محک
مرور حرفه ای کنکور

کتاب جمع بندی هندسه دهم و یازدهم محک

(رشته ریاضی فیزیک)

علی صادقی

تو گر عمرت هدر دادی همه را گر تو پر دادی
مده بـر باد باقـی را که حکمـی چون گهـر دارد
تو را باید محک باشد به راحت آن کمک باشد
وگرنه ســـــکه جعلی تو پنداری که زر دارد

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

دانش‌آموزان پایه دوازدهم که مایل به ادامه تحصیل در دانشگاه‌ها و مؤسسات عالی کشور هستند، از یک سو باید مطالب کلاس دوازدهم را دقیق و خیلی عمیق فراگیرند و از سوی دیگر کتاب‌های پایه‌ای قبلی خود را مرور نمایند.

کتاب‌های جمع‌بندی دهم و یازدهم محک (مرور حرفه‌ای کنکور) برای این‌گونه دانش‌آموزان کمک بزرگی است. دانش‌آموزان می‌توانند برای مرور مطالب پایه‌های قبلی، در تابستان و قبل از شروع سال تحصیلی جدید، از این کتاب استفاده کنند.

ما در انتشارات مبتکران برای شما که هدفتان قبولی در دانشگاه‌های ممتاز و معتبر کشور است، مجموعه کتاب‌های جمع‌بندی را به کمک مؤلفان و مدرسان برگزیده تألیف کرده‌ایم.

کتابی که پیش‌رو دارید «کتاب جمع‌بندی هندسه دهم و یازدهم محک» با ویژگی‌های زیر تألیف شده است:

۱. ارائه درس‌نامه خلاصه به همراه نکته‌های مهم تستی و کنکوری برای مرور مطالب پایه‌های دهم و یازدهم.

۲. بررسی پرسش‌های کنکورهای سراسری

۳. ارائه آزمون‌های تألیفی در هر فصل برای آمادگی بیشتر دانش‌آموزان در آزمون‌ها

۴. ارائه پاسخ‌نامه تشریحی کامل به همراه نکته‌های تستی

با مطالعه این کتاب دانش‌آموزان عزیز می‌توانند در فرصت تابستان، مطالب هندسه دهم و یازدهم را مرور کرده و خود را برای آزمون‌های آزمایشی و سال دوازدهم آماده کنند.

در پایان وظیفه خود می‌دانیم از مؤلف محترم کتاب، آقای علی صادقی و از دبیر محترم مجموعه تشکر کنیم.

همچنین از خانم‌ها محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، سمانه مسروری (رسم شکل)، بهاره خدامی (گرافیست) و زهرا گودرز (طراح جلد) سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

فهرست

۱

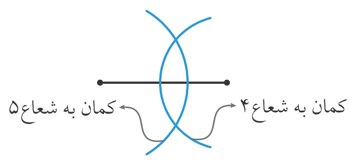
فصل اول: استدلال و ترسیم‌های هندسی

درس ۱: ترسیم‌های هندسی

منظور از ترسیم هندسی این است که برای رسم یک شکل تنها از دو وسیله خط‌کش و پرگار استفاده کنیم.

از مهم‌ترین ترسیم‌های هندسی، می‌توان به رسم نیمساز یک زاویه، عمودمنصف یک پاره‌خط، خط عمود بر یک خط از یک نقطه و خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن، اشاره کرد.

مثال: مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و ۶ رسم کنید.



پاسخ: ابتدا پاره‌خطی به اندازه ۶ رسم می‌کنیم. سپس از یک سر این پاره‌خط کمانی به شعاع ۴ و از سر دیگر پاره‌خط کمانی به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند و هر دو نقطه می‌توانند رأس سوم مثلث باشند.

توجه: در شمارش مثلث‌های رسم شده، مثلث‌های همنهشت را یکبار می‌شماریم.

نکته: برای اینکه مثلثی با اندازه‌های اضلاع a، b و c قابل رسم باشد، باید مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر باشد و یا به‌عبارت دیگر مجموع دو ضلع کوچکتر، از ضلع سوم بزرگتر باشد، همچنین اگر مثلث قابل رسم باشد، تنها یک مثلث وجود دارد.

تست: با کدام دسته از اعداد زیر می‌توان مثلث با این اضلاع رسم کرد؟

۱) ۳ و ۲ و ۵ ۲) ۳ و ۲ و ۷ ۳) ۲/۵ و ۳/۴ و ۶ ۴) ۷ و ۳ و ۵

پاسخ: گزینه ۴

با بررسی گزینه‌ها داریم:

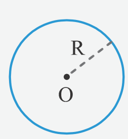
گزینه ۱: ۲+۳≯۵ ⟵ مثلث قابل رسم نیست

گزینه ۲: ۲+۳≯۷ ⟵ مثلث قابل رسم نیست

گزینه ۳: ۲/۵+۳/۴≯۶ ⟵ مثلث قابل رسم نیست

گزینه ۴: ۵+۳>۷ ⟵ مثلث قابل رسم است

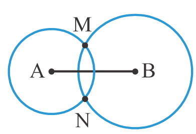
دایره: دایره مجموعه نقاطی است که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی مانند O، برابر با مقدار ثابت R باشد. به‌عبارت دیگر هر نقطه روی دایره فاصله‌اش از O برابر R است و هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از O برابر R است، روی دایره قرار دارد.



تست: **دو نقطه A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. چند نقطه وجود دارد که از A، به فاصله ۲ و از B، به فاصله ۲/۵ سانتی‌متر باشند؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) نامتناهی

پاسخ: گزینه ۲



ابتدا A را به B وصل می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع ۲ یک کمان (دایره) و به مرکز B و شعاع ۲/۵ کمان (دایره) دیگری رسم می‌کنیم. این دو کمان (دایره) یکدیگر را در دو نقطه M و N قطع می‌کنند. این نقاط، نقاط موردنظر می‌باشند.

نکته: اگر دو نقطه A و B به فاصله x از یکدیگر واقع باشند. نقاطی که فاصله‌شان از A برابر y و از B، برابر z باشند، به‌صورت زیر قابل بررسی است:

الف) اگر $y+z>x$، در این صورت دو نقطه وجود دارد. (دایره‌ها در دو نقطه متقاطع‌اند)

ب) اگر $y+z=x$، در این صورت یک نقطه وجود دارد. (دایره‌ها در یک نقطه متقاطع‌اند)

پ) اگر $y+z<x$، در این صورت هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. (دایره‌ها نقطه مشترک ندارند)

تست: **پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۷ و از B به فاصله ۲ باشند؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) نامتناهی

پاسخ: گزینه ۳

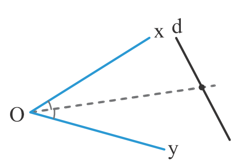
از آنجا که $7+2<10$ بنابراین هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

نکته: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

تست: **زاویه xOy و خط d مفروضند. به‌طوری که خط d با هیچ‌یک از اضلاع زاویه موازی نیست. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله باشد؟**

۱) یک   ۲) هیچ   ۳) بی‌شمار   ۴) یک یا بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴

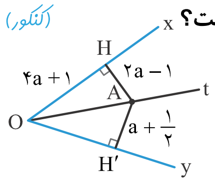


نقاطی که از اضلاع زاویه xOy به یک فاصله باشد، نقاط روی نیمساز زاویه می‌باشند، بنابراین نیمساز زاویه xOy را رسم می‌کنیم. محل برخورد این نیمساز با خط d، نقاط موردنظرند. دو حالت ممکن است:

حالت اول: خط d با نیمساز در یک نقطه متقاطع باشد. (جواب یک نقطه)

حالت دوم: خط d بر نیمساز زاویه منطبق باشد. (جواب بی‌شمار نقطه)

تست: در شکل مقابل Ot نیمساز زاویه xOy است. طول OH' کدام است؟ *(کنکور)*



۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) ۶

۳) ۷　　۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از اضلاع زاویه به یک فاصله است. بنابراین $AH = AH'$. درنتیجه:

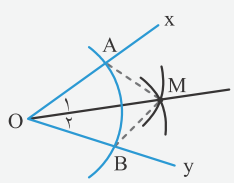
$$۲a-۱=a+\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

از طرفی مثلث‌های OAH و OAH' همنهشت بوده و بنابراین داریم:

$$OH' = OH = ۴a+۱ = ۴(\frac{۳}{۲})+۱ = ۷$$

روش رسم نیمساز

برای رسم نیمساز زاویه داده شده xOy، ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه یک کمان رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. به مرکزهای A و B و به شعاع دلخواه یکسان کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا حتماً یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند. مثلث‌های OAM و OBM به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند، بنابراین $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$. یعنی M روی نیمساز است و امتداد OM نیمساز زاویه xOy است.



نکته: یکی از کاربردهای رسم نیمساز به کمک خط‌کش و پرگار، رسم زوایای °۶۰، °۳۰ و °۱۵ به کمک خط‌کش و پرگار است. بدین صورت که ابتدا مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع دلخواه رسم می‌کنیم. هر یک از زوایای این مثلث، °۶۰ است. سپس نیمساز یکی از این زوایا را رسم می‌کنیم تا زاویه °۳۰ پدید آید. در مرحله آخر، بار دیگر نیمساز یکی از زوایای °۳۰ را رسم می‌کنیم تا زاویه °۱۵ ایجاد شود.

تست: با معلوم بودن زاویه °۸۰ و داشتن خط‌کش و پرگار، کدام‌یک از زوایای زیر قابل رسم <u>نیست</u>؟

۱) ۲۵　　۲) ۳۲/۵　　۳) ۱۷/۵　　۴) ۷۲

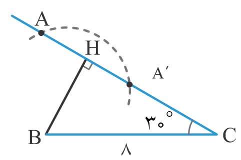
پاسخ: گزینه ۴

اگر نیمساز زاویه °۸۰ را رسم کنیم، زاویه °۴۰ بدست می‌آید. حال اگر نیمساز زاویه °۴۰ را رسم کنیم، زاویه °۲۰ بدست می‌آید. با رسم نیمساز زاویه °۲۰، زاویه °۱۰ و به همین صورت زاویه‌های °۵ و °۲/۵ بدست می‌آیند. از آنجا که $°۲۰+°۵=°۲۵$، می‌توان زاویه °۲۵ را رسم کرد. همچنین چون $°۲/۵+°۱۰+°۲۰=°۳۲/۵$ و $°۲/۵+°۵+°۱۰=°۱۷/۵$ زوایای °۳۲/۵ و °۱۷/۵ نیز قابل رسم‌اند. پس فقط گزینه «۴» را نمی‌توان رسم کرد.

تست: **در مثلث ABC با معلومات $BC = ۸$ ، $AB = ۵$ و $\hat{C} = ۳۰°$ چند مثلث می‌توان رسم کرد؟** *(کنکور)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴



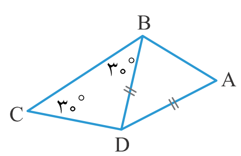
ابتدا ضلع $BC = ۸$ را رسم می‌کنیم و روی رأس C زاویه $۳۰°$ را جدا می‌کنیم. سپس کمانی به مرکز B و شعاع $AB = ۵$ رسم می‌کنیم. داریم:

$$BHC : \hat{C} = ۳۰° \Rightarrow BH = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

بنابراین کمان رسم شده ضلع زاویه $۳۰°$ را در دو نقطه قطع می‌کند و دو مثلث متمایز به‌دست می‌آید. توجه شود که در حالت کلی اگر کمان رسم شده، ضلع زاویه $۳۰°$ را در یک نقطه قطع کند فقط یک مثلث به‌دست می‌آید و اگر ضلع زاویه $۳۰°$ را قطع نکند مثلثی قابل رسم نیست.

نکته: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد.

تست: **با توجه به شکل زیر، کدام گزینه همواره صحیح است؟**



۱) B روی نیمساز زاویه ADC است.

۲) D روی نیمساز زاویه ABC است.

۳) B روی عمودمنصف AC است.

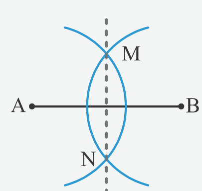
۴) D روی عمودمنصف AC است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

در مثلث BCD، دو زاویه B و C برابرند، پس $BD = CD$. از طرفی طبق فرض داریم $BD = AD$، لذا $CD = AD$. درنتیجه D از دو نقطه A و C به یک فاصله است. یعنی D روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد.

روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

برای رسم عمودمنصف پاره‌خط داده شده AB، ابتدا دو کمان به مراکز A و B و به شعاع یکسان (بزرگتر از نصف طول پاره‌خط AB) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطه M و N قطع کنند. هر دو نقطه M و N از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، پس روی عمودمنصف AB قرار دارند. بنابراین اگر M را به N وصل کنیم، عمودمنصف پاره‌خط AB به‌دست می‌آید.



تست: برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۱۰، دهانه پرگار را به اندازه R باز می‌کنیم. R کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

برای رسم عمودمنصف یک پاره‌خط باید کمان‌هایی به شعاع بیشتر از نصف طول پاره‌خط به مرکز دو سر پاره‌خط رسم کنیم. پس باید شعاع کمان‌ها بیشتر از $۵ = \frac{۱۰}{۲}$ باشد. با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۴ صحیح است.

نکته:

۱- مجموعه نقاطی که همگی فاصله‌شان از نقطه O برابر r باشد، محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌باشد.

۲- مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع (اضلاع زاویه) به یک فاصله باشند، نقاط روی نیمساز زاویه است.

۳- مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز (از دو سر پاره‌خط) به یک اندازه باشند، نقاط روی عمودمنصف پاره‌خط است.

۴- مجموعه نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، نقاط روی خطی است موازی با دو خط و به یک فاصله از هر یک.

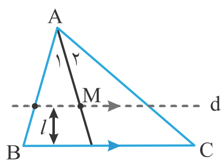
۵- مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله r باشند، نقاط روی دو خط موازی با d در طرفین آن و به فاصله r از آن می‌باشند.

تست: درون مثلث ABC حداکثر چند نقطه وجود دارد که از BC به فاصله l و از AB و AC به یک فاصله باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

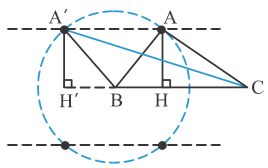
نقاطی که از BC به فاصله l باشند و درون مثلث ABC واقع باشند، خطی موازی با BC به فاصله l تشکیل می‌دهند. همچنین نقاطی که از AB و AC به یک فاصله‌اند، روی نیمساز زاویه A قرار دارند. محل برخورد نیمساز و خط موازی با BC جواب مسأله است (نقطه M).



تست: در مثلث ABC با داشتن طول‌های $BC=7$ و $AB=4$ و ارتفاع $AH=3$ چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد؟ *(کنکور)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

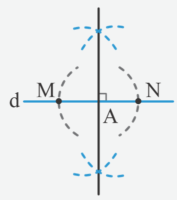


ابتدا ضلع BC به طول ۷ را رسم می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ رسم می‌کنیم و دو خط به موازات ضلع BC و به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم تا دایره را در چهار نقطه مختلف قطع نماید. از بین این مثلث‌ها دو مثلث با هم همنهشت نیستند. پس مسأله ۲ جواب دارد (مثلث‌های ABC و $A'BC$).

روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه

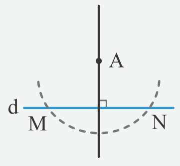
خط d و نقطه A را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم از نقطه A، خطی عمود برخط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه A روی خط d است.



به مرکز A و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. در این صورت A وسط پاره‌خط MN است. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کنیم از نقطه A می‌گذرد. به این ترتیب این عمودمنصف، خطی است که در نقطه A بر خط d عمود است.

ب) نقطه A خارج خط d است.



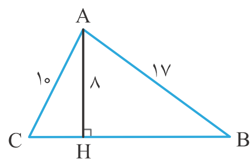
به مرکز A و به شعاع بزرگتر از فاصله نقطه A تا خط، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. در این صورت نقطه A از M و N به یک فاصله است بنابراین A روی عمودمنصف پاره‌خط MN قرار دارد. اگر عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کنیم از نقطه A می‌گذرد. به این ترتیب این عمودمنصف، خطی است که از نقطه A گذشته و بر خط d عمود است.

تست: مثلث ABC با داشتن مقادیر $b=10$، $c=17$ و $h_a=8$ رسم شده است. مساحت این مثلث کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۶۰ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۲

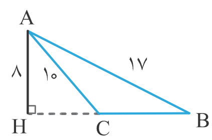
دو مثلث با اطلاعات داده شده قابل رسم است. یک مثلث حاده‌الزاویه (شکل مقابل) که در آن داریم:



$$BH=\sqrt{۱۷^۲-۸^۲}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵$$
$$CH=\sqrt{۱۰^۲-۸^۲}=\sqrt{۳۶}=۶ \Rightarrow BC=۲۱$$

در این صورت $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۲۱=۸۴$

مثلث دیگر منفرجه‌الزاویه است (شکل مقابل) که در آن داریم:

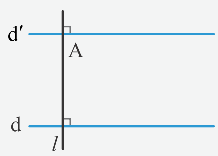


$$BH=\sqrt{۱۷^۲-۸^۲}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵$$
$$CH=\sqrt{۱۰^۲-۸^۲}=\sqrt{۳۶}=۶ \Rightarrow BC=۹$$

در این صورت $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۹=۳۶$

روش رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن

فرض می‌کنیم خط d و نقطه A خارج آن داده شده باشد. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از A بگذرد و با خط d موازی باشد. ابتدا l را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه A بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط d' را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از A بگذرد و بر l عمود باشد. در این صورت خطوط d و d' بر خط l عمودند، بنابراین موازی‌اند.



تست: در رسم خطی موازی با خط داده شده از یک نقطه غیرواقع بر آن، کدام‌یک از موارد زیر به‌کار نمی‌رود؟

۱) دو خط موازی با یک خط، با هم موازیند.

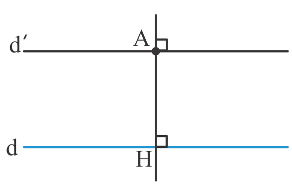
۲) از یک نقطه روی یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.

۳) از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.

۴) در صفحه، دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند.

پاسخ: گزینه ۱

نقطه A و خط d در صفحه را درنظر می‌گیریم. ابتدا از نقطه A خطی بر d عمود کرده، نقطه تقاطع را H می‌نامیم (گزینه ۳). سپس از نقطه A، خط d' را عمود بر AH رسم می‌کنیم (گزینه ۲). دو خط d و d' هر دو بر خط AH عمودند، بنابراین با هم موازیند (گزینه ۴). تنها از گزینه ۱ استفاده نشده است.



نکته: دانستن ویژگی‌های اضلاع، زوایا و قطرهای چهارضلعی‌های خاص مانند متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی و...، برای تشخیص تعداد چهارضلعی‌های قابل رسم، مفید است.

تست: کدام‌یک از اشکال هندسی زیر با معلومات داده شده به‌صورت منحصر به‌فرد (یکتا) قابل رسم است؟

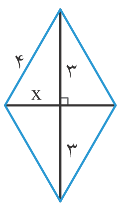
۱) مستطیلی که طول قطر آن ۴ باشد.

۲) لوزی که طول ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۶ باشد.

۳) متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۵ و ۸ باشد.

۴) متوازی‌الاضلاعی که طول اضلاع آن ۴ و ۶ باشد.

پاسخ: گزینه ۲

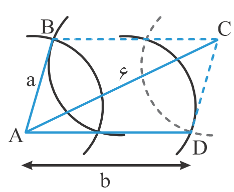


گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ هر کدام بی‌شمار شکل را معرفی می‌کنند. در صورتی که در گزینه ۲، اگر طول ضلع و قطر لوزی به ترتیب ۴ و ۶ باشد، مطابق شکل با توجه به منصف بودن قطرها و رابطه فیثاغورس می‌توان قطر دیگر لوزی را به‌دست آورد که در این صورت تنها یک لوزی قابل رسم است.

$$x^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۷ \Rightarrow x = \sqrt{۷}$$

$$\Rightarrow \text{قطر دیگر} = ۲\sqrt{۷}$$

تست: برای رسم یک متوازی‌الاضلاع دلخواه که $AC = ۶$ یکی از قطرهای آن است، مطابق شکل از دو سر A و C کمان‌هایی به شعاع‌های a و b رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط B و D قطع کنند. در این صورت کدام مقدار برای a و b قابل قبول است؟



۱) $a = ۲$ و $b = ۳$

۲) $a = ۴$ و $b = ۳$

۳) $a = ۳$ و $b = ۳$

۴) $b = ۷$ و $a = ۱$

پاسخ: گزینه ۲

در متوازی‌الاضلاع اضلاع روبرو برابرند. بنابراین $BC = AD = b$. متوازی‌الاضلاع زمانی با این روش قابل رسم است که کمان‌های رسم شده به شعاع‌های a و b به مراکز A و C یکدیگر را قطع کنند. به‌عبارت دیگر مثلث ABC با اضلاع a، b و ۶ قابل رسم باشد. بنابراین باید $a + b > ۶$، $a + ۶ > b$ و $b + ۶ > a$ باشد. گزینه ۲ در این نامساوی‌ها صدق می‌کند.

درس ۲: استدلال

استدلال استقرایی: به روش نتیجه‌گیری کلی براساس تجربه، آزمایش و مشاهده (مثال)، استدلال استقرایی می‌گوییم. توجه شود نتایجی که با این نوع استدلال به‌دست می‌آیند لزوماً صحیح نمی‌باشند و قابل اعتماد نیستند. استدلال استقرایی فقط کمک می‌کند حدس‌های احتمالاً درست بزنیم.

استدلال استنتاجی: نتیجه‌گیری کلی و منطقی براساس واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.

تست: استدلال استقرایی یعنی.....

۱ روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدود از مشاهدات.
۲ روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
۳ استدلالی که از حکم کلی، حکم جزئی را نتیجه می‌گیریم.
۴ روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه نامحدودی از مشاهدات.

پاسخ: گزینه ۱

در استدلال استقرایی با توجه به تعداد محدودی از مشاهدات به یک نتیجه کلی می‌رسیم. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست: کدام عبارت زیر می‌تواند تعریف استدلال استنتاجی در هندسه باشد؟

۱ نتیجه‌گیری کلی از فرض‌ها، قضیه‌ها، تعریف‌ها و اصولی که درستی آنها را از قبل پذیرفته‌ایم.
۲ مقایسه دو عضو خاص از یک مجموعه و نتیجه‌گیری کلی در مورد آن مجموعه.
۳ مقایسه حکمی که درستی آن را نمی‌دانیم با حکمی که درستی آن قبلاً ثابت شده است.
۴ نتیجه‌گیری کلی پس از بررسی درستی چند تجربه و آزمایش.

پاسخ: گزینه ۱

به تعریف استدلال استنتاجی مراجعه شود.

گزاره: یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد. بنابراین گزاره ممکن است درست یا نادرست باشد و ممکن است درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره می‌تواند تنها یک خبر را ا علام کند که در این صورت به آن **گزاره ساده** می‌گوییم و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که در این صورت به آن **گزاره مرکب** می‌گوییم. به‌عنوان مثال گزاره «هر عدد فرد بر ۳ بخش‌پذیر است» گزاره ساده است که درست نیست و گزاره «هوا بارانی است و پانزده عدد اول است» گزاره مرکب می‌باشد. در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه درباره چیزی خبر قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود. به‌عنوان مثال «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نمی‌شود» یا «اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، دو زاویه برابر داد». به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گوییم.

تست: کدام گزینه یک گزاره نمی‌باشد؟

۱) مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180°$ است. ۲) فردا حتماً درس هندسه را مطالعه کن.

۳) $6 > 17$ ۴) امروز هوا سالم است.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ همگی جملات خبری هستند که یا درست یا نادرست می‌باشند. در صورتی که گزینه ۲، هیچ خبری را اعلام نمی‌کند.

> **نکته:** می‌دانیم هر گزاره یا درست است و یا نادرست. **نقیض یک گزاره**، گزاره‌ای است که ارزش (درستی یا نادرستی) آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است. به‌عنوان مثال نقیض گزاره «مجموع زوایای داخلی مثلث $180°$ است» به‌صورت «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی مثلث $180°$ است» و یا به‌صورت «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن $180°$ نیست» می‌باشد.

تست: نقیض کدام‌یک از گزاره‌های زیر به‌درستی بیان نشده است؟

۱) گزاره: «هر مربع، یک لوزی است.» نقیض گزاره: «مربعی وجود دارد که لوزی نیست.»

۲) گزاره: «مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.» نقیض گزاره: «هر مستطیل، یک مربع است.»

۳) گزاره: «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.» ـ نقیض گزاره: «مثلثی وجود دارد که دو زاویه قائمه داشته باشد.»

۴) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180°$ است.» نقیض گزاره: «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن، $180°$ نیست.»

پاسخ: گزینه ۳

نقیض گزاره «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.» به‌صورت «مثلثی وجود دارد که حداقل دو زاویه قائمه داشته باشد.» یا «مثلثی وجود دارد که دو یا سه زاویه قائمه داشته باشد.» است.

> **نکته:** هر گزاره‌ای که با استفاده از استدلال استنتاجی، درستی‌اش ثابت شود، **قضیه** نامیده می‌شود. اگر این گزاره شرطی باشد به آن قضیه شرطی می‌گوییم. هر قضیه دو قسمت دارد: قسمت اول، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را قبول داریم. این قسمت را **فرض قضیه** می‌گوییم. قسمت دوم، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را باید از فرض نتیجه گرفت. این قسمت را **حکم قضیه** می‌گوییم.
>
> به‌عنوان مثال در قضیه «در مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه برابرند» فرض این است که «مثلث متساوی‌الساقین است» و حکم این است که «این مثلث دو زاویه برابر دارد»
>
> اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای به‌دست می‌آید که آن را **عکس قضیه** موردنظر می‌نامیم. عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به‌عنوان مثال عکس قضیه «مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین نیز می‌باشد» به‌صورت «مثلث متساوی‌الساقین، متساوی‌الاضلاع نیز می‌باشد» است.

اگر عکس قضیه‌ای درست باشد، قضیه را **قضیه دو شرطی** می‌گوییم. به‌عبارت دیگر می‌توان قضیه را به‌صورت دو شرطی نوشت. قضیه دو شرطی را می‌توان با استفاده از عبارت‌های **«شرط لازم و کافی»**، **«اگر و تنها اگر»**، **«و برعکس»** به فرم دو شرطی نوشت. به‌عنوان مثال قضیه «اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه سه زاویه برابر دارد» را که عکسش نیز درست است به‌صورت زیر دو شرطی می‌کنیم:

- شرط لازم و کافی برای اینکه مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، این است که سه زاویه برابر داشته باشد.
- مثلث متساوی‌الاضلاع است، اگر و تنها اگر، سه زاویه برابر داشته باشد.
- اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه سه زاویه برابر دارد و برعکس.

تست: عکس کدام قضیه شرطی، قضیه‌ای شرطی است؟

۱ اگر دو زاویه قائمه باشند، آنگاه متمم یکدیگرند.

۲ اگر دو زاویه برابر باشند، آنگاه متمم‌هایشان نیز برابرند.

۳ اگر مثلث ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع a باشد آنگاه مساحت آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

۴ اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آنگاه زاویه سوم آن‌ها نیز برابرند.

پاسخ: گزینه ۲

عکس گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ درست نمی‌باشند. ولی عکس گزینه ۲ که به‌صورت «اگر دو زاویه متمم‌هایشان برابر باشند، آنگاه دو زاویه برابرند» می‌باشد، درست است. بنابراین عکس گزینه ۲ یک قضیه شرطی است. (همچنین می‌توان گفت گزینه ۲ یک قضیه دو شرطی است)

تست: کدام قضیه به‌صورت قضیه دو شرطی بیان نمی‌شود؟

۱ در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه وارد بر یک ضلع بر هم منطبقند.

۲ دو مثلث همنهشت دارای اضلاع مساویند.

۳ در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه 90° بزرگترین ضلع است.

۴ در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

پاسخ: گزینه ۳

زیرا عکس گزینه ۳ برقرار نمی‌باشد.

نکته: اگر بتوان درستی گزاره‌ای را با آوردن یک مثال رد کرد (نادرستی گزاره‌ای را با آوردن یک مثال نشان داد)، این مثال را **مثال نقض** برای گزاره موردنظر می‌گوییم.
به‌عنوان مثال گزاره «چهارضلعی که چهارضلع برابر داشته باشد، مربع است» نادرست است و مثال نقض آن می‌تواند لوزی با یک زاویه $30°$ باشد که مربع نیست.

تست: مثلث قائم‌الزاویه مثال نقض کدام گزاره نیست؟

۱) نقطه همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث یا داخل مثلث است و یا خارج آن.
۲) ارتفاع‌های هر مثلث، داخل مثلث، واقع است.
۳) هر زاویه خارجی یک چند ضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگ‌تر است.
۴) ارتفاع‌های هر مثلث یا داخل مثلث همرسند یا روی محیط آن.

پاسخ: گزینه ۴
مثلث قائم‌الزاویه برای گزینه‌های ۱، ۲ و ۳، مثال نقض می‌باشد. زیرا نقطه همرسی عمودمنصف‌ها در مثلث قائم‌الزاویه، وسط وتر (روی محیط)، است و دو تا از ارتفاع‌های این مثلث اضلاع قائمه می‌باشند. همچنین زاویه خارجی نظیر رأس قائمه نیز قائمه است. در صورتی که مثلث قائم‌الزاویه برای گزینه ۴ مثال نقض نیست. زیرا نقطه همرسی ارتفاع‌ها در این مثلث، روی رأس قائمه (محیط) است.

تست: چند مورد از گزاره‌های زیر با مثال نقض رد می‌شوند؟

الف) هر چهار ضلعی که اضلاع برابر دارد، مربع است.
ب) ارتفاع مثلث با ضلع کوچکتر زاویه کوچکتری می‌سازد.
پ) نقطه‌ای که از اضلاع مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد، داخل مثلث است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳
مثال نقض گزاره (الف) لوزی است. مثال نقض گزاره (پ) نیز محل همرسی دو نیمساز خارجی با نیمساز داخلی رأس دیگر است که خارج مثلث واقع است. گزاره (ب) نیز گزاره‌ای همواره صحیح است.

نکته: برای اثبات قضایا و مسائل می‌توانیم از روشی استفاده کنیم که به آن **برهان خُلف یا برهان غیرمستقیم** می‌گوییم. بدین‌صورت که در این روش به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض به‌درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد (فرض خُلف) یعنی نقیض حکم درست باشد و به تناقض می‌رسیم. این تناقض ممکن است امری غیرممکن یا خلاف حکمی که قبلاً ثابت کرده‌ایم باشد و یا حتی خلاف فرض اولیه مسأله (قضیه) باشد. اغلب برای اثبات عکس قضیه‌ها از برهان خُلف استفاده می‌کنیم.

تست: **برای اثبات قضیه زیر به روش برهان خُلف، تناقض ایجاد شده با کدام‌یک از گزینه‌ها در تضاد است؟**

«اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.»

۱) مجموع زوایای داخلی مثلث $180°$ است.

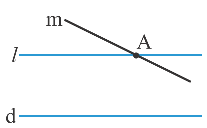
۲) دو خط عمود بر یک خط موازیند.

۳) از هر نقطه تنها یک خط موازی خط مفروض عبور می‌کند.

۴) اگر خطی بر یکی از خطوط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم خطی که یکی از دو خط موازی را قطع می‌کند، دیگری را قطع نکند، مانند این است که از یک نقطه مانند A خارج خط d، توانسته‌ایم دو خط موازی با آن رسم کنیم. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.



تست: **برای اثبات عکس قضیه زیر به روش برهان خُلف، فرض خُلف کدام است؟** (کنکور)

«در مثلث ABC، اگر $AB > BC$، آنگاه $\hat{C} > \hat{A}$ است.»

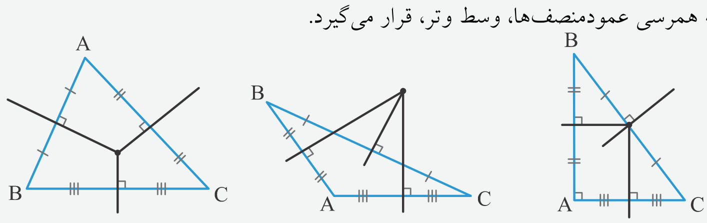
۱) $\hat{C} < \hat{A}$ ۲) $\hat{C} \le \hat{A}$ ۳) $AB < BC$ ۴) $AB \le BC$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا عکس قضیه را می‌نویسیم. «در مثلث ABC، اگر $\hat{C} > \hat{A}$، آنگاه $AB > BC$ است.» در برهان خلف، به نقیض حکم، فرض خلف می‌گوییم. در عکس قضیه، حکم $AB > BC$ است و نقیض آن $AB \le BC$ است. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

نکته: در هر مثلث، سه عمودمنصف اضلاع همرسند و نقطه همرسی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، داخل مثلث، اگر مثلث منفرجه‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، خارج مثلث و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، وسط وتر، قرار می‌گیرد.



تست: **در صفحه مثلث چند نقطه وجود دارد که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد؟** (کنکور)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

منظور از صفحه مثلث، صفحه‌ای است که مثلث در آن رسم شده است. تنها یک نقطه وجود دارد و آن نقطه، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها است.