به نام پروردگار مهربان

حسابان ۱ یازدهم

آموزش، تمرین، دوره

میثم خرمی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

فهرست

جبر و معادله

چون n عددی طبیعی است، پس فقط $n>۱۷$ را قبول می‌کنیم. از طرفی اولین عدد طبیعی n که از ۱۷ بزرگ‌تر باشد عدد ۱۸ است، بنابراین $n\geq ۱۸$ قابل قبول است.

وعدهٔ ۳
روشی دیگر برای محاسبه S_n

در دنباله حسابی، فرض کنید $a_۱$ جمله اول، a_n جمله آخر و n تعداد جملات باشد. در این صورت:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

مثال ۸ مجموع مضارب طبیعی و کمتر از ۱۰۱ عدد ۵ را بیابید.

پاسخ مضارب خواسته شده به شکل زیر هستند:

$$۵,۱۰,۱۵,\dots,۱۰۰ \qquad (n=۲۰)$$

پس می‌توان گفت:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{اطلاعات}}S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۵+۱۰۰)=۱۰۵۰$$

چاشنی: در هر دنباله حسابی، اگر a_n جمله عمومی و S_n مجموع n جمله اول دنباله باشند، آن‌گاه:

۱ $S_۱=a_۱$

۲ $S_n-S_{n-۱}=a_n \ (n>۱)$

به عنوان مثال:

$$S_۳-S_۲=a_۳$$

زیرا:

$$-\begin{cases}S_۳=\cancel{a_۱}+\cancel{a_۲}+a_۳\\ S_۲=\cancel{a_۱}+\cancel{a_۲}\end{cases}\Rightarrow S_۳-S_۲=a_۳$$

مثال ۹ در یک دنباله حسابی $S_n = ۴n^۲ + ۳n$ است. $S_{۱۰}$ و جمله عمومی را به دست آورید.

پاسخ برای محاسبه $S_{۱۰}$ کافیست در S_n به جای n، عدد ۱۰ را قرار دهیم:

$$S_{۱۰} = ۴(۱۰)^۲ + ۳(۱۰) = ۴۳۰$$

حال از چاشنی گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_۱ = a_۱ \Rightarrow ۴(۱)^۲ + ۳(۱) = a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۷ \\ S_۲ = ۴(۲)^۲ + ۳(۲) = ۲۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_۲ - S_۱ = a_۲ \Rightarrow ۲۲ - ۷ = ۱۵ \Rightarrow a_۲ = ۱۵ \\ d = a_۲ - a_۱ \Rightarrow d = ۱۵ - ۷ = ۸ \end{cases}$$

جمله عمومی: $a_n = a_۱ + (n-۱)d$

$$\xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{اطلاعات}} a_n = ۷ + (n-۱)(۸)$$

$$\Rightarrow a_n = ۸n - ۱$$

وعدهٔ ۴
چند مجموع مهم از دنباله‌های حسابی

۱ مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

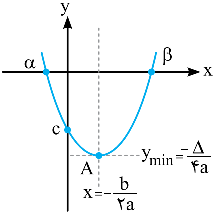
۲ مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲:

$$۲ + ۴ + \cdots + ۲n = n(n+۱)$$

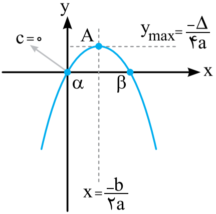
۳ مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱) = n^۲$$

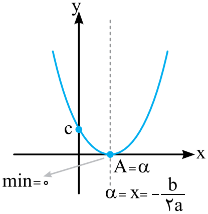
۱ $\Delta>0,\ a>0,\ b<0,\ c<0$



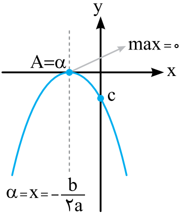
۲ $\Delta>0,\ a<0,\ b>0,\ c=0$



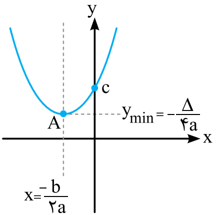
۳ $\Delta=0,\ a>0,\ b<0,\ c>0$



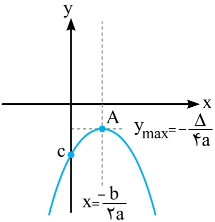
۴ $\Delta=0,\ a<0,\ b<0,\ c<0$



۵ $\Delta<0,\ a>0,\ b>0,\ c>0$

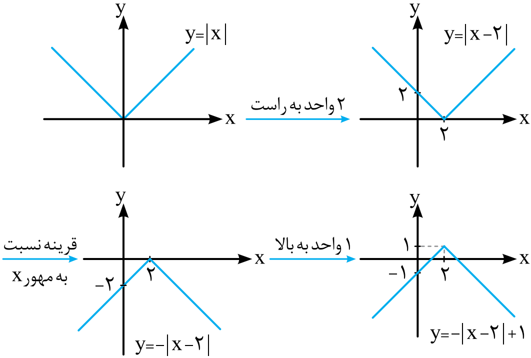


۶ $\Delta<0,\ a<0,\ b>0,\ c<0$



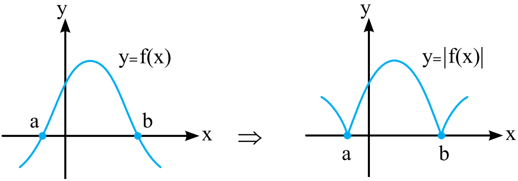
مثال ۶۲ نمودار $y=-|x-۲|+۱$ را رسم کنید.

پاسخ



۴ نمودار $y=|f(x)|$

برای رسم این‌گونه نمودارها، ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کرده، سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیرمحور x ها (یعنی $y<۰$) قرار دارند را آینه‌وار به بالای محور x ها، منتقل می‌کنیم.



تابع

درس اول: آشنایی بیشتر با تابع

- تابع
- تشخیص تابع بودن در حالت زوج مرتبی و از روی نمودار
- تابع به عنوان یک ماشین
- تساوی دو تابع

درس دوم: انواع تابع

- توابع گویا
- توابع رادیکالی (تابع ریشهٔ دوم)
- توابع پله‌ای
- جزء صحیح یک عدد حقیقی
- توابع جزء صحیح
- معادلات و توابع

درس سوم: وارون تابع

- توابع یک‌به‌یک
- وارون توابع
- محاسبهٔ وارون توابع

درس چهارم: اعمال روی توابع

- اعمال روی توابع
- ترکیب توابع

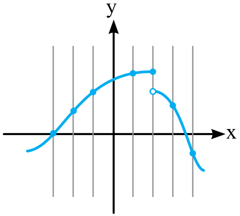
با داشتن مجموعهٔ زوج مرتب‌های تابع f ، دامنه و برد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

f دامنهٔ تابع : $D_f = \{\text{مؤلفهٔ اول زوج مرتب‌ها}\} = \{x_۱, x_۲, ...\}$
f برد تابع : $R_f = \{\text{مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌ها}\} = \{y_۱, y_۲, ...\}$

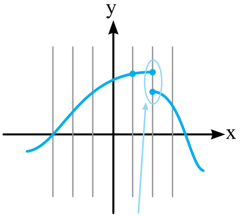
به عنوان مثال، مجموعهٔ $f = \{(۱,۱), (۲,۳), (۳, \frac{۱}{۴})\}$ تابع است و دامنه و برد آن به صورت زیر می‌باشند:

$$D_f = \{۱, ۲, ۳\} \quad , \quad R_f = \{۱, ۳, \frac{۱}{۴}\}$$

۲ نمودار یک منحنی نشان‌دهندهٔ یک تابع است اگر و تنها اگر «هر خط موازی **محور y ها**، نمودار را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.»



تابع است.



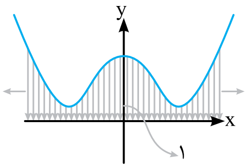
خط، نمودار را در دو نقطه قطع کرده، پس تابع نیست.

با داشتن نمودار تابع f ، دامنه و برد آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

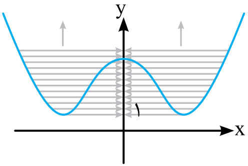
سایهٔ (تصویر) عمودی منحنی f روی محورxها = دامنهٔ تابع f: D_f

سایهٔ (تصویر) افقی منحنی f روی محورyها = برد تابع f: R_f

به عنوان مثال، در نمودار تابع زیر، سایهٔ عمودی تابع روی محور x ها، کل محور را پوشانده است، پس $D_f = \mathbb{R}$ ولی سایهٔ افقی تابع روی محور y ها، از $y=۱$ به بالا را پوشانده، پس $R_f = [۱, +\infty)$ است.



$D_f = \mathbb{R}$



$R_f = [۱, +\infty)$

چاشنی: **۱)** برای مشخص کردن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و ضابطهٔ تابع (دستور یا قاعده‌ای که رابطهٔ بین اعضای دامنه و برد را مشخص می‌سازد) معلوم باشند.

۲) اگر A دامنهٔ تابع $f(x)$ و B هم‌دامنهٔ آن باشد، برای سهولت و اختصار، تابع $f(x)$ را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

(نمایش تابع f به وسیلهٔ دامنه و هم‌دامنه) $\begin{cases} f : A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$

به عنوان مثال، در تابع $\begin{cases} f : [۰, +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ داریم:

(اعداد حقیقی نامنفی) $\text{دامنهٔ تابع} = D_f = [۰, +\infty)$

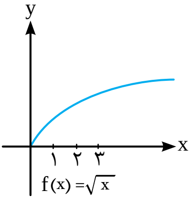
(اعداد حقیقی) $\text{هم‌دامنهٔ تابع} = \mathbb{R}$

(از هر عضو دامنه، جذر می‌گیرد.) $\text{ضابطهٔ تابع} = \sqrt{x}$

وعدهٔ ۶

توابع رادیکالی (تابع ریشهٔ دوم)

تابعی را که به هر عدد **نامنفی** ریشهٔ دوم **نامنفی** آن را نسبت می‌دهد، تابع ریشهٔ دوم می‌گوییم که ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است.



از تعریف تابع رادیکالی می‌توان دریافت که **دامنه و برد** تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است.

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$

از آن‌جایی که $f(x)$ زیر رادیکال فرجهٔ زوج قرار دارد، باید نامنفی باشد.

دامنهٔ تابع $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geq ۰\}$

مثال ۱۳ دامنهٔ توابع زیر را به دست آورده و به صورت بازه نمایش دهید.

الف) $f(x)=\sqrt{۳x-۲}$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳x-۲\geq ۰\}$$

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۳x-۲\geq ۰\Rightarrow ۳x\geq ۲\xrightarrow{\div ۳}x\geq \frac{۲}{۳}\Rightarrow D_f=[\frac{۲}{۳},+\infty)$$

ب) $g(x)=\sqrt{x^۲-۵}$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲-۵\geq ۰\}$$

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^{۲}-۵\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\geq ۵ \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x|\geq \sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-\sqrt{۵}]\cup[\sqrt{۵},+\infty)$$

پ) $\mathbf{h(x)=\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}}$

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^{۲}-۳x+۲\geq ۰\}$$

$$x^{۲}-۳x+۲\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$
$$\Rightarrow D_h=(-\infty,۱]\cup[۲,+\infty)$$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
f(x)		+	۰	−	۰	+	
		جواب				جواب	

ت) $\mathbf{k(x)=\sqrt{\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۵}}}$

$$D_k=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{x^{۲}-۹}{x-۵}\geq ۰\}$$

$$\frac{x^{۲}-۹}{x-۵}\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		−۳		۳		۵		$+\infty$
$x^{۲}-۹$		+	۰	−	۰	+		+	
$x-۵$		−		−		−	۰	+	
کل		−	۰	+	۰	−	تعریف نشده	+	

$$\Rightarrow D_k=[-۳,۳]\cup(۵,+\infty)$$

ث) $\mathbf{p(x)=\sqrt{|x|-x}}$

$$D_p=\{x\in\mathbb{R}\,|\;\;|x|-x\geq ۰\}$$

$$|x|-x\geq ۰\Rightarrow |x|\geq x$$

نامعادلهٔ اخیر، برای هر عدد حقیقی x برقرار است، زیرا «**قدرمطلق هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر یا مساوی آن عدد است.**»، پس: $D_p=\mathbb{R}$

«$[x]$ (جزء صحیح x) بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد.»

به عبارت دیگر: $n \le x < n+1 \Leftrightarrow [x]=n \ , (n \in \mathbb{Z})$

با توجه به تعریف $[x]$، اگر x عددی صحیح باشد آن‌گاه $[x]=x$.

(جزء صحیح هر عدد صحیح، خود آن عدد است.) به عنوان مثال:

$$[-5]=-5 \quad\quad [-3/25]=-4 \quad\quad [3/25]=3$$

$$\downarrow \quad\quad\quad \downarrow \quad\quad\quad \downarrow$$

$$-5 \in \mathbb{Z} \quad\quad -4 \le -3/25 < -3 \quad\quad 3 \le 3/25 < 4$$

ویژگی‌های مقدماتی $[x]$

① $[x]=n \Leftrightarrow n \le x < n+1, (n \in \mathbb{Z})$

② $[x] \in \mathbb{Z}$ (حاصل $[x]$ همواره مقداری صحیح است.)

③ $[x \pm k]=[x] \pm k \ , (k \in \mathbb{Z})$

④ $[kx] \ne k[x]$

⑤ $[x] \le x$ (جزء صحیح هر عدد، کوچک‌تر یا مساوی خود آن عدد است.)

⑥ $x-1 < [x] \le x$ (رابطهٔ کلی بین x, $[x]$)

مثال ۱۸ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2[x]-3=0$

$$2[x]-3=0 \Rightarrow 2[x]=3 \xrightarrow{\div 2} [x]=\frac{3}{2}$$

تساوی اخیر، غیرممکن است، زیرا حاصل $[x]$ همیشه مقداری صحیح است، پس معادله جواب ندارد.

ب) $3[x]-12=0$

$$3[x]-12=0 \Rightarrow 3[x]=12 \xrightarrow{\div 3} [x]=4$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} 4 \le x < 5$$

پ) $[x]^۲ - ۵[x] + ۴ = ۰$

از تغییر متغیر $[x] = t$ استفاده می‌کنیم:

$$t^۲ - ۵t + ۴ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} t = ۱,\ t = \frac{c}{a} = ۴$$

$$t = [x] \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \le x < ۲ \\ [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \le x < ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب} = [۱,۲) \cup [۴,۵)$$

ت) $۲[x]^۲ - x - ۱ = ۰$

$$۲[x]^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow \overbrace{۲[x]^۲ - ۱}^{\text{عدد صحیح}} = x$$

سمت چپ تساوی اخیر، عددی صحیح است، زیرا $[x]$ عددی صحیح می‌باشد، بنابراین $۲[x]^۲ - ۱$ نیز صحیح خواهد بود. پس سمت راست یعنی x نیز عددی صحیح است، در نتیجه $[x] = x$ (می‌توان [ ] را حذف کرد)

بنابراین:

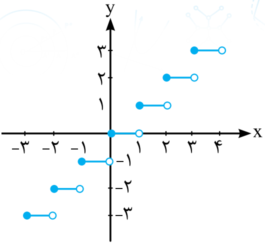
$$۲x^۲ - x - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ & \text{ق ق} \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$-\frac{۱}{۲}$ غیرقابل قبول است، زیرا x عددی صحیح است.

وعدهٔ ۹
توابع جزء صحیح

تابع $f(x) = [x]$ که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، یک گونه خاص از توابع پله‌ای است. در این تابع، دامنه مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد، مجموعهٔ اعداد صحیح است.

نمودار تابع $f(x) = [x]$ به صورت زیر است:

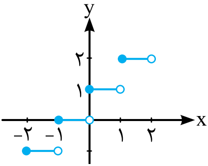


$D_f=\mathbb{R}$,

$R_f=\mathbb{Z}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح)

مثال ۱۹ **نمودار توابع زیر را رسم کنید.**

الف) $\mathbf{f(x)=[x]+۱}$ ، $\mathbf{[-۲,۲)}$



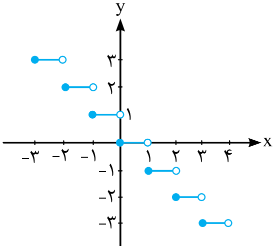
این تابع همان $y=[x]$ است که یک واحد به سمت بالا رفته است.

ب) $\mathbf{f(x)=[x+۱]}$ ، $\mathbf{[-۲,۲)}$

چون ۱ عددی صحیح است طبق ویژگی ۳ برای $[x]$ داریم:

$f(x)=[x+۱]=[x]+۱$ (همان نمودار «الف» است.)

پ) $\mathbf{f(x)=-[x]}$ ، $\mathbf{[-۳,۴)}$



این تابع همان $y=[x]$ است که نسبت به محور x ها قرینه شده است.

چاشنی: تکنیک رسم $f(x)=[kx]\ ,\ k>0$

فرض کنید می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=[kx]$ را در بازهٔ I رسم کنیم. دراین صورت، بازهٔ I را به بازه‌هایی با طول $\frac{1}{k}$ افراز می‌کنیم.

مثال ۲۵ **نمودار توابع زیر را در بازه‌های داده شده رسم کنید.**

الف) $f(x)=[2x]\quad ,\quad 0\le x<2$

با استفاده از تکنیک گفته شده چون ضریب x برابر ۲ است $(k=2)$،

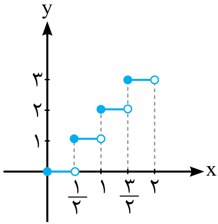
پس بازهٔ داده شده را به بازه‌هایی با طول $\frac{1}{2}$ افراز می‌کنیم:

$$1)\ \underbrace{0\le x<\frac{1}{2}}_{\text{بازه‌های با طول } \frac{1}{2}} \xrightarrow{\times 2} 0\le 2x<1 \xrightarrow{\text{ویژگی } 1} [2x]=0 \Rightarrow y=0$$

$$2)\ \frac{1}{2}\le x<1 \xrightarrow{\times 2} 1\le 2x<2 \xrightarrow{\text{ویژگی } 1} [2x]=1 \Rightarrow y=1$$

$$3)\ 1\le x<\frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2\le 2x<3 \xrightarrow{\text{ویژگی } 1} [2x]=2 \Rightarrow y=2$$

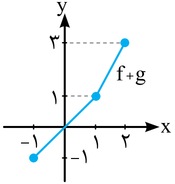
$$4)\ \frac{3}{2}\le x<2 \xrightarrow{\times 2} 3\le 2x<4 \xrightarrow{\text{ویژگی } 1} [2x]=3 \Rightarrow y=3$$



پس قسمتی از تابع g که در بازهٔ $[-۱,۱]$ است را یک واحد پایین می‌آوریم. از طرفی، تابع g نیز در بازهٔ $[۱,۲]$ تابع ثابت $g(x)=۲$ است، پس در بازهٔ $[۱,۲]$ خواهیم داشت:

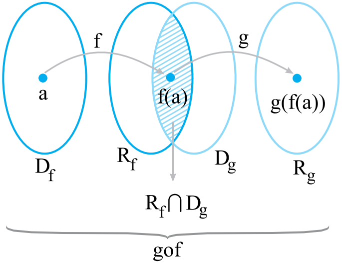
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(x)+۲$$

قسمتی از تابع f که در بازهٔ $[۱,۲]$ قرار دارد را ۲ واحد بالا می‌بریم:



وعدهٔ ۱۵
ترکیب توابع

فرض کنید f و g دو تابع باشند به طوری‌که $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ است. در این‌صورت ترکیب تابع g با تابع f را با نماد gof (جی اُ اِف) نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

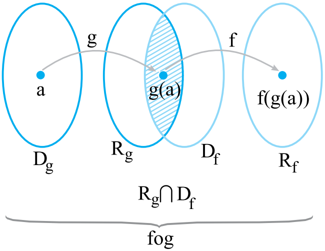


$$(gof)(x)=g(f(x))$$

دامنهٔ gof به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه، $(fog)(x)$ را نیز می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:



$$(fog)(x) = f(g(x))$$

دامنهٔ fog به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

چاشنی: ۱ برای محاسبهٔ ضابطهٔ fog، در تابع f هر جا x دیدیم به جای آن ضابطهٔ g را قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x) = f(\underbrace{g(x)}_{\downarrow})$$

جانشین x در f می‌شود.

۲ برای محاسبهٔ ضابطهٔ gof، در تابع g هر جا x دیدیم به جای آن ضابطهٔ f را قرار می‌دهیم:

$$(gof)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\downarrow})$$

جانشین x در g می‌شود.

توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی

- تابع نمایی
- کاربردهای مهم تابع نمایی

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

- تابع لگاریتم

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

- ویژگی‌های لگاریتم
- معادلات لگاریتمی
- کاربردهای لگاریتم

درس اول
تابع نمایی

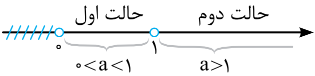
وعدهٔ ۱
تابع نمایی

هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن a عددی **حقیقی**، **مثبت** و **مخالف** یک است را یک **تابع نمایی** می‌نامیم.

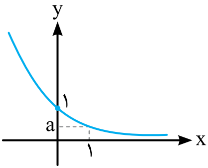
در تابع $f(x)=a^x$، a را **پایه** و x را **نما** یا **توان** می‌گوییم.

$y=a^x$

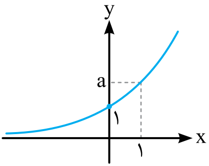
از آن‌جایی‌که a (پایه) مثبت و مخالف یک است پس برای a دو حالت وجود دارد:



با توجه به دو حالت گفته شده، نمودار تابع $f(x)=a^x$ به یکی از دو شکل زیر است:



$f(x)=a^x\,;(0<a<1)$



$f(x)=a^x\,;(a>1)$

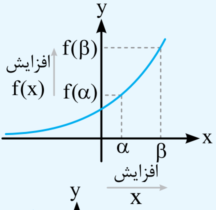
چاشنی: با توجه به هر دو نمودار، می‌توان ویژگی‌های زیر را برای تابع $y=a^x$ در نظر گرفت:

۱ در هر دو حالت، دامنه و برد تابع به صورت زیر است:

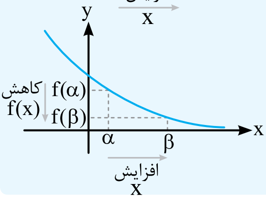
$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=(۰,+\infty)$$

۲ در هر دو حالت، تابع $f(x)=a^x$ از نقاط $A\Big|_{۱}^{۰}$ و $B\Big|_{a}^{۱}$ می‌گذرد.

۳ در هر دو حالت، تابع $f(x)=a^x$ تابعی **یک‌به‌یک** است.



۴ اگر $a>۱$، آن‌گاه با **افزایش** مقدار x، مقدار $f(x)$ نیز **افزایش** می‌یابد. (تابع افزایشی است.)



۵ اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه با **افزایش** x، مقدار $f(x)$ **کاهش** می‌یابد. (تابع کاهشی است.)

مثال ۱ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید، دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{f(x)=۲^x}$

این تابع، نمایی است زیرا به شکل $y=a^x$ است که در آن $a=۲>۱$ است، پس نمودار آن، افزایشی است.

درس سوم
ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

وعدهٔ ۴
ویژگی‌های لگاریتم

اگــر a ،b و c اعداد حقیقی مثبت و m و n اعـداد حقیقی دلخواه باشند، داریم:

۱ $\log_a 1 = 0 , (a \neq 1)$ لگاریتم ۱ در هر مبنایی برابر صفر است.

۲ $\log_a a = 1 , (a \neq 1)$ لگاریتم هر عدد نامنفی در مبنای خودش، ۱ است.

۳ $\log_c ab = \log_c a + \log_c b , (c \neq 1)$ (تبدیل ضرب به جمع)

۴ $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b , (c \neq 1)$ (تبدیل تقسیم به تفریق)

مستقیم

۵ $\log_b a^n = n \log_b a , (b \neq 1)$

۶ $\log_{b^m} a = \frac{1}{m} \log_b a , (b \neq 1)$

معکوس

۷ $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a , (b \neq 1)$

۸ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b} , (a , b \neq 1)$

۹ $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} , (c \neq 1)$

(c دلخواه است و c و b مثبت و مخالف یک هستند.) (قانون تغییر مبنا)

۱۰ $a^{\log_a^b}=b\,,(a\neq ۱)$

۱۱ $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$

این ویژگی، شکل کلی‌تر از ویژگی ۱۰ است. $(a,b,c\neq ۱)$

۱۲ $\log^a=\log_{۱۰}^a$

(اگر مبنا ذکر نشود، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم و به $\log^a$، لگاریتم اعشاری a می‌گوییم.)

۱۳ $\log^۵=۱-\log^۲$

در ویژگی‌های ۱۲ و ۱۳، توجه کنیم که مبنا باید ۱۰ باشد.

۱۴ $\log^۲=۱-\log^۵$

تذکر: همـــواره دقت کنیم که لگاریتم برای **صفر** و **اعداد منفی** تعریف نمی‌شود. ضمناً مبنا، عددی مثبت و مخالف یک است.

مثال ۱۹ با اســتفاده از ویژگی‌های لگاریتم، عبارت‌های زیر را ساده کنید:

(تمرین ۱ صفحهٔ ۸۵)

الف) $\log_۷^{\sqrt[۳]{۷^۲}}$

مستقیم

$$\log_۷^{\sqrt[۳]{۷^۲}}=\log_۷ ۷^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}\underbrace{\cancel{\log_۷^۷}}_{\log_a^a=۱}=\frac{۲}{۳}$$

ب) $\log_۶^{\frac{۱}{۶}}$

مستقیم

$$\log_۶^{\frac{۱}{۶}}=\log_۶^{۶^{-۱}}=-\cancel{\log_۶^۶}=-۱$$

وعدهٔ ۶

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{۲}\pm\theta$ $(\theta>۰)$

ابتدا یادآوری می‌کنیم که انتهای کمان $\frac{\pi}{۲}-\theta$ در ناحیهٔ اول و انتهای کمان $\frac{\pi}{۲}+\theta$ در ناحیهٔ دوم است. حال، اگر در کمان یک نسبت مثلثاتی، $\frac{\pi}{۲}\pm\theta$ دیدیم، ابتدا، «تعیین ناحیه» می‌کنیم و علامت آن نسبت را در آن ناحیه مشخص می‌کنیم. سپس $\pm\frac{\pi}{۲}$ ($\frac{\pi}{۲}$ و علامت + یا − بعد از آن) را حذف می‌کنیم. توجه می‌کنیم که پس از این کار، نسبت‌ها را به شکل ضربدری عوض می‌کنیم. (سینوس به کسینوس و تانژانت به کتانژانت و برعکس، تبدیل می‌شوند.) موارد بالا، به این شکل قابل بیان هستند:

علامت سینوس در ناحیهٔ دوم	علامت سینوس در ناحیهٔ اول
$\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=+\cos\theta$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=+\cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=+\sin\theta$
$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\cot\theta$	$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=+\cot\theta$
$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\tan\theta$	$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=+\tan\theta$

مثال ۱۵ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(\frac{۳\pi}{۴})$

چاشنی: ۱ توابع شامل جزء صحیح ([ ]) در هر نقطه‌ای که داخل براکت عدد صحیح شود، مشکوک به ناپیوستگی هستند و باید حد چپ و راست و مقدار تابع را در آن نقطه بررسی کنیم.

۲ توابع چندضابطه ای، در **نقاط مرزی** خود مشکوک به ناپیوستگی هستند و باید حد چپ و راست و مقدار تابع را در آن نقاط بررسی کنیم.

مثال ۲۷ پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده، بررسی کنید.

الف) $\mathbf{f(x)=[x] \quad , \quad x=۲}$

چون $x=۲$ ، داخل براکت را عدد صحیح می‌کند، باید حد چپ و راست و $f(۲)$ بررسی شوند:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+}[x]=[۲^+]=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}[x]=[۲^-]=۱ \\ f(۲)=[۲]=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع } f(x) \text{ در } x=۲ \text{ ناپیوسته است}$$

ب) $\mathbf{f(x)=(x-۲)[x] \quad , \quad x=۲}$

حد چپ و راست و $f(۲)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+}((x-۲)[x])=۰\times[۲^+]=۰\times ۲=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}((x-۲)[x])=۰\times[۲^-]=۰\times ۱=۰ \\ f(۲)=(۲-۲)[۲]=۰\times ۲=۰ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است.

پ) $f(x)=\begin{cases}[x]+۱ & ; \quad x>۲\\ ۳ & ; \quad x=۲\\ ۲x-۱ & ; \quad x<۲\end{cases} \quad , \quad x=۲$

$x=۲$ نقطهٔ مرزی تابع $f(x)$ اســت، پس باید حد چپ و راست و $f(۲)$ بررسی شوند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}([x]+۱)=[۲^+]+۱=۳\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(۲x-۱)=۲(۲)-۱=۳\\ f(۲)=۳\end{cases} \Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=۳$ پیوسته است.

ت) $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ; \quad x\geq ۱\\ ۳x-۱ & ; \quad x<۱\end{cases} \quad , \quad x=۱$

باید حد چپ و راست و $f(۱)$ بررسی شوند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲x+۱)=۲(۱)+۱=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}(۳x-۱)=۳(۱)-۱=۲\\ f(۱)=۲(۱)+۱=۳\end{cases} \Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است.

مثال ۲۸ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=۰$ پیوسته باشد. (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۵۱)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & ; \quad x>۰\\ b-۱ & ; \quad x=۰\\ x-۲a & ; \quad x<۰\end{cases}$$

۲ همسایگی محذوف عدد $x_\circ$:

اگر از بازهٔ $(a\,,b)$ عدد $x_\circ$ را حذف کنیم، همسایگی محذوف عدد $x_\circ$ به دست می‌آید: $(a\,,b)-\{x_\circ\}$

$$(a\,,b)-\{x_\circ\}=(a\,,x_\circ)\cup(x_\circ\,,b)$$

۳ تعریف حد:

الف) اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد راست تابع f در $x=a$ برابر عدد L_1 است.

ب) اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر L_2 است.

پ) حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

۴ قضایای حد:

$$\lim_{x\to a} c=c \qquad \lim_{x\to a} x=a$$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=(\lim_{x\to a} f(x))\pm(\lim_{x\to a} g(x))=L_1\pm L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=(\lim_{x\to a} f(x)).(\lim_{x\to a} g(x))=L_1.L_2$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad (L_2\neq 0)$$

$\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$ ($P(x)$ چندجمله‌ای است.)