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از کیک اول سبک‌تر است. احتمال آن‌که وزن کیک اول از همه بیش‌تر باشد چه‌قدر است؟

**پاسخ:** آ) با توجه به این‌که یکی از ۱۴ کیک، سنگین‌تر از بقیه است، احتمال آن‌که کیکی را که انتخاب کرده‌ایم، سنگین‌ترین باشد برابر $\frac{۱}{۱۴}$ است.

ب) احتمال خواسته‌شده یک احتمال شرطی است. با معرفی پیشامدهای $A$ و $B$ به صورت زیر، مقدار $P(A|B)$ را از فرمول $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ به‌دست می‌آوریم:

$A$ : کیک اول، سنگین‌ترین کیک باشد. $B$ : کیک دوم سبک‌تر از کیک اول باشد.

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۱۴}$$

در نیمی از حالات، کیک اول سنگین‌تر از کیک دوم است و در نیمی از حالات دیگر، کیک دوم سنگین‌تر از کیک اول است، بنابراین:

$$P(B)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۷}$$

## قانون ضرب احتمالات

از رابطهٔ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، تساوی $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ به‌دست می‌آید که به آن قانون ضرب احتمالات می‌گوییم و از این قانون برای به‌دست آوردن احتمال هم‌زمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

**مثال** درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را به‌دست آورید. (مشابه مثال صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی)

**پاسخ:** فرض کنیم $A$ پیشامد سالم بودن لامپ اول و $B$ پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد. می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

$$P(A)=\frac{۴}{۵}\quad,\quad P(B|A)=P(\text{لامپ دوم معیوب | لامپ اول سالم})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۵}$$

**مثال** ۵۵ درصد جمعیت جامعه‌ای را که ۶۰ درصد این جامعه باسواد هستند، زنان تشکیل می‌دهند. اگر نیمی از زنان این جامعه باسواد باشند و یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص، زن یا باسواد می‌باشد؟

**پاسخ:** فرض کنیم $A$ پیشامد زن بودن شخص انتخاب‌شده و $B$ پیشامد باسواد بودن وی باشد. طبق فرض $P(A)=۰/۵۵$، $P(B)=۰/۶$ و $P(B|A)=۰/۵$ (نیمی از زنان جامعه باسواد هستند) می‌باشد. داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۵=\frac{P(B\cap A)}{۰/۵۵}\xrightarrow{A\cap B=B\cap A}P(A\cap B)=۰/۵\times۰/۵۵=۰/۲۷۵$$

می‌خواهیم $P(A\cup B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵۵+۰/۶-۰/۲۷۵=۰/۸۷۵$$

**تست** ۶۰ درصد کارکنان یک سازمان، مرد هستند. ۲۵ درصد کل کارکنان این سازمان و ۲۰ درصد کارکنان مرد این سازمان، چاق هستند. اگر یک نفر از بین آن‌ها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال مرد یا چاق می‌باشد؟

۱) ۰/۸۲ ۲) ۰/۷۸ ۳) ۰/۷۳ ۴) ۰/۷

**پاسخ:** $B\Rightarrow P(B)=۰/۲۵$ : پیشامد چاق بودن فرد انتخاب‌شده ، $A\Rightarrow P(A)=۰/۶$ : پیشامد مرد بودن شخص انتخاب‌شده

$$P(\text{چاق بودن | مرد بودن})=P(B|A)=۰/۲\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=۰/۲\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{۰/۶}=۰/۲\Rightarrow P(B\cap A)=۰/۶\times۰/۲=۰/۱۲$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۲۵-۰/۱۲=۰/۷۳\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

**نکته** قانون ضرب احتمال را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت:

اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند، آن‌گاه:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲ | A_۱)P(A_۳ | A_۱ \cap A_۲)$$

و می‌توان این قانون را برای هر $n$ پیشامد $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_n$ با احتمال مثبت تعمیم داد:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n) = P(A_۱)P(A_۲ | A_۱)\cdots P(A_n | A_۱ \cap \cdots \cap A_{n-۱})$$

**مثال**

**در کیسه‌ای ۲ گوی سفید، ۳ گوی سیاه و ۳ گوی سبز وجود دارد. از کیسه سه گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال این‌که گوی اول سبز، گوی دوم سفید و گوی سوم سیاه باشد را به‌دست آورید.** (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

**پاسخ:** پیشامدهای $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$A_۱$: گوی اول سبز　　$A_۲$: گوی دوم سفید　　$A_۳$: گوی سوم سیاه

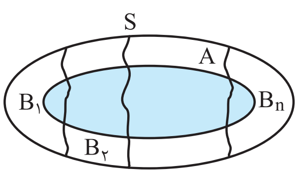
مقدار $P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳)$ مطلوب است. طبق قانون ضرب احتمالات برای سه پیشامد داریم:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲ | A_۱)P(A_۳ | A_۱ \cap A_۲)$$

در ابتدا ۸ گوی درون کیسه قرار دارد که ۳ تای آن‌ها سبز می‌باشند، بنابراین احتمال آن‌که گوی اول خارج‌شده سبز باشد برابر $P(A_۱) = \frac{۳}{۸}$ می‌باشد. با خارج شدن یک گوی سبز، ۷ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که ۲ تای آن‌ها سفید هستند، بنابراین اگر گوی دوم را خارج کنیم، آن‌گاه احتمال سفید بودن آن برابر $P(A_۲ | A_۱) = \frac{۲}{۷}$ است و در نهایت با خارج کردن این گوی از کیسه، ۶ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که ۳ تای آن‌ها سیاه هستند. پس با خارج کردن گوی سوم، احتمال سیاه بودن آن برابر $P(A_۳ | A_۱ \cap A_۲) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ است. پس داریم:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = \frac{۳}{۸} \times \frac{\cancel{۲}}{۷} \times \frac{۱}{\cancel{۲}} = \frac{۳}{۵۶}$$

## قانون احتمال کل (احتمال‌های چندشاخه‌ای)

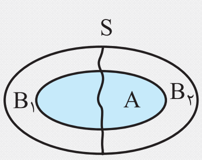



فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ... و $B_n$ پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه $A$ داریم:

$$\mathbf{P(A) = P(B_۱)P(A | B_۱) + \cdots + P(B_n)P(A | B_n) = \sum_{i=۱}^{n} P(B_i)P(A | B_i)}$$

**مثال**

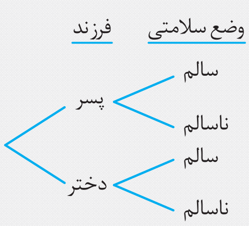
**فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد.**



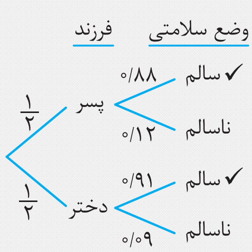

**پاسخ:** فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $B_۱$ و دختر بودن آن را با $B_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $B_۱$ و $B_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با $A$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$ را حساب کنیم.

$$P(A) = P(B_۱)P(A | B_۱) + P(B_۲)P(A | B_۲) = \frac{۱}{۲} \times (۱ - ۰/۱۲) + \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۰۹) = ۰/۴۴ + ۰/۴۵۵ = ۰/۸۹۵$$

برای این مسئله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری به‌صورت مقابل دست می‌یافتیم:




اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم، خواهیم نوشت:




حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجهٔ حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

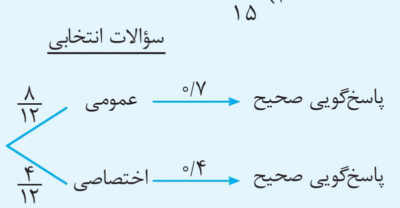
$$\underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۰/۸۸}_{\text{شاخهٔ اول}} + \underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۰/۹۱}_{\text{شاخهٔ دوم}} = ۰/۸۹۵$$

**تست**

**احتمال پاسخ‌گویی صحیح به سؤالات اختصاصی و عمومی در یک آزمون به ترتیب ۰/۴ و ۰/۷ است. اگر از بین ۴ سؤال اختصاصی و ۸ سؤال عمومی یک سؤال به تصادف انتخاب شود، احتمال پاسخ‌گویی صحیح به این سؤال چقدر است؟**

۱) $\frac{۳}{۵}$    ۲) $\frac{۲}{۵}$    ۳) $\frac{۲}{۱۵}$    ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

**پاسخ:** اطلاعات مسئله را در نمودار درختی روبه‌رو، خلاصه می‌کنیم:




بنابر احتمال کل داریم:

$$P(\text{پاسخ‌گویی صحیح}) = \frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۰}+\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۵۶+۱۶}{۱۲۰}=\frac{۷۲}{۱۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

**مثال**

**درون کیسهٔ A ، ۳ کارت سفید و ۴ کارت سیاه و درون کیسهٔ B ، ۲ کارت سفید و ۵ کارت سیاه وجود دارد. کارتی به تصادف از درون کیسهٔ A انتخاب کرده و بدون نگاه کردن آن را درون کیسهٔ B قرار می‌دهیم. سپس از کیسهٔ B کارتی به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن کارت خارج‌شده از کیسهٔ B کدام است؟**

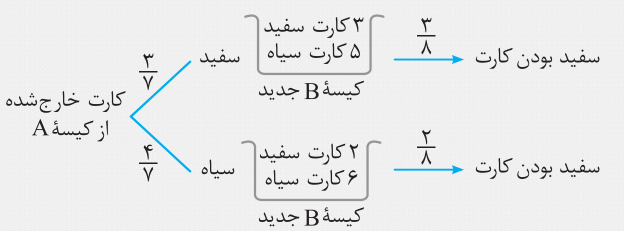
**پاسخ:** دو حالت برای کارتی که از کیسهٔ A خارج می‌کنیم وجود دارد:

**حالت اول:** کارت خارج‌شده سفید است. احتمال خارج کردن کارت سفید از کیسهٔ A برابر $\frac{۳}{۷}$ است. با قرار دادن این کارت سفید درون کیسهٔ B، تعداد کارت‌های سفید کیسهٔ B، $۳ = ۱ + ۲$ خواهد شد. احتمال انتخاب یک کارت سفید از این کیسهٔ جدید برابر $\frac{۳}{۸}$ است.

**حالت دوم:** کارت خارج‌شده سیاه است. احتمال خارج کردن کارت سیاه از کیسهٔ A برابر $\frac{۴}{۷}$ است. با قرار دادن این کارت سیاه درون کیسهٔ B، تعداد کارت‌های سفید کیسهٔ A تغییر نمی‌کند ولی تعداد کارت‌های سیاه برابر $۶ = ۱ + ۵$ می‌شود و در نتیجه احتمال انتخاب یک کارت سفید از این کیسهٔ جدید برابر $\frac{۲}{۸}$ می‌شود.

نمودار درختی و احتمال مطلوب به‌صورت مقابل می‌باشد.

$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن کارت}) = \frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۹+۸}{۵۶}=\frac{۱۷}{۵۶}$$

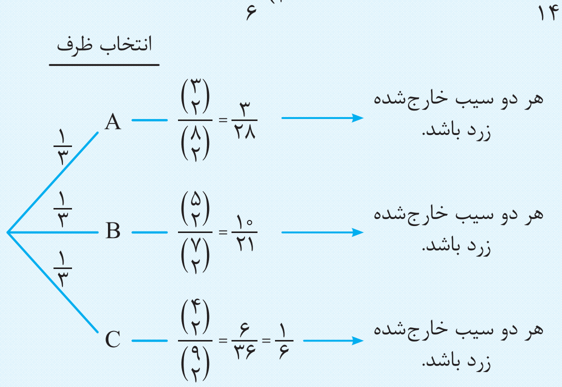



**تست**

**درون ظرف A ، ۳ سیب زرد و ۵ سیب قرمز، درون ظرف B ، ۵ سیب زرد و ۲ سیب قرمز و در ظرف C ، ۴ سیب زرد و ۵ سیب قرمز وجود دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس ۲ سیب از آن خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو سیب خارج‌شده زرد باشند، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$    ۲) $\frac{۱}{۸}$    ۳) $\frac{۱}{۱۴}$    ۴) $\frac{۱}{۶}$

**پاسخ:** نمودار درختی به‌صورت مقابل درمی‌آید:




$$P(\text{هر دو سیب خارج‌شده زرد باشند}) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۲۸}+\frac{۱۰}{۲۱}+\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۹+۴۰+۱۴}{۲۸\times۳}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶۳}{۲۸\times۳}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

**مثال**

**درون جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه قرار دارد. یک مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم و سپس مهرهٔ دیگری از بین ۸ مهرهٔ باقی‌مانده خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟**

**پاسخ:** مهرهٔ اولی که از جعبه خارج می‌کنیم، یا سفید است یا سیاه. پیشامدهای $B_۱$ و $B_۲$ که فضای نمونه‌ای $S$ را به دو مجموعه افراز می‌کنند، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$B_۱$ : مهرهٔ اول خارج‌شده سفید است.   $B_۲$ : مهرهٔ اول خارج‌شده سیاه است.

داریم: $P(B_۱)=\frac{۵}{۹}$ ، $P(B_۲)=\frac{۴}{۹}$

اگر $A$ پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم باشد، آن‌گاه با خارج کردن یک مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سفید و ۴مهرهٔ سیاه در جعبه باقی می‌مانند، بنابراین داریم:

$$P(A\,|\,B_۱)=\frac{۴}{۸}$$

با خارج کردن یک مهرهٔ سیاه، ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه در جعبه باقی می‌مانند، بنابراین داریم: $P(A\,|\,B_۲)=\frac{۵}{۸}$

بنابر قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B_۱)P(A\,|\,B_۱)+P(B_۲)P(A\,|\,B_۲)=\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۰+۲۰}{۷۲}=\frac{۴۰}{۷۲}=\frac{۵}{۹}$$

در مثال قبل، عدد به‌دست‌آمده با حالتی که از ابتدا یک مهره برداریم و احتمال سفید بودن آن را به‌دست آوریم، برابر است. می‌توان این مطلب را به صورت نکتهٔ زیر نوشت:

**نکته** اگر از درون جعبه‌ای، تعدادی مهره بدون رؤیت خارج کنیم و سپس مهرهٔ دیگری از این جعبه خارج کنیم، آن‌گاه برای به‌دست آوردن احتمال مطلوب، احتمال حالتی را به‌دست می‌آوریم که اصلاً مهره‌ای از جعبه خارج نکرده‌ایم و این مهره اولین مهرهٔ خارج‌شده از جعبه است.

**نکته** می‌دانیم که دو پیشامد $B$ و $B'$، فضای نمونه‌ای $S$ را افراز می‌کنند. بنابراین ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=۲$ است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید $B$ پیشامدی باشد که $۰<P(B)<۱$، در این صورت برای هر پیشامد دلخواه $A$، داریم: $P(A)=P(B)P(A\,|\,B)+P(B')P(A\,|\,B')$

## قانون بیز

مدیر شرکتی که تولیدکنندهٔ پوشاک گرم است، فکر می‌کند به احتمال ۶۰ درصد دمای زمستان امسال بین۸ تا ۱۰- درجهٔ سانتی‌گراد است و عددی را به عنوان تعداد تولیدی پوشاک گرم در نظر می‌گیرد. حال اگر این مدیر به واسطهٔ اخبار هواشناسی مطلع شود که دمای زمستان امسال خیلی پایین‌تر از سال‌های قبل خواهد بود، ممکن است به احتمالش بیفزاید و آن را مثلاً به عدد ۸۰ درصد برساند و در نتیجه به مقدار تولیدش بیفزاید.

قانون بیز که از قوانین مهم در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کند.

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. **فرضیات قانون بیز** کاملاً مشابه **فرضیات قانون احتمال کل** است. در واقع قانون بیز، نوعی محاسبهٔ احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است.

**فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ... و $B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه $A$ و هر $۱\le i\le n$ داریم:**

$$P(B_i\,|\,A)=\frac{P(B_i)P(A\,|\,B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ها بعد از مشاهدهٔ رخ دادن پیشامد $A$، به $P(B_i\,|\,A)$ها تبدیل می‌شوند.

گاهی قانون بیز را به شکل مقابل می‌نویسند:

$$P(B_i\,|\,A)=\frac{P(B_i)P(A\,|\,B_i)}{\sum\limits_{k=۱}^{n}P(B_k)P(A\,|\,B_k)}$$

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئلهٔ مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_k)$ها و $P(A\,|\,B_k)$ها هستند. توجه کنید که آن‌چه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، **طبق قانون احتمال کل، همان $P(A)$** است.

**مثال**

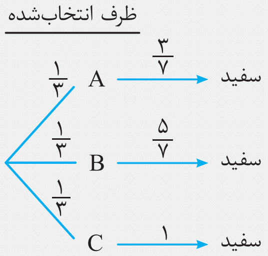
**در جعبه‌ای سه ظرف وجود دارد. ظرف $A$ شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه، ظرف $B$ شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و ظرف $C$ شامل تنها تعدادی مهرهٔ سفید است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس مهره‌ای از آن و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مشاهده کنیم مهرهٔ خارج‌شده سفید است، با چه احتمالی این مهره از ظرف $C$ خارج شده است؟**

**پاسخ:** مسئله نوعی احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است. این احتمال را باید از قانون بیز به‌دست آوریم. اگر $D$ پیشامد سفید بودن مهرهٔ خارج‌شده و $E$ پیشامد خارج شدن مهره از ظرف $C$ باشد، آن‌گاه $P(E\,|\,D)$، احتمال مطلوب است.

طبق فرمول احتمال شرطی، داریم:

$$P(E\,|\,D)=\frac{P(E\cap D)}{P(D)}$$

مقدار $P(D)$ را باید از قانون احتمال کل به‌دست آوریم. اطلاعات در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:




$$\Rightarrow P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{3}{21}+\frac{5}{21}+\frac{1}{3}=\frac{3+5+7}{21}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$$

از قانون ضرب احتمالات، داریم:

$$P(E\cap D)=P(E)P(D\mid E)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}\Rightarrow P(E\mid D)=\frac{P(E\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{7}{15}$$

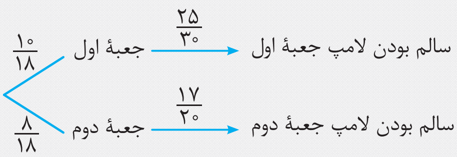
**مثال**

**در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبهٔ اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به‌صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم:**

**آ) احتمال آن‌که لامپ انتخاب‌شده از جعبهٔ جدید، سالم باشد چقدر است؟**

**ب) اگر بدانیم لامپ انتخاب‌شده از جعبهٔ جدید سالم است، با کدام احتمال این لامپ از جعبهٔ اول خارج‌شده است؟**

**پاسخ :** آ) جعبهٔ جدید را می‌توان به‌صورت دو دسته لامپ که یک دستهٔ آن لامپ‌های جعبهٔ اول و دستهٔ دیگر لامپ‌های جعبهٔ دوم است، در نظر گرفت. پس برای لامپی که از جعبهٔ جدید خارج می‌کنیم، دو حالت به‌وجود می‌آید. در نمودار درختی زیر، اطلاعات نوشته شده است:




$$\Rightarrow P(\text{سالم بودن لامپ})=P(A)=\frac{\cancel{10}}{18}\times\frac{25}{\cancel{30}_{3}}+\frac{\cancel{8}^{2}}{18}\times\frac{17}{\cancel{20}_{5}}=\frac{125+102}{18\times 15}=\frac{227}{270}$$

ب) احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی اما با فرضیات قانون احتمال کل می‌باشد.

اگر $A$ پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب‌شده و $B$ پیشامد خارج شدن لامپ از جعبهٔ اول باشد، باید $P(B\mid A)$ را با قانون بیز به‌دست آوریم:

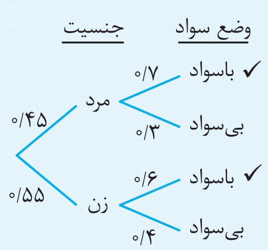
$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{18}\times\frac{25}{\cancel{30}}}{\frac{227}{\cancel{270}_{9}}}=\frac{\cancel{9}^{1}\times\cancel{10}^{5}\times 25}{\cancel{18}_{\cancel{2}\,1}\times 227}=\frac{125}{227}$$

**تست**

**۵۵ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۴۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. ۶۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردان باسواد می‌باشند. شخصی به تصادف از بین آنان انتخاب می‌کنیم، اگر شخص انتخاب‌شده باسواد باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مرد باشد، چقدر است؟**

۱) $\frac{27}{43}$ ۲) $\frac{21}{43}$ ۳) $\frac{41}{86}$ ۴) $\frac{47}{86}$

**پاسخ :** اطلاعات مسئله را در نمودار درختی روبه‌رو خلاصه می‌کنیم:




بنابراین احتمال باسواد بودن برابر است با:

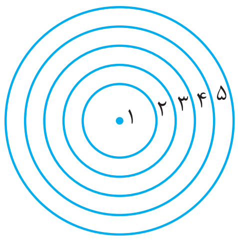
$$P(\text{باسواد بودن})=0/45\times 0/7+0/55\times 0/6=0/645$$

احتمال خواسته‌شده یک احتمال شرطی است. می‌دانیم که شخص انتخاب‌شده باسواد است $(B)$، می‌خواهیم احتمال مرد بودن وی $(A)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ P(B)=0/645$$

$$P(A\cap B)=0/45\times 0/7=0/315\Rightarrow P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/315}{0/645}=\frac{63}{129}=\frac{21}{43}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

★۲۸۴. در پرتاب دارت به صفحهٔ دایره‌ای شکل مقابل، اگر مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیهٔ کوچک‌تر در نظر بگیریم و احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ k اُم برابر $\frac{k}{a}$ باشد و اگر یک دارت پرتاب شود و بدانیم به یکی از این ۵ ناحیهٔ برخورد کرده است، با کدام احتمال دارت به ناحیهٔ شمارهٔ زوج اصابت کرده است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)




۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۸۵. بر روی یک تاس اعداد ۱، ۱، ۱، ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. در پرتاب یک بار این تاس، چقدر احتمال دارد که عدد فرد ظاهر شود؟ (مشابه فعالیت صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

## قسمت سوم: احتمال شرطی

### احتمال شرطی

☆۲۸۶. در پرتاب دو تاس سفید و سیاه با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده ۸ است. با کدام احتمال تاس سفید ۳ آمده است؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۵۴ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۸۷. در پرتاب دو تاس، اگر هر دو عدد رو شده اول باشند، با کدام احتمال مجموع آن‌ها نیز عددی اول است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

☆۲۸۸. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد حاصل، مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که شمارهٔ ظاهرشده ۲ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۸۹. تاس همگنی را با چشم بسته انداخته‌ایم و فقط می‌دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال این‌که شمارهٔ ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

☆۲۹۰. دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل شمارهٔ یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۹۱. در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود، احتمال این‌که دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۲۹۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد روشده مضرب ۳ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☆۲۹۳. یک خانوادهٔ چهار فرزندی با کدام احتمال، سه فرزند پسر دارد، در صورتی‌که حداقل یکی از فرزندان آن‌ها پسر است؟ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

**۲۹۴.** در یک خانوادهٔ سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر هستند؟(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

**۲۹۵.** یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی‌که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

☆**۲۹۶.** در یک خانوادهٔ سه فرزندی، می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

☆**۲۹۷.** در یک خانوادهٔ دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال، این خانواده دارای فرزند دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

**۲۹۸.** یک تاس و سپس سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده در پرتاب تاس زوج و فقط ۲ پرتاب از ۳ پرتاب سکه «پشت» بیاید، احتمال آن‌که عدد رو شدهٔ تاس ۲ و پرتاب اول سکه «پشت» بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

☆**۲۹۹.** دانشجویان دانشکده‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که دانشجوی زنی در مقطع کارشناسی ارشد مشغول به تحصیل باشد، کدام است؟

| | | جنسیت | |
|---|---|---|---|
| | | مرد | زن |
| مقطع تحصیلی | کارشناسی ارشد | ۲۵ | ۱۵ |
| | دکترا | ۱۵ | ۵ |

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

☆**۳۰۰.** اداره‌ای ۱۲ کارمند دارد که سن هیچ دو نفری یکسان نیست. یکی از کارمندان را به تصادف انتخاب می‌کنیم، سپس کارمند دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نباشد، با کدام احتمال کارمند اول مسن‌ترین کارمند است؟
(مشابه مثال صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

★**۳۰۱.** ارقام ۱، ۰، ۳، ۰، ۴، ۰، ۵ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. اگر عدد حاصل زوج باشد، احتمال آن‌که دو رقم یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

**۳۰۲.** از بین اعداد سه‌رقمی، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال مضرب ۴ می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

☆**۳۰۳.** درون کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۳ مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۳ قرار دارند. از این کیسه دو مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شمارهٔ ۲ باشد، با کدام احتمال مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☆**۳۰۴.** درون کیسه‌ای ۵ گوی سفید و ۴ گوی سیاه قرار دارد. از این کیسه دو گوی پی‌درپی و با جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر دو گوی خارج‌شده هم‌رنگ باشند، با کدام احتمال سفید می‌باشند؟

۱) $\frac{۱۶}{۴۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۴۱}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

☆**۳۰۵.** درون جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. اگر حداکثر یکی از مهره‌های خارج‌شده آبی باشد، با کدام احتمال دو مهرهٔ سیاه خارج شده است؟

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۲۵}{۵۶}$ ۳) $\frac{۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

☆**۳۰۶.** پنج مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و هم‌چنین ۵ مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

★**۳۰۷.** سه کارت یکسان داریم. دو طرف کارت اول آبی، دو طرف کارت دوم قرمز و یک طرف کارت سوم آبی و طرف دیگر آن قرمز است. کارتی را به تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک طرف آن آبی است. با کدام احتمال هر دو طرف آن آبی است؟ (مثال صفحهٔ ۵۸ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

**۳۰۸.** شخصی به تصادف به ۳ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ داده است. اگر این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، با کدام احتمال این شخص دقیقاً به دو سؤال با شمارهٔ فرد پاسخ داده است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

☆**۳۰۹.** اعداد ۱ تا ۹ را بر روی نُه کارت یکسان نوشته و سپس دو کارت به تصادف از بین آنان انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روی دو کارت کم‌تر از ۶ است، با کدام احتمال عدد روی یکی از کارت‌ها برابر ۴ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

**۳۱۰.** از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

**۳۱۱.** در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن‌ها معیوب است. به تصادف متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۱}$

**۳۱۲.** در کیسه‌ای ۲ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ زرد قرار دارد. از این کیسه دو مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده زرد می‌باشد؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۳۱}{۵۶}$

**۳۱۳.** درون ظرفی ۴ سیب و ۵ پرتقال وجود دارد. از این ظرف ۳ عدد از آن‌ها را به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال در ابتدا سیب و سپس دو پرتقال از ظرف خارج می‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

۱) $\frac{۲۵}{۱۲۶}$ ۲) $\frac{۸}{۶۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱۰}{۶۳}$

**۳۱۴.** بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد وارد سبد می‌شود و در غیر این صورت به احتمال ۷۰ درصد پرتاب‌هایش وارد سبد می‌شود. اگر این بسکتبالیست به هنگام پرتاب اول روحیهٔ خوبی داشته باشد و سه پرتاب متوالی انجام دهد، با کدام احتمال فقط پرتاب دوم وارد سبد نمی‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

۱) ۰/۲۴۳ ۲) ۰/۱۸۹ ۳) ۰/۰۶۳ ۴) ۰/۰۸۱

☆**۳۱۵.** شخصی در سه آزمون پی‌در پی شرکت می‌کند. احتمال قبولی وی در آزمون اول برابر ۰/۶ و احتمال قبولی وی در آزمون‌های بعدی به شرط قبولی یا عدم قبولی در آزمون قبل به ترتیب ۰/۸ و ۰/۵۵ است. شرط پذیرش، قبولی در حداقل دو آزمون است. احتمال پذیرش این شخص کدام است؟

۱) ۰/۶۲۵ ۲) ۰/۶۹۴ ۳) ۰/۷۲۲ ۴) ۰/۷۲۸

☆**۳۱۶.** دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

**۳۱۷.** اگر ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ درست باشد، احتمال آن‌که مقدم درست باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆۳۱۸. اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند، به طوری‌که $P(A)=0/3$ ، $P(B)=0/4$ و $P(A|B)=0/6$ ، آن‌گاه $P(B|A)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☆۳۱۹. اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند به طوری‌که $P(A)=0/2$ ، $P(B)=0/22$ و $P(B|A)=0/7$ ، آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) ۰/۹۶ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۸۴

۳۲۰. اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند به طوری‌که $A\subseteq B$ ، $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ ، آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{8}$

☆۳۲۱. یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ است. اگر $P(a)=\frac{1}{4}$ ، $P(b)=\frac{1}{6}$ ، $P(c)=2P(d)$ باشد، حاصل $P(\{a,c,d\}|\{b,c,d\})$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{18}$ ۲) $\frac{5}{18}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{7}{9}$

★۳۲۲. یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ و $e$ است. اگر $P(a)=\frac{1}{4}$ و $P(\{a,b,c\})=\frac{2}{3}$ باشد، احتمال $P(\{b,c,e\}|\{a,b,c\})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

## قانون احتمال کل

☆۳۲۳. پیشامدهای $B_1$ ، $B_2$ و $B_3$ یک افراز از فضای نمونه‌ای $S$ می‌باشند. به طوری‌که به ازای هر $i$ ، $i=1,2,3$ ، $P(B_i)=\frac{i}{6}$ و $P(A|B_i)=\frac{1}{4}$ ، احتمال وقوع پیشامد $A$ از این فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۲۴. سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{9}{20}$ ۲) $\frac{11}{20}$ ۳) $\frac{13}{40}$ ۴) $\frac{17}{40}$

☆۳۲۵. ظرف $A$ دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان $B$ و $C$ دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج‌شده، سفید است؟

(سراسری تجربی- ۹۳)

۱) $\frac{25}{63}$ ۲) $\frac{26}{63}$ ۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{11}{21}$

★۳۲۶. در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب نموده و دو مهره با هم و به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $\frac{31}{168}$ ۲) $\frac{11}{56}$ ۳) $\frac{17}{84}$ ۴) $\frac{13}{56}$

۳۲۷. کیسه‌ای شامل دو ظرف است که در ظرف اول ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف دوم ۶ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. اگر بخواهیم در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف، احتمال سیاه و سفید برابر باشد، چند مهرهٔ سیاه باید به ظرف دوم اضافه کنیم؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۲۸. دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و در دومی ۷ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{11}{27}$ ۳) $\frac{34}{81}$ ۴) $\frac{41}{81}$

☆**۳۲۹.** در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. سپس از بین باقی‌ماندهٔ مهره‌ها، به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

**۳۳۰.** در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج‌شده است. از ۵ مهرهٔ باقی‌مانده، یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

☆**۳۳۱.** در دو ظرف به‌ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهرهٔ یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهرهٔ سفید و در ظرف دوم ۳ مهرهٔ سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

**۳۳۲.** در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در یک جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید معیوب است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{۱۷}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$

**۳۳۳.** شش مهره با شماره‌های ۱،۲،۳،۴،۵،۶ در ظرفی قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و بدون جایگذاری، ۲ مهرهٔ دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره با شمارهٔ ۲ خارج‌شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

☆**۳۳۴.** یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد حاصل مضرب ۳ باشد، دو سکه را با هم و در غیر این‌صورت سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً ۲ بار «رو» ظاهر شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆**۳۳۵.** سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس را می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید، سه سکهٔ دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش، احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

**۳۳۶.** در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم. در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک سکه «رو» ظاهر می‌شود؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

**۳۳۷.** تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج ظاهر شود، دو تاس دیگر و اگر فرد ظاهر شود، یک تاس دیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع تاس‌های پرتاب‌شده برابر ۷ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

**۳۳۸.** در شهری ۷۰ درصد از راننده‌ها مرد و ۳۰ درصد زن هستند. احتمال این‌که یک رانندهٔ مرد تخلفی مرتکب شده باشد، ۰/۸ و این احتمال برای رانندهٔ زن ۰/۴۵ است. احتمال این‌که یک راننده در این شهر تخلفی مرتکب شده باشد، کدام است؟ (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱) ۰/۶۹۵ ۲) ۰/۶۶۵ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۶۲

☆**۳۳۹.** در آزمون ورودی دانشگاه، درصد شرکت‌کنندگان سه رشتهٔ تجربی، ریاضی و انسانی به‌ترتیب ۵۰، ۲۵ و ۲۵ می‌باشد. هم‌چنین درصد شرکت‌کنندگان دختر در سه رشته به ترتیب ۶۰، ۴۰ و ۴۰ می‌باشد. اگر یک نفر به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال دختر می‌باشد؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۵۶

☆**۳۴۰.** احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۹۱ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۰/۹۴

**۳۴۱.** ۹۵ درصد متهم‌هایی که به یک دادگاه آورده می‌شوند گناهکار می‌باشند. اگر در ۹۸ درصد مواقع هیئت منصفه تشخیص درست بدهد و یک نفر از متهم‌ها را به تصادف از بین آن‌ها انتخاب کنیم، با کدام احتمال گناهکار است؟

۱) ۰/۹۱۲ ۲) ۰/۹۳۲ ۳) ۰/۹۳۸ ۴) ۰/۹۴۶

**★۳۴۲.** در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچهٔ سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچهٔ سلامت دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

**☆۳۴۳.** احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

**۳۴۴.** ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

**★۳۴۵.** در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A ، B و C به ترتیب ۳۰، ۴۵ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A ، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۰/۹۷۵ ۲) ۰/۹۷۸ ۳) ۰/۹۸۲ ۴) ۰/۹۸۷

**☆۳۴۶.** نقشه‌های جغرافیایی با دو دستگاه متمایز و جدا از هم چاپ می‌شوند. درصد چاپ معیوب در ماشین اول ۴ و در ماشین دوم ۵ می‌باشد و تعداد نقشه‌های چاپ‌شدهٔ ماشین دوم سه برابر تعداد نقشه‌های چاپ‌شدهٔ ماشین اول است. اگر به تصادف یک نقشه انتخاب شود، با کدام احتمال این نقشه معیوب است؟ (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱) ۰/۰۴۳۳ ۲) ۰/۰۴۲۵ ۳) ۰/۰۴۴۵ ۴) ۰/۰۴۷۵

**۳۴۷.** در یک خانواده، احتمال داشتن گروه خونی A برای فرزند پسر ۰/۳ و برای فرزند دختر ۰/۴ است. اگر این خانواده دو فرزند داشته باشد، احتمال آن‌که گروه خونی هر دو فرزند از نوع A باشد، کدام است؟

۱) ۰/۴۷ ۲) $\frac{۴۷}{۴۰۰}$ ۳) $\frac{۴۹}{۴۰۰}$ ۴) ۰/۴۹

## قانون بیز

**☆۳۴۸.** اگر $B_1$ ، $B_2$ و $B_3$ افرازی از فضای نمونه‌ای S باشند، با توجه به اطلاعات زیر، مقدار $P(B_2 \mid A)$ کدام است؟

$$P(B_1)=۰/۲\ ,\ P(A\mid B_1)=۰/۰۱\ ,\ P(B_2)=۰/۳\ ,\ P(A\mid B_2)=۰/۰۲\ ,\ P(B_3)=۰/۵\ ,\ P(A\mid B_3)=۰/۰۵$$

۱) $\frac{۲}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

**۳۴۹.** سه جعبه سیب همانند داریم. اولی شامل ۲ سیب سالم و ۱۳ سیب لکه‌دار، دومی شامل ۳ سیب سالم و ۷ سیب لکه‌دار و سومی تنها شامل سیب‌های سالم است. با چشم بسته یکی از سه جعبه را انتخاب و از آن سیبی خارج می‌کنیم. اگر بدانیم سیب خارج‌شده سالم است، با کدام احتمال از جعبهٔ سوم خارج شده است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۳}$ ۲) $\frac{۳۰}{۴۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸۶}$ ۴) $\frac{۴۷}{۸۶}$

**★۳۵۰.** در یک کتابخانه، ۴۰ درصد کتاب‌ها به زبان فارسی و بقیه به زبان لاتین هستند. در میان کتاب‌های فارسی ۳۰ درصد و در میان کتاب‌های لاتین ۴۰ درصد جلد مقوایی دارند. اگر کتابی را به تصادف انتخاب و مشاهده کنیم که جلد مقوایی دارد، احتمال آن‌که به زبان لاتین باشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲۴ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

**☆۳۵۱.** درون کیسه‌ای سه سکه وجود دارد. سکهٔ اول همگن، دو طرف سکهٔ دوم «پشت» و در سکهٔ سوم، احتمال آمدن «رو» دو برابر احتمال آمدن «پشت» است. یکی از سکه‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم، سپس آن را پرتاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم «پشت» است، با چه احتمالی سکهٔ خارج‌شده همگن است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۱}$

**۳۵۲.** در یک جامعهٔ روستایی، ۶۰ درصد جمعیت آن را مردان و ۴۰ درصد آن را زنان تشکیل می‌دهند. می‌دانیم ۸۰ درصد مردان و ۳۰ درصد زنان به کار کشاورزی مشغول می‌باشند. اگر یک نفر از این جامعه به تصادف انتخاب کنیم و مشغول کار کشاورزی باشد، با کدام احتمال زن می‌باشد؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆**۳۵۳.** در ظرف اول ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه موجود است. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر ۵ یا ۶ بیاید مجاز هستیم که از ظرف اول سه مهره و در غیر این صورت از ظرف دوم سه مهره بیرون آوریم. اگر از مهره‌های خارج‌شده دقیقاً ۲ مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده‌اند؟

۱) $\frac{۴۲}{۷۱}$ ۲) $\frac{۳۵}{۶۷}$ ۳) $\frac{۳۹}{۷۱}$ ۴) $\frac{۳۲}{۶۷}$

**۳۵۴.** ۶۰ درصد تلفن‌های شرکتی توسط تلفنچی A و مابقی توسط تلفنچی B وصل می‌شود. شخص A از هر ۵۰ تلفن یکی و شخص B از هر ۲۰ تلفن یکی را اشتباه وصل می‌کنند. شکایتی در خصوص اشتباه وصل شدن تلفن رسیده است. احتمال این‌که شخص A آن را وصل کرده باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۱۲ ۳) ۰/۳۷۵ ۴) ۰/۶۲۵

★**۳۵۵.** در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

**۳۵۶.** فرض کنید از بین ۳ کارت با شماره‌های ۲ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر یک بار «رو» بیاید، احتمال این‌که شمارهٔ کارت خارج‌شده ۳ باشد، چقدر است؟ (مشابه تمرین ۱۸ صفحهٔ ۶۶ کتاب درسی)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

★**۳۵۷.** در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد داوطلبان در کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول‌شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از کلاس A است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۰/۴۳ ۲) ۰/۵۷
۳) ۰/۶۱ ۴) ۰/۶۳

☆**۳۵۸.** ۶۰ درصد واجدین شرایط در شهر A، ۷۰ درصد واجدین شرایط در شهر B و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر C در انتخابات ریاست جمهوری شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A، دو برابر تعداد واجدین شرایط شهر B و سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر C باشند و فردی به تصادف از بین رأی‌دهندگان این سه شهر انتخاب شود، با کدام احتمال از شهر B است؟ (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱) $\frac{۳۱}{۷۳}$ ۲) $\frac{۲۷}{۷۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۷۳}$ ۴) $\frac{۲۱}{۷۳}$

**۳۵۹.** جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی است. دو مهره را به تصادف خارج کرده و آن‌ها را بدون توجه به رنگشان کنار می‌گذاریم و سپس مهرهٔ سومی را خارج می‌کنیم. اگر سومین مهرهٔ خارج‌شده سفید باشد، با کدام احتمال دو مهرهٔ اول خارج‌شده آبی هستند؟

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۲۸}$

**۳۶۰.** کتابی توسط سه ویراستار A، B و C، ویرایش شده است که سهم ویراستاری آن‌ها به ترتیب ۴۰، ۳۵ و ۲۵ درصد است. احتمال آن‌که این سه نفر ویراستاری بدون غلط داشته باشند به ترتیب ۰/۹۸، ۰/۹۶ و ۰/۹ می‌باشد. اگر صفحه‌ای ویراستاری شده باشد ولی غلط نداشته باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مسئول ویراستاری آن صفحه، ویراستار A باشد چقدر است؟ (مشابه تمرین ۱۷ صفحهٔ ۶۶ کتاب درسی)

۱) $\frac{۳۵۲}{۹۵۳}$ ۲) $\frac{۳۶۱}{۹۵۳}$ ۳) $\frac{۳۶۸}{۹۵۳}$ ۴) $\frac{۳۹۲}{۹۵۳}$

**۳۶۱.** دانش‌آموزی در یک آزمون تستی چهارگزینه‌ای، گزینهٔ ۴۰ درصد سؤالات را به تصادف انتخاب کرده است. اگر بدانیم این دانش‌آموز، تستی را درست پاسخ داده است، با کدام احتمال این تست را به تصادف پاسخ داده است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

**۲۸۸** ۱ ۲ **۳** ۴

اگر $B$ پیشامدی باشد که برآمد حاصل، مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه:

$B=\{۱,۲,۴,۵\}$

شمارهٔ ۲ ظاهر شود: $A \Rightarrow A\cap B=\{۲\}\Rightarrow P(A|B)=\frac{۱}{۴}$

**۲۸۹** ۱ ۲ **۳** ۴

عدد حاصل زوج است: $B \Rightarrow B=\{۲,۴,۶\}$

عدد ظاهرشده ۴ یا ۶ است: $A\Rightarrow A\cap B=\{۴,۶\}\Rightarrow P(A|B)=\frac{۲}{۳}$

**۲۹۰** **۱** ۲ ۳ ۴

اگر $B$ پیشامدی باشد که در آن حاصل جمع شماره‌های دو تاس کم‌تر از ۶ باشد، آن‌گاه:

$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$

اگر $A$ پیشامدی باشد که در آن حداقل شمارهٔ یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، آن‌گاه:

$A\cap B=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

**۲۹۱** ۱ ۲ ۳ **۴**

احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی است. با فرض‌های زیر، داریم:

$B$: حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود.

$A$: دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهد.

$B=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}\Rightarrow n(B)=۱۱$

$A\cap B=\{(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۴$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۱۱}$$

**۲۹۲** ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر $B$ (پیشامد رخ داده) تمام حالت‌هایی در پرتاب دو تاس باشد که حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه $B'$ پیشامدی است که هر دو تاس مضرب ۳ است، بنابراین:

$B'=\{(۳,۳),(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)\}$

فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $(S)$، ۳۶ عضو دارد، بنابراین:

$B=S-B'\Rightarrow n(B)=۳۶-۴=۳۲$

اگر $A$ پیشامدی باشد که جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{\underbrace{(۱,۲),(۲,۱)}_{۳=\text{مجموع}},\underbrace{(۱,۵),(۲,۴),(۴,۲),(۵,۱)}_{۶=\text{مجموع}},\underbrace{(۴,۵),(۵,۴)}_{۹=\text{مجموع}}\}$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۸\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$$

**۲۹۳** **۱** ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای فرزندان خانواده با ۴ فرزند، $۲^۴=۱۶$ عضو دارد. اگر $B$ پیشامدی باشد که در آن، این خانواده حداقل یک فرزند پسر داشته باشد، آن‌گاه $B$ شامل تمام اعضای فضای نمونه‌ای $S$ به غیر از برآمد (د ، د ، د ، د) است، بنابراین:

$n(B)=n(S)-۱=۱۶-۱=۱۵$

اگر $A$ پیشامدی باشد که این خانواده دارای ۳ فرزند پسر باشد، آن‌گاه:

$A\cap B=\{$(پ،پ،پ،د) ، (پ،پ،د،پ) ، (پ،د،پ،پ) ، (د،پ،پ،پ)$\}$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۱۵}$$

**۲۹۴** ۱ **۲** ۳ ۴

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد.

اگر $B$ پیشامدی باشد که در آن یکی از فرزندان پسر باشد، آن‌گاه:

$B=S-\{$(د، د، د)$\}\Rightarrow n(B)=۸-۱=۷$

دو فرزند دختر: $A\Rightarrow A\cap B=\{$(پ، د، د) ، (د، پ، د) ، (د، د، پ)$\}$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۳\Rightarrow P(A|B)=\frac{۳}{۷}$$

**۲۹۵** ۱ ۲ ۳ **۴**

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانوادهٔ ۳ فرزندی، ۸ عضو دارد که فقط در یک حالت (پ، پ، پ) هیچ فرزندی دختر نمی‌باشد. بنابراین اگر $B$ پیشامدی باشد که در آن حداقل یک فرزند دختر باشد، آن‌گاه $B$، ۷ عضو دارد و اگر $A$ پیشامدی باشد که در آن حداقل دو فرزند دختر باشند، آن‌گاه:

$$n(A\cap B)=\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{۴}{۷}$$

**۲۹۶** ۱ ۲ ۳ **۴**

فرزند اول دختر است: $B=\{$(د،د،د)،(د،د،پ)،(د،پ،د)،(د،پ،پ)$\}$

$A$: لااقل یکی از فرزندان پسر

$\Rightarrow A\cap B=\{$(د، د، پ)،(د، پ، پ)،(د ، پ ، د)$\}$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۴}$$

**۲۹۷** ۱ ۲ **۳** ۴

حداقل یکی از فرزندان پسر است: $B=\{$(پ، د)،(د، پ)،(پ، پ)$\}$

خانواده دارای فرزند دختر است: $A\Rightarrow A\cap B=\{$(پ، د)،(د، پ)$\}$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{۲}{۳}$$

**۲۹۸** ۱ ۲ ۳ **۴**

پیشامدهای $A$ و $B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و سپس احتمال شرطی $P(A|B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$B$: عدد تاس زوج و فقط ۲ پرتاب از ۳ پرتاب سکه «پشت» بیاید.

از اصل ضرب برای به‌دست آوردن $n(B)$ استفاده می‌کنیم:

تعداد عددهای زوج تاس

$$n(B)=۳\times\binom{۳}{۲}=۳\times۳=۹$$

در ۳ پرتاب سکه، ۲ بار «پشت» بیاید.

$A$: عدد رو شدهٔ تاس ۲ و پرتاب اول سکه «پشت» بیاید.

عدد تاس ۲ باشد.

$$n(A\cap B)=۱\times۲=۲$$

$\{$(ر، پ، پ)،(پ، ر، پ)$\}$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۹}$$

**۲۹۹** ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به جدول، $۲۰=۵+۱۵$ دانشجوی زن مشغول به تحصیل می‌باشند که ۱۵ تای آن‌ها در مقطع کارشناسی ارشد می‌باشند؛ لذا احتمال مطلوب برابر $\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}$ است.

### ۳۰۰ — ۱ **۲** ۳ ۴

برای محاسبهٔ احتمال شرطی خواسته‌شده، پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A : کارمند اول مسن‌ترین کارمند است.

B : کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نیست.

برای به‌دست آوردن مقدار $P(A|B)$، داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

واضح است که $A\subseteq B$ می‌باشد (اگر کارمند اول مسن‌ترین کارمند باشد، آن‌گاه قطعاً کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نیست.)، در نتیجه داریم:

$$A\cap B=A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۱۲}$$

(احتمال آن‌که کارمندی که به تصادف از بین ۱۲ کارمند انتخاب می‌شود، مسن‌ترین کارمند باشد، برابر $\frac{۱}{۱۲}$ است.)

هم‌چنین $P(B)=\frac{۱}{۲}$ است. (در نیمی از حالات کارمند اول مسن‌تر از کارمند دوم است و در نیمی از حالات دیگر، کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول است). بنابراین:

$$P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

### ۳۰۱ — **۱** ۲ ۳ ۴

اگر پیشامد B، تمام اعداد زوج با ارقام ۱،۰،۳،۴،۵ باشد، آن‌گاه:

$$n(B)=\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}\times\underbrace{\frac{۱}{}}_{\text{رقم یکان ۴ است.}}=۲۴$$

اگر پیشامد A، مجموعهٔ تمام اعدادی باشند که در آن دو رقم یکسان (زوج) کنار هم باشند، در این صورت $A\cap B$ تمام اعداد زوجی خواهد بود که دو رقم سمت راست آن‌ها ۴ می‌باشند. بنابراین:

$$n(A\cap B)=\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}\times\underbrace{\frac{۱}{}\times\frac{۱}{}}_{\text{۲ رقم ۴}}=۶\Rightarrow P(A|B)=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

### ۳۰۲ — ۱ **۲** ۳ ۴

فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی مجموعهٔ تمام اعداد سه رقمی می‌باشد:

$$S=\{۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,\dots,۹۹۹\}$$

با توجه به شرط داده‌شده (مضرب ۳ بودن عدد انتخاب‌شده)، فضای نمونه‌ای جدید به‌صورت مقابل است: $B=\{۱۰۲,۱۰۵,\dots,۹۹۹\}$

$$\Rightarrow n(B)=\underbrace{\left[\frac{۹۹۹}{۳}\right]}_{\text{تعداد اعداد مضرب ۳ کم‌تر از ۱۰۰۰}}-\underbrace{\left[\frac{۹۹}{۳}\right]}_{\text{تعداد اعداد مضرب ۳ کم‌تر از ۱۰۰}}=۳۳۳-۳۳=۳۰۰$$

اگر A پیشامد مضرب ۴ بودن عدد انتخاب‌شده باشد، آن‌گاه $A\cap B$ مجموعهٔ تمام اعداد سه رقمی مضرب ۱۲ می‌باشد:

$$A\cap B=\{۱۰۸,۱۲۰,\dots\}$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=\left[\frac{۹۹۹}{۱۲}\right]-\left[\frac{۹۹}{۱۲}\right]=۸۳-۸=۷۵$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۷۵}{۳۰۰}=\frac{۱}{۴}$$

### ۳۰۳ — ۱ ۲ **۳** ۴

اگر B پیشامدی باشد که در آن حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شمارهٔ ۲ باشد، آن‌گاه: b : سیاه ، w : سفید

$$B=\{(w_۲,w_۱),(w_۲,w_۳),(w_۲,w_۴),(w_۲,b_۱),(w_۲,b_۲),(w_۲,b_۳),(w_۱,w_۲),(w_۳,w_۲),(w_۴,w_۲),(b_۱,w_۲),(b_۲,w_۲),(b_۳,w_۲)\}\Rightarrow n(B)=۱۲$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(b_۲,w_۲),(w_۲,b_۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

### ۳۰۴ — ۱ **۲** ۳ ۴

اگر B پیشامدی باشد که در آن دو گوی خارج‌شده هم‌رنگ باشند، آن‌گاه:

B: گوی دوم سیاه و گوی اول سیاه یا گوی دوم سفید و گوی اول سفید

$$\Rightarrow n(B)=۵\times۵+۴\times۴=۴۱$$

توجه کنیم که در آزمایش‌های با جایگذاری، مهرهٔ خارج‌شده را دوباره به کیسه برمی‌گردانیم.

اگر A پیشامدی باشد که در آن هر دو گوی خارج‌شده سفید باشند، آن‌گاه:

$$n(A\cap B)=۵\times۵=۲۵\Rightarrow P(A|B)=\frac{۲۵}{۴۱}$$

### ۳۰۵ — ۱ **۲** ۳ ۴

B : حداکثر یک مهرهٔ خارج‌شده آبی باشد.

$$n(B)=\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۸}{۲}}_{\text{یک مهرهٔ آبی و دو مهرهٔ غیر آبی}}+\underbrace{\binom{۲}{۰}\binom{۸}{۳}}_{\text{هر سه مهره، غیر آبی}}=۲\times۲۸+۵۶=۲\times۵۶$$

اگر A پیشامد خارج شدن دو مهرهٔ سیاه از جعبه باشد، آن‌گاه:

$A\cap B$: دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ آبی از جعبه خارج شود یا دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ سفید از جعبه بیرون بیاید.

$$\Rightarrow n(A\cap B)=\binom{۵}{۲}\binom{۲}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۱۰\times۲+۱۰\times۳=۵۰$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۵۰}{۲\times۵۶}=\frac{۲۵}{۵۶}$$

### ۳۰۶ — ۱ **۲** ۳ ۴

اگر B پیشامدی باشد که در آن مجموع شماره‌های دو مهره ۶ باشد، آن‌گاه: b = مهرهٔ سیاه ، w = مهرهٔ سفید

$$B=\{\{w_۲,w_۴\},\{w_۱,w_۵\},\{b_۲,b_۴\},\{b_۱,b_۵\},\{w_۲,b_۴\},\{w_۵,b_۱\},\{w_۴,b_۲\},\{w_۳,b_۳\},\{w_۱,b_۵\}\}\Rightarrow n(B)=۹$$

اگر A پیشامدی باشد که هر دو مهره هم‌رنگ باشند، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{\{w_۲,w_۴\},\{w_۱,w_۵\},\{b_۲,b_۴\},\{b_۱,b_۵\}\}$$

$$n(A\cap B)=۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۹}$$

**۳۰۷** ۱ ۲ **۳** ۴

اگر B پیشامدی باشد که طرف مشاهده‌شدهٔ کارت انتخابی آبی و A پیشامدی باشد که هر دو طرف کارت انتخابی آبی باشد، باید $P(A|B)$ را به‌دست آوریم. داریم: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

چون ۳ طرفِ کارت‌ها، آبی و ۳ طرف دیگر آن قرمز است، پس:

$$P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

هم‌چنین:

اگر دو طرف کارت آبی باشد، آن‌گاه حتماً طرف مشاهده‌شده آبی است.

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳} \quad (۲)$$

دو طرف یکی از سه کارت آبی است.

$$(۱),(۲)\Rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

**۳۰۸** ۱ ۲ **۳** ۴

اگر B پیشامدی باشد که این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، آن‌گاه B تمام حالاتی است که به دو سؤال از ۹ سؤال بعدی پاسخ داده است، لذا:

$$n(B)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times ۸}{۲}=۳۶$$

اگر A پیشامدی باشد که این شخص دقیقاً به دو سؤال از ۵ سؤال با شمارهٔ فرد پاسخ داده باشد، آن‌گاه $A\cap B$ تمام حالاتی است که به سؤال اول و یکی از ۴ سؤال با شمارهٔ فرد دیگر و یک سؤال از ۵ سؤال با شمارهٔ زوج پاسخ داده است، لذا:

$$n(A\cap B)=\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}=۲۰$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

**۳۰۹** **۱** ۲ ۳ ۴

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A: عدد روی یکی از کارت‌ها ۴ است.

B: مجموع اعداد روی دو کارت کم‌تر از ۶ است.

می‌خواهیم $P(A|B)$ را به‌دست آوریم. داریم (چون دو کارت را با هم خارج می‌کنیم، پس ترتیب وجود ندارد و در نتیجه به‌صورت یک مجموعهٔ دوعضوی می‌نویسیم):

$$B=\{\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۲,۳\}\}\Rightarrow n(B)=۴$$

$$A\cap B=\{\{۱,۴\}\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۴}$$

**۳۱۰** ۱ ۲ **۳** ۴

اگر A پیشامد هم‌رنگ بودن هر دو کارت باشد، آن‌گاه دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: کارت اول سبز و کارت دوم نیز سبز باشد.

حالت دوم: کارت اول سفید و کارت دوم نیز سفید باشد.

در حالت اول، احتمال مطلوب برابر است با:

یک کارت سبز کم می‌شود.

$$P_1=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱۲}{۴۲}$$

یک کارت کم می‌شود.

در حالت دوم، احتمال مطلوب برابر است با:

یک کارت سفید کم می‌شود.

$$P_2=\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۶}{۴۲}$$

یک کارت کم می‌شود.

بنابراین احتمال مطلوب برابر $\frac{۱۲}{۴۲}+\frac{۶}{۴۲}=\frac{۱۸}{۴۲}=\frac{۳}{۷}$ می‌باشد.

**۳۱۱** **۱** ۲ ۳ ۴

برای آن‌که در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب باشد، باید دو لامپ اول خارج‌شده، سالم و لامپ سوم معیوب باشد. چون خارج کردن لامپ از جعبه، بدون جایگذاری است، در هر مرحله یک لامپ از جعبه کم می‌شود.

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=\underbrace{\frac{۶}{۸}\times\frac{۵}{۷}}_{\text{دو لامپ اول سالم}}\times\underbrace{\frac{۲}{۶}}_{\text{لامپ سوم معیوب}}=\frac{۵}{۲۸}$$

**۳۱۲** ۱ **۲** ۳ ۴

متمم عبارت «حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده زرد می‌باشد»، عبارت «هیچ‌یک از دو مهرهٔ خارج‌شده زرد نیستند.» می‌باشد. چون مهره‌ها به ترتیب و بدون جایگذاری خارج شده است، با معرفی پیشامدهای A و B به‌صورت زیر، مقدار $P(A\cap B)$ مطلوب است:

A: مهرهٔ اول زرد نباشد.

B: مهرهٔ دوم زرد نباشد.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{۴}{\cancel{۸}}}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

(مقدار $P(A)$، احتمال آن است که مهرهٔ اول خارج‌شده زرد نباشد که این مقدار برابر $\frac{۶}{۸}$ است. با خارج کردن این مهرهٔ غیر زرد، درون کیسه ۷ مهره باقی می‌ماند که ۵ تای آن‌ها غیر زرد هستند، بنابراین $P(B|A)=\frac{۵}{۷}$)

بنابراین احتمال آن‌که حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده زرد باشد برابر است با:

$$P(\text{حداقل یک مهره زرد})=۱-P(\text{هیچ‌کدام زرد نباشد})=۱-\frac{۱۵}{۲۸}=\frac{۱۳}{۲۸}$$

**۳۱۳** ۱ ۲ ۳ **۴**

پیشامدهای A، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: میوهٔ خارج‌شدهٔ اول سیب باشد.

B: میوهٔ دوم خارج‌شده، پرتقال باشد.

C: میوهٔ سوم خارج‌شده، پرتقال باشد.

باید مقدار $P(A\cap B\cap C)$ را به‌دست آوریم که طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)=\frac{۴}{۹}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۱۰}{۶۳}$$

**۳۱۴** ۱ ۲ **۳** ۴

می‌خواهیم احتمال آن را به‌دست آوریم که پرتاب اول و سوم وارد سبد شود و پرتاب دوم وارد سبد نشود. پیشامدهای A، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: پرتاب اول وارد سبد شود. B: پرتاب دوم وارد سبد نشود.

C: پرتاب سوم وارد سبد شود.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)=۰/۹\times ۰/۱\times ۰/۷=۰/۰۶۳$$

### ۳۱۵
۱ ۲ **۳** ۴

فرض کنیم پیشامد قبولی در آزمون‌های اول، دوم و سوم به ترتیب $A$، $B$ و $C$ باشند. مقدار $P(A)$ برابر ۰/۶ است. ولی مقدار $P(B)$ و $P(C)$ به آزمون قبل آن بستگی دارد. به عنوان مثال:

$P(B|A)=P$ (قبولی در آزمون دوم به شرط قبولی در آزمون اول) $=۰/۸$

چون شرط پذیرش، قبولی درحداقل دو آزمون است، حالت‌های زیر قابل قبول است:

**حالت اول:** قبولی در آزمون‌های اول و دوم و عدم قبولی در آزمون سوم

در این حالت مقدار $P(A\cap B\cap C')$ مطلوب است، داریم:

$$P(A\cap B\cap C')=P(A)P(B\,|\,A)\underbrace{P(C'\,|\,B)}_{\text{عدم قبولی به شرط قبولی در آزمون قبل}}$$

$$=۰/۶\times ۰/۸\times(۱-۰/۸)=۰/۰۹۶$$

**حالت دوم:** قبولی در آزمون‌های اول و سوم و عدم قبولی در آزمون دوم

در این حالت مقدار $P(A\cap B'\cap C)$ مطلوب است، داریم:

$$P(A\cap B'\cap C)=P(A)P(B'\,|\,A)\underbrace{P(C\,|\,B')}_{\text{قبولی به شرط عدم قبولی در آزمون قبل}}$$

$$=۰/۶\times(۱-۰/۸)\times ۰/۵۵=۰/۰۶۶$$

**حالت سوم:** قبولی در آزمون‌های دوم و سوم و عدم قبولی در آزمون اول

در این حالت باید مقدار $P(A'\cap B\cap C)$ را بدست آوریم:

$$P(A'\cap B\cap C)=P(A')P(B\,|\,A')P(C\,|\,B)$$
$$=(۱-۰/۶)\times(۰/۵۵)\times ۰/۸=۰/۱۷۶$$

**حالت چهارم:** قبولی در هر سه آزمون

در این حالت باید مقدار $P(A\cap B\cap C)$ را بدست آوریم:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,B)$$
$$=۰/۶\times ۰/۸\times ۰/۸=۰/۳۸۴$$

با جمع کردن احتمال‌های بدست آمده در ۴ حالت، مقدار احتمال مطلوب بدست می‌آید:

$$۰/۰۹۶+۰/۰۶۶+۰/۱۷۶+۰/۳۸۴=۰/۷۲۲$$

### ۳۱۶
۱ **۲** ۳ ۴

برای آن‌که حداکثر در سومین آزمایش نتیجهٔ مطلوب حاصل شود، باید:

۱) در همان آزمایش اول هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ است.

۲) در آزمایش اول، هر دو عدد رو شده زوج نباشند ولی در آزمایش دوم هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}$ است.

۳) در آزمایش اول و در آزمایش دوم هر دو عدد رو شده زوج نباشند و در آزمایش سوم هر دو عدد رو شده زوج باشند که احتمال مطلوب برابر $\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}$ است. بنابراین:

$$P=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

### ۳۱۷
۱ ۲ ۳ **۴**

جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، چهار حالت دارد که در سه حالت زیر، ارزش درست دارد:

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| د | د | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

پس اگر $B$ پیشامدی باشد که در آن ارزش گزاره درست باشد، آن‌گاه: $n(B)=۳$

اگر $A$ پیشامدی باشد که مقدم درست باشد، آن‌گاه پیشامد $A\cap B$ فقط یک عضو به‌صورت

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| د | د | د |

دارد. بنابراین:

$$n(A\cap B)=۱\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۳}$$

### ۳۱۸
**۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به دستور $P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، مقدار $P(A\cap B)$ را بدست می‌آوریم: $۰/۶=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴\times ۰/۶=۰/۲۴$

$$\Rightarrow P(B\,|\,A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{۰/۲۴}{۰/۳}=۰/۸=\frac{۴}{۵}$$

### ۳۱۹
۱ **۲** ۳ ۴

مقدار $P(B'|A')$ از فرمول احتمال شرطی $P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}$ بدست می‌آید. برای بدست آوردن مقدار $P(A')$ از فرمول $P(A')=۱-P(A)$ و برای بدست آوردن مقدار $P(B'\cap A')$ از دستور $P(B'\cap A')=۱-P(B)-P(A)+P(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(A)=۰/۲\Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۲=۰/۸\quad(۱)$$

با توجه به فرض‌های داده‌شده باید مقدار $P(A\cap B)$ را بدست آوریم.

داریم: $P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۷=\frac{P(A\cap B)}{۰/۲}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷\times ۰/۲=۰/۱۴$$
$$\Rightarrow P(B'\cap A')=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$
$$=۱-۰/۲-۰/۲۲+۰/۱۴=۰/۷۲\quad(۲)$$

$$P(B'\,|\,A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}\overset{(۲)}{\underset{(۱)}{=\!=}}\frac{۰/۷۲}{۰/۸}=\frac{۷۲}{۸۰}=\frac{۹}{۱۰}=۰/۹$$

### ۳۲۰
۱ ۲ ۳ **۴**

مقدار $P(B\,|\,A')$ از فرمول احتمال شرطی زیر بدست می‌آید:

$$P(B\,|\,A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}\quad(۱)$$

اما داریم: $P(A')=۱-P(A)\ ,\ P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)$

چون $A\subseteq B$، پس $A\cap B=A$ می‌باشد و در نتیجه با توجه به فرض‌ها داریم:

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\quad(۲)$$

$$P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}=\frac{۹-۴}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}\quad(۳)$$

$$(۱),(۲),(۳)\Rightarrow P(B\,|\,A')=\frac{\frac{۵}{\cancel{۱۲}\,۴}}{\frac{۲}{\cancel{۳}}}=\frac{۵}{۸}$$

**۳۲۱** (۱) (۲) (۳) **(۴)**

احتمال مطلوب، احتمال شرطی در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است. با فرض $A=\{a,c,d\}$ و $B=\{b,c,d\}$، داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{c,d\})}{P(\{b,c,d\})}\qquad(۱)$$

$$P(S)=۱\Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+۲P(d)+P(d)=۱$$

$$\Rightarrow ۳P(d)=۱-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱۲-۳-۲}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow P(d)=\frac{۷}{۳۶}$$

مقدار هر یک از احتمال‌های $P(\{c,d\})$ و $P(\{b,c,d\})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(\{c,d\})=P(c)+P(d)=۲P(d)+P(d)=۳P(d)$$

$$=۳\times\frac{۷}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}\qquad(۲)$$

چون پیشامد $\{a\}$ متمم پیشامد $\{b,c,d\}$ می‌باشد، داریم:

$$P(\{b,c,d\})=۱-P(a)=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\qquad(۳)$$

$$(۱),(۲),(۳)\Rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{۷}{\cancel{۱۲}\ ۳}}{\frac{۳}{\cancel{۴}}}=\frac{۷}{۹}$$

**۳۲۲** (۱) (۲) **(۳)** (۴)

فضای نمونه‌ای یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس و احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی است.

با فرض $A=\{b,c,e\}$ و $B=\{a,b,c\}$، داریم:

$$P(\{b,c,e\}|\{a,b,c\})=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$A\cap B=\{b,c,e\}\cap\{a,b,c\}=\{b,c\}$$

با توجه به فرض می‌نویسیم:

$$P(\{b,c\})=P(\{a,b,c\})-P(a)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۸-۳}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{a,b,c\})}=\frac{\frac{۵}{\cancel{۱۲}\ ۴}}{\frac{۲}{\cancel{۳}\ ۱}}=\frac{۵}{۸}$$

**۳۲۳** (۱) (۲) (۳) **(۴)**

فرضیات داده‌شده مربوط به قانون احتمال کل است. طبق قانون احتمال کل، داریم:

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)\quad(۱)$$

طبق فرض و با قراردادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای i در $P(B_i)=\frac{i}{۶}$، داریم:

$$P(B_۱)=\frac{۱}{۶}\,,\ P(B_۲)=\frac{۲}{۶}\,,\ P(B_۳)=\frac{۳}{۶}\quad(۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\xrightarrow{P(A|B_i)=\frac{۱}{۴}}P(A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۴}$$

$$=\frac{۱+۲+۳}{۲۴}=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

**۳۲۴** **(۱)** (۲) (۳) (۴)

فضای نمونه‌ای به سه پیشامد $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، افراز شده است. فرضیات داده‌شده مربوط به قانون احتمال کل است:

$B_۱$: ظرف اول انتخاب شود.

$B_۲$: ظرف دوم انتخاب شود.

$B_۳$: ظرف سوم انتخاب شود.

داریم:

$$P(B_۱)=P(B_۲)=P(B_۳)=\frac{۱}{۳}$$

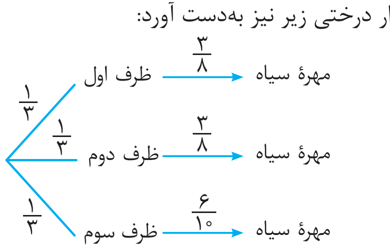
اگر $A$ پیشامد سیاه بودن مهرهٔ انتخاب‌شده باشد، آن‌گاه:

$$P(A|B_۱)=\frac{۳}{۸}\ ,\ P(A|B_۲)=\frac{۳}{۸}\ ,\ P(A|B_۳)=\frac{۶}{۱۰}$$

$$\Rightarrow P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$+P(B_۳)P(A|B_۳)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۹}{۲۰}$$

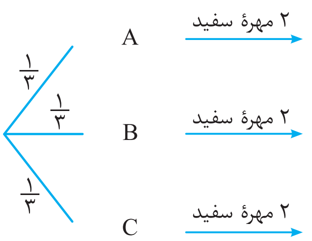
این مقدار را می‌توان از نمودار درختی زیر نیز به‌دست آورد:




$$\Rightarrow P(\text{سیاه بودن مهره})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۹}{۲۰}$$

**۳۲۵** **(۱)** (۲) (۳) (۴)

ابتدا انتخاب ظرف و سپس انتخاب دو مهره داریم. می‌توان از نمودار درختی زیر، احتمال مطلوب را به‌دست آورد:

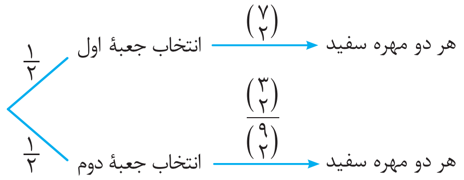



$$\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۶۰}{۱۲۶}\qquad \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۴۵}{۱۲۶}\qquad \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۴۵}{۱۲۶}$$

بنابراین:

$$P(\text{سفید بودن دو مهره})=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۶۰}{۱۲۶}+\frac{۴۵}{۱۲۶}+\frac{۴۵}{۱۲۶}\right)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۵۰}{۱۲۶}=\frac{۲۵}{۶۳}$$

**۳۲۶** **(۱)** (۲) (۳) (۴)



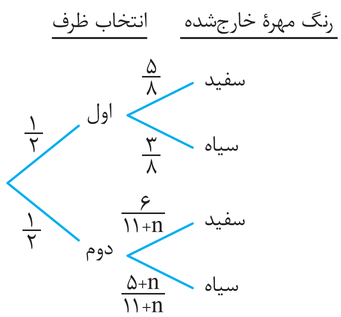

$$\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}\qquad \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن هر دو مهره})=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

**۳۲۷** (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنید $n$ مهرهٔ سیاه باید به ظرف دوم اضافه کنیم. در این صورت ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ سفید و $n+۵$ مهرهٔ سیاه خواهد شد. باید با استفاده از قانون احتمال کل، هر یک از احتمال‌های سفید و سیاه بودن مهرهٔ خارج‌شده را به‌دست آوریم و با مساوی قرار دادن این دو مقدار، مقدار $n$ را به‌دست آوریم. با توجه به نمودار درختی زیر، داریم:




$$P\,(\text{سفید بودن مهرهٔ خارج‌شده}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۱+n}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۵}{۸}+\frac{۶}{۱۱+n}\right)\quad (۱)$$

$$P\,(\text{سیاه بودن مهرهٔ خارج‌شده}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵+n}{۱۱+n}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۸}+\frac{۵+n}{۱۱+n}\right)\quad (۲)$$

$$(۱)\ \text{و}\ (۲) \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۵}{۸}+\frac{۶}{۱۱+n}\right)=\cancel{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۳}{۸}+\frac{۵+n}{۱۱+n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۵+n}{۱۱+n}-\frac{۶}{۱۱+n}\Rightarrow\frac{۲}{۸}=\frac{۵+n-۶}{۱۱+n}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{n-۱}{۱۱+n}\Rightarrow ۴(n-۱)=۱۱+n\Rightarrow ۴n-۴=۱۱+n$$

$$\Rightarrow ۳n=۱۵\Rightarrow n=۵$$

**۳۲۸** (۱) (۲) (۳) (۴)

رنگ مهرهٔ اول خارج شده یا سفید است و یا سیاه. اگر $B_۱$ پیشامد خارج شدن مهرهٔ سفید و $B_۲$ پیشامد خارج شدن مهرهٔ سیاه از ظرف اول باشد، آن‌گاه:

$$P(B_۱)=\frac{۵}{۹}\ ,\ P(B_۲)=\frac{۴}{۹}$$

مهرهٔ خارج شده را درون ظرف دوم قرار می‌دهیم. اگر $A$ پیشامد سفید بودن مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم باشد، آن‌گاه:

$$P(A\mid B_۱)=\frac{۸}{۱۸}\ ,\ P(A\mid B_۲)=\frac{۷}{۱۸}$$

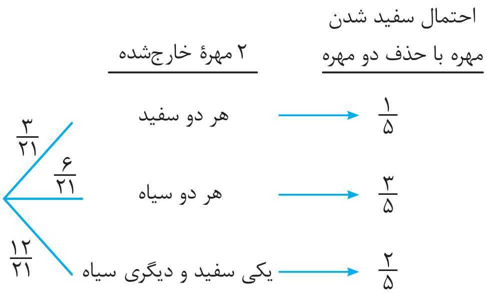
$$\Rightarrow P(A)=P(B_۱)P(A\mid B_۱)+P(B_۲)P(A\mid B_۲)$$

$$=\frac{۵}{۹}\times\frac{۸}{۱۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۷}{۱۸}=\frac{۳۴}{۸۱}$$

**۳۲۹** (۱) (۲) (۳) (۴)

**روش اول:**

احتمال خارج شدن دو مهرهٔ سفید برابر $\frac{۳}{۲۱}=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}$، احتمال خارج شدن دو مهرهٔ سیاه برابر $\frac{۶}{۲۱}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}$ و احتمال خارج شدن یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه برابر $\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۲}}$ خواهد بود. پس:




$$\Rightarrow P\,(\text{سفید})=\frac{۳}{۲۱}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۶}{۲۱}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱۲}{۲۱}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۷}$$

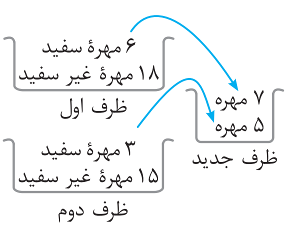
**روش دوم:** چون دو مهرهٔ اول بدون رؤیت خارج شده‌اند، می‌توان فرض کرد این مهره‌ها اصلاً خارج نشده‌اند و در نتیجه احتمال مطلوب، احتمال برداشتن یک مهرهٔ سفید از بین ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است که این عدد برابر $\frac{۳}{۷}$ است.

**۳۳۰** (۱) (۲) (۳) (۴)

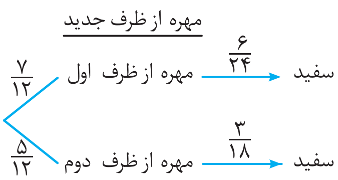
در این تست هم مانند تست قبل، می‌توان فرض کرد که این دو مهره اصلاً از کیسه خارج نشده‌اند، پس احتمال خارج شدن یک مهرهٔ سفید از این کیسه همان $\frac{۴}{۷}$ می‌باشد.

**۳۳۱** (۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا ۷ مهره از ظرف اول و ۵ مهره از ظرف دوم را درون ظرف جدید قرار می‌دهیم:




مهرهٔ جدیدی که از ظرف جدید انتخاب می‌کنیم را بر حسب این‌که مهره مربوط به ظرف اول است یا ظرف دوم، دسته‌بندی می‌کنیم. با توجه به نمودار درختی، داریم:




$$P\,(\text{سفید بودن مهره})=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۲۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۸}=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$

**۳۳۲** ۱ ۲ ۳ ۴

جعبهٔ اول: ۴ معیوب، ۲۰ سالم

جعبهٔ دوم: ۳ معیوب، ۱۲ سالم

۸ لامپ از جعبهٔ اول، ۶ لامپ از جعبهٔ دوم

یک لامپ خارج می‌کنیم

$\frac{۸}{۱۴}$ جعبهٔ اول $\xrightarrow{\frac{۴}{۲۴}}$ معیوب

$\frac{۶}{۱۴}$ جعبهٔ دوم $\xrightarrow{\frac{۳}{۱۵}}$ معیوب

$$\Rightarrow P(\text{معیوب بودن}) = \frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}+\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$$

**۳۳۳** ۱ ۲ ۳ ۴

چون در احتمال خواسته‌شده، خارج شدن مهره با شمارهٔ ۲ مطلوب است، پس دو مهره‌ای که ابتدا خارج می‌کنیم را بر حسب این که مهره با شمارهٔ ۲ خارج می‌شود یا نه به دو شاخه تقسیم می‌کنیم:

شاخهٔ اول: در دو مهرهٔ خارج‌شدهٔ اول، مهره با شمارهٔ ۲ خارج شـود کـه در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با:

انتخاب یک مهره غیر از شمارهٔ۲

$$P_۱ = \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

انتخاب۲ مهره از۶ مهره

شاخهٔ دوم: در ۲ مهرهٔ خـارج شـدهٔ اول، مهـره بـا شـمارهٔ ۲ خـارج نشـود (احتمال خارج‌شدن ۲ مهره از ۶ مهـره کـه هیچ‌یـک بـا شـمارهٔ ۲ نباشـد برابر $\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$ است.) ولی با کنار گذاشتن این ۲ مهـره و خـارج کردن دو مهرهٔ دیگر، یکی از مهره‌های خارج‌شده، مهره با شمارهٔ ۲ باشد که این احتمال برابر است با:

یکی از مهره‌ها با شمارهٔ ۲ و مهرهٔ دیگر از بین ۳ مهرهٔ باقی‌مانده باشد.

$$\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۴}{۲}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

انتخاب ۲ مهره از۴ مهرهٔ باقی‌مانده

بنابراین: $P_۲ = \frac{\cancel{۲}}{۳}\times\frac{۱}{\cancel{۲}} = \frac{۱}{۳}$

طبق قانون احتمال کل، احتمال مطلـوب برابر $P_۱+P_۲ = \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

**۳۳۴** ۱ ۲ ۳ ۴

اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر خلاصه می‌کنیم:

پرتاب سکه

$\frac{۲}{۶}$ مضرب ۳ ظاهر شود. $\xrightarrow{\frac{۱}{۴}}$ در پرتاب دو سکه دو بار«رو»ظاهر شود.

$\frac{۴}{۶}$ مضرب ۳ ظاهر نشود. $\xrightarrow{\frac{\binom{۳}{۲}}{۸}=\frac{۳}{۸}}$ در پرتاب سه سکه، دقیقاً دو بار«رو»ظاهر شود.

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P = \frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۱۶}{۴۸} = \frac{۱}{۳}$$

**۳۳۵** ۱ ۲ ۳ ۴

اطلاعات مسأله را در نمودار درختی زیر خلاصه می‌کنیم:

پرتاب سکه

$\frac{۱}{۲}$ رو $\xrightarrow{۱}$ پرتاب تاس

$\frac{۱}{۲}$ پشت $\xrightarrow{\frac{\binom{۳}{۱}}{۲^۳}=\frac{۳}{۸}}$ یک بار از سه پرتاب رو بیاید.

بنابراین:

$$P(\text{دقیقاً یک‌بار سکه «رو» بیاید}) = \frac{۱}{۲}\times ۱+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

**۳۳۶** ۱ ۲ ۳ ۴

از احتمال چندشاخه‌ای‌ها (دقیقاً ۲ شاخه) بـرای به‌دسـت آوردن احتمـال مورد نظر استفاده مـی‌کنیم. اطلاعـات داده‌شـده در نمـودار درختـی زیـر خلاصه شده است:

پرتاب تاس

$\frac{۱}{۶}$ عدد ۶ ظاهر شود. $\xrightarrow{\text{صفر}}$ در پرتاب یک تاس، حداقل یک بار «رو» ظاهر شود.

$\frac{۵}{۶}$ عدد ۶ ظاهر نشود. $\xrightarrow{\frac{۳}{۴}}$ در پرتاب دو سکه، حداقل یک بار «رو» ظاهر شود.

(در پرتاب دو سکه، فضای نمونه‌ای ۴ برآمد دارد که در سـه برآمـد (ر، پ)، (ر، ر) و (پ، ر)، حداقل یک‌بار «رو» ظاهر می‌شود.)

$$\Rightarrow P(\text{مطلوب}) = \frac{۱}{۶}\times ۰+\frac{۵}{\cancel{۶}_{۲}}\times\frac{\cancel{۳}^{۱}}{۴} = \frac{۵}{۸}$$

**۳۳۷** ۱ ۲ ۳ ۴

این آزمایش دو حالت دارد:

**حالت اول:** عدد رو شده زوج باشد.

احتمال رو شدن عدد زوج در پرتـاب یـک تـاس برابـر $\frac{۳}{۶}$ اسـت. در ایـن صورت دو تاس دیگر پرتاب می‌شود که در حالت‌های زیر، مجموع ۳ تـاس برابر ۷ می‌شود:

$$\text{عدد ۲ ظاهر شود.} \Rightarrow \overbrace{(۱،۴)،(۲،۳)،(۳،۲)،(۴،۱)}^{\text{مجموع ۵ است.}} \Rightarrow P = \frac{۴}{۳۶}$$

$$\text{عدد ۴ ظاهر شود.} \Rightarrow \overbrace{(۱،۲)،(۲،۱)}^{\text{مجموع ۳ است.}} \Rightarrow P = \frac{۲}{۳۶}$$

عدد ۶ ظاهر شود.$\Rightarrow$ حالتی وجود ندارد.

در این حالت، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P_۱ = \frac{۳}{۶}\left(\frac{۴}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}\right) = \frac{۳}{\cancel{۶}_{۱}}\times\frac{\cancel{۶}^{۱}}{۳۶} = \frac{۳}{۳۶}$$

**حالت دوم:** عدد رو شده فرد باشد.

احتمال رو شدن عدد فرد در پرتاب یک تاس برابر $\frac{۳}{۶}$ است. در این صورت یک تاس دیگر پرتاب می‌شود که در حالت‌های زیر، مجموع دو تاس برابر ۷ می‌شود:

عدد یک ظاهر شود. ⇐ تاس دوم ۶ بیاید. ⇐ $P=\frac{۱}{۶}$

عدد ۳ ظاهر شود. ⇐ تاس دوم ۴ بیاید. ⇐ $P=\frac{۱}{۶}$

عدد ۵ ظاهر شود. ⇐ تاس دوم ۲ بیاید. ⇐ $P=\frac{۱}{۶}$

در این حالت احتمال مطلوب برابر است با:

$$P_۲=\frac{۳}{۶}\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۹}{۳۶}$$

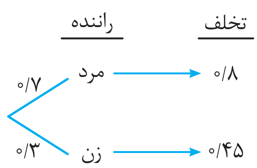
پس داریم:

$$P=P_۱+P_۲=\frac{۳}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

### ۳۳۸ **۱** ۲ ۳ ۴

راننده‌ای که به تصادف انتخاب می‌شودیا مرد است و یا زن. بنابراین باید از قانون احتمال کل برای به‌دست آوردن احتمال مورد نظر استفاده کنیم.

اطلاعات داده‌شده در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:

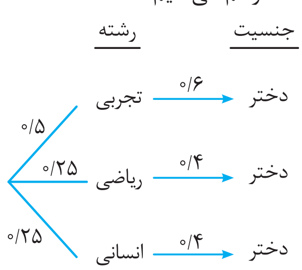



$P$ (مرتکب شدن تخلف توسط راننده) $=۰/۷\times۰/۸+۰/۳\times۰/۴۵$

$=۰/۵۶+۰/۱۳۵=۰/۶۹۵$

### ۳۳۹ ۱ **۲** ۳ ۴

نمودار درختی را با توجه به اطلاعات مسأله رسم می‌کنیم:

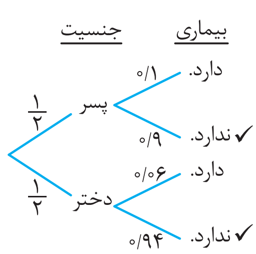



$\Rightarrow P$ (دختر بودن دانشجوی انتخابی)

$=۰/۵\times۰/۶+۰/۲۵\times۰/۴+۰/۲۵\times۰/۴=۰/۵$

### ۳۴۰ ۱ **۲** ۳ ۴

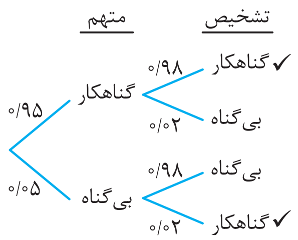
با توجه به نمودار درختی داریم:




$\Rightarrow P$(بیماری را ندارد.) $=\frac{۱}{۲}\times۰/۹+\frac{۱}{۲}\times۰/۹۴=۰/۹۲$

### ۳۴۱ ۱ **۲** ۳ ۴

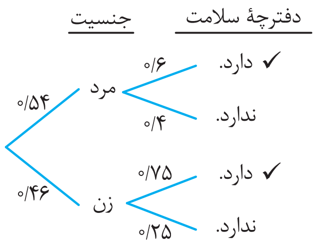
اطلاعات مسأله در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:




$P$ (گناهکار بودن متهم) $=۰/۹۵\times۰/۹۸+۰/۰۵\times۰/۰۲=۰/۹۳۲$

### ۳۴۲ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی مقابل داریم:



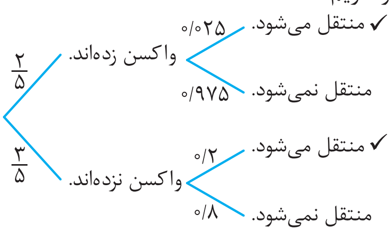

$\Rightarrow P$(داشتن دفترچهٔ سلامت)

$=۰/۵۴\times۰/۶+۰/۴۶\times۰/۷۵$

$=۰/۶۶۹$

### ۳۴۳ **۱** ۲ ۳ ۴

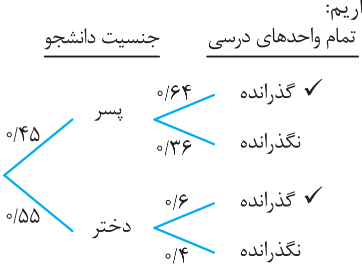
با توجه به نمودار درختی زیر داریم:




$\Rightarrow P$(انتقال بیماری) $=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۰۰۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۳}{۱۰۰}=۰/۱۳$

### ۳۴۴ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی زیر داریم:

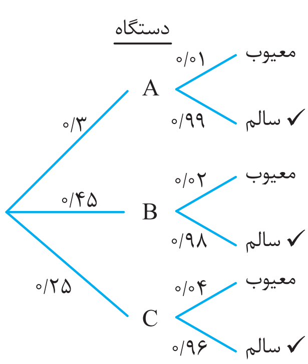



$\Rightarrow P$(گذراندن تمام واحدها) $=۰/۴۵\times۰/۶۴+۰/۵۵\times۰/۶=۰/۶۱۸$

بنابراین ۶۱/۸٪ کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند.

### ۳۴۵ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار درختی داریم:




$\Rightarrow P$(سالم بودن) $=۰/۳\times۰/۹۹+۰/۴۵\times۰/۹۸+۰/۲۵\times۰/۹۶=۰/۹۷۸$

**۳۴۶** (۱) (۲) (۳) **(۴)**

ابتدا احتمال چاپشدن نقشهٔ انتخاب‌شده از هر دستگاه را به‌دست می‌آوریم. چون تعداد نقشه‌های چاپشدهٔ ماشین دوم، سه برابر تعداد نقشه‌های چاپشدهٔ ماشین اول است، بنابراین احتمال آن‌که نقشهٔ چاپ‌شده مربوط به ماشین دوم باشد، سه برابر احتمال چاپشدن این نقشه توسط ماشین اول است. بنابر قوانین احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس داریم:

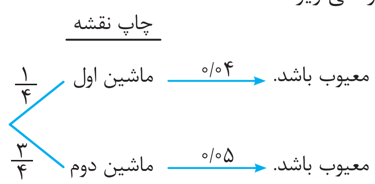
$A$: چاپ شدن توسط ماشین اول

$B$: چاپ شدن توسط ماشین دوم

$$P(B)=۳P(A)\text{،}P(A)+P(B)=۱\Rightarrow P(A)+۳P(A)=۱$$

$$\Rightarrow ۴P(A)=۱\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(B)=۳P(A)=\frac{۳}{۴}$$

اطلاعات داده‌شده در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:



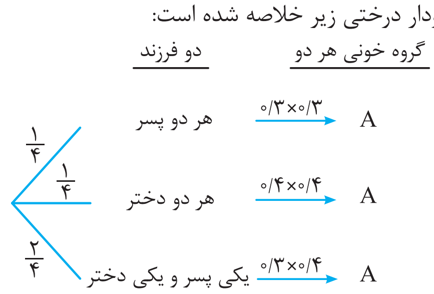

بنابر قانون احتمال کل، داریم:

$$P\ (\text{معیوب بودن})=\frac{۱}{۴}\times ۰/۰۴+\frac{۳}{۴}\times ۰/۰۵$$

$$=\frac{۴}{۴۰۰}+\frac{۱۵}{۴۰۰}=\frac{۱۹}{۴۰۰}=۰/۰۴۷۵$$

**۳۴۷** (۱) (۲) **(۳)** (۴)

اطلاعات مسأله در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:




بنابراین:

$$P(\text{گروه خونی هر دو فرزند از نوع } A \text{ باشد.})$$

$$=\frac{۱}{۴}\times ۰/۳\times ۰/۳+\frac{۱}{۴}\times ۰/۴\times ۰/۴+\frac{۲}{۴}\times ۰/۳\times ۰/۴=\frac{۴۹}{۴۰۰}$$

**۳۴۸** (۱) (۲) **(۳)** (۴)

مقدار $P(B_۲\mid A)$ بنابر فرمول احتمال شرطی برابر است با:

$$P(B_۲\mid A)=\frac{P(B_۲\cap A)}{P(A)}\qquad (۱)$$

طبق فرض‌های داده‌شده، مقدار $P(B_۲\cap A)$ بنابر قانون ضرب احتمالات برابر است با:

$$P(B_۲\cap A)=P(B_۲)P(A\mid B_۲)=۰/۳\times ۰/۰۲=۰/۰۰۶\quad (۲)$$

برای به‌دست آوردن مقدار $P(A)$ از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)$$

$$=۰/۲\times ۰/۰۱+۰/۳\times ۰/۰۲+۰/۵\times ۰/۰۵=۰/۰۰۲+۰/۰۰۶+۰/۰۲۵=۰/۰۳۳\quad (۳)$$

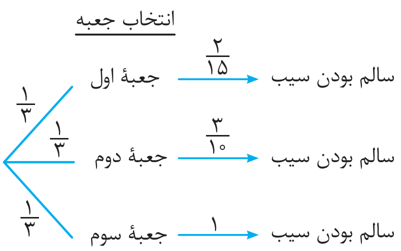
$$(۱)\text{،}(۲)\text{،}(۳)\Rightarrow P(B_۲\mid A)=\frac{۰/۰۰۶}{۰/۰۳۳}=\frac{۶}{۳۳}=\frac{۲}{۱۱}$$

**۳۴۹** (۱) **(۲)** (۳) (۴)

اگر $A$ پیشامد سالم بودن سیب خارج‌شده و $B$ پیشامد خارج شدن سیب از جعبهٔ سوم باشد، باید مقدار احتمال شرطی $P(B\mid A)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

مقدار $P(A)$ را باید از فرمول قانون احتمال کل به‌دست آوریم. با توجه به نمودار درختی زیر، داریم:




(جعبهٔ سوم، فقط شامل سیب‌های سالم است، پس هر سیبی که انتخاب شود سالم است.)

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۱۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۴+۹+۳۰}{۹۰}=\frac{۴۳}{۹۰}$$

$$P(B\cap A)=P(B)P(A\mid B)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(B\mid A)=\frac{\frac{۱}{\cancel{۳}}}{\frac{۴۳}{\cancel{۹۰}_{۳۰}}}=\frac{۳۰}{۴۳}$$

**۳۵۰** (۱) (۲) **(۳)** (۴)

احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است. از قانون بیز برای به‌دست آوردن احتمال مطلوب استفاده می‌کنیم.

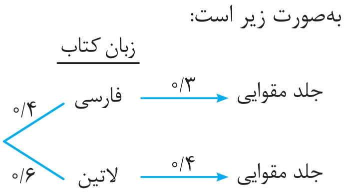
$A$: داشتن جلد مقوایی کتاب مشاهده‌شده.

$B$: لاتین بودن زبان کتاب انتخاب‌شده

باید مقدار $P(B\mid A)$ را به‌دست آوریم. بنابر قانون بیز داریم:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}\qquad (*)$$

نمودار درختی اطلاعات داده‌شده به‌صورت زیر است:




$$P(A)=۰/۴\times ۰/۳+۰/۶\times ۰/۴=۰/۱۲+۰/۲۴=۰/۳۶$$

$$P(B\cap A)=۰/۶\times ۰/۴=۰/۲۴$$

$$(*)\Rightarrow P(B\mid A)=\frac{۰/۲۴}{۰/۳۶}=\frac{۲۴}{۳۶}=\frac{۲}{۳}$$

### ۳۵۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

سکهٔ همگن سکه‌ای است که شانس «رو» و «پشت» آمدن آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است. اگر $A$ پیشامدی باشد که در آن طرف مشاهده شدهٔ سکهٔ خارج‌شده «پشت» و $B$ پیشامد خارج شدن سکهٔ همگن (سکهٔ اول) باشد، احتمال مطلوب $P(B\,|\,A)$ است. داریم:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(A)}\qquad(*)$$

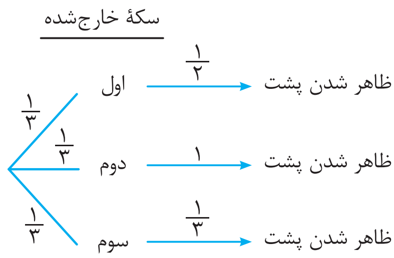
برای به‌دست آوردن مقدار $P(A)$ از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم. ابتدا احتمال «رو» و «پشت» آمدن سکهٔ سوم را از قوانین احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس به‌دست می‌آوریم:

$$S=\{\text{ر}\,,\text{پ}\}\ \text{و}\ P(\text{ر})=۲P(\text{پ})\ \text{و}\ P(\text{ر})+P(\text{پ})=۱$$

$$\Rightarrow ۲P(\text{پ})+P(\text{پ})=۱\Rightarrow ۳P(\text{پ})=۱\Rightarrow P(\text{پ})=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(\text{ر})=۲P(\text{پ})=\frac{۲}{۳}$$

اطلاعات مسئله در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:




$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\times ۱+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}$$

$$=\frac{۳+۶+۲}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$$

$$P(B\cap A)=P(B)P(A\,|\,B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$$

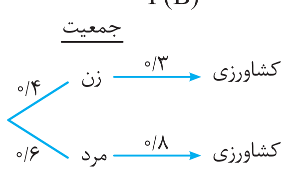
$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} P(B\,|\,A)=\frac{\frac{۱}{\cancel{۶}_{۱}}}{\frac{۱۱}{\cancel{۱۸}_{۳}}}=\frac{۳}{۱۱}$$

### ۳۵۲ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر $B$ پیشامد مشغول بودن به کار کشاورزی و $A$ پیشامد زن بودن فرد انتخابی باشد، آن‌گاه $P(A\,|\,B)$، احتمال مطلوب است. داریم:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

با توجه به نمودار درختی مقادیر $P(B)$ و $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم:



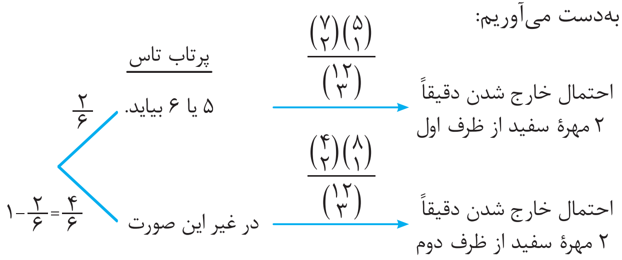

$$P(B)=۰/۴\times ۰/۳+۰/۶\times ۰/۸=۰/۶$$

$$P(A\cap B)=P(\text{زن})\,P(\text{کشاورزی}\,|\,\text{زن})=۰/۴\times ۰/۳=۰/۱۲$$

$$\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۱۲}{۰/۶}=\frac{۱}{۵}$$

### ۳۵۳ ۱ **۲** ۳ ۴

احتمال خواسته‌شده یک احتمال شرطی است که از قانون بیز به‌دست می‌آید. احتمال خارج شدن دقیقاً ۲ مهرهٔ سفید را از قانون احتمال کل به‌دست می‌آوریم:




اگر $C$ پیشامد خارج شدن دقیقاً ۲ مهرهٔ سفید باشد، آن‌گاه:

$$P(C)=\frac{۲}{۶}\times\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}+\frac{۴}{۶}\times\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}$$

$$=\frac{\cancel{۲}}{\cancel{۶}}\times\frac{\cancel{۲۱}^{۷}\times ۵}{۲۲۰}+\frac{۴}{\cancel{۶}}\times\frac{\cancel{۶}\times ۸}{۲۲۰}=\frac{۳۵+۳۲}{۲۲۰}=\frac{۶۷}{۲۲۰}$$

اگر $D$ پیشامد خارج شدن ۲ مهرهٔ سفید از طرف اول باشد، آن‌گاه:

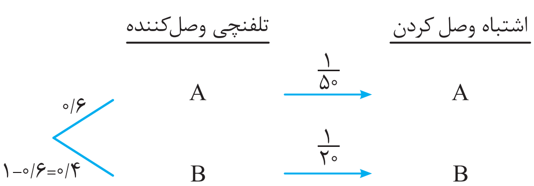
$$P(D\,|\,C)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{۲}{۶}\times\frac{۲۱\times ۵}{۲۲۰}}{\frac{۶۷}{۲۲۰}}=\frac{\frac{۳۵}{۲۲۰}}{\frac{۶۷}{۲۲۰}}=\frac{۳۵}{۶۷}$$

### ۳۵۴ ۱ ۲ **۳** ۴

احتمال خواسته‌شده از قانون بیز به‌دست می‌آید. احتمال اشتباه وصل شدن تلفن را از قانون احتمال کل به‌دست می‌آوریم.

شخص $A$ از هر ۵۰ تلفن یکی را اشتباه وصل می‌کند، بنابراین احتمال اشتباه وصل کردن شخص $A$، $\frac{۱}{۵۰}$ و شخص $B$ از هر ۲۰ تلفن یکی را اشتباه وصل می‌کند، پس این احتمال برای شخص $B$ برابر $\frac{۱}{۲۰}$ است.

طبق نمودار درختی زیر داریم:




اگر $C$ پیشامد اشتباه وصل کردن تلفن باشد، آن‌گاه:

$$P(C)=۰/۶\times\frac{۱}{۵۰}+۰/۴\times\frac{۱}{۲۰}=۰/۶\times ۰/۰۲+۰/۴\times ۰/۰۵$$

$$=۰/۰۱۲+۰/۰۲=۰/۰۳۲$$

اگر $D$ پیشامد آن باشد که شخص $A$ تلفن را اشتباه وصل کرده باشد، آن‌گاه:

$$P(D\,|\,C)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}=\frac{۰/۶\times\frac{۱}{۵۰}}{۰/۰۳۲}=\frac{۰/۰۱۲}{۰/۰۳۲}$$

$$=\frac{۱۲}{۳۲}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵$$