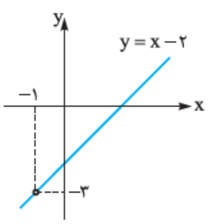
درس ۲

رفع ابهام

تا این‌جا دیدیم که حد هر تابع چندجمله‌ای، سینوس، کسینوس، لگاریتم و نمایی در نقاط دامنه‌اش، برابر مقدار آن است. هم‌چنین دیدیم که در جمع، ضرب، تفریق، تقسیم، توان و رادیکال و ... از توابع f و g می‌توانیم حد تک‌تک آن‌ها را حساب کنیم. حالا سراغ حالتی می‌رویم که در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$، حاصل $\dfrac{P(a)}{Q(a)}$ برابر $\dfrac{0}{0}$ است. یعنی صورت و مخرج هر دو در $x=a$ صفر هستند. در این صورت باید اول $P(x)$ و $Q(x)$ را ساده کنیم (عامل $(x-a)$ را حذف کنیم) و سپس حد را به دست آوریم. مثلاً برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$، اول کسر را به صورت $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x-2}{x+1}$ ساده می‌کنیم و سپس حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1}$ را به دست می‌آوریم که می‌شود $-\dfrac{1}{2}$.

وقتی در محاسبهٔ حد $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ به $\dfrac{0}{0}$ می‌رسیم، مقدار $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در $x=a$ نامعین است و نمودار $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در $x=a$ توخالی خواهد بود. مثلاً نمودار $\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=x-2$ را ببینید:



$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)=-1-2=-3$$

پس در نمودار، نقطهٔ توخالی در محل $(-1,-3)$ داریم.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{\frac{1}{2}x^2-x}$ کدام است؟

۱) صفر　۲) وجود ندارد.　۳) ۶　۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ ۴** با قراردادن $x=2$ در تابع به $\dfrac{0}{0}$ می‌رسیم. پس باید تابع را ساده کرده و $(x-2)$ را از صورت و مخرج ساده کنیم:

$$\frac{2x^2-5x+2}{\frac{1}{2}x^2-x}=\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(\frac{1}{2}x)}=\frac{2x-1}{\frac{1}{2}x}$$

حد تابع برابر است با:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{\frac{1}{2}x}=\frac{2\times 2-1}{\frac{1}{2}\times 2}=3$$

تست اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+b}{x-1}$ برابر ℓ باشد $b\ell$ کدام است؟

۱) -6　۲) 6　۳) 12　۴) -12

پاسخ **گزینهٔ ۱** با قراردادن $x=1$ در تابع به $\dfrac{2+b}{0}$ می‌رسیم اما سؤال گفته جواب حد عدد ℓ است. پس حتماً $\dfrac{2+b}{0}$ به صورت $\dfrac{0}{0}$ درمی‌آید (اگر $2+b$ صفر نباشد، جواب حد عدد حقیقی نمی‌شود).

$$\Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$$

حالا حد را حساب کنیم:

$$\xrightarrow{b=-2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3=\ell$$

پس: $b\ell=-2\times 3=-6$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳+x-۱۰}{x^۳-۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۳ با قراردادن $x=۲$ به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. پس باید $(x-۲)$ را از صورت و مخرج بزنیم:

$$\frac{x^۳+x-۱۰}{x^۳-۸}=\frac{(x-۲)\overbrace{(x^۲+۲x+۵)}^{\text{تقسیم}}}{(x-۲)\underbrace{(x^۲+۲x+۴)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}}=\frac{x^۲+۲x+۵}{x^۲+۲x+۴}\Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)=\frac{۱۳}{۱۲}$$

تقسیم را ببینید:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x-۱۰ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{x^۳-۲x^۲} & x^۲+۲x+۵ \\ ۲x^۲+x & \\ \underline{۲x^۲-۴x} & \\ ۵x-۱۰ & \\ \underline{۵x-۱۰} & \\ ۰ & \end{array}$$

البته می‌توانیم به شکل روبه‌رو هم فکر کنیم:

$$\underset{\text{ضرب}=-۱۰}{\overset{\text{ضرب}=x^۳}{(x-۲)(x^۲+\ldots+۵)}}=x^۳+x-۱۰$$

و حالا ضریب وسطی را با جستجو و کنترل حاصل‌ضرب پیدا کنیم.

اگر تابع رادیکالی باشد، اول با کمک گویاکردن، آن را از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم و سپس ساده می‌کنیم مثلاً:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\underbrace{(x-۱)(x+۱)}_{x^۲-۱}(\sqrt{x}+۱)}$$

$$\xrightarrow{\text{ها را بزنیم}(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۲\times ۲}=\frac{۱}{۴}$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x-\sqrt{۳+۲x}}{\sqrt{۷-x}-[x]}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) -۴ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ اولین کار برداشتن براکت است. وقتی $x\to ۳^-$ یعنی مقادیر x از ۳ کم‌ترند پس $[x]=۲$. حالا در ضابطهٔ $\dfrac{x-\sqrt{۳+۲x}}{\sqrt{۷-x}-۲}$ با قراردادن $x=۳$ به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. پس باید $x-۳$ را از صورت و مخرج بزنیم. گویا می‌کنیم:

$$\frac{\overbrace{(x-\sqrt{۳+۲x})(x+\sqrt{۳+۲x})}^{\text{مزدوج}}(\sqrt{۷-x}+۲)}{(\sqrt{۷-x}-۲)(x-\sqrt{۳+۲x})(\sqrt{۷-x}+۲)}=\frac{x^۲-(۳+۲x)}{(۷-x)-۴}\times\frac{\sqrt{۷-x}+۲}{\underbrace{x+\sqrt{۳+۲x}}_{\text{از گویاکردن ماندند}}}$$

مزدوج

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۲x-۳}{۳-x}\times\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{۷-x}+۲}{x+\sqrt{۳+۲x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۱)}{-\cancel{(x-۳)}}\times\frac{\sqrt{۷-۳}+۲}{۳+\sqrt{۳+۶}}=-(۳+۱)\times\frac{۴}{۶}=-\frac{۸}{۳}$$

در حدهای مثلثاتی برای ساده‌کردن عبارت از روابط مثلثاتی هم استفاده می‌شود.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{|\sin x-1|}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) 2 ۴) -1

پاسخ گزینهٔ۳ می‌دانیم $\sin x$ هیچ‌وقت از ۱ بیشتر نیست. پس $\sin x - 1$ همواره منفی (یا صفر) است و قدرمطلق آن قرینه‌اش می‌شود یعنی:

$$\frac{\cos^2 x}{-(\sin x-1)}=\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}=1+\sin x \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2$$

یک مثال ترکیبی ببینید:

تست $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\cos x}}{\tan x-\cot x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ۲) $\frac{1}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ۳) $\frac{-1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

پاسخ گزینهٔ۱ با قراردادن $x=\frac{3\pi}{4}$ به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. دقت کنید که $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ پس باید ضابطه را ساده کنیم. اول در صورت گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\cos x}}{\tan x-\cot x}=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\cos x}}{\tan x-\cot x}\times\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\frac{(1+\sin x)-(1-\cos x)}{(\tan x-\cot x)(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x})}=\frac{\sin x+\cos x}{(\tan x-\cot x)(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x})}$$

نگران پرانتزی که از گویاکردن به جا می‌ماند نباشید. جوابش صفر نیست و هر وقت بخواهید می‌توانید در آن عدد بگذارید. حالا برای ساده‌کردن کسر، به جای تانژانت و کتانژانت برحسب $\sin x$ و $\cos x$ می‌نویسیم:

$$=\frac{\sin x+\cos x}{(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x})(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}})}=\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x\sin x}\times 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\xrightarrow{\text{را بزنیم } \sin x+\cos x}\frac{1}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x\sin x}\times 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

و حالا $x=\frac{3\pi}{4}$ را قرار دهیم:

$$=\frac{1}{\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{2}))}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\times 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}\times 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{1}{-4\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{-1}{4\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}}=\frac{-1}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

اگر مخرج کسرها صفر شوند، باید مخرج‌مشترک بگیریم، ببینید:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1})=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-x^2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

اگر x به سمت صفر برود، می‌توانیم به جای برخی تابع‌ها، تابع ساده‌تری قرار دهیم. این روابط را هم‌ارزی می‌نامیم:

$(1+x)^n\sim 1+nx$

$\sqrt[m]{1+x}\sim 1+\frac{x}{m}$

جمله دارای کم‌ترین توان ~ چندجمله‌ای

مثال‌ها را ببینید:

(الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^6-1}{x^2+x} \xrightarrow[\text{باید } 1+6x \text{ قرار دهیم}]{\text{به‌جای } (1+x)^6} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+6x-1}{x^2+x} \xrightarrow[x \text{ را قرار دهیم}]{\text{به‌جای } x^2+x\text{،}} =\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{x}=6$

(ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[4]{1+x}}{x} \xrightarrow[\text{و به‌جای } \sqrt[4]{1+x} \text{ باید } 1+\frac{x}{4} \text{ بگذاریم}]{\text{به‌جای } \sqrt[3]{1-x} \text{ باید } 1-\frac{x}{3} \text{ قرار دهیم}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x}{3})-(1+\frac{x}{4})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}}{x}=-\frac{7}{12}$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^3-\sqrt{1-3x}}{2x+3x^2+x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{11}{4}$ ۴) $\frac{15}{4}$

پاسخ گزینهٔ ۴ در هم‌ارزی اجازه داریم به جای x، هر عبارت دیگری قرار دهیم فقط باید حاصل آن عبارت به صفر میل کند. پس برای $(1+2x)^3$ می‌توان نوشت: $(1+2x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} 1+3(2x)$ و $\sqrt{1-3x} \underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{3x}{2}$

در مخرج هم کم‌ترین توان را انتخاب می‌کنیم پس فقط $2x$ را می‌نویسیم:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+6x-(1-\frac{3}{2}x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{15}{2}x}{2x}=\frac{15}{4}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳۴۶- حاصل حد $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ چند برابر حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۴۷- حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۳۴۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۳

۱۳۴۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۱۳۵۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۱۳۵۱- در تابع $f(x)=\frac{x^2+6x-16}{|x^2-4|}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) $-2/5$ ۳) ۲/۵ ۴) $-1/5$

۱۳۵۲- اگر $f(x)=\frac{x}{2x^2-x}$ و $g(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-9}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\times g(x+3)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۱۳۵۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)^3}{(x-1)^4+(x-1)^3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۳۵۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{5x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۳۵۵- اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=3$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

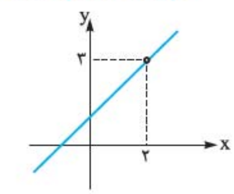
۱۳۵۶- اگر حد تابع $f(x)=\dfrac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}$ وقتی $x\to 1$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۱۳۵۷- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+mx+n}=\dfrac{2}{5}$، مقدار $m+n$ کدام است؟

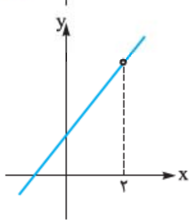
۱) ۷ ۲) -7 ۳) ۵ ۴) -5

۱۳۵۸- اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2+mx+n}{x-2}$، به صورت شکل مقابل باشد. m کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



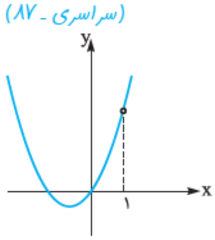
۱) ۱
۲) -1
۳) ۳
۴) -3

۱۳۵۹- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{x-a}$ است، $f(3)$ کدام است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۱۳۶۰- شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{4x^3+ax+b}{x-1}$ است. دوتایی (a,b) کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)



۱) $(0,-4)$
۲) $(-4,0)$
۳) $(-4,1)$
۴) $(4,0)$

۱۳۶۱- مجموع حد چپ و راست تابع $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}+x+1$ وقتی $x\to 1$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۶۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|1-x|-|2x-1|}{2x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد.

۱۳۶۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+|x|}{2x^2-|x|}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) -1

۱۳۶۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - x[x] - 2}{2x^2 - x - 6}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۳۶۵- حد تابع $f(x) = \dfrac{3-[x]}{x-3}\sqrt{x^2-6x+9}$ وقتی که $x \to 3^-$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) 1 ۴) $-\infty$

۱۳۶۶- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۶۷- حد تابع $\dfrac{1-\cos x\,|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ وقتی $x \to 0^-$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۱۳۶۸- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{\cos x - \sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۱۳۶۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{1-\cos x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۳۷۰- حد کسر $\dfrac{1+\cos x}{1+\cos^3 x}$ وقتی $x \to \pi$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۳۷۱- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(\sin x - \cos x)}{(1-\tan x)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) صفر

۱۳۷۲- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) صفر ۴) 2

۱۳۷۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 2 ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۷۴- حد تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-x}{1-\sqrt[3]{x}}$ وقتی که $x \to 1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۳۷۵- حد کسر $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$ وقتی که $x \to 1$ چه‌قدر بیشتر از زمانی است که x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۷۶- اگر $f(x)=\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2+x}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۷۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) صفر

۱۳۷۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۳۷۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۳۸۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{|x|}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۸۱- حد عبارت $\dfrac{x-\sqrt{2x+3}}{|x-3|}$ وقتی که $x\to 3^-$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳۸۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۳۸۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x-\sqrt{3x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۸۴- حاصل $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+\sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1}-3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $-\frac{9}{8}$

۱۳۸۵- اگر $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

۱۳۸۶- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-(2x+1)^3}{3x}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) ۲- ۴) صفر

۱۳۸۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{4x-8}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ کدام است؟ *(سراسری - ۸۵)*

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۳۸۸- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{x+۱}{x-۲}-\frac{۶}{x^۲-۲x})$ کدام است؟ (سراسری ـ ۹۶)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۳۸۹- حد عبارت $\frac{۲[x]}{۲-x}+\frac{x+۲}{x^۲-۲x}$، وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟ (خارج ـ ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۳۹۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{x-۱}(\frac{۱}{x+۳}-\frac{۲}{۳x+۵})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۱۳۴۶- گزینهٔ ۲ هر دو حد $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ به شکل $\frac{0}{0}$ هستند. پس برای رفع ابهام صورت و مخرج هر کدام از کسرها را تجزیه می‌کنیم تا عاملی را که صفر می‌شود حذف کنیم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x+3)=1$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

پس اولی $\frac{1}{3}$ برابر دومی است.

۱۳۴۷- گزینهٔ ۴ صورت کسر را با اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)=4+4+4=12$$

۱۳۴۸- گزینهٔ ۲ ممکن است اولش سخت به نظر برسد اما اگر حواسمان باشد که $9^x-4^x=(3^x)^2-(2^x)^2$ می‌توانیم صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x)^2-(2^x)^2}{3^x-2^x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-2^x)(3^x+2^x)}{3^x-2^x}=3^0+2^0=2$$

۱۳۴۹- گزینهٔ ۳ **راه اول** باید صورت و مخرج کسر را تجزیه کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}(x^2-3x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\frac{-2}{2}=-1$$

راه دوم در درس‌نامه گفتیم اگر x به صفر میل کند عبارت هم‌ارز است با کوچک‌ترین توان x، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x}=-1$$

۱۳۵۰- گزینهٔ ۱ چون $x\to 1$ و حد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2}$ به شکل $\frac{0}{0}$ است پس باید صورت و مخرج را تجزیه کنیم تا عامل $(x-1)$ ایجاد شود. برای این کار دو راه داریم:

راه اول چون صورت و مخرج به ازای $x=1$ صفر می‌شوند بر $x-1$ بخش‌پذیرند پس هر دو را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-3x+2 & x-1 \\ \hline
-(x^3-x^2) & x^2+x-2 \\
\quad x^2-3x+2 & \\
-(x^2-x) & \\
\quad -2x+2 & \\
-(-2x+2) & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-2 & x-1 \\ \hline
-(x^3-x^2) & x^2+2x+2 \\
\quad 2x^2-2 & \\
-(2x^2-2x) & \\
\quad 2x-2 & \\
-(2x-2) & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

پس صورت و مخرج به شکل زیر تجزیه می‌شوند:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$
$$=\frac{1+1-2}{1+2+2}=\frac{0}{5}=0$$

راه دوم صورت و مخرج کسر را با دسته‌بندی عوامل تجزیه می‌کنیم:

صورت: $x^3-3x+2=x^3-1-3x+3$

$$=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)$$
$$=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$$

مخرج: $x^3+x^2-2=x^3-1+x^2-1$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)$$
$$=4(x-1)(x^2+x+1+x+1)=(x-1)(x^2+2x+2)$$

حالا در ادامه مثل بالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+2x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+2x+2}=\frac{0}{5}=0$$

۱۳۵۱- گزینهٔ ۲ مخرج کسر $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+6x-16}{|x^2-4|}$ شامل یک قدرمطلق است که وقتی $x\to 2^-$ صفر می‌شود. پس باید علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین کنیم: $|x^2-4|$ برابر است با $|(x-2)(x+2)|$ و وقتی $x\to 2^-$ داریم $|0^-\times 4|$ پس عبارت داخل قدرمطلق منفی است:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+6x-16}{|x^2-4|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+8)}{-(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+8)}{-(x+2)}=\frac{10}{-4}=-2.5$$

۱۳۵۲- گزینهٔ ۲ حاصل هر کدام از حدها را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2x-1)}=-1$$

در حد $\lim\limits_{x\to 0} g(x+3)$ وقتی که $x\to 0$ عامل $(x+3)\ \to\ 3$ پس:

$$\lim_{x\to 0} g(x+3)=\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$$

پس حد خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\times g(x+3)=\lim_{x\to 0} f(x)\times\lim_{x\to 0} g(x+3)=-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

۱۳۵۳- گزینهٔ ۲ **راه اول** چون تمام عامل‌های صورت و مخرج وقتی $x\to 1$ به سمت صفر میل می‌کنند پس از هم‌ارزی کوچک‌ترین توان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^3}{(x-1)^4+(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^3}{(x-1)^3}=2$$

راه دوم از $(x-1)^3$ در صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{2(x-1)^3}{(x-1)^4+(x-1)^3}=\frac{(x-1)^3\times 2}{(x-1)^3(x-1+1)}=\frac{2}{x}$$

و حد آن در ۱ می‌شود: $\frac{2}{1}=2$

۱۳۵۴- گزینهٔ ۴ **راه اول** در هم‌ارزی‌ها داشتیم: $(1+a)^m\underset{a\to 0}{\sim}1+ma$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

راه دوم صورت را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)((1+x)^2+(1+x)+1)}{5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2+(1+x)+1}{5}=\frac{3}{5}$$

راه سوم اتحاد صورت را باز کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+3x^2+x^3-1}{5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x+3x^2+x^3}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}+\frac{3x}{5}+\frac{x^2}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

۱۳۵۵- گزینهٔ ۳ صورت را با اتحاد چاق و لاغر و مخرج را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\frac{a^2+a^2+a^2}{a+a}=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3}{2}a$$

حالا باید $\frac{3}{2}a=3$ شود پس $a=2$.

۱۳۵۶- گزینهٔ ۲ **راه اول** چون وقتی $x\to 1$ صورت و مخرج کسر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}$ هر دو صفر می‌شوند پس هم صورت و هم مخرج را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2ax^2-x-2a & x-1\\ \hline
-(x^3-x^2) & x^2+(2a+1)x+2a\\
(2a+1)x^2-x-2a & \\
-((2a+1)x^2-(2a+1)x) & \\
2ax-2a & \\
-(2ax-2a) & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
ax^2+x(1-a)-1 & x-1\\ \hline
-(ax^2-ax) & ax+1\\
x-1 & \\
-(x-1) & \\
0 &
\end{array}$$

پس صورت و مخرج به شکل زیر تجزیه می‌شوند:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+(2a+1)x+2a)}{(x-1)(ax+1)}$$

$$=\frac{1+2a+1+2a}{a+1}=\frac{4a+2}{a+1}$$

حالا $\frac{4a+2}{a+1}$ باید برابر ۱ شود:

$$\frac{4a+2}{a+1}=1\Rightarrow 4a+2=a+1\Rightarrow 3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

راه دوم صورت و مخرج کسر را با دسته‌بندی عوامل تجزیه می‌کنیم:

صورت: $x^3+2ax^2-x-2a=(x^3-x)+(2ax^2-2a)$

$=x(x^2-1)+2a(x^2-1)=(x-1)(x+1)(x+2a)$

مخرج: $ax^2+x(1-a)-1=(ax^2-ax)+(x-1)$

$=ax(x-1)+(x-1)=(x-1)(ax+1)$

حالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x+2a)}{(x-1)(ax+1)}$$

$$=\frac{2(1+2a)}{a+1}$$

و باز هم باید حاصل حد برابر ۱ شود، پس:

$$\frac{2+4a}{a+1}=1\Rightarrow 2+4a=a+1\Rightarrow 3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

۱۳۵۷- گزینهٔ ۴ اولاً چون وقتی $x \to 2$ صورت کسر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+mx+n}$ برابر صفر می‌شود و حاصل حد شده است $\frac{2}{5}$ (یعنی صفر نشده) پس مخرج کسر هم باید به ازای $x=2$ برابر صفر شود، پس:

$$x^2+mx+n \xrightarrow{x=2} 4+2m+n=0 \Rightarrow n=-2m-4$$

و ثانیاً باید حاصل حد بعد از رفع ابهام برابر $\frac{2}{5}$ شود، پس صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم: (در مخرج به جای n می‌گذاریم $-2m-4$)

صورت: $x^2-2x=x(x-2)$

مخرج: $x^2+mx-2m-4=(x^2-4)+m(x-2)$

$$=(x-2)(x+2)+m(x-2)=(x-2)(x+2+m)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+mx-2m-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2+m)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+2+m}=\frac{2}{4+m}$$

پس $\frac{2}{4+m}$ باید برابر $\frac{2}{5}$ شود:

$$\frac{2}{4+m}=\frac{2}{5}\Rightarrow 4+m=5\Rightarrow m=1\Rightarrow n=-2m-4\Rightarrow n=-6$$

پس مقدار $m+n$ برابر است با $1+(-6)=-5$

۱۳۵۸- گزینهٔ ۲ در $x=2$ حد تابع موجود و برابر ۳ است اما با جای‌گذاری $x=2$ در تابع به $\frac{4+2m+n}{0}$ می‌رسیم. پس $4+2m+n$ باید صفر باشد و صورت کسر بر $x-2$ بخش‌پذیر است:

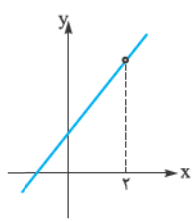
$$n=-4-2m \Rightarrow x^2+mx+n=x^2+mx-4-2m$$

$$=(x-2)(x+2)+m(x-2)=(x-2)(x+2+m)$$

پس ضابطهٔ ساده‌شدهٔ تابع به صورت $\frac{(x-2)(x+2+m)}{x-2}$ یا $x+2+m$ درمی‌آید که به ازای $x=2$ می‌شود $4+m$ و باید ۳ باشد:

$$4+m=3 \Rightarrow m=-1$$

۱۳۵۹- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع معلوم است که $x=2$ جزء دامنهٔ تابع نیست پس مخرج تابع $f(x)=\frac{2x^2-x-6}{x-a}$ به ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود یعنی $2-a=0 \Rightarrow a=2$. حالا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:



راه اول صورت تابع را بر مخرجش تقسیم می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x^2-x-6}{x-2}\Rightarrow \begin{array}{l|l} 2x^2-x-6 & x-2 \\ \hline -(2x^2-4x) & 2x+3 \\ \quad 3x-6 & \\ -(3x-6) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x-2)(2x+3)}{x-2}\Rightarrow f(x)=2x+3$$

حالا $f(3)$ را پیدا می‌کنیم: $f(3)=2(3)+3=9$

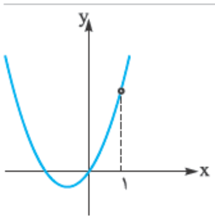
راه دوم صورت کسر را با دسته‌بندی تجزیه می‌کنیم:

صورت: $2x^2-x-6=2x^2-4x+3x-6$

$$=2x(x-2)+3(x-2)=(x-2)(2x+3)$$

و بقیهٔ راه‌حل مثل راه اول.

۱۳۶۰- گزینهٔ ۲ اولاً نمودار از مبدأ مختصات یعنی $(0,0)$ عبور می‌کند پس:



$$f(x)=\frac{4x^3+ax+b}{x-1}\xrightarrow{(0,0)} 0=\frac{b}{-1}\Rightarrow b=0$$

و ثانیاً از روی نمودار معلوم است که نقطهٔ $x=1$ جزء دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{4x^3+ax}{x-1}$ نیست ولی تابع وقتی $x\to 1$ حد دارد و چون مخرج کسر وقتی که $x\to 1$ برابر صفر می‌شود پس صورت کسر هم باید برابر صفر شود که حاصل رفع ابهام کسر برابر عدد مشخص شود یعنی:

$$4x^3+ax \xrightarrow{x=1} 4+a=0 \Rightarrow a=-4$$

پس دوتایی (a,b) می‌شود $(-4,0)$.

۱۳۶۱- گزینهٔ ۲ در هر کدام از حدهای راست یا چپ باید تعیین کنیم علامت عبارت داخل قدرمطلق مثبت است یا منفی. $|x^2-1|$ برابر است با $|(x-1)(x+1)|$ و وقتی x از سمت راست یا چپ به ۱ میل می‌کند، داریم:

$$x\to 1^+ \Rightarrow |(x-1)(x+1)|=|0^+\times 2|=|0^+|$$

$$x\to 1^- \Rightarrow |(x-1)(x+1)|=|0^-\times 2|=|0^-|$$

پس:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}+x+1=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+x+1$$

$$=\lim_{x\to 1^+} x+1+x+1=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}+x+1=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}+x+1$$

$$=\lim_{x\to 1^-} -(x+1)+x+1=0$$

پس مجموع حد راست و چپ تابع برابر است با: $4+0=4$

۱۳۶۲- گزینهٔ ۳ وقتی $x\to 0$ هیچ‌کدام از عبارت‌های داخل قدرمطلق صفر نمی‌شوند پس لازم نیست حد راست و چپ را جدا کنیم و داخل قدرمطلق $|1-x|$ مثبت و داخل قدرمطلق $|2x-1|$ منفی است پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|1-x|-|2x-1|}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x+2x-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

۱۳۶۳- گزینهٔ ۴ **راه اول** هم در صورت و هم در مخرج وقتی $x \to ۰$ تمام عوامل صفر می‌شوند پس می‌توانیم از هم‌ارزی کوچک‌ترین توان استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x^۲+|x|}{۲x^۲-|x|}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{-|x|}=-۱$$

راه دوم حد راست و چپ را جدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x^۲+|x|}{۲x^۲-|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x^۲+x}{۲x^۲-x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x(۳x+۱)}{x(۲x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x+۱}{۲x-۱}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳x^۲+|x|}{۲x^۲-|x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳x^۲-x}{۲x^۲+x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(۳x-۱)}{x(۲x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳x-۱}{۲x+۱}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

پس حاصل حد برابر است با ۱-.

۱۳۶۴- گزینهٔ ۲ وقتی $x \to ۲^-$ حتماً $۱<x<۲$ است و $[x]=۱$، پس:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-x[x]-۲}{۲x^۲-x-۶}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-x-۲}{۲x^۲-x-۶}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)(۲x+۳)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{۲x+۳}=\frac{۲+۱}{۴+۳}=\frac{۳}{۷}$$

۱۳۶۵- گزینهٔ ۲ وقتی $x \to ۳^-$ حتماً $۲<x<۳$ و $[x]=۲$ است، پس:

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-۲)}{(x-۳)}\sqrt{(x-۳)^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۱۳۶۶- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$، پس:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۲ x}{۱-\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۱+۱=۲$$

۱۳۶۷- گزینهٔ ۳ وقتی $x \to ۰^-$ یعنی x در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی است پس $\sin x<۰$ و $\cos x>۰$ است پس حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱-\cos x\,|\cos x|}{|\sin x|\sin x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱-\cos^۲ x}{-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin^۲ x}{-\sin^۲ x}=-۱$$

۱۳۶۸- گزینهٔ ۳ کافی است در مخرج از $\cos x$ فاکتور بگیریم و بعد از رابطهٔ $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۳ x}{\cos x-\sin x\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۳ x}{\cos x(۱-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۲ x}{۱-\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin^۲ x)}{۱-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۲$$

۱۳۶۹- گزینهٔ ۱ اگر $\sin^۳ x$ را به صورت $\sin x\sin^۲ x$ بنویسیم و از اتحاد $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۳ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos^۲ x)}{۱-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\sin x(۱+\cos x)$$

$$=۰\times ۲=۰$$

۱۳۷۰- گزینهٔ ۳ مخرج را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{۱+\cos x}{۱+\cos^۳ x}=\lim_{x\to \pi}\frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)(۱-\cos x+\cos^۲ x)}$$

$$=\lim_{x\to \pi}\frac{۱}{۱-\cos x+\cos^۲ x}=\frac{۱}{۱+۱+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳۷۱- گزینهٔ ۱ اگر به جای $\tan x$ بنویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ و مخرج‌مشترک بگیریم، داریم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{(\sin x-\cos x)}{(۱-\tan x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{(\sin x-\cos x)}{(۱-\frac{\sin x}{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{(\sin x-\cos x)}{\frac{(\cos x-\sin x)}{\cos x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{-۱}{\frac{۱}{\cos x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(-\cos x)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳۷۲- گزینهٔ ۲ **راه اول** $\tan x$ و $\cot x$ را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{۱-\cot x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}{۱-\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{(\cos x-\sin x)}{\cos x}}{\frac{(\sin x-\cos x)}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{۱}{\cos x}}{\frac{-۱}{\sin x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-۱$$

راه دوم به جای $\cot x$ می‌نویسیم $\frac{۱}{\tan x}$ و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{۱-\cot x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{۱-\frac{۱}{\tan x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{(۱-\tan x)}{\frac{(\tan x-۱)}{\tan x}}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{\frac{-۱}{\tan x}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(-\tan x)=-۱$$

۱۳۷۳- گزینهٔ ۱ **راه اول** صورت کسر را تجزیه و صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}(x+۱)(\sqrt{x}+۱)=۲\times ۲=۴$$

راه دوم همان‌طور که با اتحاد مزدوج می‌توانیم بنویسیم $x^{۲}-۱=(x-۱)(x+۱)$ به همان ترتیب هم می‌نویسیم $x-۱=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)$، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{\sqrt{x}-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}(\sqrt{x}+۱)(x+۱)$$

$$=۲\times ۲=۴$$

۱۳۷۴- گزینهٔ ۱ چون $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{۱-\sqrt[۳]{x}}$ به صورت $\frac{۰}{۰}$ است و $x\to ۱$ پس در صورت و مخرج باید عبارت $x-۱$ ایجاد کنیم. برای این کار یک بار صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت صورت و یک بار هم در قسمت چاق عبارت مخرج ضرب می‌کنیم، ببینید:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{۱-\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})}{۱-\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})}{۱-\sqrt[۳]{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(۱-x)}{(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})}\times\frac{(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})}{(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})(۱-x)}{(۱+\sqrt{x})(۱-x)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}})}{۱+\sqrt{x}}=\frac{۱\times ۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۷۵- گزینهٔ ۳ اول حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

و بعد حد همان عبارت وقتی که $x\to ۰^{+}$

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x-\sqrt{x}}{x-۱}=\frac{۰-۰}{۰-۱}=۰$$

پس حد اولی به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ از حد دومی بیشتر است.

۱۳۷۶- گزینهٔ ۳ چون در صورت و مخرج تمام عامل‌ها وقتی $x\to ۰$ به سمت صفر میل می‌کنند پس از هم‌ارزی کوچک‌ترین توان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۲}+x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}}=۱$$

۱۳۷۷- گزینهٔ ۲ چون حد تمام عامل‌ها وقتی $x\to ۱^{-}$ برابر صفر می‌شود از هم‌ارزی کوچک‌ترین توان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)+\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x}}=۱$$

۱۳۷۸- گزینهٔ ۴ صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{(x-۲)(x+۲)}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{x+۲-۴}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\frac{۱}{۴\times ۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

۱۳۷۹- گزینهٔ ۴ صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{x+۱-۴}}{\cancel{(x-۳)}(\sqrt{x+۱}+۲)}=\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{(\sqrt{x+۱}+۲)}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

۱۳۸۰- گزینهٔ ۱ وقتی که $x\to ۰^{-}$ داخل قدرمطلق $|x|$ منفی است، برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{|x|}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{(-x)}\times\frac{\sqrt{x+۴}+۲}{\sqrt{x+۴}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{(x+۴-۴)}{(-x)(\sqrt{x+۴}+۲)}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۱}{-(\sqrt{x+۴}+۲)}$$

$$=\frac{۱}{-(۲+۲)}=-\frac{۱}{۴}$$

۱۳۸۱- گزینهٔ ۲ وقتی که $x\to ۳^{-}$ عبارت $x-۳$ منفی است و داریم:

$$\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{x-\sqrt{۲x+۳}}{|x-۳|}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{(x-\sqrt{۲x+۳})}{-(x-۳)}\times\frac{(x+\sqrt{۲x+۳})}{(x+\sqrt{۲x+۳})}$$

$$=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{x^{۲}-۲x-۳}{-(x-۳)(x+\sqrt{۲x+۳})}$$

$$=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{(x-۳)(x+۱)}{-(x-۳)(x+\sqrt{۲x+۳})}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{(x+۱)}{-(x+\sqrt{۲x+۳})}$$

$$=\frac{۳+۱}{-(۳+۳)}=-\frac{۴}{۶}=-\frac{۲}{۳}$$

۱۳۸۲- **گزینهٔ ۲** صورت و مخرج کسر را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{۲x+۳}-۳}\times\frac{(\sqrt{x+۱}+۲)}{(\sqrt{x+۱}+۲)}\times\frac{(\sqrt{۲x+۳}+۳)}{(\sqrt{۲x+۳}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۱-۴)(\sqrt{۲x+۳}+۳)}{(۲x+۳-۹)(\sqrt{x+۱}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(\sqrt{۲x+۳}+۳)}{۲(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}=\frac{۳+۳}{۲\times(۲+۲)}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

۱۳۸۳- **گزینهٔ ۳** صورت و مخرج کسر را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x-\sqrt{x+۶}}{x-\sqrt{۳x}}\times\frac{(x+\sqrt{x+۶})}{(x+\sqrt{x+۶})}\times\frac{(x+\sqrt{۳x})}{(x+\sqrt{۳x})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^۲-x-۶)(x+\sqrt{۳x})}{(x^۲-۳x)(x+\sqrt{x+۶})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۲)(x+\sqrt{۳x})}{x(x-۳)(x+\sqrt{x+۶})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۲)(x+\sqrt{۳x})}{x(x+\sqrt{x+۶})}=\frac{۵\times(۳+۳)}{۳\times(۳+۳)}=\frac{۵}{۳}$$

۱۳۸۴- **گزینهٔ ۴** صورت و مخرج کسر را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{-۴x+۱}-۳}\times\frac{(x-\sqrt{۲-x})}{(x-\sqrt{۲-x})}\times\frac{(\sqrt{-۴x+۱}+۳)}{(\sqrt{-۴x+۱}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x^۲+x-۲)(\sqrt{-۴x+۱}+۳)}{(-۴x+۱-۹)(x-\sqrt{۲-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۱)(\sqrt{-۴x+۱}+۳)}{-۴(x+۲)(x-\sqrt{۲-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۱)(\sqrt{-۴x+۱}+۳)}{-۴(x-\sqrt{۲-x})}=\frac{-۳\times(۳+۳)}{-۴\times(-۲-۲)}$$

$$=-\frac{۱۸}{۱۶}=-\frac{۹}{۸}$$

۱۳۸۵- **گزینهٔ ۴** دقت کنید که حاصل مخرج در $x=-۳$ صفر است. پس با حد مبهم از نوع $\frac{۰}{۰}$ سروکار داریم و برای به دست آوردن مقدار حد صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۳}\frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}\times\frac{(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}$$

$$=\lim_{x\to -۳}\frac{a(x+۳)(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{\underbrace{۱-۵x-۱۶}_{-۵x-۱۵}}$$

$$=\lim_{x\to -۳}\frac{a(x+۳)(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{-۵(x+۳)}=\lim_{x\to -۳}\frac{a(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{-۵}$$

$$=\frac{a(۱+۱)}{-۵}=-\frac{۲}{۵}a$$

پس باید $-\frac{۲}{۵}a=۲$ شود و در نتیجه $a=-۵$.

۱۳۸۶- **گزینهٔ ۲** داشتیم وقتی که $a\to ۰$ عبارت $(۱+a)^m$ هم‌ارز است با $۱+ma$ پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۱)^۲-(۲x+۱)^۳}{۳x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+۲x)-(۱+۶x)}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۴x}{۳x}=-\frac{۴}{۳}$$

البته می‌شد پرانتز اول را به توان ۲ و پرانتز دوم را به توان ۳ برسانیم و صورت کسر را ساده کنیم که خیلی وقت می‌گرفت.

۱۳۸۷- **گزینهٔ ۴** اول مخرج‌مشترک می‌گیریم و بعد کسر را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۴x-۸}-\frac{۱}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۴(x-۲)}-\frac{۱}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)-۴}{۴(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)}{۴(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۴(x+۲)}=\frac{۱}{۴\times ۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

۱۳۸۸- **گزینهٔ ۱** مخرج‌مشترک می‌گیریم و صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۶}{x(x-۲)}-\frac{x+۱}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۶-(x+۱)x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x^۲+x-۶)}{x(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x-۲)(x+۳)}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۳)}{x}=-\frac{۵}{۲}$$

۱۳۸۹- **گزینهٔ ۲** وقتی $x\to ۲^-$ حتماً $۱<x<۲$ است پس $[x]=۱$، به جای جزءصحیح x مقدارش را قرار می‌دهیم و بعد مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲[x]}{۲-x}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x(x-۲)}+\frac{۲\times ۱}{(۲-x)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x+۲)-۲x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲-x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۱}{x}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۳۹۰- **گزینهٔ ۴** در داخل پرانتز مخرج‌مشترک می‌گیریم و بعد عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{x-۱}\left(\frac{۱}{x+۳}-\frac{۲}{۳x+۵}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{x-۱}\left(\frac{(۳x+۵)-۲(x+۳)}{(x+۳)(۳x+۵)}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{(x-۱)(x+۳)(۳x+۵)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۳)(۳x+۵)}$$

$$=\frac{۱}{۴\times ۸}=\frac{۱}{۳۲}$$