

# آمار و احتمال یازدهم

از مجموعه رشادت

احسان خیراللهی






بَابُ الْبَيْتِ

ذره‌ای بودم و مهر تو مرا بالا برد  
 او که میرفت مرا هم به دل دریا برد  
 با برافروخته رویی که قرار از ما برد

من به سرپوشه فرساید نه شود بردم راه  
 من نسی بی سر و پایم که به سیل اقدام  
 نبود آموختی ام مهر و نبود سوختی ام

سپاس فراوان خداوند منان که ما را آموخت و آموختن فرمود. هدف این جانب از تألیف کتاب «آمار و احتمال یکتا» از مجموعه رشادت، فراهم آوردن منبعی مناسب و جامع برای آزمون‌های تشریحی، آزمون‌های چهارگزینه‌ای آزمایشی و از همه مهم‌تر کنکور بود. در این کتاب کلیه مفاهیم درس آمار و احتمال یازدهم به صورت پیشرفته آموزش داده شده و مطالب پیش‌نیاز از پایه دهم نیز یادآوری شده است.

دانش آموز در هر فصل، قبل از پاسخ به سؤالات تشریحی و تستی باید درسنامه را به طور کامل مطالعه کند تا درک عمیقی از مفاهیم آن پیدا کند. سعی شده با ذکر سؤال و تست‌های تألیفی و کنکور، توانایی دانش‌آموز افزایش یابد. در بین سؤالات تستی، بعضی با  متمایز شده‌اند. آن‌ها سؤالاتی نکته‌دار یا دشوار هستند که برای به چالش کشیدن دانش‌آموز و توانایی او در حل مسائل پیچیده طرح شده‌اند. امید است کتاب حاضر پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان برای موفقیت در آزمون‌های ورودی دانشگاه‌های برتر باشد.

از مدیرعامل محترم انتشارات مبتکران جناب آقای یحیی دهقانی که امکان چاپ این کتاب را فراهم کردند، قدردانی می‌کنم. هم‌چنین از دبیر محترم مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تشکر می‌کنم که این کتاب مولود فکر خلاق و مدیریت استثنایی ایشان است. از آقای شهرام صدر که با مشاوره‌های دلسوزانه تأثیر بسزایی در فراهم آوردن این مجموعه داشتند سپاسگزاری می‌کنم.

هم‌چنین از خانم لیلی میرزایی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشته است و خانم‌ها مریم رسولی (رسام) و بهاره خدای (گرافیک) بسیار ممنونم و برای همه عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنم. تشکر ویژه‌ای می‌کنم از همسر عزیزم که تک تک لحظات نگارش این کتاب متعلق به او بود اما صبور بود و سختی‌ها را تحمل کرد.

در آخر کتاب را تقدیم می‌کنم به استاد عزیزم جناب آقای مهدی پابست که در گذشته با صبر و حوصله و به بهترین وجه مبانی دروس ریاضی را به من آموختند.

از دبیران محترم و دانش‌آموزان ساعی خواهشمندم من را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود درباره این کتاب یاری کنند.

احسان خیراللهی



## فصل اول

### درس اول

|    |  |
|----|--|
| ۸  | گزاره                                      |
| ۹  | گزاره‌نما                                  |
| ۱۱ | ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره                 |
| ۱۲ | قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها                    |
| ۱۵ | ترکیب شرطی                                 |
| ۱۷ | ترکیب دوشروطی                              |
| ۲۱ | اثبات به روش مستقیم، غیرمستقیم و برهان خلف |
| ۲۲ | سورها                                      |
| ۲۵ | پرسش‌های تشریحی                            |
| ۳۲ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای                      |

### درس دوم

|    |                                |
|----|--------------------------------|
| ۳۷ | نمایش مجموعه                   |
| ۳۸ | زیرمجموعه و روش عضوگیری دلخواه |
| ۳۹ | مجموعه توانی                   |
| ۴۱ | نمودار ون                      |
| ۴۲ | قوانین بنیادی جبر مجموعه‌ها    |
| ۴۵ | افراز                          |
| ۴۷ | اصل شمول و عدم شمول            |
| ۴۹ | آنالیز ترکیبی                  |
| ۵۳ | حاصلضرب دکارتی دو مجموعه       |
| ۵۵ | پرسش‌های تشریحی                |
| ۶۰ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای          |

## فصل دوم

### درس اول

|     |  |
|-----|--|
| ۸۴  | فضای نمونه                                 |
| ۸۷  | انواع پیشامد و احتمال هم‌شانس              |
| ۹۱  | قوانین و اصول احتمال                       |
| ۹۸  | پرسش‌های تشریحی فضای نمونه و پیشامد        |
| ۱۱۰ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای فضای نمونه و پیشامد  |
| ۱۳۰ | پرسش‌های تشریحی قوانین و اصول احتمال       |
| ۱۳۶ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای قوانین و اصول احتمال |

### درس دوم

|     |                       |
|-----|-----------------------|
| ۱۵۳ | احتمال غیر هم‌شانس    |
| ۱۵۶ | پرسش‌های تشریحی       |
| ۱۵۹ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای |

### درس سوم

|     |                       |
|-----|-----------------------|
| ۱۶۴ | احتمال شرطی           |
| ۱۶۷ | قاعده ضرب احتمال      |
| ۱۶۸ | قاعده احتمال کل       |
| ۱۷۰ | قاعده بیز             |
| ۱۷۳ | پرسش‌های تشریحی       |
| ۱۷۹ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای |

### درس چهارم

|     |                          |
|-----|--------------------------|
| ۱۹۸ | پیشامد مستقل             |
| ۲۰۱ | احتمال دو جمله‌ای برنولی |
| ۲۰۵ | پرسش‌های تشریحی          |
| ۲۱۰ | پرسش‌های چهارگزینه‌ای    |

## چهارم فصل

| درس اول |                         |
|---------|-------------------------|
| ۳۴۶     | نمونه‌گیری و انواع آن   |
| ۳۴۹     | آمار و آمارگیری         |
| ۳۴۹     | روش‌های گردآوری داده‌ها |
| ۳۵۱     | آماره                   |
| ۳۵۲     | پرسش‌های تشریحی         |
| ۳۵۵     | پرسش‌های چهارگزینه‌ای   |

| درس اول |                       |
|---------|-----------------------|
| ۳۵۹     | برآورد نقطه‌ای        |
| ۳۶۰     | نمودار چندبر فراوانی  |
| ۳۶۲     | نمودار نرمال          |
| ۳۶۲     | برآورد بازه‌ای        |
| ۳۶۷     | پرسش‌های تشریحی       |
| ۳۷۰     | پرسش‌های چهارگزینه‌ای |

## سوم فصل

| درس اول |                          |
|---------|--------------------------|
| ۲۲۴     | یادآوری                  |
| ۲۲۶     | توصیف و نمایش داده‌ها    |
| ۲۲۹     | انواع فراوانی            |
| ۲۳۲     | نمایش داده‌ها و نمودارها |
| ۲۳۸     | پرسش‌های تشریحی          |
| ۲۴۳     | پرسش‌های چهارگزینه‌ای    |

| درس دوم |                       |
|---------|-----------------------|
| ۲۶۲     | میانگین               |
| ۲۶۸     | میانه                 |
| ۲۷۰     | چارک‌ها               |
| ۲۷۲     | مد                    |
| ۲۷۵     | پرسش‌های تشریحی       |
| ۲۸۰     | پرسش‌های چهارگزینه‌ای |

| درس سوم |                        |
|---------|------------------------|
| ۳۰۱     | واریانس و انحراف معیار |
| ۳۱۱     | ضریب تغییرات           |
| ۳۱۴     | نمودار جعبه‌ای         |
| ۳۱۸     | پرسش‌های تشریحی        |
| ۳۲۲     | پرسش‌های چهارگزینه‌ای  |

# فصل اول

## مبانی ریاضی

درس اول: منطق ریاضی

درس دوم: مجموعه، زیرمجموعه و جبر مجموعه ها

## مقدمه

فکر انسان پیوسته در معرض خطا و لغزش است و ممکن است در مسیر تفکر و استدلال و استنتاج که پایه فلسفی قواعد ذهنی آدمی است، به اشتباه بیفتد. پس انسان برای کشف حقیقت و مصون ماندن از خطا در تفکر، نیازمند و محتاج به یک سلسله اصول و قواعد عام و فراگیر است که او را در همه جا راهنمایی کند و مانع از گمراهی وی در تفکر گردد که مجموع این اصول و قواعد منطق نام دارد.

منطق ریاضی دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود و به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

نخستین گردآورنده صریح و ثبت شده منطق صوری در تاریخ، ارسطو است. ارسطو اولین کسی بود که به‌طور نظام‌مند روی استدلال منطقی کارکرد بعد از آن لاینبتیس بسط منطق عادی را به‌عنوان زبان علمی جهانی بررسی نمود. در سدهٔ اخیر بزرگانی چون برتراند راسل، استنت، مک آلیستر، راس و رایت روی منطق کار کردند و نتایج فلسفی آن را بررسی نمودند. در منطق، برهان از اهمیت خاصیت برخوردار است. در واقع برهان مرجعیت بخش چیزی است که اگر آن چیز به عنوان یک عقیده محض (یعنی بدون برهان) بیان شود ممکن است مورد قبول قرار نگیرد. مفهوم برهان با مفهوم قضیه به‌کار می‌رود.

به عبارت بهتر منطق به مطالعه و بررسی استدلال و استنتاج گفته می‌شود و به ویژه به این مسئله می‌پردازد که آیا یک استدلال معتبر است یا خیر و هم‌چنین روی رابطهٔ بین جملات تأکید دارد که در تضاد با محتوای هیچ جمله‌ای نباشد. به‌عنوان مثال جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

- تمام دانش‌آموزان عینکی هستند.

- هرکس عینکی است در رشتهٔ تجربی تحصیل می‌کند.

- بنابراین تمام دانش‌آموزان در رشتهٔ تجربی تحصیل می‌کنند.

از دیدگاه علمی، منطق هیچ تلاشی برای تعیین ممکن یا غیرممکن بودن جمله‌ها انجام نمی‌دهد اما اگر دو جملهٔ اول درست باشد منطق حکم می‌کند جملهٔ سوم نیز صحیح است. در منطق ریاضی به دو جملهٔ نخست، مقدمه‌های استدلال و به جملهٔ سوم نتیجهٔ استدلال گفته می‌شود. این استدلال‌ها از جمله‌های خبری تشکیل شده است.

## گزاره

به جمله‌ای خبری که یا درست یا نادرست باشد هرچند که درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد، **گزاره** گفته می‌شود. معمولاً گزاره‌ها را با حروف  $p, q, r, \dots$  نمایش می‌دهند. اگر گزاره‌ای درست باشد ارزش آن را با «د» یا «T» و اگر گزاره‌ای نادرست باشد ارزش آن را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهند.

## نوجه

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. به‌طور مثال « $\sqrt{2}$  عدد گنگ است.» گزاره است در حالی که «عجب نقاشی زیبایی!» گزاره نیست یا «بلیط تئاتر خریدم» گزاره است ولی «برایم بلیط تئاتر بخر» گزاره نیست. هم‌چنین جملهٔ «تعداد تارهای موی سر دوستم هشت میلیارد و دو بیست است» یک گزاره است هرچند درستی یا نادرستی آن را به سادگی نمی‌توان تشخیص داد ولی اگر درست نباشد قطعاً نادرست است.

## گزاره ساده

گزاره‌ای که اجزای تشکیل دهندهٔ آن فقط یک جملهٔ خبری باشد را **گزارهٔ ساده** گویند. به‌طور مثال «۶ عدد زوجی است» یا «امروز هوا ابری است» یا « $14 = 2 \times 7$ » هر سه گزاره‌های ساده محسوب می‌شوند.

## گزاره مرکب

هرگاه چند گزارهٔ ساده را به همراه ادات ربط «و» و «یا» باهم ترکیب کنیم گزاره مرکب ساخته می‌شود. به‌طور مثال «علی ۱۶ ساله است و محمود فارغ‌التحصیل شد.» و «هوا برفی است یا خورشید در آسمان دیده می‌شود.» گزاره‌های مرکب می‌باشند که از دو گزارهٔ ساده تشکیل شده‌اند.



به طور مثال «علی ۱۶ ساله اس و محمود فارغ التحصیل شد.» و «هوا برفی است یا خورشید در آسمان دیده می شود.» گزاره های مرکب می باشند که از دو گزاره ساده تشکیل شده اند.

### جدول ارزش گزاره ها

جدول ارزش گزاره مرکب  $p$  که از گزاره های  $p_1, p_2, \dots, p_n$  تشکیل شده است شامل لیستی از تمام ترکیب های ممکن ارزش گزاره ها می باشد. اگر گزاره مرکب از  $n$  گزاره تشکیل شده باشد آن گاه جدول ارزشی آن دارای  $2^n$  سطر خواهد بود.

سه گزاره

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|-------|-------|-------|
| د     | د     | د     |
| د     | د     | ن     |
| د     | ن     | د     |
| د     | ن     | ن     |
| ن     | د     | د     |
| ن     | د     | ن     |
| ن     | ن     | د     |
| ن     | ن     | ن     |

۸ حالت

دو گزاره

| $p_1$ | $p_2$ |
|-------|-------|
| د     | د     |
| د     | ن     |
| ن     | د     |
| ن     | ن     |

۴ حالت

یک گزاره

| $p_1$ |
|-------|
| د     |
| ن     |

۲ حالت

### گزاره نما

هر جمله یا عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر آن به یک گزاره تبدیل شود **گزاره نما** نامیده می شود به بیان دیگر گزاره نما عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته در آن مشخص شود و به جای آن متغیر قرار داده شود به گزاره تبدیل می شود. به عنوان مثال عبارت  $-1 \leq x \leq 2$  یک گزاره نما است ولی  $-1 \leq -5 \leq 2$  یک گزاره نادرست است.

### نوجه

گزاره نماها برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها یک متغیره، دو متغیره و ... می نامیم.  $G(x), P(x), \dots$  که با یک متغیر نمایش داده می شود گزاره نمای یک متغیر نام دارند.  $P(x, y)$  گزاره نمای دو متغیره و  $G(x, y, z)$  گزاره نمای سه متغیره می باشند.

### نکته

باتوجه به آنچه در بازه گزاره نما بیان شد دو تعریف زیر در مورد آن بسیار حائز اهمیت است:

(الف) مجموعه مقادیری که اگر اعضای آن را به جای متغیر گزاره نما قرار دهیم، گزاره نما را به یک گزاره تبدیل کند دامنه متغیر گزاره نما و آن را با حرف  $D$  نمایش می دهند.

(ب) مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر گزاره نما که به ازای آن ها گزاره نما تبدیل به گزاره ای درست شود را مجموعه جواب گزاره نما گویند و آن را با حرف  $S$  نمایش می دهند.  $S$  زیرمجموعه  $D$  است و به صورت  $S \subseteq D$

**سؤال** مجموعه جواب و دامنه متغیر گزاره نمای  $\sqrt{x+1} = 5$  را به دست آورید.

**حل** گزاره نمای  $\sqrt{x+1}$  هنگامی تعریف شده است که زیر رادیکال نامنفی باشد، پس دامنه متغیر، مجموعه مقادیری است که به ازای هر عضو آن عبارت  $x+1$  منفی نباشد. بنابراین داریم:

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1, \quad D = [-1, +\infty)$$

بنابراین دامنه متغیر، اعداد حقیقی بزرگتر از  $-1$  می باشند.

برای به دست آوردن مجموعه جواب کافی است جواب معادله فوق را بیابیم:

$$\sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow x+1 = 25 \Rightarrow x = 24$$

چون  $x = 24$  گزاره نما را تبدیل به گزاره ای درست می کند پس مجموعه جواب برابر  $S = \{24\}$  است.

توجه داشته باشید باید برای به دست آوردن دامنه متغیر گزاره‌نما به مقادیری توجه داشت که اگر به جای متغیر گزاره‌نما قرار گیرد گزاره‌نما را بی‌معنی نسازد. به‌عنوان مثال دامنه متغیر گزاره‌نمای « $P$  عددی اول است» مجموعه اعداد طبیعی می‌باشند زیرا اعداد اول اعدادی مثبت هستند و هیچ عدد اول منفی وجود ندارد. یا دامنه متغیر گزاره‌نمای « $x$  مضرب ۹ است» مجموعه اعداد صحیح می‌باشند زیرا مضارب یک عدد هم منفی و هم مثبت می‌تواند باشد ولی اعشاری نمی‌تواند باشد.

**نکته ۱** گزاره‌نمای  $\sqrt{x+3} \geq 1$  برای کدام یک از اعضای مجموعه زیر معتبر است؟

(۱)  $\mathbb{N}$  (۲)  $\mathbb{Z}$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴) همه موارد

گزینه ۱ درست است.

کسانی که گزینه ۴ را انتخاب کرده‌اند یک اشتباه کوچک مرتکب شده‌اند در  $\mathbb{Z}$  و  $\mathbb{R}$  اعدادی وجود دارند که نامعادله  $\sqrt{x+3} \geq 1$  را بی‌معنی می‌سازد. به‌طور مثال  $\sqrt{-5+3} \geq 1$  یک نامعادله بی‌معنی است زیرا زیر رادیکال مقدار منفی نمی‌تواند باشند بنابراین نمی‌توان درخصوص آن بحث کرد زیرا غیرممکن است. پس مجموعه  $\mathbb{Z}$  و  $\mathbb{R}$  برای گزاره بالا معتبر نیستند.

### نقیض یک گزاره

اگر گزاره‌ای باشد آن‌گاه «چنین نیست که  $p$ » را نقیض  $p$  گوئیم و با علامت  $\sim p$  نمایش داده می‌شود. اگر ارزش گزاره  $p$  درست باشد در این صورت ارزش گزاره  $\sim p$  نادرست است و هنگامی که  $p$  نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. علامت « $\sim$ » را علامت ناقص می‌گویند.

**تذکر** توجه داشته باشید در صحبت‌های روزمره از این علامت برای منفی ساختن فعل جمله استفاده می‌شود مثلاً اگر علامت نقیض روی گزاره «من الان غذا می‌خورم» عمل کند حاصل جمله «من الان غذا نمی‌خورم» خواهد بود. جدول ارزش نقیض یک گزاره که تمام حالات ممکن را در نظر می‌گیرد به‌صورت روبه‌رو است.

|     |          |
|-----|----------|
| $p$ | $\sim p$ |
| د   | ن        |
| ن   | د        |

### نکته ۲

اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  چنان باشند که اگر یکی از آن‌ها درست است دیگری هم درست باشد و بالعکس. یعنی اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست ارزیابی شود، دو گزاره هم‌ارز منطقی نامیده می‌شوند و به‌صورت  $p \equiv q$  نمایش داده می‌شوند. به‌عنوان مثال دو گزاره « $۲$  زوج است» و « $۲$  فرد نیست» دو گزاره هم‌ارز منطقی می‌باشند.

### نقیض دوگانه (نقیض مضاعف)

نقیض نقیض یک گزاره هم‌ارز خود آن گزاره است.

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

جدول ارزش گزاره  $\sim(\sim p)$  را می‌نویسیم:

|     |          |                |
|-----|----------|----------------|
| $p$ | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ |
| ن   | د        | ن              |
| د   | ن        | د              |

باتوجه به جدول ملاحظه می‌شود که همواره ارزش  $\sim(\sim p)$  با ارزش  $p$  یکسان است بنابراین این دو هم‌ارز منطقی هستند.

**مثال** گزاره  $q$  به صورت " $۲ \in \{1, 4, 5\}$ " یک گزاره نادرست است اما گزاره  $\sim q$  که نقیض آن است و به‌صورت " $۲ \notin \{1, 4, 5\}$ " نوشته می‌شود یک گزاره درست است یا گزاره  $p$  به صورت " $۵ \times ۴ = ۲۰$ " یک گزاره درست است اما گزاره  $\sim p$  که نقیض آن است و به‌صورت " $۵ \times ۴ \neq ۲۰$ "، نوشته می‌شود یک گزاره نادرست است. حال اگر برای بار دوم از نقیض گزاره‌های فوق دوباره نقیض بگیریم حاصل خود گزاره ابتدایی خواهد بود.

## ترکیب عطفی دو گزاره

۱۱

گزاره «عدد ۳ فرد است و عدد ۳ اول است» را در نظر بگیرید. این گزاره مرکب از دو گزاره ساده «عدد ۳ فرد است» و «عدد ۳ اول است» تشکیل شده است که به وسیله واژه ربط «و» باهم ترکیب شده‌اند و آن‌ها را با هم ترکیب عطفی می‌کنند. ترکیب عطفی دو گزاره  $p$  و  $q$  به صورت « $p \wedge q$ » نمایش داده می‌شود که به رابط منطقی « $\wedge$ » **عاطف** گفته می‌شود.

حال سؤال اینجاست که چه زمانی ترکیب عطفی دو یا چند گزاره درست می‌باشد؟

برمی‌گردیم به گزاره مرکب «عدد ۳ فرد است و عدد ۳ اول است». این گزاره از **ترکیب عطفی** دو گزاره ساده درست تشکیل شده است بنابراین ترکیب آن‌ها نیز درست می‌باشند اما حالت‌های دیگر همین گزاره مرکب را در نظر بگیرید.

«عدد ۳ فرد است و عدد ۳ اول نیست». یک گزاره نادرست است.

«عدد ۳ زوج است و عدد ۳ اول است». یک گزاره نادرست است.

«عدد ۳ زوج است و عدد ۳ اول نیست». یک گزاره نادرست است.

### نکته ۳

ارزش ترکیب عطفی دو یا چند گزاره وقتی درست است که ارزش همه آن‌ها درست باشند. برای دو گزاره  $p$  و  $q$  جدول ارزش ترکیب عطفی  $p \wedge q$  به صورت زیر است:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| ن   | ن   | ن            |
| د   | ن   | ن            |
| ن   | د   | ن            |
| د   | د   | د            |

توجه داشته باشید در صحبت‌های روزمره برای ترکیب عطفی دو جمله از واژه ربط «و» استفاده می‌کنیم. مثلاً گزاره مرکب «امروز یکشنبه است و امروز هوا آفتابی است.» تنها در صورتی درست می‌باشد که هر دو گزاره ساده با هم رخ دهد و هر دو درست باشند.

## ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره مرکب « $\sqrt{2}$  گنگ است یا ۳ عددی فرد است» را در نظر بگیرید. هر دو گزاره ساده « $\sqrt{2}$  گنگ است» و «۳ عددی فرد است» گزاره‌های درستی می‌باشند که به وسیله واژه ربط «یا» با هم ترکیب شده‌اند و آن‌ها را با هم ترکیب فصلی می‌کنند. ترکیب فصلی دو گزاره  $p$  و  $q$  به صورت « $p \vee q$ » نمایش داده می‌شود که به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می‌شود.

حال سؤال اینجاست که چه زمانی ترکیب فصلی دو یا چند گزاره درست است؟

برمی‌گردیم به گزاره مرکب « $\sqrt{2}$  گنگ است یا ۳ عددی فرد است». این گزاره مرکب از دو گزاره ساده درست تشکیل شده است بنابراین ترکیب آن‌ها درست است. اما حالت‌های دیگر همین گزاره را در نظر بگیرید.

« $\sqrt{2}$  گنگ است یا ۳ عددی زوج است». چون گزاره اول درست است بنابراین این گزاره درست می‌باشد.

« $\sqrt{2}$  گنگ نیست یا ۳ عددی فرد است». چون گزاره دوم درست است بنابراین این گزاره درست می‌باشد.

« $\sqrt{2}$  گنگ نیست یا ۳ عددی زوج است». چون هر دو گزاره نادرست است بنابراین این گزاره نادرست می‌باشد.

### نکته ۴

ارزش ترکیب فصلی دو یا چند گزاره وقتی نادرست است که ارزش همه آن‌ها نادرست باشند. برای دو گزاره  $p$  و  $q$  جدول ارزش ترکیب فصلی  $p \vee q$  به صورت زیر است:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| ن   | ن   | ن          |
| ن   | د   | د          |
| د   | ن   | د          |
| د   | د   | د          |

توجه داشته باشید در صحبت‌های روزمره برای ترکیب فصلی دو جمله‌ای واژه ربط «یا» استفاده می‌کنیم. مثلاً گزاره مرکب «امروز علی را خواهم دید یا امروز به کتابخانه می‌روم.» تنها در صورتی نادرست است که هر دو نادرست باشند و هیچ‌کدام رخ ندهند.

**سؤال ۲** جدول زیر را تکمیل کنید.

| ردیف | گزاره p | گزاره q | ارزش p | ارزش q | ارزش $p \wedge q$ | ارزش $p \vee q$ |
|------|---------|---------|--------|--------|-------------------|-----------------|
| ۱    | .....   | .....   | .....  | .....  | .....             | ن               |
| ۲    | .....   | .....   | د      | .....  | .....             | .....           |
| ۳    | .....   | .....   | .....  | ن      | .....             | .....           |
| ۴    | .....   | .....   | ن      | د      | .....             | .....           |

**حل** در ردیف اول چون ارزش ترکیب فصلی نادرست می‌باشد بنابراین ارزش دو گزاره p و q باید نادرست باشد بنابراین دو گزاره نادرست را جایگزین آن‌ها می‌کنیم. به‌طور مثال می‌نویسیم:

| ردیف | گزاره p              | گزاره q         | ارزش p | ارزش q | ارزش $p \wedge q$ | ارزش $p \vee q$ |
|------|----------------------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----------------|
| ۱    | $\sqrt{13}$ گنگ نیست | ۱۲ عددی اول است | ن      | ن      | ن                 | ن               |

در ردیف دوم چون ارزش p درست است باید گزاره‌ای درست جایگزین آن شود. هم‌چنین می‌دانیم ۳ عددی طبیعی است بنابراین ارزش گزاره q درست است. به‌طور مثال می‌نویسیم:

| ردیف | گزاره p                            | گزاره q          | ارزش p | ارزش q | ارزش $p \wedge q$ | ارزش $p \vee q$ |
|------|------------------------------------|------------------|--------|--------|-------------------|-----------------|
| ۲    | در سال کیسه، ماه اسفند ۳۰ روزه است | ۳ عددی طبیعی است | د      | د      | د                 | د               |

در ردیف سوم می‌دانیم ۷ مقسوم‌علیه ۴۹ است بنابراین ارزش گزاره p درست است و باید گزاره‌ای نادرست جایگزین گزاره q گردد. به‌طور مثال می‌نویسیم:

| ردیف | گزاره p             | گزاره q          | ارزش p | ارزش q | ارزش $p \wedge q$ | ارزش $p \vee q$ |
|------|---------------------|------------------|--------|--------|-------------------|-----------------|
| ۳    | ۷ مقسوم‌علیه ۴۹ است | $2 \times 3 = 7$ | د      | ن      | ن                 | د               |

در ردیف چهارم باید گزاره‌های نادرست و درست به‌ترتیب جایگزین گزاره‌های p و q گردد. به‌طور مثال می‌نویسیم:

| ردیف | گزاره p                | گزاره q            | ارزش p | ارزش q | ارزش $p \wedge q$ | ارزش $p \vee q$ |
|------|------------------------|--------------------|--------|--------|-------------------|-----------------|
| ۴    | لندن پایتخت فرانسه است | ۵ بزرگ‌تر از ۲ است | ن      | د      | ن                 | د               |

### قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها

**۱ قانون جابه‌جایی:** ترکیب‌های عطفی و فصلی دارای خاصیت جابه‌جایی هستند، بدین‌صورت که می‌توان جای گزاره‌ها را با هم عوض کرد.

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

**۲ قانون شرکت‌پذیری:** ترکیب‌های عطفی و فصلی دارای خاصیت شرکت‌پذیری هستند.

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

**۳ قانون توزیع‌پذیری (پخش‌ی):** به‌این‌صورت که رابط فاصل خاصیت پخش شدن بر روی رابط عاطفی دارد و بالعکس.

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

**۴ قانون دمورگان:** این قانون بدین معناست که نقیض ترکیب فصلی دو گزاره با ترکیب عطفی نقیض آن دو گزاره هم‌ارز است و نقیض ترکیب عطفی دو گزاره با ترکیب فصلی نقیض آن دو گزاره هم‌ارز است.

$$\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

به جدول ارزشی زیر دقت کنید:

| p | q | ~ p | ~ q | p ∨ q | ~ (p ∨ q) | (~ p) ∧ (~ q) |
|---|---|-----|-----|-------|-----------|---------------|
| د | د | ن   | ن   | د     | ن         | ن             |
| د | ن | ن   | د   | د     | ن         | ن             |
| ن | د | د   | ن   | د     | ن         | ن             |
| ن | ن | د   | د   | ن     | د         | د             |

**قانون همانی:** بدین معنا که ترکیب فصلی هر گزاره با یک گزاره همواره نادرست (F) هم‌ارز خودش می‌شود و هم‌چنین ترکیب عطفی هر گزاره با یک گزاره همواره درست (T) هم‌ارز خودش می‌شود.

$$\begin{cases} p \vee F \equiv p \\ p \wedge T \equiv p \end{cases}$$

| p | F | T | p ∨ F | p ∧ T |
|---|---|---|-------|-------|
| ن | ن | د | ن     | ن     |
| د | ن | د | د     | د     |

**قانون غلبه:** گزاره درست (T) همیشه در ترکیب فصلی و گزاره نادرست (F) همیشه در ترکیب عطفی غلبه دارند.

$$\begin{cases} p \vee T \equiv T \\ p \wedge F \equiv F \end{cases}$$

| p | T | F | p ∨ T | p ∧ F |
|---|---|---|-------|-------|
| ن | د | ن | د     | ن     |
| د | د | ن | د     | ن     |

**نکته**

الف) یک ترکیب را همواره درست می‌گویند هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره درست باشد. به‌عنوان مثال ترکیب  $\sim p \vee p$  را در نظر بگیرید.

| p | ~ p | ~ p ∨ p |
|---|-----|---------|
| ن | د   | د       |
| د | ن   | د       |

ب) یک ترکیب را همواره نادرست می‌گویند هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره نادرست باشد. به‌عنوان مثال ترکیب  $\sim p \wedge p$  را در نظر بگیرید.

| p | ~ p | ~ p ∧ p |
|---|-----|---------|
| ن | د   | ن       |
| د | ن   | ن       |

**قانون جذب:** این قانون یکی از پرکاربردترین قوانین در هم‌ارزی گزاره‌هاست.

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$$

| p | q | p ∨ q | p ∧ q | p ∧ (p ∨ q) | p ∨ (p ∧ q) |
|---|---|-------|-------|-------------|-------------|
| ن | ن | ن     | ن     | ن           | ن           |
| ن | د | د     | ن     | ن           | ن           |
| د | ن | د     | ن     | د           | د           |
| د | د | د     | د     | د           | د           |

**سؤال** آیا عبارت زیر یک گزاره است؟

p: «این جمله نادرست است.»

**حل** در این‌جا منظور از این جمله همان جمله p است که از دو حالت خارج نیست.

۱ اگر p درست باشد آن‌گاه طبق خودش p نادرست است بنابراین به تناقض می‌رسیم.

۲ اگر p نادرست باشد آن‌گاه طبق گفته آن نادرست خواهد بود بنابراین p نادرست نیست که این نیز یک تناقض است.

باتوجه به دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم که p نه درست است و نه نادرست. بنابراین p گزاره نیست.

**سؤال ۱۲** اگر گزاره  $(\sim p \vee q) \wedge p$  درست باشد، کدام گزاره همواره درست است؟ (کنکور سراسری - مرحله دوم)

- (۱)  $\sim p \wedge \sim q$  (۲)  $\sim p \wedge q$  (۳)  $p \wedge \sim r$  (۴)  $p \wedge q$

گزینه ۴ درست است.

**پایه**

از قوانین هم‌ارزی داریم:

$$(\sim p \vee q) \wedge p \equiv (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$$

$$\equiv F \vee (q \wedge p) \quad \text{طبق نکته ۵}$$

$$\equiv q \wedge p \quad \text{طبق قانون همانی}$$

$$\equiv p \wedge q \quad \text{طبق قانون جابه‌جایی}$$

**پایه**

چون گزاره مرکب  $(\sim p \vee q) \wedge p$  دارای ارزش درست است پس  $p \equiv T$  و  $(\sim p \vee q) \equiv T$ ، از آنجا که  $p$  درست است، برای این‌که  $\sim p \vee q$  درست باشد، باید  $q \equiv T$ ، در نتیجه تنها گزینه‌ای که ارزش درست دارد گزینه ۴ یعنی  $p \wedge q$  است.

**سؤال ۱۳** نقیض گزاره  $[(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge (p \vee r)$  کدام است؟

- (۱)  $p \vee r$  (۲)  $\sim p \vee \sim r$  (۳)  $q \vee r$  (۴)  $\sim p \wedge \sim r$

گزینه ۴ درست است.

از قوانین هم‌ارزی داریم:

$$[\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge (p \vee r) \equiv [(p \vee q) \vee r] \wedge (p \vee r)$$

$$\equiv [q \vee (p \vee r)] \wedge (p \vee r)$$

$$\equiv p \vee r$$

طبق قانون دمورگان

طبق قانون شرکت‌پذیری

طبق قانون جذب

اکنون نقیض گزاره ساده شده را به دست می‌آوریم:

$$\sim(p \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim r$$

**سؤال ۱۴** گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

P: اولین جایزه نوبل در سال ۱۹۰۱ میلادی به ویلهلم رونتگن برای کشف اشعه ایکس اعطا شد.

q: جوان‌ترین برنده نوبل فیزیک لارنس براگ در ۲۵ سالگی بود.

r: محمد عبدالسلام نیز تنها مسلمانی است که در سال ۱۹۶۱ از کشور پاکستان موفق به دریافت نوبل فیزیک شده است.

گزاره‌های فوق را می‌توان به صورت مرکب زیر در نظر گرفت.

اولین جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۰۱ میلادی به ویلهلم رونتگن برای کشف اشعه ایکس اعطا شد و چنین نیست که جوان‌ترین برنده

نوبل فیزیک لارنس براگ در ۲۵ سالگی بود یا محمد عبدالسلام نیز تنها مسلمانی که در سال ۱۹۶۱ از کشور پاکستان موفق به دریافت

نوبل فیزیک شده است.

درباره ارزش گزاره مرکب فوق باتوجه به اینکه گزاره‌های p و q درست و گزاره r نادرست می‌باشند چه می‌توان گفت؟

**حل** گزاره مرکب بیان شده به صورت  $(p \wedge (\sim q)) \vee r$  نمایش داده می‌شود و باتوجه به جدول ارزش درستی یا نادرستی آنرا مشخص

می‌کنیم:

| p | q | $\sim q$ | $p \wedge (\sim q)$ | r | $(p \wedge (\sim q)) \vee r$ |
|---|---|----------|---------------------|---|------------------------------|
| د | د | ن        | ن                   | ن | ن                            |

بنابراین این گزاره نادرست است.

گزاره‌های شرطی در زندگی روزمره به‌طور فراوان به‌کار برده می‌شود. به‌عنوان مثال گزاره‌های «اگر امروز شنبه باشد، فردا یکشنبه است.» و «اگر فردا هوا مساعد باشد، آن‌گاه فردا بیرون خواهیم رفت.» هر دو شرطی هستند. اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند گزاره «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ » را ترکیب شرطی  $p$  با  $q$  می‌نامیم و به‌صورت « $p \Rightarrow q$ » نمایش داده می‌شود.

نکته ۶

- گزاره مرکب  $p \Rightarrow q$  به‌صورت‌های زیر خوانده می‌شود:
- (۱)  $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را.
  - (۲)  $q$  شرط لازم برای  $p$  است.
  - (۳)  $p$  شرطی کافی برای  $q$  است.

تذکر

در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »  $p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را تالی (حکم) می‌نامیم.

نکته ۷

در جدول ارزش‌گذاری شرطی  $p \Rightarrow q$  نکته‌ی حائز اهمیت این است که هرگاه ارزش  $p$  (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب  $p \Rightarrow q$  درست است که در این حالت گفته می‌شود ارزش  $p \Rightarrow q$  به انتغای مقدم درست اس و همواره  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  برقرار می‌باشند.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| د | د | د                 |
| د | ن | ن                 |
| ن | د | د                 |
| ن | ن | د                 |

به جای گزاره  $p \Rightarrow q$  می‌توان هم‌ارز منطقی آن یعنی  $\sim p \vee q$  را نوشت، یعنی باتوجه به جدول زیر داریم:

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $\sim p$ | $(\sim p) \vee q$ |
|---|---|-------------------|----------|-------------------|
| د | د | د                 | ن        | د                 |
| د | ن | ن                 | ن        | ن                 |
| ن | د | د                 | د        | د                 |
| ن | ن | د                 | د        | د                 |

نکته ۸

- ۱۱ اگر  $p \Rightarrow q$  گزاره شرطی باشد:
- الف) گزاره  $\sim (p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p) \equiv p \wedge \sim q$  را نقیض آن می‌گویند.
  - ب) گزاره  $q \Rightarrow p$  را عکس آن می‌گویند.
  - ج) گزاره  $(\sim q \Rightarrow \sim p)$  را عکس نقیض آن می‌گویند که هم‌ارز منطقی  $p \Rightarrow q$  نیز هست.

سؤال ۵

نشان دهید  $p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$  برقرار می‌باشد.

حل

جدول ارزش درستی  $p \Rightarrow q$  و  $(\sim q \Rightarrow \sim p)$  را نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم.

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $\sim q$ | $\sim p$ | $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ |
|---|---|-------------------|----------|----------|-------------------------------|
| د | د | د                 | ن        | د        | د                             |
| د | د | د                 | ن        | ن        | د                             |
| ن | ن | د                 | د        | د        | د                             |
| د | ن | ن                 | د        | ن        | ن                             |

ملاحظه می‌شود که این گزاره‌ها با یکدیگر هم‌ارز منطقی می‌باشند.

**نست ۴** عکس نقیض ترکیب شرطی « $(p \wedge \sim r)$  شرط کافی است برای  $(p \vee r)$ » کدام است؟

- (۱)  $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow p \vee r$  (۲)  $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow (r \vee \sim p)$   
 (۳)  $(\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$  (۴)  $(\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

گزینه ۲ درست است.

طبق نکته ۶ ترکیب شرطی به صورت  $(p \wedge \sim r) \Rightarrow p \vee r$  می‌باشد که طبق نکته ۸ و تعریف عکس نقیض داریم:

$$(p \wedge (\sim r)) \Rightarrow p \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow (\sim p \vee r)$$

**نست ۵** گزاره «اگر ۷ زوج باشد، ۱۹ اول است» هم‌ارز منطقی کدام گزینه است؟

- (۱) اگر ۷ فرد باشد، ۱۹ اول نیست. (۲) اگر ۷ فرد باشد، ۱۹ اول است.  
 (۳) اگر ۱۹ اول نباشد، ۷ زوج نیست. (۴) اگر ۱۹ اول باشد، ۷ زوج است.

**پاسخ ۳** گزینه ۳ درست است.

می‌دانیم هر گزاره با عکس نقیض خود هم‌ارز منطقی می‌باشند بنابراین گزینه ۳ یک نقیض گزاره صورت سؤال است.

**سؤال ۶** با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید قوانین زیر همواره درست می‌باشند.

الف) قانون جمع (ادخال فاصل)  $p \Rightarrow (p \vee q)$

ب) قانون اختصار (حذف عاطف)  $p \wedge q \Rightarrow p$

ج) رفع مؤلفه  $(p \vee q) \wedge (\sim p) \Rightarrow q$

**حل** ابتدا جدول ارزش گزاره‌ها در حالت‌های مختلف  $p$  و  $q$  را می‌نویسیم و سپس همواره درست بودن آن‌ها را در حالت‌ها گوناگون مورد بررسی قرار می‌دهیم.

| p | q | $p \vee q$ | $p \Rightarrow (p \vee q)$ | $p \wedge q$ | p | $(p \wedge q) \Rightarrow p$ | $p \vee q$ | $\sim p$ | $(p \vee q) \wedge (\sim p)$ | q | $(p \vee q) \wedge (\sim p) \Rightarrow q$ |
|---|---|------------|----------------------------|--------------|---|------------------------------|------------|----------|------------------------------|---|--|
| د | ن | د          | د                          | ن            | د | د                            | د          | ن        | ن                            | ن | د  |
| د | د | د          | د                          | د            | د | د                            | د          | ن        | ن                            | د | د  |
| ن | ن | ن          | د                          | ن            | ن | د                            | ن          | د        | د                            | ن | د  |
| ن | د | د          | د                          | ن            | ن | د                            | د          | د        | د                            | د | د  |

### استلزام منطقی

هر گزاره شرطی همواره درست را یک **استلزام منطقی** می‌گویند.

**نست ۶** کدام یک از گزاره‌های زیر استلزام منطقی نیست؟

- (۱)  $p \Rightarrow p \vee q$  (۲)  $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$  (۳)  $q \Rightarrow p \vee q$  (۴)  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

**پاسخ ۲** گزینه ۲ درست است.

گزینه ۲ استلزام منطقی نیست زیرا طبق جدول ارزش درستی در دو حالت ارزش آن نادرست می‌باشد.

| p | q | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ |
|---|---|------------|--------------|-----------------------------------|
| ن | ن | ن          | ن            | د                                 |
| ن | د | د          | ن            | ن                                 |
| د | ن | د          | ن            | ن                                 |
| د | د | د          | د            | د                                 |

بقیه گزینه‌ها در هر چهار حالت دارای ارزش درست می‌باشند.



نشان

اگر گزاره‌های  $p$  و  $q$  و  $r$  به ترتیب درست، نادرست و درست باشند کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$(1) (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (2) p \wedge (\sim q \vee r) \quad (3) p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim r) \quad (4) (p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim r)$$

یاسخ

گزینه ۲ درست است.

هر چهار گزینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و جدول ارزش هر گزینه را می‌نویسیم.

۱)

|   |   |   |                   |                   |  |
|---|---|---|-------------------|-------------------|--|
| p | q | r | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ |
| د | د | د | د                 | د                 | د  |

۲)

|   |   |   |          |                   |                              |
|---|---|---|----------|-------------------|------------------------------|
| p | q | r | $\sim q$ | $(\sim q) \vee r$ | $p \wedge ((\sim q) \vee r)$ |
| د | د | د | د        | د                 | د                            |

۳)

|   |   |   |          |          |                                 |   |
|---|---|---|----------|----------|---------------------------------|---|
| p | q | r | $\sim q$ | $\sim r$ | $(\sim q) \Rightarrow (\sim r)$ | $p \Rightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim r))$ |
| د | د | د | د        | د        | د                               | د   |

۴)

|   |   |   |          |                     |          |  |
|---|---|---|----------|---------------------|----------|--|
| p | q | r | $\sim q$ | $p \wedge (\sim q)$ | $\sim r$ | $p \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim r)$ |
| د | د | د | د        | د                   | د        | د  |

نشان

گزاره  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  با کدامیک از گزینه‌های زیر هم‌ارز منطقی است؟

$$(1) ((\sim p) \vee (\sim q)) \Rightarrow r \quad (2) (p \vee q) \Rightarrow (\sim r) \quad (3) ((\sim p) \wedge (\sim q)) \Rightarrow (\sim r) \quad (4) (p \wedge q) \Rightarrow r$$

یاسخ

گزینه ۴ درست است.

کافیست برای رد گزینه‌های دیگر یک حالت را بیابیم که دو گزاره هم‌ارز نمی‌باشند.

رد گزینه ۱) حالت  $\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \\ r \equiv F \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم گزینه ۱ با گزاره سؤال هم‌ارز نیست.

|   |   |   |                   |                                   |          |          |                          |   |  |
|---|---|---|-------------------|-----------------------------------|----------|----------|--------------------------|---|--|
| p | q | r | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \vee (\sim q)$ | r | $(\sim p) \vee (\sim q) \Rightarrow r$ |
| د | د | ن | ن                 | ن                                 | ن        | ن        | ن                        | ن | د                                      |

رد گزینه ۲) حالت  $\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \\ r \equiv T \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم گزینه ۲ با گزاره سؤال هم‌ارز نیست.

|   |   |   |                   |                                   |            |          |                                   |
|---|---|---|-------------------|-----------------------------------|------------|----------|-----------------------------------|
| p | q | r | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ | $p \vee q$ | $\sim r$ | $(p \vee q) \Rightarrow (\sim r)$ |
| د | د | د | د                 | د                                 | د          | ن        | ن                                 |

رد گزینه ۳) حالت  $\begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \\ r \equiv T \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم گزینه ۳ با گزاره سؤال هم‌ارز نیست.

|   |   |   |                   |                                   |          |          |                            |          |   |
|---|---|---|-------------------|-----------------------------------|----------|----------|----------------------------|----------|---|
| p | q | r | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \wedge (\sim q)$ | $\sim r$ | $(\sim p) \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim r)$ |
| ن | ن | د | د                 | د                                 | د        | د        | د                          | ن        | ن   |

گزینه ۴ هم‌ارز منطقی گزاره سؤال می‌باشد که در هر ۸ حالت ممکن با هم هم‌ارز می‌باشند.

نکته

« $p$  مگر آن که  $q$ » به صورت  $(\sim q) \Rightarrow p$  نوشته می‌شود.

به‌عنوان مثال «او را کمک نمی‌کنم مگر آن که اظهار پشیمانی کند.» یعنی «اگر اظهار پشیمانی نکند، او را کمک نمی‌کنم.»

ترکیب دوشرطی

گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اضلاع مقابلش موازی است.» را در نظر بگیرید، عکس این گزاره شرطی به صورت «اگر اضلاع یک چهارضلعی موازی باشند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.» خواهد بود اکنون ترکیب عطفی این دو گزاره، یک گزاره

دو شرطی است و به صورت «اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن گاه اضلاع مقابلش موازی است و برعکس» نوشته می‌شود. اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند آن گاه گزاره «اگر  $p$  آن گاه  $q$  و برعکس» که ترکیب عطفی دو گزاره شرطی  $(p \Rightarrow q)$  و  $(q \Rightarrow p)$  می‌باشد را ترکیب دو شرطی دو گزاره  $p$  و  $q$  می‌نامیم و به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نمایش داده می‌شود.

## نکته ۱۰

گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » به صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

(۱) اگر  $p$  آن گاه  $q$  و برعکس

(۲)  $p$  اگر و فقط  $q$  (اگر و فقط اگر  $p$ )

(۳)  $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است. ( $q$  شرط لازم و کافی برای  $p$  است).

## توجه

برای مثال گزاره‌های « $4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$ » و « $x > 1 \Leftrightarrow 3x + 4 > 1$ » و «دو صفحه با هم موازی هستند اگر و تنها اگر هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.» همگی گزاره‌های دوشروطی هستند.

## نکته ۱۱

همان‌گونه که بیان شد ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  ترکیب عطفی دو گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  می‌باشد. بنابراین

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

همیشه برقرار است.

باتوجه به جدول ارزش گزاره‌ها به راحتی می‌توان نشان داد که در حالت‌های مختلف  $p \Leftrightarrow q$  چه ارزشی دارد:

| p | q | $q \Rightarrow p$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|
| د | د | د                 | د                 | د  |
| د | ن | ن                 | د                 | ن  |
| ن | د | د                 | ن                 | ن  |
| ن | ن | د                 | د                 | د  |

از نکته ۱۱ و جدول بالا، جدول ارزش گزاره دو شرطی را نتیجه می‌گیریم:

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| د | د | د                     |
| د | ن | ن                     |
| ن | د | ن                     |
| ن | ن | د                     |

## نکته ۱۲

ترکیب دو شرطی دو گزاره  $p$  و  $q$  تنها در صورتی دارای ارزش درست است که  $p$  و  $q$  هر دو دارای ارزش یکسانی باشند. اصطلاحاً به ترکیب دو شرطی، هم‌ارز منطقی نیز گفته می‌شود.

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| د | د | د                     |
| د | ن | ن                     |
| ن | د | ن                     |
| ن | ن | د                     |

**سؤال ۷** ارزش گزاره‌های دو شرطی زیر را تعیین کنید.

(ب)  $4 > 6 \Leftrightarrow -4 > -6$

(الف)  $4 < 6 \Leftrightarrow 4 + 3 < 6 + 3$

(د)  $4 < 6 \Leftrightarrow 4 \times 2 > 6 \times 2$

(ج)  $4 < 6 \Leftrightarrow \frac{4}{5} > \frac{6}{5}$

طبق نکته ۱۲ هرگاه ارزش دو گزاره یکسان باشد ارزش ترکیب دوشرطی آن دو گزاره درست است. در گزاره «الف» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش هر دو گزاره درست می‌باشد بنابراین ترکیب دوشرطی آن دو درست است. دو گزاره‌های «ب» و «ج» چون در ترکیب دوشرطی ارزش یکی درست و دیگری نادرست می‌باشد بنابراین ارزش آن‌ها نادرست است. گزاره «د» نیز چون ارزش هر دو گزاره نادرست است، بنابراین ارزش ترکیب دوشرطی آن دو درست است.

در کدام یک از زوج گزاره‌های  $B \leftrightarrow A$  داریم  $A \leftrightarrow B$ ، در صورتی که بدانیم گزاره  $r$  درست است؟

$$\begin{cases} A: (p \Rightarrow \sim q) \wedge r \\ B: \sim p \Rightarrow (q \vee (\sim r)) \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} A: (p \wedge q) \Rightarrow r \\ B: p \Rightarrow (q \Rightarrow (\sim r)) \end{cases} \quad (۳) \quad \begin{cases} A: p \wedge (\sim q \vee r) \\ B: p \vee (q \wedge (\sim r)) \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} A: p \vee (q \wedge (\sim r)) \\ B: (p \vee q) \Rightarrow (\sim r) \end{cases} \quad (۱)$$

گزینه ۲ درست است.

اگر ارزش گزاره‌های  $B \leftrightarrow A$  و  $A \leftrightarrow B$  یکسان باشد، آن‌گاه  $A \leftrightarrow B$  برقرار خواهد بود. حالت‌های رد گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \\ r \equiv T \end{cases} \text{ حالت (۱) ردگزینه ۱ را در نظر بگیرید. می‌بینیم } A \equiv T \text{ و } B \equiv F \text{ است پس هم‌ارز نیستند.}$$

$$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \\ r \equiv T \end{cases} \text{ حالت (۳) ردگزینه ۳ را در نظر بگیرید. می‌بینیم } A \equiv T \text{ و } B \equiv F \text{ است پس هم‌ارز نیستند.}$$

$$\begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \\ r \equiv T \end{cases} \text{ حالت (۴) ردگزینه ۴ را در نظر بگیرید. می‌بینیم } A \equiv T \text{ و } B \equiv F \text{ است پس هم‌ارز نیستند.}$$

جدول ارزش گزینه ۲ به صورت مقابل است.

| p | q | r | $p \wedge (\sim q \vee r)$ | $p \vee (q \wedge (\sim r))$ |
|---|---|---|----------------------------|------------------------------|
| ن | ن | د | ن                          | ن                            |
| ن | د | د | ن                          | ن                            |
| د | ن | د | د                          | د                            |
| د | د | د | د                          | د                            |

مشاهده می‌گردد در هر چهار حالت ارزش یکسانی دارند و هم‌ارز می‌باشند.

ثابت کنید  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$  برقرار است.

طبق آنچه در نکته ۷ در مورد ترکیب شرطی بیان شد « $p \Rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$ »، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\equiv (\sim p) \vee (q \Rightarrow r) && \text{طبق نکته ۷} \\ &\equiv (\sim p) \vee ((\sim q) \vee r) && \text{طبق نکته ۷} \\ &\equiv ((\sim p) \vee (\sim q)) \vee r && \text{طبق قانون شرکت‌پذیری} \\ &\equiv (\sim (p \wedge q)) \vee r && \text{طبق قانون دمورگان} \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r && \text{طبق نکته ۷} \end{aligned}$$

که به آن قانون **عطف مقدمات** نیز گفته می‌شود.

برای دو گزاره  $p$  و  $q$ :

الف) گزاره « $\sim p \leftrightarrow \sim q$ » را عکس نقیض گزاره  $p \leftrightarrow q$  می‌نامند.

ب) ترکیب دوشرطی  $p \leftrightarrow q$  هم‌ارز است با ترکیب شرطی که مقدم آن ترکیب فصلی  $p \vee q$  و تالی آن ترکیب عطفی  $p \wedge q$  است.

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

ج) نقیض ترکیب دوشرطی  $p \leftrightarrow q$  هم‌ارز است با ترکیب دوشرطی یکی از مولفه‌ها با نقیض مولفه دیگر است.

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \leftrightarrow p \equiv q \leftrightarrow (\sim p)$$

## اثبات «ب»:

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$   
 $\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim p \wedge \sim q)(\sim p \wedge p)(q \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$  قانون پخششی  
 طبق نکته ۵، ارزش  $\sim p \wedge p$  و  $q \wedge \sim q$  همیشه نادرست است و طبق قانون همانی می توان از آنها صرفه نظر کرد. بنابراین داریم:

$p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$  طبق نکته ۷

## اثبات قسمت «ج»:

$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim[(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)]$   
 $\equiv \sim[\sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$  طبق قانون دمورگان  
 $\equiv (\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$  طبق نکته ۷  
 $\equiv \sim q \Leftrightarrow p$

$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim[(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)]$   
 $\equiv \sim[\sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$  طبق قانون دمورگان  
 $\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$  طبق قانون جابه جایی  
 $\equiv (q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$  طبق قانون نکته ۷  
 $\equiv q \Leftrightarrow \sim p$

توجه داشته باشید که  $(q \Leftrightarrow \sim p) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q)$  و  $(p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (\sim q \Leftrightarrow p)$  می باشند.

نکته ۱۰ گزاره  $(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$  هم ارز با کدام گزاره است؟

۱)  $p \Leftrightarrow \sim q$       ۲)  $\sim q \Leftrightarrow \sim p$       ۳)  $p \Leftrightarrow q$       ۴)  $\sim p \vee \sim q$

پاسخ گزینه ۱ درست است.

طبق نکته ۷ می دانیم که  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  بنابراین داریم:

$(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$   
 $\equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)$   
 طبق نکته ۵ می دانیم ارزش  $p \vee \sim p$  و  $q \vee \sim q$  همواره درست است و طبق قانون همانی می توان از آنها صرف نظر کرد. پس داریم:

$(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$   
 $\equiv (\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$  طبق نکته ۷  
 $\equiv \sim q \Leftrightarrow p \equiv p \Leftrightarrow \sim q$  طبق نکته ۱۱

## چند هم ارزی مهم

۱ ترکیب شرطی از چپ در همه ترکیبها توزیع پذیر است.

الف)  $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

ب)  $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

ج)  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

د)  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

۲ ترکیب فصلی از چپ در ترکیبهای شرطی و دو شرطی توزیع پذیر است.

الف)  $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

ب)  $p \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

۳ هرگاه ترکیب شرطی از راست روی ترکیبهای فصلی یا عطفی توزیع شود، فاصل را به عطف و عطف را به فاصل تبدیل می کند.

الف)  $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

ب)  $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$