

(فصل ۱)

## ماتریس و کاربردها

۷	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۱۴	درس ۲: دترمینان
۲۳	درس ۳: وارون ماتریس

(فصل ۲)

## آشنایی با مقاطع مخروطی

۳۶	درس ۱: مکان هندسی
۴۲	درس ۲: دایره
۵۵	درس ۳: بیضی
۶۳	درس ۴: سهمی

(فصل ۳)

## بردارها

۷۴	درس ۱: معرفی فضای $R^3$
۸۴	درس ۲: ضرب داخلی بردارها
۹۲	درس ۳: ضرب خارجی بردارها

۱۰۴ پاسخ‌نامه تشریحی

۲۱۹ پاسخ‌نامه کلیدی

# آشنایی با مقاطع مخروطی

درس ۱

## مکان هندسی



### مکان هندسی

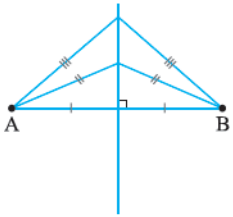
به احتمال زیاد به یاد دارید که در قسمت «ترسیم‌های هندسی» هندسهٔ دهم یک سری نقطه داشتیم که ویژگی‌های مشترکی داشتند؛ مثل نقاطی که روی نیمساز یک زاویه واقع‌اند، ویژگی این نقاط این بود که از دو ضلع زاویه به یک فاصله بودند.

از این نقاط که دارای ویژگی مشترک هستند با نام «مکان هندسی» هم یاد می‌کنند.

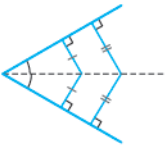
در واقع «مکان هندسی» مجموعهٔ نقاطی از صفحه یا فضاست که: ۱) دارای یک ویژگی مشترک باشند، ۲) هر نقطه‌ای که این ویژگی مشترک را داشته باشد، عضو مجموعهٔ موردنظر باشد.

### مکان‌های هندسی مهم و معروف

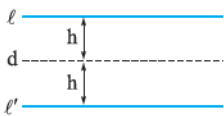
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره‌خط  $AB$  به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  است.



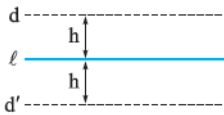
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه، به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ موردنظر است.



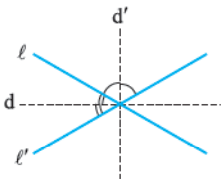
۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی  $l$  و  $l'$  به یک فاصله‌اند، خطی است موازی با دو خط و در وسط آن‌ها.



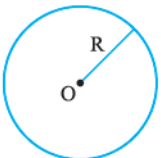
۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $l$  به فاصلهٔ ثابت  $h$  باشند، دو خط  $d$  و  $d'$  به موازات  $l$  و در طرفین  $l$  است.

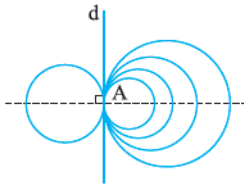


۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $l$  و  $l'$  به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای بین  $l$  و  $l'$  است که بر هم عمودند. ( $d$  و  $d'$  نیمسازهای زوایای بین  $l$  و  $l'$  هستند).

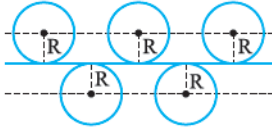


۶) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ معلوم  $O$  به فاصلهٔ  $R$  هستند، دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  است.

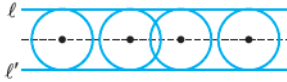




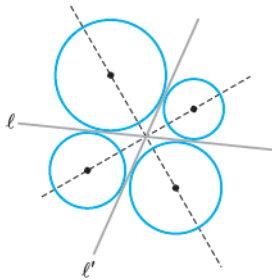
۷ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط d مماس باشند، خطی است که در نقطه A بر d عمود است.



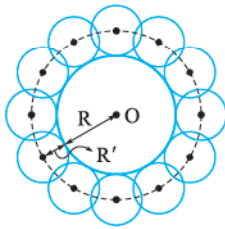
۸ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط d مماس‌اند (روی خط d می‌غلتند)، دو خط به موازات و به فاصله R از آن است که از مراکز دایره‌ها می‌گذرد.



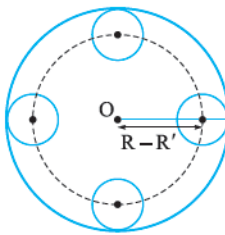
۹ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی l و l' مماس‌اند، خطی است موازی با l و l' و در وسط آن‌ها که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد.



۱۰ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع l و l' مماس‌اند، نیمسازهای زوایای بین دو خط l و l' است.



۱۱ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در خارج آن می‌غلتند (دو دایره، مماس‌خارج‌اند)، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R + R'.



۱۲ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در داخل آن می‌غلتند (دو دایره، مماس‌داخل‌اند)، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R - R'.

**تست** سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را روی صفحه‌ای به شکل مربع به ضلع ۱۰ سانتی‌متر برتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقاطی درون مربع که

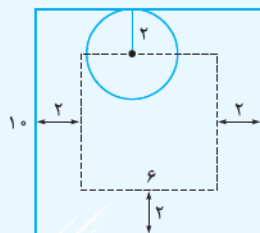
اگر مرکز سکه در آن‌جا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود، کدام است؟

(۲) محیط یک مربع به قطر  $6\sqrt{2}$

(۱) سطح یک مربع به قطر  $6\sqrt{2}$

(۴) محیط یک مربع به قطر  $8\sqrt{2}$

(۳) سطح یک مربع به قطر  $8\sqrt{2}$



**پاسخ گزینه ۱**

برای آن که سکه کاملاً داخل مربع قرار گیرد، باید مرکز سکه از هر ضلع مربع حداقل

۲ سانتی‌متر فاصله داشته باشد، پس مرکز سکه باید روی سطح یک مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر (قطر  $6\sqrt{2}$

سانتی‌متر) واقع شود.

**تست** حداکثر چند نقطه روی دایره‌ای به شعاع ۷ وجود دارد که از خط  $d$  به فاصله  $3/5$  باشند؟

۴ (۴)

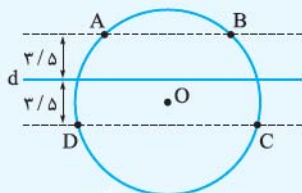
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

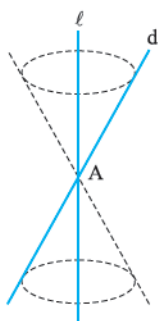


**پاسخ گزینه ۲** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $d$  به فاصله  $3/5$  باشند، دو خط موازی با  $d$  و در طرفین  $d$  است.

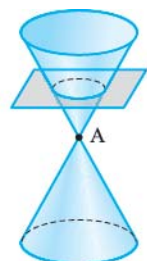


محل برخورد دایره و دو خط موازی با  $d$  جواب مسئله است. برای این که حداکثر تعداد نقاط را داشته باشیم باید هر دو خط، دایره را قطع کنند؛ یعنی به شکل مقابل باشند: نقاط  $A, B, C, D$  جواب سؤال هستند؛ پس حداکثر ۴ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.

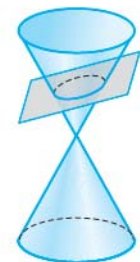
### رویه مخروطی



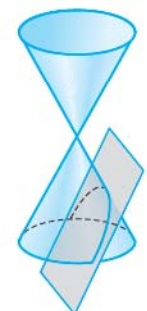
اگر دو خط  $d$  و  $l$  در نقطه  $A$  متقاطع باشند، سطح حاصل از دوران خط  $d$  حول خط  $l$  را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) گویند. نقطه  $A$  را رأس، خط  $l$  را محور و خط  $d$  را مولد سطح مخروطی می‌گویند.



۱ اگر صفحه‌ای عمود بر محور مخروط قائم، آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است. (اگر صفحه گفته شده از رأس  $A$  می‌گذشت، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، نقطه  $A$  بود.)



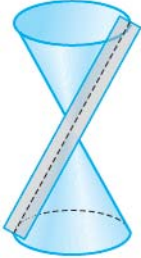
۲ اگر صفحه بر محور مخروط عمود نباشد (به طور مایل آن را قطع کند) و با مولد موازی نباشد (یک شکل بسته ایجاد کند)، سطح مقطع حاصل، بیضی است.



۳ اگر صفحه‌ای موازی با یکی از مولدهای مخروط، آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل، سهمی است.



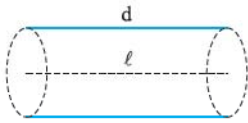
۴ اگر صفحه‌ای موازی با محور مخروط، آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل، هذلولی است.



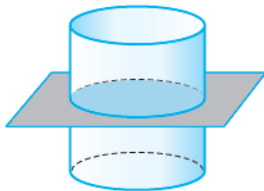
۵ اگر صفحه شامل یکی از مولدها باشد، مقطع حاصل یک خط است.



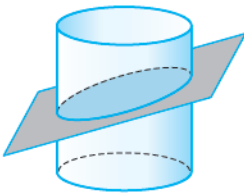
۶ اگر صفحه شامل محور مخروط باشد، مقطع حاصل، دو خط متقاطع است.



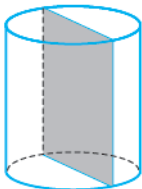
۷ اگر دو خط  $d$  و  $l$  (بهتر است بگوییم دو پاره‌خط  $d$  و  $l$ ) موازی باشند، از دوران  $d$  حول  $l$  یک استوانه ایجاد می‌شود.



۱ اگر صفحه  $p$  موازی با قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.



۲ اگر صفحه  $p$ ، استوانه را مایل قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.



۳ اگر صفحه  $p$ ، عمود بر قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل، مستطیل است.

### مطالعه نیمه آزاد

کتاب درسی به بررسی هذلولی نمی‌پردازد. به احتمال زیاد در دانشگاه توابع هیپربولیک (هذلولوی) و رویه هذلولی‌گون به گوش شما خواهد خورد. شاید بد نباشد! اطلاعاتی در مورد هذلولی داشته باشید.

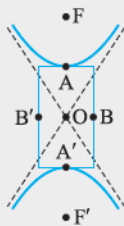


هذلولی را این‌گونه تعریف می‌کنند: «مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت به نام کانون به فاصله ثابت (طول قطر هذلولی) است.»  $|MF - MF'| = AA' = 2a$

(F و F' کانون‌ها، A و A' رئوس کانونی و فاصله O تا A برابر a است.)

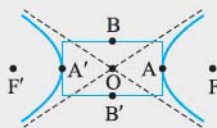
هدلولی دو نوع افقی و قائم دارد. (بدانید که  $OA = OA' = a$ ،  $OF' = OF = c$ ، رابطه مهم هدلولی  $c^2 - a^2 = b^2$  و  $OB = OB' = b$  است.)

معادلات هدلولی:



هدلولی قائم به مرکز  $O(\alpha, \beta)$

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$



هدلولی افقی به مرکز  $O(\alpha, \beta)$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۲۳۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی  $d$  و  $d'$  به یک فاصله هستند، کدام است؟  
 (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) یک صفحه
- ۲۳۷- مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی مماس‌اند، کدام است؟  
 (۱) دایره (۲) دو خط موازی (۳) یک خط (۴) دو خط عمود بر هم
- ۲۳۸- مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت  $r$  که بر خط  $d$  در صفحه مماس‌اند، کدام است؟  
 (۱) خطی موازی با  $d$  و به فاصله  $r$  از  $d$  (۲) خطی موازی با  $d$  و به فاصله  $2r$  از  $d$  (۳) دو خط موازی با  $d$  و به فاصله  $r$  از  $d$  (۴) دو خط موازی با  $d$  و به فاصله  $2r$  از  $d$
- ۲۳۹- مکان هندسی مرکز تویی به شعاع  $R$  که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم در حال حرکت می‌باشد، کدام است؟  
 (۱) یک صفحه (۲) یک خط (۳) دو خط موازی (۴) دایره
- ۲۴۰- مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع  $2$  که بر دایره  $C(O, 5)$  مماس داخلی‌اند، کدام است؟  
 (۱) دایره‌ای به شعاع  $1$  (۲) دایره‌ای به شعاع  $2$  (۳) دایره‌ای به شعاع  $3$  (۴) دایره‌ای به شعاع  $4$
- ۲۴۱- مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره  $C(O, r)$  مماس خارجی‌اند، کدام است؟  
 (۱) دایره‌ای به شعاع  $2r$  (۲) مربعی به طول ضلع  $2r$  (۳) دایره‌ای به شعاع  $\frac{3r}{2}$  (۴) مربعی به طول ضلع  $4r$
- ۲۴۲- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی با شعاع  $3$  که بر دایره  $C(O, 4)$  مماس خارجی‌اند را در نظر بگیرید. بیشترین فاصله نقاط این مکان هندسی چه قدر است؟  
 (۱)  $7$  (۲)  $11$  (۳)  $14$  (۴)  $20$
- ۲۴۳- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی در صفحه که بر خط  $d$  در نقطه  $A$  مماس‌اند، کدام است؟  
 (۱) خطی موازی با خط  $d$  (۲) دایره‌ای به مرکز  $A$  (۳) خطوط عمود بر خط  $d$  (۴) خط عمود بر خط  $d$  در نقطه  $A$
- ۲۴۴- تعداد نقاطی که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به ترتیب به فاصله  $5/2$  و  $3/5$  سانتی‌متر باشند، کدام است؟  
 (۱) بی‌شمار (۲)  $4$  (۳)  $2$  (۴) صفر
- ۲۴۵- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع  $3$  سانتی‌متر که از نقطه ثابت  $A$  می‌گذرند، کدام است؟  
 (۱) مربعی به طول  $3$  سانتی‌متر (۲) دایره‌ای به قطر  $3$  سانتی‌متر (۳) مربعی به طول  $6$  سانتی‌متر (۴) دایره‌ای به قطر  $6$  سانتی‌متر
- ۲۴۶- خط  $d$  و پاره خط  $AB$  بر هم عمود نیستند. چند نقطه روی خط  $d$  وجود دارد که از نقاط  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشند؟  
 (۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $2$  (۴) بی‌شمار
- ۲۴۷- خط  $d$  و دو نقطه  $A$  و  $B$  طوری در صفحه قرار دارند که خط گذرنده از  $A$  و  $B$  بر  $d$  عمود است. چند نقطه روی  $d$  وجود دارد که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشند؟  
 (۱) صفر (۲) صفر یا یک (۳) صفر یا بی‌شمار (۴) یک یا بی‌شمار
- ۲۴۸- نقاط  $A, B, C$  و  $D$  در صفحه مفروض‌اند. کدام گزینه تعداد نقاطی را مشخص می‌کند که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشند؟  
 (۱) حداکثر یک (۲) دقیقاً یک (۳) یک، بی‌شمار (۴) صفر، یک، بی‌شمار
- ۲۴۹- حداکثر چند نقطه روی دایره  $C$  به شعاع  $5$  وجود دارد که از خط  $\Delta$  به فاصله  $5/2$  باشند؟  
 (۱)  $4$  (۲)  $3$  (۳)  $2$  (۴)  $1$
- ۲۵۰- مکان هندسی رئوس مثلث‌هایی در صفحه که طول قاعده آن‌ها  $4$  سانتی‌متر و مساحت آن‌ها  $8$  سانتی‌متر مربع باشد، کدام است؟  
 (۱)  $2$  دایره به شعاع  $4$  سانتی‌متر به مراکز  $B$  و  $C$  (۲)  $4$  دایره به شعاع  $4$  سانتی‌متر به مراکز  $B$  و  $C$  (۳) خطی موازی با قاعده و به فاصله  $4$  سانتی‌متر از آن (۴) دو خط موازی به فاصله  $8$  سانتی‌متر



۲۵۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله‌اند، کدام است؟

- (۱) دو خط عمود بر هم (۲) یک دایره (۳) یک خط (۴) دو خط متقاطع

۲۵۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع مقداری ثابت باشد، کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) دو خط متقاطع (۳) یک دایره (۴) دو دایره

۲۵۳- حداکثر چند نقطه روی خط  $L$  وجود دارد که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۵۴- روی دایره  $C$  حداکثر چند نقطه وجود دارد که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸

۲۵۵- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرند، کدام است؟

- (۱) خطوط موازی با  $AB$  (۲) یک خط عمود بر  $AB$  (۳) دو خط موازی با  $AB$  (۴) خطوط عمود بر  $AB$

۲۵۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط موازی  $d$  و  $d'$  که فاصله آن‌ها ۴ سانتی‌متر است، برابر با ۴ سانتی‌متر باشد، کدام است؟

- (۱) یک خط بین دو خط  $d$  و  $d'$  (۲) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  (۳) نقاط بین  $d$  و  $d'$  (۴) نقاط روی  $d$  و  $d'$

۲۵۷- مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو خط موازی  $d$  و  $d'$  که فاصله آن‌ها ۴ سانتی‌متر است، برابر ۳ سانتی‌متر باشد، کدام است؟

- (۱) تمام نقاط بین  $d$  و  $d'$  (۲) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  (۳) نقاط خارج از فضای بین دو خط (۴) یک خط

۲۵۸- فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  روی دو خط عمود بر هم  $d$  و  $d'$  همواره برابر ۲ است. مکان هندسی نقطه وسط  $AB$  کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) دایره (۴) مربع

۲۵۹-  $A$  و  $B$  دو نقطه ثابت و  $C$  نقطه‌ای متغیر از یک صفحه‌اند. با حرکت نقطه  $C$ ، مکان هندسی نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث  $ABC$  کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز وسط  $AB$  (۲) یک نقطه (۳) خطی موازی با  $AB$  (۴) خطی عمود بر  $AB$

۲۶۰- مکان هندسی رأس  $A$  از مثلث  $ABC$  که نقاط  $B$  و  $C$  و طول میانه  $AM$  در آن ثابت هستند، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) یک خط (۳) دو خط موازی (۴) نیم‌خط

### آزمونک

۲۶۱- چند نقطه در صفحه دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  وجود دارد که از خط  $d$  به فاصله ۳ و از خط  $d'$  به فاصله ۵ باشند؟

- (۱) بی‌شمار (۲) چهار (۳) دو (۴) یک

۲۶۲- کدام گزینه تعداد نقاط روی دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر که از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند را مشخص نمی‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۶۳- نقاط  $M$  و  $N$  به ترتیب روی دو خط موازی  $d$  و  $d'$  قرار دارند. مکان هندسی وسط پاره‌خط  $MN$  کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) نیم‌دایره (۳) دایره (۴) پاره‌خط عمود بر  $d$  و  $d'$

۲۶۴- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی با شعاع ۳ که بر دایره  $C(O, 4)$  مماس خارجی‌اند را در نظر بگیرید. بیشترین فاصله نقاط روی دایره‌هایی که بر دایره  $C$  مماس خارجی‌اند، چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴) ۲۰

۲۶۵- نقطه  $A$  و طول ضلع  $AB$  از مثلث  $ABC$  ثابت‌اند. مکان هندسی نقطه  $M$  پای میانه مرسوم از رأس  $C$  کدام است؟

- (۱) خط (۲) دو خط (۳) نیم‌دایره (۴) دایره

### سری

۲۶۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره  $C(O, 2)$  رسم می‌شود، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) یک خط (۳) دو خط (۴) محیط یک مربع

۲۶۷- حداکثر چند دایره به شعاع ۱ می‌توان رسم کرد که بر دایره  $C(O, 4)$  و خط  $d$  مماس باشند؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) بی‌شمار

۲۶۸- فرض کنید دو خط  $d$  و  $d'$  بر هم عمودند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از خط  $d'$  سه برابر فاصله آن‌ها از خط  $d$  باشد، کدام است؟

- (۱) چهار نقطه (۲) محیط یک چهارضلعی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) دو خط متقاطع

۲۶۹- دایره‌ای بر مثلث  $ABC$  که در رأس  $A$  قائمه است، محیط شده است. اگر نقاط  $B$  و  $C$  ثابت باشند و نقطه  $A$  روی محیط دایره حرکت کند، مکان هندسی نقطه  $G$  مرکز ثقل مثلث کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع  $\frac{BC}{6}$  (۲) دایره‌ای به شعاع  $\frac{BC}{4}$  (۳) دایره‌ای به شعاع  $\frac{BC}{3}$  (۴) دایره‌ای به شعاع  $\frac{BC}{2}$

۲۷۰- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از سه نقطه  $A, B$  و  $C$  به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) حداکثر یک نقطه (۲) یک نقطه (۳) حداکثر دو خط متقاطع (۴) دو خط متقاطع

۲۷۱- دو نقطه  $C$  و  $D$  و طول  $AD$  از متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  ثابت‌اند. مکان هندسی محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  روی کدام شکل قرار دارد؟

- (۱) نقطه هم‌مرسی میانه‌های مثلث  $ADC$  (۲) نقطه هم‌مرسی میانه‌های مثلث  $BCD$

- (۳) خطی که از وسط  $DC$  عبور می‌کند. (۴) دایره‌ای به مرکز وسط  $DC$

۲۷۲- خط  $d$  اضلاع زاویه  $O$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کرده است. اگر مکان خط  $d$  تغییر کند، مکان هندسی محل تلاقی نیمسازهای زوایای  $OAB$  و

$OBA$  کدام است؟

- (۱) خط (۲) یک نقطه ثابت (۳) تمام نقاط بین دو نیم‌خط زاویه (۴) دایره

۲۷۳- قاعده  $BC$  از مثلث  $ABC$  ثابت و نقطه  $M$  وسط  $BC$  مفروض است. رأس  $A$  روی خطی موازی با  $BC$  و به فاصله  $d$  از آن حرکت می‌کند. مکان

هندسی  $G$ ، نقطه برخورد میانه‌های مثلث  $ABC$  کدام است؟

- (۱) خطی موازی با  $BC$  و به فاصله  $\frac{d}{3}$  از آن (۲) دایره‌ای به مرکز  $M$  و شعاع  $\frac{d}{3}$

- (۳) خطی موازی با  $BC$  و به فاصله  $\frac{2d}{3}$  از آن (۴) دایره‌ای به مرکز  $M$  و شعاع  $\frac{2d}{3}$

۲۷۴- قطرهای مربعی قسمتی از دو خط متمایز  $d$  و  $d'$  هستند. مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فواصل آن نقاط از دو خط  $d$  و  $d'$  برابر  $13$

باشد، کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع  $13$  (۲) مربعی به طول ضلع  $13$  (۳) دایره‌ای به شعاع  $13\sqrt{2}$  (۴) مربعی به طول ضلع  $13\sqrt{2}$

۲۷۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو خط متقاطع برابر  $3$  سانتی‌متر باشد، کدام است؟

- (۱)  $4$  خط (۲)  $4$  نیم‌خط (۳) محیط یک مستطیل (۴)  $8$  نیم‌خط



۲۳۶- **گزینه ۱** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند، خطی است موازی با دو خط و در وسط آن‌ها.

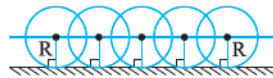
همان‌طور که در شکل می‌بینید، نقاطی که  $d$  از دو خط موازی  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشند، روی خطی موازی با  $d$  و  $d'$  به نام  $l$  واقع‌اند که در وسط دو خط قرار دارد.

۲۳۷- **گزینه ۳** مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی  $d$  و  $d'$  مماس‌اند، از دو خط  $d$  و  $d'$  به یک فاصله‌اند، بنابراین مرکز دایره‌های مماس بر دو خط  $d$  و  $d'$  روی خطی موازی با  $d$  و  $d'$  و وسط آن‌ها قرار دارد.

۲۳۸- **گزینه ۳** خط  $d$  را در نظر می‌گیریم. دایره‌های  $C_1, C_2, C_3, C_4$  با شعاع  $r$  که بر خط مماس‌اند را رسم می‌کنیم.

کاملاً واضح است که مراکز این دایره‌ها روی خط  $d_1$  و  $d_2$  که با خط  $d$  موازی‌اند و به فاصله  $r$  از  $d$  هستند، قرار دارند. بنابراین: «مکان هندسی مراکز دایره‌هایی با شعاع  $r$  که بر خط  $d$  در صفحه مماس‌اند، دو خط موازی با  $d$  در طرفین  $d$  و با فاصله  $r$  از  $d$  هستند.»

۲۳۹- **گزینه ۲** وقتی توپ روی سطح صاف در امتداد یک مسیر مستقیم می‌غلتد، فاصله مرکز توپ از سطح، همواره برابر شعاع توپ است، بنابراین مرکز توپ همواره روی خطی موازی با سطح صاف و به فاصله  $R$  از آن قرار دارد.



۲۴۰- **گزینه ۳** دایره  $C$  با مرکز  $O$  و شعاع  $5$  را رسم می‌کنیم.

دایره‌های  $C_1, C_2, C_3$  به مراکز  $O_1, O_2, O_3$  را شعاع  $2$  رسم می‌کنیم. مراکز این سه دایره روی دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $3$  قرار دارند. بنابراین مکان هندسی مراکز دایره‌هایی با شعاع  $2$  که بر دایره  $C$  مماس داخلی‌اند، دایره‌ای است به مرکز  $O$  و شعاع  $3 - 2 = 1$ .

در حالت کلی «مکان هندسی مراکز دایره‌هایی به شعاع  $r'$  که بر دایره  $C(O, r)$  مماس داخلی‌اند ( $r' < r$ ) دایره‌ای است به مرکز  $O$  و شعاع  $r - r'$ ».

**دقت!** اگر بیشترین فاصله نقاط این مکان هندسی خواسته شده بود برابر با فاصله  $O_1$  تا  $O_3$  یعنی طول قطر دایره مشخص شده با خط‌چین بود که برابر با  $6$  می‌شد.

۲۴۱- **گزینه ۱** دایره  $C$  با مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را رسم می‌کنیم.

دایره‌های  $C_1, C_2, C_3$  به شعاع  $r$  بر دایره  $C$  مماس خارج‌اند. همان‌طور که می‌بینید مرکز دایره‌ها یعنی  $O_1, O_2, O_3$  روی دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $2r$  قرار دارد.

بنابراین: «مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره  $C(O, r)$  مماس خارجی‌اند، دایره‌ای است به مرکز  $O$  و شعاع  $2r$ ».

۲۴۲- **گزینه ۳** مکان هندسی موردنظر سؤال دایره‌ای است به مرکز  $O$  و شعاع  $7$  (دایره‌ای که با نقطه‌چین نشان داده شده است).

در هر دایره بیشترین فاصله بین نقاط دایره را نقطه‌ای ایجاد می‌کنند که دو سر قطر دایره واقع‌اند؛ یعنی بیشترین فاصله نقاط روی محیط دایره برابر با قطر دایره است.

اگر به شکل دقت کنید!  $O'$  و  $O''$  دو سر قطر دایره‌ای به شعاع  $7$  (قطر  $14$ ) هستند که روی مکان هندسی موردنظر سؤال واقع‌اند. بنابراین می‌توان گفت بیشترین فاصله بین نقاط این مکان هندسی برابر با  $14$  است.

۲۴۳- **گزینه ۴** نقطه  $A$  را روی خط  $d$  در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین  $OA, O'A, O''A, O'''A$  بر خط  $d$  عمودند؛ یعنی نقاط  $O, O', O'', O'''$  روی خطی عمود بر خط  $d$  واقع هستند.

می‌توانیم بگوییم «مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که بر خط  $d$  در نقطه  $A$  مماس‌اند، خطی عمود بر خط  $d$  در نقطه  $A$  است.»

**دقت کنید!** درست نیست، زیرا مکان هندسی را تمام خطوط عمود بر خط  $d$  معرفی کرده است.

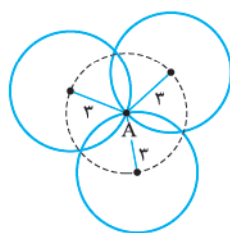
۲۴۴- **گزینه ۲** ابتدا دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  را در نظر بگیرید.

قرار است نقاطی را پیدا کنیم که از خط  $d$  به فاصله  $2/5$  و از خط  $d'$  به فاصله  $3/5$  سانتی‌متر باشند. نقاطی که به فاصله  $2/5$  سانتی‌متر از خط  $d$  هستند روی دو خط موازی با  $d$ ، در طرفین  $d$  و به فاصله  $2/5$  سانتی‌متر از آن واقع‌اند.

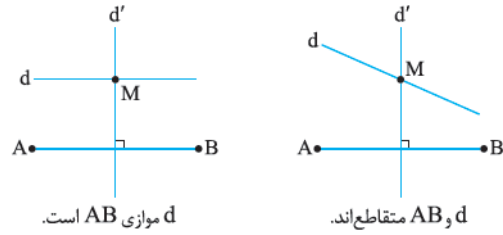
هم‌چنین نقاطی که به فاصله  $3/5$  سانتی‌متر از خط  $d'$  هستند، روی دو خط موازی با  $d'$ ، در طرفین  $d'$  و به فاصله  $3/5$  سانتی‌متر از  $d'$  واقع‌اند. محل برخورد این چهار خط که چهار نقطه  $A, B, C, D$  هستند، پاسخ سؤال است که رئوس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  هستند.

۲۴۵- **گزینه ۴** دایره‌های مقابل را ببینید!

هر سه دایره از نقطه  $A$  گذشته‌اند و شعاع آن‌ها  $3$  سانتی‌متر است. حالا باید در مورد مرکز این دایره‌ها حرف بزنیم! کاملاً واضح است که مرکز این دایره‌ها به فاصله  $3$  سانتی‌متر از  $A$  قرار دارند. بنابراین این مراکز روی دایره‌ای به مرکز  $A$  و شعاع  $3$  سانتی‌متر واقع‌اند.

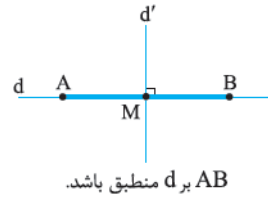


۲۴۶- **گزینه ۲** همه نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف AB قرار دارند. چون AB و d بر هم عمود نیستند، بنابراین عمودمنصف AB خط d را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند. (d' عمودمنصف AB است.)



d موازی AB است.

d و AB متقاطعند.



AB بر d منطبق باشد.

در تمام حالت‌ها، خط d و عمودمنصف AB (یعنی d') در یک نقطه (نقطه M) یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین دقیقاً یک نقطه روی خط d وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله باشد.

۲۴۷- **گزینه ۳** مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه متمایز A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. دو حالت پیش می‌آید:

۱) A و B در یک طرف خط d باشند. در این حالت چون خط گذرنده از A و B بر d عمود است پس عمودمنصف A و B یعنی خط d' با d موازی است و خط d را قطع نمی‌کند؛ پس مسئله جواب ندارد.

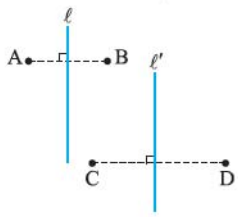
۲) اگر A و B در طرفین خط d باشند نیز ۲ حالت ایجاد می‌شود. الف) آن‌ها تا خط d برابر نباشند. در این حالت نیز عمودمنصف پاره‌خط AB موازی خط d است و d را قطع نمی‌کند؛ پس مسئله جواب ندارد. ب) آن‌ها تا خط d برابر باشند. در این حالت خط d عمودمنصف AB خواهد بود و تمام نقاط روی خط d از A و B به یک فاصله‌اند؛ پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۲۴۸- **گزینه ۲** قبل از پاسخ‌دادن به سؤال دو نکته را با هم مرور کنیم.

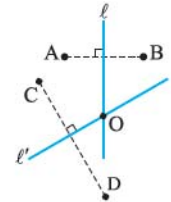
۱) مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط تشکیل شده از دو نقطه است. ۲) می‌دانیم دو خط در صفحه سه وضعیت دارند: (۱) موازی، (۲) متقاطع، (۳) منطبق. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

هم‌چنین مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط CD است. نقاط برخورد دو عمودمنصف پاسخ مسئله است. (l عمودمنصف پاره‌خط AB و l' عمودمنصف پاره‌خط CD است.)

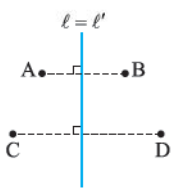
دو عمودمنصف، دو خط هستند پس نسبت به هم سه حالت می‌تواند داشته باشند: موازی، متقاطع و منطبق. سه حالت را ببینید:



l و l' موازی‌اند، بنابراین نقطه مشترک ندارند. در این حالت مسئله جواب ندارد.

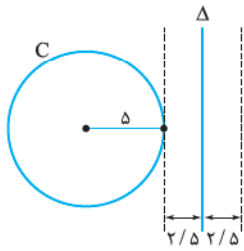


l و l' متقاطع‌اند و در نقطه O مشترک‌اند. در این حالت مسئله یک جواب دارد.

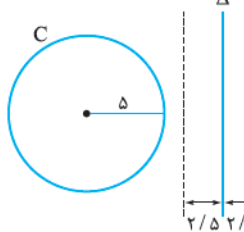


l و l' منطبق‌اند، بنابراین بی‌شمار نقطه مشترک دارند. در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد. با توجه به وضعیت l و l'، صفر، یک یا بی‌شمار نقطه داریم.

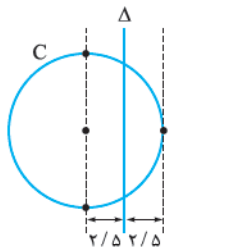
۲۴۹- **گزینه ۱** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $\Delta$  به فاصله  $\frac{2}{5}$  باشند دو خط موازی با  $\Delta$ ، در طرفین آن و به فاصله  $\frac{2}{5}$  از آن است. نقاط برخورد دو خط موازی با  $\Delta$  و دایره C جواب سؤال است. حالت‌ها را ببینید.



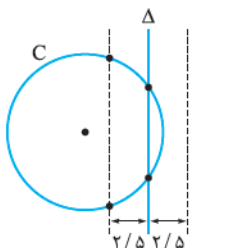
دو خط موازی و دایره یک نقطه تلاقی دارند.



دو خط موازی و دایره نقطه تلاقی ندارند.



دو خط موازی و دایره سه نقطه تلاقی دارند.



دو خط موازی و دایره دو نقطه تلاقی دارند.

حالا اگر نسبت فواصل نقاط از دو خط متقاطع یک نباشد، جواب دو خط متقاطع غیرعمود خواهد بود.

**۲۵۳- گزینه ۲** یادمان هست! که مکان هندسی نقاطی که از دو خط  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای بین دو خط  $d$  و  $d'$  است. نقاط برخورد نیمسازهای زوایای بین  $d$  و  $d'$  و خط  $L$  جواب‌های سؤال هستند.

اگر فقط یکی از دو نیمساز را قطع کند (موازی نیمساز دیگر باشد)، سؤال یک جواب دارد؛ یعنی یک نقطه روی  $L$  وجود دارد که از دو خط  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشد. ( $l_1$  و  $l_2$  نیمسازهای زوایای دو خط  $d$  و  $d'$  هستند.)

اگر  $L$  منطبق بر یکی از نیمسازها باشد، سؤال بی‌شمار جواب دارد؛ یعنی بی‌شمار نقطه روی  $L$  وجود دارد که از دو خط  $d$  و  $d'$  به یک فاصله‌اند. اگر  $L$  هر دو نیمساز را قطع کند، سؤال دو جواب دارد؛ یعنی دو نقطه روی  $L$  وجود دارد که از دو خط  $d$  و  $d'$  متساوی‌الفاصله هستند.

**۲۵۴- گزینه ۳** می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای بین دو خط است.

اگر  $l_1$  و  $l_2$  نیمسازهای زوایای  $d$  و  $d'$  باشند، هر کدام از این دو خط حداکثر در دو نقطه دایره  $C'$  را قطع می‌کند. چهار نقطه  $A, B, C, D$  همان نقاطی هستند که به دنبال آن‌ها بودیم.

**۲۵۵- گزینه ۲** ابتدا دو نقطه  $A$  و  $B$  (که دو نقطه ثابت هستند) را در نظر می‌گیریم. چون دایره‌ها از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرند و می‌دانیم فاصله هر نقطه از دایره تا مرکز دایره همواره برابر شعاع است، پس فاصله مراکز دایره‌ها از دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر است؛ یعنی مراکز دایره‌ها باید روی عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  واقع باشند.

**۲۵۶- گزینه ۳** دو خط موازی  $d$  و  $d'$  را در نظر بگیرید. فاصله این دو خط ۴ سانتی‌متر است. باید نقاطی را بیابیم که مجموع فاصله‌های آن نقاط تا دو خط  $d$  و  $d'$  برابر ۴ سانتی‌متر باشد.

هر نقطه‌ای بین دو خط در نظر بگیریم، مجموع فواصل آن از دو خط برابر ۴ سانتی‌متر می‌شود. نقطه  $M$  را ببینید! این نقطه بین دو خط  $d$  و  $d'$  واقع است، مجموع فواصل این نقطه تا دو خط  $d$  و  $d'$  یعنی  $MH + MH'$  برابر ۴ است.

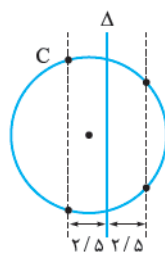
در حالت کلی: اگر فاصله بین دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر  $h$  باشد:

۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط  $d$  و  $d'$  برابر  $h$  باشد، تمام نقاط واقع بین دو خط است.

۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط  $d$  و  $d'$  کوچک‌تر از  $h$  باشد، تهی است.

۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط  $d$  و  $d'$  بزرگ‌تر از  $h$  باشد، دو خط موازی در خارج  $d$  و  $d'$  است.

مثلاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط موازی  $d$  و  $d'$  که فاصله آن‌ها ۴ سانتی‌متر است برابر با ۶ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی به فاصله ۱ سانتی‌متر از  $d$  و  $d'$  و خارج از دو خط  $d$  و  $d'$  است.



دو خط موازی و دایره چهار نقطه تلاقی دارند.

بنابراین حداکثر چهار نقطه با شرایط مسئله وجود دارد.

**۲۵۰- گزینه ۲** برای این که مساحت مثلثی با طول قاعده ۴ سانتی‌متر برابر با ۸ سانتی‌متر مربع باشد باید طول ارتفاع مثلث برابر ۴ باشد.

$$(S = \frac{قاعده \times ارتفاع}{2} \Rightarrow 8 = \frac{4 \times ارتفاع}{2})$$

قاعده  $BC$  از مثلث  $ABC$  با طول ۴ را در نظر می‌گیریم. برای این که مساحت مثلث  $ABC$  برابر ۸ باشد، باید ارتفاع مثلث برابر ۴ باشد؛ یعنی نقطه‌ای که فاصله آن‌ها از  $BC$  به فاصله ۴ باشد برای ما مطلوب است. این نقاط روی دو خط موازی با  $BC$  و به فاصله ۴ سانتی‌متر از آن قرار دارند.

همان‌طور که در شکل می‌بینید مساحت دو مثلث که یکی بالای خط  $d$  و یکی پایین خط  $d$  قرار دارد برابر با ۸ سانتی‌متر است؛ قاعده این مثلث‌ها  $BC$  و ارتفاع آن‌ها ۴ سانتی‌متر است.

هر نقطه دیگری روی خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  در نظر بگیریم و آن را به  $B$  و  $C$  وصل کنیم، مساحت مثلث ایجادشده برابر با ۸ سانتی‌متر مربع می‌شود.

**۲۵۱- گزینه ۱** از سال دهم به یاد دارید که «هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.» حالا دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  را در نظر بگیرید.

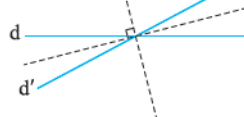
نیمساز زاویه  $O$  همان نقطه‌ای است که ما به دنبال آن هستیم. می‌خواستیم نقطه‌ای را پیدا کنیم که از دو خط  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشد.

خب! نیمساز زاویه  $O$  این خاصیت را دارد. فقط باید حواسمان باشد! که  $\hat{O}$  دو نیمساز دارد (یکی نیمساز زاویه حاده، یکی نیمساز زاویه منفرجه) که بر هم عمودند. (منظورم خط‌های  $l_1$  و  $l_2$  است که نیمسازهای زاویه  $O$  هستند و بر هم عمودند!)

بنابراین «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله‌اند، دو خط عمود بر هم (نیمسازهای زاویه برخورد دو خط) هستند.»

بد نیست بدانید! که مرکز دایره‌هایی که بر دو خط  $d$  و  $d'$  مماس‌اند نیز روی همین دو خط عمود بر هم (یعنی روی نیمسازهای زاویه برخورد دو خط) قرار دارند. شکل را ببینید!

**۲۵۲- گزینه ۲** می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند (نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع برابر یک باشد) نیمسازهای زوایای بین دو خط است که بر هم عمودند.



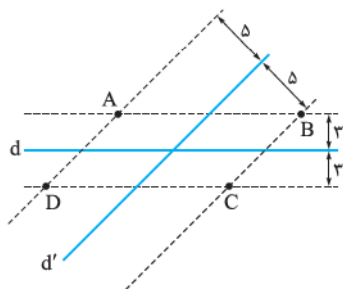
چون قرار است طول میانه  $AM$  مقداری ثابت (مثلاً ۳) باشد، بنابراین مکان هندسی رأس  $A$  دایره‌ای به مرکز  $M$  و شعاع  $AM$  است. مسئله را به شکل عددی ببینیم!

مکان هندسی رأس  $A$  از مثلث  $ABC$  که طول ضلع  $BC$  برابر ۴ و طول میانه  $AM$  برابر ۳ باشد، را می‌خواهیم.

$M$  وسط  $BC$  است و باید فاصله  $A$  تا  $M$  برابر ۳ باشد، پس دنبال نقاطی می‌گردیم که فاصله آن‌ها از نقطه  $M$  برابر ۳ باشد؛ این نقاط روی محیط دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز  $M$  قرار دارد.

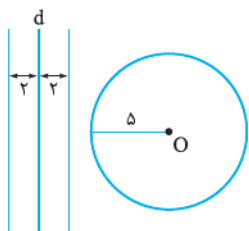
**گزینه ۲-۲۶۱** می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله  $h$  باشند، دو خط موازی با  $d$ ، در طرفین  $d$  و به فاصله  $h$  از  $d$  است.

دو خط موازی در طرفین  $d$  و به فاصله  $۳$  از  $d$  داریم و دو خط موازی در طرفین  $d'$  و به فاصله  $۵$  از  $d'$  داریم.

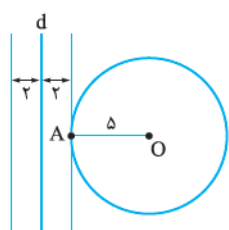


محل برخورد این چهار خط، نقاطی را مشخص می‌کند که از خط  $d$  به فاصله ۳ و از خط  $d'$  به فاصله ۵ هستند. چهار نقطه  $A, B, C, D$  و نقاط مورد نظر ما هستند.

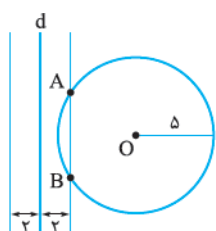
**گزینه ۲-۲۶۲** اولاً می‌دانیم نقاطی که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط  $d$  واقع‌اند روی دو خط موازی با  $d$  و به فاصله ۲ سانتی‌متر و در طرفین  $d$  قرار دارند. حالا اگر وضعیت‌های مختلف دایره و خط  $d$  را در نظر بگیریم، تعداد جواب‌ها به دست می‌آیند.



**حالت اول** دایره و دو خط موازی با  $d$  نقطه مشترکی نداشته باشند. هیچ نقطه‌ای روی دایره وجود ندارد که از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد.



**حالت دوم** یکی از خطوط موازی با  $d$  بر دایره مماس باشد. نقطه  $A$  روی دایره و به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط  $d$  قرار دارد. در این حالت یک نقطه داریم که شرایط سؤال را داراست.



**حالت سوم** یکی از خطوط موازی با  $d$  دایره را قطع کند. دو نقطه  $A$  و  $B$  روی دایره و به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط  $d$  قرار دارند.

هر نقطه‌ای روی  $l_1$  و  $l_2$  در نظر بگیریم، مجموع فواصلش از دو خط  $d$  و  $d'$  برابر ۶ خواهد بود.

**گزینه ۲-۲۵۷** دو خط موازی  $d$  و  $d'$  که فاصله آن‌ها ۴ سانتی‌متر است را در نظر بگیرید.

نقاط مورد نظر ما روی دو خط  $l_1$  و  $l_2$  قرار دارند که یکی به فاصله  $۵/۰$  سانتی‌متر از  $d$  و دیگری به فاصله  $۵/۰$  سانتی‌متر از  $d'$  قرار دارد.

نقطه  $A$  روی  $l_1$  به اندازه  $۵/۰$  سانتی‌متر از  $d$  و  $۳/۵$  سانتی‌متر از  $d'$  فاصله دارد که تفاضل فواصل نقطه  $A$  از  $d$  و  $d'$  برابر  $۳/۵ - ۵/۰ = ۳/۵$  است. در حالت کلی: اگر فاصله بین دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر  $h$  باشد:

۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن نقاط از  $d$  و  $d'$  کم‌تر از  $h$  باشد، دو خط موازی بین  $d$  و  $d'$  است. (در شکل بالا دیدید.)

۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن نقاط از  $d$  و  $d'$  برابر  $h$  باشد، تمام نقاط خارج از  $d$  و  $d'$  است. ببینید!

فاصله نقطه  $A$  از خط  $d$  برابر  $m$  و فاصله نقطه  $A$  از خط  $d'$  برابر  $m+h$  است. قدرمطلق تفاضل فواصل نقطه  $A$  از  $d$  و  $d'$  برابر با  $(m+h) - m = h$  است.

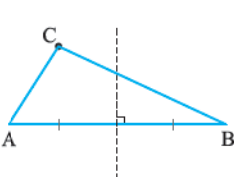
۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن نقاط از  $d$  و  $d'$  بزرگ‌تر از  $h$  باشد، تهی است.

**گزینه ۲-۲۵۸** دو خط عمود بر هم  $d$  و  $d'$  و پاره خط  $AB$  روی آن را در نظر بگیرید.

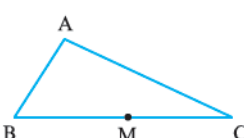
از آن‌جا که مثلث  $OAB$  قائم‌الزاویه است و  $OM$  میانه وارد بر وتر است، نتیجه می‌گیریم میانه وارد بر وتر یعنی  $OM$  باید برابر با نصف وتر باشد؛ یعنی  $OM$  باید برابر یک باشد.

به عبارت دیگر پاره خط  $AB$  به طول ۲ هر طور قرار گیرد طول  $OM$  برابر یک است و همواره فاصله  $M$  از  $O$  برابر یک است. بنابراین مکان هندسی نقطه  $M$ ، دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $OM = ۱$  است.

**گزینه ۲-۲۵۹** نقاط  $A$  و  $B$  از مثلث  $ABC$  ثابت‌اند؛ بنابراین عمودمنصف  $AB$  نیز همواره ثابت است. می‌دانیم محل برخورد عمودمنصف‌ها روی هر سه عمودمنصف واقع است. چون عمودمنصف  $AB$  ثابت است، بنابراین با تغییر مکان  $C$  همواره محل برخورد عمودمنصف‌ها روی عمودمنصف  $AB$  خواهد بود.

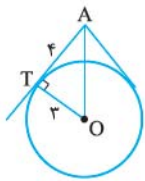


**گزینه ۲-۲۶۰** مثلث  $ABC$  که طول ضلع  $BC$  در آن ثابت است را در نظر بگیرید. چون  $BC$  ثابت است بنابراین  $M$  وسط  $BC$  نیز ثابت است.





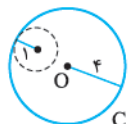
۲۶۶- **گزینه ۱** بر دایره C به مرکز O و شعاع ۳ و مماس به طول ۴ رسم می‌کنیم تا ببینیم وضعیت نقطای که از آن‌ها می‌توان مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره رسم کرد، چگونه است؟! می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین با نوشتن یک فیثاغورس ساده در مثلث AOT، طول OA برابر ۵ به دست می‌آید.



بنابراین نقطای که از آن‌ها بتوان مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره C رسم کرد، نقطای هستند که فاصله آن‌ها تا O برابر ۵ است؛ یعنی مکان هندسی موردنظر ما دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ است. در حالت کلی مکان هندسی نقطای که از آن‌ها بتوان مماس‌هایی به طول K بر دایره C(O, R) رسم کرد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع  $\sqrt{R^2 + K^2}$  است.

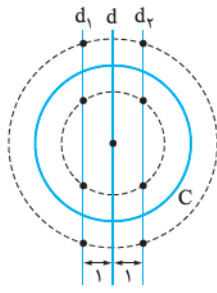
۲۶۷- **گزینه ۲** اول چند نکته را با هم مرور کنیم. ۱ مکان هندسی دایره‌هایی به شعاع ۱ که بر دایره C مماس باشند دو دسته هستند.

- الف)** دایره‌هایی که بر C مماس داخل‌اند. مکان هندسی مرکز این دایره‌ها دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است.
- ب)** دایره‌هایی که بر C مماس خارج‌اند. مکان هندسی مرکز این دایره‌ها دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ است.

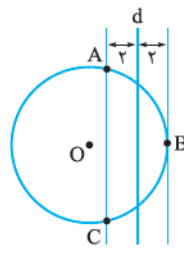
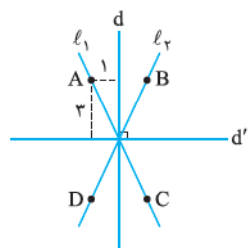


۲ مکان هندسی نقطای که از خط d به فاصله ۱ هستند، دو خط موازی با d، در طرفین d و به فاصله ۱، از آن هستند. ( $d_1$  و  $d_2$  دو خط موازی موردنظر هستند).

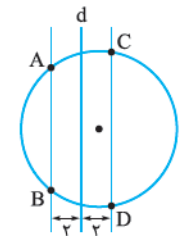
حالا خط d را در مرکز دایره C در نظر بگیرید. برای این که خط d بر دایره مماس باشد باید فاصله d تا مرکز دایره برابر ۱ باشد؛ یعنی نقاط موردنظر باید روی  $d_1$  یا  $d_2$  واقع باشند. دو دایره‌ای که با نقطه‌چین مشخص شده‌اند مراکز دایره‌های مماس بر دایره C هستند. هشت نقطه محل برخورد خطوط  $d_1$  و  $d_2$  با دو دایره نقطه‌چین جواب ما هستند. هر کدام از ۸ نقطه را که در نظر بگیرید و به مرکز آن دایره‌ای به شعاع ۱ رسم کنید، هم بر دایره C مماس است و هم بر خط d.



۲۶۸- **گزینه ۲** دو خط عمود بر هم d و d' را رسم می‌کنیم. نقاط A, B, C و D هر کدام به فاصله ۱ سانتی‌متر از d و به فاصله ۳ سانتی‌متر از d' واقع‌اند. هر نقطه‌ای که روی یکی از دو خط  $l_1$  و  $l_2$  در نظر بگیرید، فاصله‌اش از خط d' سه برابر فاصله‌اش از خط d است. بنابراین مکان هندسی موردنظر سؤال دو خط  $l_1$  و  $l_2$  هستند که متقاطع‌اند.



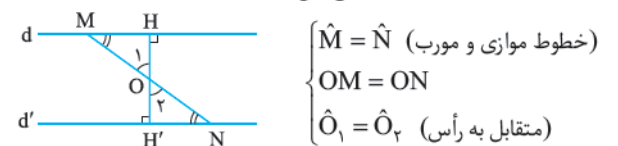
**حالت چهارم** یکی از خطوط موازی با d دایره را قطع کند و دیگری بر دایره مماس باشد. در این حالت ۳ نقطه با شرایط گفته‌شده داریم.



**حالت پنجم** دو خط موازی با d را قطع کنند. چهار نقطه A, B, C, D روی دایره و به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند.

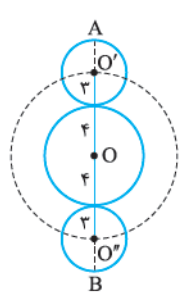
بنابراین بسته به وضعیت خط d و دایره، تعداد جواب‌های سؤال عبارت‌اند از: صفر، یک، دو، سه و چهار.

۲۶۳- **گزینه ۱** اگر O وسط پاره‌خط MN باشد، دو مثلث NOH' و MOH به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند، زیرا:



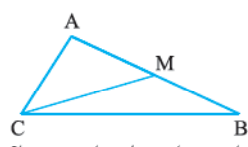
پس می‌توان نتیجه گرفت  $OH = OH'$ ؛ یعنی نقطه O از دو خط d و d' به یک فاصله است.

بنابراین مکان هندسی نقطه O (وسط پاره‌خط MN)، تمام نقطای است که بین دو خط d و d' واقع‌اند و از d و d' به یک فاصله‌اند؛ به عبارت دیگر مکان هندسی نقطه O، خطی موازی با d و d' و در وسط آن‌ها است.



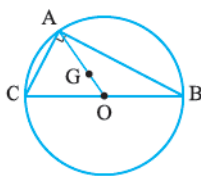
۲۶۴- **گزینه ۲** مکان هندسی موردنظر سؤال دایره‌ای است به مرکز O و شعاع ۷ (دایره‌ای که با خط‌چین مشخص شده است). در هر دایره بیشترین فاصله بین نقاط دایره دو سر قطر دایره واقع‌اند. بنابراین بیشترین فاصله نقاط روی دایره‌هایی که بر دایره C مماس خارجی‌اند، فاصله بین نقاط A و B است که برابر با  $20 = 2 + 2 + 4 + 4 + 3 + 3$  است.

۲۶۵- **گزینه ۲** میانه مرسوم از رأس C به وسط ضلع AB وارد می‌شود که سؤال نامش را گذاشته‌اند!



نقطه A ثابت است، فاصله M تا A نیز همواره مقداری ثابت است (چرا؟) چون طول AB ثابت است، M هم که وسط AB است پس طول AM همواره برابر  $\frac{AB}{2}$  است. بنابراین مکان هندسی، نقاط دایره‌ای به مرکز A و شعاع  $\frac{AB}{2}$  است.

۲۶۹- گزینه ۱ مثلث ABC در رأس A



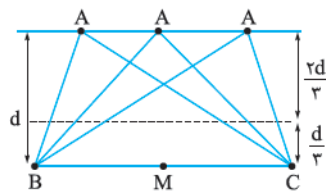
قائمة است، پس کمان روبه‌رو به زاویه A،  $180^\circ$  است؛ در نتیجه BC قطر دایره است. بنابراین نقطه وسط ضلع BC (نقطه M) بر مرکز دایره منطبق است؛ یعنی طول میانه AM برابر با شعاع دایره  $(\frac{BC}{2})$  است.

می‌دانیم مرکز ثقل میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند  $(AG = \frac{2}{3}AO)$  و  $(GO = \frac{1}{3}AO)$ ، بنابراین:

$$AO = AM = \frac{BC}{2} \rightarrow GO = \frac{1}{3} \times \frac{BC}{2} = \frac{BC}{6}$$

I روی نیمساز زاویه A است پس  $IH = IH'$  است، I روی نیمساز زاویه B است پس  $IH = IH'' = IH'$  است. در نتیجه:  $IH = IH' = IH''$  چون  $IH' = IH'' = IH$  است، بنابراین I روی نیمساز زاویه O است. با توجه به مطالب بالا مکان هندسی محل تلاقی نیمسازهای زوایای OAB و OBA روی نیمساز زاویه O واقع است.

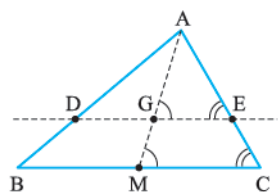
۲۷۳- گزینه ۱ قاعده BC را در نظر بگیرید. رأس A روی خطی موازی با BC و به فاصله d از آن قرار دارد.



مرکز ثقل (محل برخورد میانه‌ها) مثلث ABC روی میانه AM قرار دارد به طوری که فاصله مرکز ثقل تا رأس  $\frac{2}{3}$  میانه و فاصله مرکز ثقل تا M،  $\frac{1}{3}$  میانه است.

بنابراین نقطه G روی خطی موازی با BC و به فاصله  $\frac{d}{3}$  از آن قرار دارد.

برای درک بهتر می‌توانید از تالس کمک بگیرید! مثلث AMC را در نظر بگیرید. DE با BC موازی است، بنابراین با نوشتن تالس جزء‌به‌جزء در مثلث AMC داریم:



$$\frac{AE}{EC} = \frac{AG}{GM} = \frac{\frac{2d}{3}}{\frac{d}{3}} = 2$$

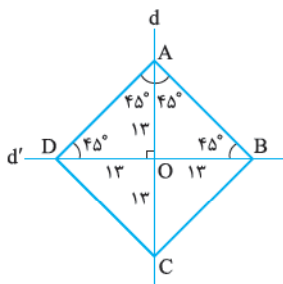
از تشابه دو مثلث AGE و AMC هم به همین نتیجه می‌رسیدیم.

$$\left( \frac{AG}{AM} = \frac{3}{d} \right) = \text{نسبت اضلاع} = \text{نسبت ارتفاع‌ها}$$

است و طول AG دو برابر GM است نتیجه می‌گیریم G مرکز ثقل است و در مورد تمام مثلث‌های ABC که BC ثابت و A روی خطی موازی با BC باشد صدق می‌کند.

۲۷۴- گزینه ۱ چون d و d' قطرهای مربع را می‌سازند، نتیجه می‌گیریم d و d' بر هم عمودند.

نقاط A، B، C و D روی یکی از خطوط d یا d' واقع‌اند. کاملاً واضح است که وقتی نقطه A روی خط d است باید فاصله‌اش تا خط d' برابر ۱۳ باشد تا مجموع فواصل این نقطه تا دو خط d و d' برابر ۱۳ شود؛ یعنی  $OA = OB = OC = OD = 13$  است.



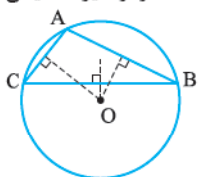
$\triangle OAB$ ،  $\triangle OBC$ ،  $\triangle OCD$  و  $\triangle OAD$  متساوی‌الساقین هستند و چون زاویه رأس آن‌ها  $90^\circ$  است پس دو زاویه دیگر مثلث‌ها  $45^\circ$  است؛ پس زوایای A، B، C و D قائمه هستند و چهارضلعی ABCD مربع است.

۲۷۰- گزینه ۱

برای وضعیت سه نقطه دو حالت در نظر می‌گیریم: **حالت اول** A، B و C در یک راستا باشند، نقطه‌ای وجود ندارد که از سه نقطه به یک فاصله باشد.

**حالت دوم** A، B و C در یک راستا نباشند؛ یعنی می‌توان با این سه نقطه مثلث رسم کرد. می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

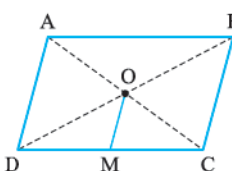
بنابراین مکان هندسی نقاطی که از سه نقطه A، B و C به یک فاصله باشد، محل برخورد سه عمودمنصف‌های AB، AC و BC است. این نقطه برخورد، محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC (مرکز دایره محیطی مثلث ABC) است.



در شکل، O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث و مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

۲۷۱- گزینه ۱

یکی از متوازی‌الاضلاع‌ها را در نظر می‌گیریم.



فرض کنید O محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع باشد. کاملاً واضح است که O وسط AC است. اگر M وسط DC باشد، OM وسط دو ضلع از مثلث ADC را به هم وصل کرده است.

$$\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{2}$$

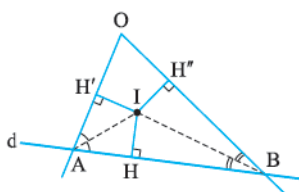
عکس تالس به ما می‌گوید  $OM \parallel AD$  است و با نوشتن یک تالس جزء به کل در مثلث ADC داریم:

$$\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CA} = \frac{OM}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AD$$

چون M نقطه‌ای ثابت (زیرا C و D ثابت‌اند) و طول AD نیز ثابت است پس طول OM نیز مقداری ثابت است.

بنابراین مکان هندسی محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع (یعنی نقطه O)، روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع OM (یا  $\frac{AD}{2}$ ) قرار دارد.

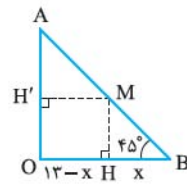
۲۷۲- گزینه ۱ زاویه O و خط d



درا که اضلاع زاویه O را در نقاط A و B قطع کرده است، ببینید! نیمسازهای زوایای A و B در نقطه I متقاطع‌اند. می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



هر نقطه‌ای روی محیط مربع ABCD در نظر بگیریم، مجموع فاصله‌های آن نقطه از دو خط  $d$  و  $d'$  برابر ۱۳ می‌شود. ببینید:

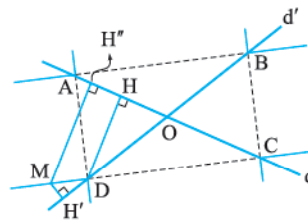


نقطه  $M$  را روی یکی از اضلاع مربع در نظر بگیرید.  $MH'$  و  $MH$  فاصله  $M$  از خطوط  $d$  و  $d'$  هستند. از آنجا که  $\hat{B} = 45^\circ$  است،  $\triangle MBH$  یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است، بنابراین  $MH = HB$  است. از طرفی  $MH' = OH$  است. داشتیم:

$$\begin{cases} OH + HB = 13 \\ OH = MH', HB = MH \end{cases} \Rightarrow MH' + MH = 13$$

نشان دادیم هر نقطه‌ای روی یکی از اضلاع مربع ABCD در نظر بگیریم، مجموع فواصلش از دو خط عمود بر هم  $d$  و  $d'$  برابر ۱۳ است. با نوشتن یک رابطه ساده فیثاغورس در مثلث  $OAB$  می‌بینیم طول ضلع مربع ABCD برابر  $13\sqrt{2}$  است. در حالت کلی مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو خط متقاطع برابر  $h$  باشد، مستطیلی به مرکز تلاقی دو خط است که قطرهای آن بر دو خط منطبق‌اند و فاصله هر رأس مستطیل با قطر برابر  $h$  است.

#### ۲۷۵- **گزیند!** دو خط متقاطع $d$ و $d'$ را در نظر بگیرید.



نقاط  $A$  و  $C$  روی خط  $d$  و نقاط  $B$  و  $D$  روی خط  $d'$  واقع‌اند و فاصله آن‌ها تا خط دیگر برابر ۳ سانتی‌متر است. چهار نقطه  $A, B, C, D$  ویژگی موردنظر ما یعنی قدرمطلق تفاضل فواصل ۳ را دارند. هر نقطه‌ای

روی امتداد اضلاع و خارج از محیط مستطیل در نظر بگیریم، قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو خط متقاطع برابر ۳ سانتی‌متر خواهد بود. دلیلش را ببینید: نقطه  $M$  نقطه‌ای روی امتداد ضلع مستطیل و خارج از محیط مستطیل است. قبول دارید مثلث  $COD$  متساوی‌الساقین است؟ (چون  $OC$  و  $OD$  هر کدام برابر با نصف قطر مستطیل هستند.) در امتداد قاعده مثلث متساوی‌الساقین  $COD$  است. می‌دانیم قدرمطلق تفاضل فواصل هر نقطه روی امتداد قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر با ارتفاع وارد بر ساق است: یعنی  $MH'' - MH' = DH$  است. از طرفی می‌دانیم فاصله نقاط  $A, B, C, D$  از خط دیگر برابر ۳ سانتی‌متر است، پس  $MH'' - MH' = DH = 3$  است.

یعنی «مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو خط متقاطع برابر با  $h$  باشد، ۸ نیم‌خط در امتداد اضلاع مستطیل ABCD و خارج از محیط مستطیل است.»

اگر  $d$  و  $d'$  بر هم عمود بودند، ABCD مربعی به قطر  $2h$  بود و باز هم مکان هندسی موردنظر ما ۸ نیم‌خط در امتداد اضلاع مربع و خارج از محیط آن بود.

**دقت کنید!** شاید بپرسید چرا ABCD مستطیل است؟ دو خط موازی با  $d$  و به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن، دو خط موازی با  $d'$  و به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن را رسم کردیم و با  $d$  و  $d'$  تلاقی دادیم تا  $A, B, C, D$  پیدا شوند.