بسم الله الرحمن الرحیم

صفر تا صد

ریاضیات گسسته

مجموعه کتاب‌های جمع‌بندی کنکور

رسول حاجی زاده
محسن رحیمی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

شنیدیم که خدمت به خلق خدا بزرگترین عبادت است. در انتشارات خوشخوان سیاست بر این است که در حد توان خدمترسانی به دانش‌آموزان مستعد را از حالت شعار به عمل نزدیک کرده و این موضوع را سرلوحه‌ی اعمال خود قرار دهیم. در این راستا و برای نیل به این هدف نیاز به دعای دانش‌آموزان عزیز و دل‌پاک داریم، آخر هر چه باشد جوان‌ها به ملکوت نزدیک‌ترند و دعایشان زود مستجاب می‌شود. دعای واجب‌تر آن است که انجام این اعمال خالصانه و صادقانه فقط در جهت رضایت حق‌تعالی باشد که اگر چنین شود شیرینی این خدمتگزاری دوچندان شده و گذران عمر، مفید و دلچسب خواهد شد که اگر چنین شد در روز آخر عمر بر خلاف روز تولد که ما گریان بودیم و همه خندان، ما خندان خواهیم بود و بقیه گریان. به هر حال ما انسان‌ها به امید زنده‌ایم و ما امید داریم شما عزیزان ما را از دعای خیر خود محروم نکنید.

یکی از مجموعه‌هایی که خدمتگزاران شما در انتشارات خوشخوان در راستای توضیحات عبارات بالا، تدوین و به داوطلبان کنکور ارائه کرده است مجموعه‌ی حاضر است که مخصوص دوران جمع‌بندی است. این مجموعه ویژگی‌های زیر را دارا است:

- اهمیت هر فصل از کتاب در کنکور سراسری با ارائه‌ی جداول و نمودارهای مرتبط، شرح داده شده است.
- مطالب هر فصل به زیرموضوعاتی تقسیم شده و اهمیت هر زیرمجموعه در کنکور سراسری بیان شده است.
- نکات مهم هر فصل در ذیل هر زیرموضوعی یادآوری شده‌اند که برای مرور آن‌ها داوطلب شرکت در کنکور وقت زیادی صرف نمی‌کند.
- برای تهیه نکات فوق از تست‌های تالیفی به همراه پاسخ تشریحی مفصل کمک گرفته شده است.
- سوالات کنکور سراسری و بعضاً دانشگاه آزاد اسلامی (که فاصله‌ی زیادی با قالب سوالات کنکور سراسری نداشته باشند) در چند سال اخیر با توجه به زیرموضوعات اشاره شده به دنبال هم آورده شده‌اند که جواب تشریحی همه‌ی آن‌ها به صورت کامل و جامع ارائه شده است.
- در انتهای هر فصل سه آزمون جامع آورده شده است که برای جلوگیری از حجیم شدن کتاب فقط پاسخ کلیدی آنان در انتهای کتاب آمده است (پاسخ تشریحی آن‌ها بر روی سایت انتشارات موجود است که در صورت ضرورت می‌توانید به آن رجوع کنید). توجه کنید که تلاش شده است سطح آزمون‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ساده، متوسط و دشوار باشد.

با توجه به توضیحات فوق سعی شده است که کتاب حاضر برای نیازها و طیف‌های گوناگون دانش‌آموزان قابل استفاده باشد. توصیه می‌شود به نکات ذیل توجه کنید:

- نکات و تست‌های تالیفی کنار آنان برای دانش‌آموزانی است که قبلاً درس را به صورت مفهومی یاد گرفته‌اند و احساس می‌کنند برای یادآوری بعضی از فرمول‌ها و یا تعاریف به مروری گذرا نیاز دارند. بنابراین کسانی که به فصلی از کتاب تسلط کافی دارند نیازی به رجوع به این قسمت از کتاب ندارند.

- سوالات کنکور سراسری در هر زیرموضوعی به همراه پاسخ تشریحی که بلافاصله بعد از سوال ارائه می‌شود به دنبال هم چیده شده‌اند. در واقع نقطه‌ی قوت این کتاب نسبت به کتب جمع‌بندی موجود در بازار، همین قسمت است. با نگاهی به این سوالات تشابه سوالات کنکور در سنوات مختلف در هر زیرموضوعی را مشاهده خواهید کرد. رجوع به این قسمت را به همه‌ی دانش‌آموزان توصیه می‌کنیم چرا که با دیدن سوال اول، دوم، ... و مشاهده‌ی جواب آن‌ها که به هم شباهت دارند می‌توانید به سوالات اخیر در همان موضوع به راحتی جواب دهید.

- آزمون‌های سه‌گانه سعی شده است استاندارد باشند. البته چون درجه‌ی سختی سوالات در کنکور قابل پیش‌بینی نیست بنابراین این آزمون‌ها در سه سطح آسان، متوسط و دشوار طراحی شده‌اند. مراجعه‌ی همه‌ی دانش‌آموزان مخصوصاً دانش‌آموزان قوی که نیازی به مرور نکات فصل نمی‌بینند، به این آزمون‌ها توصیه می‌شود.

در پایان لازم می‌بینم از همه‌ی دوستان و همکاران اعم از مولفین و دبیران گرامی، پرسنل انتشارات، واحد حروفچینی و صفحه‌آرایی که در تولید این اثر زحمات بی‌شائبه‌ای داشتند تشکر و قدردانی نمایم و از شما دانش‌آموزان و احیاناً دبیران گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنید تقاضامندم نقصان و ضعف‌های آن را بر ما ببخشایید و با انتقال و اعلام آن‌ها به انتشارات، در بازنویسی و رفع آن نواقص یاور ما در چاپ‌های بعدی کتاب باشید.

به یاد دارم که در دوره‌ی دانش‌آموزی ما که خبری از اینترنت و رسانه‌های امروزی نبود، داوطلبین کنکور در دهه‌ی آخر شهریور در مقابل کیوسک‌های روزنامه‌فروشی صف می‌بستند تا با تهیه‌ی روزنامه‌ی اعلام نتایج کنکور از وضعیت قبولی خود آگاه شوند. در آن زمان صفحه‌ی اول روزنامه مملو از عکس داوطلبانی بود که در فاصله‌ی بین کنکور و اعلام نتایج، به درجه‌ی رفیع شهادت نائل آمده بودند. این اثر را تقدیم می‌کنم به همه‌ی شهدای دانش‌آموزی که با نثار جان و خون خود، امنیت و آسایش را برای ما و شما باقی گذاشته‌اند. روحشان شاد

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

والسلام علی من اتبع الهدی

مقدمه مؤلف

با سپاس بی‌کران از خداوند منان که توفیق خدمتگزاری برای دانش‌آموزان مستعد ایران عزیز را به ما عنایت فرمود. سال‌هاست که دانش‌آموزان این مرز و بوم برای ورود به دانشگاه‌ها باید از سدی به نام کنکور گذر کنند که برنامه‌ریزی مناسب برای گذر از این سد ایجاب می‌کند افراد متفاوت برای یاری رساندن به داوطلبان، نقش خود را به نحو احسن ایفا کنند. ما نیز به قصد یاری رساندن به این عزیزان، تالیف و تدوین این کتاب را به عهده گرفتیم. باشد که مورد قبول حضرت حق و نیز شما دانش‌آموزان گرامی واقع شود.

در رشته‌ی ریاضی، حدوداً ۱۵ سوال از ۵۵ سوال از کتاب ریاضیات گسسته و علوم پایه مرتبط با آن است (ریاضیات گسسته، جبر و احتمال، آمار و فصل آخر کتاب ریاضیات ۲)، که در این کتاب مطالب فوق را در ۸ فصل تقسیم و تدوین کرده‌ایم. میانگین سوالات ارائه شده از این فصل ۸ فصل در ۱۰ سال گذشته در کنکور سراسری به شکل زیر بوده است:

۱. گراف: ۱/۵	**۵**. مجموعه‌ها و رابطه‌ها: ۳
۲. استدلال‌های ریاضی: ۰/۹	**۶**. ترکیبیات و اصل شمول و عدم شمول: ۰/۸
۳. تئوری اعداد بدون همنهشتی: ۰/۶	**۷**. احتمال: ۴/۳
٤. همنهشتی: ۲/۱	**۸**. آمار: ۲

بنابراین در دوران جمع‌بندی توصیه می‌شود به فصول ۷، ۵، ٤ توجه ویژه شود. لازم به ذکر است که خوشبختانه مسلط شدن در این سه فصل نسبت به فصول دیگر وقت کم‌تری لازم دارد به این معنا که با مدیریت مناسب زمان می‌توان با صرف کم‌ترین وقت از عهده‌ی درصد زیادی از سوالات کنکور برآیید و همان‌طور که در آمار فوق مشاهده می‌کنید از مطالبی مانند ترکیبیات و تئوری اعداد (بدون همنهشتی) که اغلب دانش‌آموزان برای مسلط شدن در آن‌ها وقت زیادی لازم دارند، سوال چندانی مطرح نمی‌شود.

امیدوارم با برنامه‌ریزی مناسب و با بهره‌گیری از این کتاب بتوانید از کم‌ترین فرصت‌های خود بیش‌ترین بهره را در راستای موفقیت در کنکور سراسری بوده و نیز ما را از پیشنهادات، انتقادات و نظرات خود بهره‌مند سازید.

در پایان لازم می‌دانم از دوست و همکار گرامی جناب آقای محسن رحیمی که نگارش و تدوین فصل آمار از این کتاب را به عهده گرفتند کمال تشکر را داشته باشیم.

رسول حاجی‌زاده

بهار ۱۳۹۳

فهرست مطالب

فصل ۱ گراف ۱

فصل ۲ استدلال‌های ریاضی ۵۳

فصل ۳ — تئوری اعداد (بدون همنهشتی) ۶۹

فصل ۴ — همنهشتی ۱۱۱

فصل ۵ — مجموعه و رابطه ۱۶۹

۱

گراف

۱-۱ معرفی

گراف بحثی است که فقط در کتاب ریاضیات گسسته و در قالب فصول ۱، ۲ و ۳ ارائه شده است. سؤالات این بحث، هم در کنکور سراسری و هم در دانشگاه آزاد اسلامی عمدتاً ساده‌اند و به ندرت سؤال دشوار از این مبحث در کنکور سراسری دیده شده است. تعداد آن سؤالات در کنکور سراسری از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۹۲ مطابق جدول زیر است:

جدول ۱-۱ جدول تعداد سؤالات گراف در کنکور سراسری

سال	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
تعداد	۵	۱	۲	۱	۲	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۲	۱	۲	۱

مباحث گراف به زیرقسمت‌های زیر قابل تقسیم است:

A: تعاریف اولیه — B: گراف کامل و استفاده از ویژگی‌ها آن

C: شمارش گرافی‌ها — D: معرفی Δ و δ — E: مکمل یک گراف

F: دنباله‌ی درجه رئوس — G: گراف منتظم — H: مسیر

I: گراف همبند و ناهمبند — J: دور — K: انواع گراف

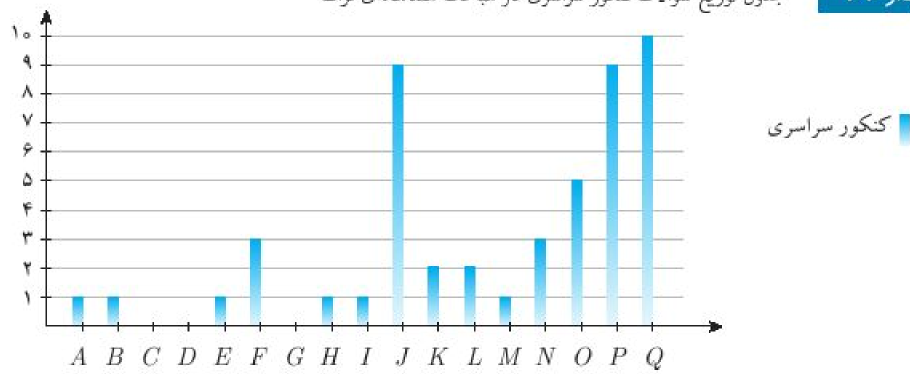
L: گراف بازه‌ها — M: گراف اویلری — N: درخت

O: ماتریس مجاورت — P: رسم شکل — Q: مباحث ترکیبی

توزیع سؤالات کنکور سراسری (داخل کشور) از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۲ در مباحث یاد شده مطابق نمودار

زیر می‌باشد:

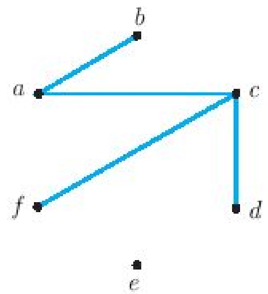
نمودار ۱-۱ جدول توزیع سؤالات کنکور سراسری در مباحث هفده‌گانه‌ی گراف



۱-۲ نکات برجسته‌ی فصل

۱. در یک گراف ساده تعداد رئوس را مرتبه‌ی (p)، تعداد یال‌ها را اندازه (q) و تعداد یال‌های متصل به یک رأس را درجه‌ی آن رأس گویند. همچنین بزرگ‌ترین درجه‌ی موجود در یک گراف را ماکزیمم درجه‌ی رئوس (Δ) و کم‌ترین درجه‌ی موجود را می‌نیمم درجه‌ی رئوس (δ) گویند.

تست ۱. در گراف مقابل حاصل $۴\deg(c) + p + ۲q + \Delta^۲ - ۳\delta$ کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۳
۳) ۳۴
۴) ۳۵

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

$$\deg(c) = ۳ \ , \ \ p = ۶ \ , \ \ q = ۴ \ , \ \ \Delta = \deg(c) = ۳ \ , \ \ \delta = \deg(e) = ۰$$

$$\Longrightarrow \ ? = ۴ \times ۳ + ۶ + ۲ \times ۴ + ۳^۲ - ۳(۰) = ۳۵$$

۲. اگر درجه‌های رئوس یک گراف ساده را به صورت دنباله های نزولی بنویسیم آن‌گاه آن دنباله را دنباله‌ی درجه رئوس آن گراف ساده گویند که ویژگی‌های زیر را دارد:

I. تعداد رئوس فرد آن گراف زوج می‌باشد (به عبارت دیگر مجموع اعضاء آن دنباله زوج است).

II. اولین عضو دنباله (که نقش Δ را دارد) کم‌تر یا مساوی $p - ۱$ و آخرین عضو دنباله (که نقش δ را دارد) بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌باشند.

III. از بین دو عضو $p - ۱$ و ۰ حداکثر یکی در آن دنباله موجود است.

IV. آن دنباله حتماً عضو تکراری دارد.

V. اگر تمام اعضاء آن دنباله با هم مساوی نباشند و به تعداد k عضو از اعضاء آن دنباله $p - ۱$ باشند آن‌گاه مقدار δ بزرگ‌تر یا مساوی k خواهد شد و نیز اگر به تعداد k عضو از اعضاء آن دنباله صفر باشند آن‌گاه مقدار Δ کوچک‌تر یا مساوی $p - ۱ - k$ خواهد شد.

VI. مجموع اعضاء آن دنباله نشان‌گر دو برابر تعداد یال‌هاست یعنی:

$$\sum \deg(v_i) = ۲q$$

تست ۲. اگر دنباله‌ی درجه رئوس یک گراف ساده به شکل $S: ۶, ۶, ۵, ۴, ۳, ۳, \delta$ باشد آن‌گاه مقدار δ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

- چون دنباله نزولی است پس $\delta \leq ۳$
- چون تعداد اعضاء فرد دنباله باید زوج باشد پس δ فرد است.
- و بالاخره چون دو رأس با درجه‌ی ۶ وجود دارد (به معنای آن‌که دو رأس به تمام رئوس از جمله به رأس متناظر به δ متصلند)، بنابراین $\delta \geq ۲$.

با مقایسه‌ی روابط بالا معلوم می‌شود که $\delta = ۳$.

۳. به گرافی که تمام یال‌های ممکن در آن موجود باشد کامل گویند. گراف کامل از مرتبه‌ی p را با K_p نمایش می‌دهند. درجه‌ی هر یک از رئوس آن $p - ۱$ بوده و هر دو رأس آن با هم مجاورند (با یک یال به هم متصلند). گراف K_p تنها گرافی است که فاصله‌ی هر دو رأس متمایز از آن برابر ۱ است. در مقابل، گراف‌های تهی وجود دارند که هیچ یالی ندارند و گراف تهی از مرتبه‌ی p را به صورت $\overline{K_p}$ نمایش می‌دهند. تعداد کل یال‌های گراف $\overline{K_p}$ برابر صفر و تعداد کل یال‌های گراف K_p برابر $\binom{p}{۲}$ یعنی $\frac{p(p-۱)}{۲}$ می‌باشد. بنابراین بین مرتبه و اندازه‌ی یک گراف نابرابری $q \leq \frac{p(p-۱)}{۲}$ برقرار است.

۴. گرافی که درجه‌ی هر رأس از آن r باشد گراف rـ منتظم خوانده می‌شود. در گراف rـ منتظم رابطه‌ی $q = \frac{rp}{۲}$ برقرار است و در آن گراف $\Delta = \delta = r$.

۵. دو گراف G و G' را مکمل[۱] یکدیگر گویند هرگاه مجموعه رئوس آن‌ها یکی بوده و مجموعه یال‌های‌شان متمم یکدیگر باشند. معلوم است که در آن دو گراف روابط زیر برقرارند:

$$\text{I) } q(G) + q(G') = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

$$\text{II) } \deg(x_G) + \deg(x_{G'}) = p - ۱$$

تست ۳. اگر تعداد یال‌های گرافی ۳ـ منتظم از تعداد یال‌های مکملش ۴ واحد کم‌تر باشد آن‌گاه مرتبه‌ی آن گراف کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

حل: ۱ ۲ ✔ ۴

۱) گراف‌های مکمل در کتاب درسی تعریف نشده‌اند ولی با یاد گرفتن تعریف آن تعدادی از سؤالات کنکور به راحتی حل می‌شوند.

چون درجه‌ی هر رأس از گراف ۳ـ منتظم برابر ۳ است، بنابراین درجه‌ی هر رأس از گراف مکمل آن $p-4$ خواهد شد (باید مجموع‌شان $p-1$ شود) بنابراین

$$q(G)=q(G')-4 \implies \frac{3p}{2}=\frac{(p-4)(p)}{2}-4$$
$$\implies 3p=p^2-4p-8 \implies p^2-7p-8=0$$
$$\implies (p-8)(p+1)=0 \implies p=8$$

تست ۴. با اضافه شدن ۸ یال به گرافی rـ منتظم، آن گراف کامل شده است. r کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

حل: ۲ ✓

$$\frac{r.p}{2}+8=\frac{p(p-1)}{2} \implies rp+16=p^2-p$$
$$\implies p^2-p-rp \implies p(p-r-1)=16$$

معلوم است که p مقسوم‌علیهی از ۱۶ است بنابراین:
اگر $p=16$ آنگاه $p-r-1=1$ و در نتیجه $r=14$ که در بین گزینه‌ها وجود ندارد.
اگر $p=8$ آنگاه $p-r-1=2$ و در نتیجه $r=5$
و به ازای $p\leq 4$ برای r مقدار مثبتی یافت نمی‌شود.

۶. با p رأس v_1، v_2، v_3، ...، v_p به تعداد $2^{\binom{p}{2}}$ گراف ساده می‌توان ساخت که $\binom{\binom{p}{2}}{0}$ تا از آن‌ها صفر یاله، $\binom{\binom{p}{2}}{1}$ یک یاله، $\binom{\binom{p}{2}}{2}$ تا از آن‌ها دو یاله، ...و بالاخره $\binom{\binom{p}{2}}{\binom{p}{2}}$ تا از آن‌ها $\binom{p}{2}$ یاله می‌باشد.

تست ۵. با شش رأس a، b، c، d، e و f چند تا گراف ساده می‌توان ساخت که در هر یک از آن‌ها $\deg(f)=1$؟

۱) ۵۱۲۰ ۲) ۶۱۴۴ ۳) ۲۰۴۸ ۴) ۱۰۲۴

حل: ۱ ✓

گراف کامل از مرتبه‌ی ۶ به تعداد ۱۵ یال دارد که قرار است فقط یکی از پنج یال متصل به f برای بودن

انتخاب شود که این کار به $\binom{۵}{۱}$ طریق انجام شدنی است و هر یک از ده یال دیگر مستقل از یکدیگر می‌توانند انتخاب شوند و یا نه. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $\binom{۵}{۱} \times ۲^{۱۰}$ یعنی ۵۱۲۰ می‌باشد.

۷. بین مرتبه، اندازه، ماکزیمم درجه رئوس و می‌نیمم درجه رئوس یک گراف ساده رابطه‌های $\Delta \leq \frac{۲q}{p}$ و $\delta \geq \frac{۲q}{p}$ برقرارند. لازم به یادآوری است که هرگاه هر دو مقدار δ و Δ در یک مسئله مشخص باشند بهتر است به جای استفاده از روابط فوق از دنباله درجه رئوس کمک گرفته شود.

تست ۶. گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۳ چنان است که $\Delta = ۹$، مقدار q در آن گراف چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰۹ ۲) ۱۰۸ ۳) ۴۹ ۴) ۵۰

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

حداقل مقدار q وقتی است که یک رأس از ۱۳ رأس به ۹ رأس دیگر وصل بوده و ۳ رأس از آن‌ها منفرد باقی بمانند. حداکثر مقدار q نیز با توجه به نکته‌ی ۷ به شکل زیر یافت می‌شود.

$$\frac{۲q}{p} \leq \Delta \implies \frac{۲q}{۱۳} \leq ۹ \implies ۲q \leq ۱۱۷$$
$$\implies q \leq ۵۸/۵ \implies q_{\max} = ۵۸$$

بنابراین مقدار q یکی از اعداد ۹، ۱۰، ۱۱، ...، ۵۸ می‌تواند باشد که تعداد آن‌ها ۵۰ تا عدد می‌باشد.

۸. به دنباله‌ای متشکل از رئوس یک گراف که ویژگی‌های زیر را داشته باشند مسیری از u به v گویند:

I) شروع و پایان دنباله u و v باشند.

II) هر دو عضو متوالی از آن دنباله، دو رأس مجاوری از گراف باشند.

III) هیچ عضوی در آن دنباله عضو تکراری نباشد.

۹. اگر در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک مسیر، m عضو به کار رود آنگاه $m - ۱$ را طول آن مسیر گویند.

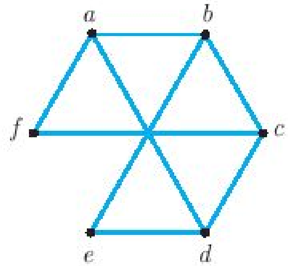
۱۰. به دنباله‌ای متشکل از فقط یک رأس از گراف، مسیری به طول صفر گویند.

۱۱. به طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v از یک گراف، فاصله‌ی آن دو رأس گفته و به صورت $d(a,b)$ نمایش داده می‌شود.

۱۲. در گراف K_p از رأس u به رأس v به تعداد $(i-۱)! \times \binom{p-۲}{i-۱}$ مسیر به طول i وجود دارد.

تست ۷. در گراف زیر اگر تعداد مسیرهای به طول ۳ از a به b را m و تعداد مسیرهای به طول ۲ از a

به b را n بنامیم آن‌گاه $m + 2n$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

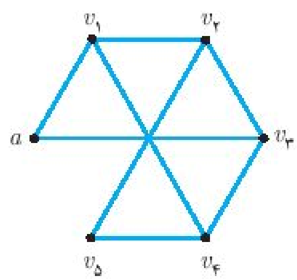
حل: ۱ ✔ ۳ ۴

از a به b مسیری به طول ۲ یعنی به شکل a, x, b وجود ندارد بنابراین $n = 0$.
تمام مسیرهای به طول ۳ از a به b به شکل زیر می‌باشند:

$$\text{I) } a, f, c, b \qquad \text{II) } a, d, c, b \qquad \text{III) } a, d, e, b$$

بنابراین $m = 3$ و مقدار خواسته شده $3 + 2(0)$ یعنی ۳ به‌دست می‌آید.

تست ۸. اگر $d(u, v)$ نشانگر فاصله‌ی دو رأس u و v از یک‌گراف باشد آن‌گاه حاصل $\sum_{i=1}^{5} d(a, v_i)$ در گراف زیر چقدر است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

حل: ۱ ✔ ۳ ۴

$$d(a, v_1) = 1 \qquad d(a, v_2) = 2 \qquad d(a, v_3) = 1$$
$$d(a, v_4) = 2 \qquad d(a, v_5) = 3$$

پس عدد خواسته شده $1 + 2 + 1 + 2 + 3$ یعنی ۹ به‌دست می‌آید.

۱۳. به گرافی که بین هر دو رأس دلخواه متمایز از آن حداقل یک مسیر موجود باشد (به عبارت دیگر فقط از یک بخش تشکیل شده باشد) همبند و در غیر این صورت آن را ناهمبند گویند. پس در گراف ناهمبند وجود دارد دو رأسی که بین آن‌ها حتی یک مسیر هم موجود نباشد.

۱۴. یک‌گراف همبند از مرتبه‌ی p حداقل $p - 1$ یال و یک‌گراف ناهمبند از مرتبه‌ی p حداکثر $\binom{p-1}{2}$ یال دارد.

تست ۹. اگر بدانیم درگراف همبندی بین مرتبه و اندازه رابطه‌ی $p+q=12$ برقرار است آن‌گاه حاصل $2p-q$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: (۱) (✓) (۳) (۴)

اگر $p \geq 7$ آن‌گاه گراف‌های به‌دست آمده همبند نمی‌شوند. به ازای $p=6$، $q=6$ و نیز $p=5$، $q=7$ گراف‌های همبند یافت می‌شوند. به ازای $p \leq 4$ نیز گراف ساده به‌دست نمی‌آید. بنابراین $2p-q$ یکی از دو مقدار ۶ و یا ۳ به‌دست می‌آید.

۱۵. می‌دانیم تعداد یال‌های یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۹ یکی از مقادیر از ۰ تا ۳۶ می‌باشد. وضعیت همبندی و غیرهمبندی آن گراف‌ها در محدوده‌ی زیر مشخص می‌باشند:

$29, \dots, 36$	$8, 9, 10, \dots, 25, 26, 27, 28$	$0, 1, 2, \dots, 7$
حتماً همبند	می‌تواند همبند و یا ناهمبند باشد	حتماً ناهمبند

تست ۱۰. گراف ساده‌ای از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۱۲ یال است. آن گراف:

۱) حتماً همبند است.
۲) حتماً ناهمبند است.
۳) می‌تواند همبند و یا ناهمبند باشد.
۴) چنین گرافی وجود ندارد.

حل: (۱) (۲) (✓) (۴)

با توجه به نکته‌ی قبلی درستی گزینه‌ی ۳ واضح است.

۱۶. به دنباله‌ای متشکل از رئوس یک گراف که ویژگی‌های زیر را داشته باشند، دور گویند:

I. شروع و پایان دنباله یکسان باشد.

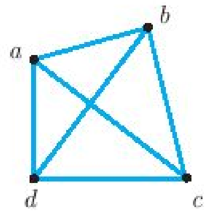
II. هر دو عضو متوالی از آن دنباله، دو رأس مجاوری از گراف باشند.

III. به غیر از عضو اول و آخر دنباله که تکراری می‌باشد هیچ عضو دیگری از آن دنباله تکرار نشود.

IV. حداقل تعداد اعضاء آن دنباله ۴ باشد.

۱۷. اگر در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک دور از گراف m عضو به کار رود آن‌گاه $m-1$ را طول آن دور گویند. بنابراین کوتاه‌ترین دورها یک مثلث است که در نوشتن دنباله‌ی مربوطه به آن ۴ عضو به کار می‌رود. البته باید توجه داشت که اگر در نوشتن دنباله‌ی مربوط به یک دور جهت آن را عوض کنیم و یا نقطه‌ی شروع را عوض کنیم دورهای جدیدی ایجاد نمی‌شود، به عنوان مثال در گراف زیر دورهای a, b, c, d, a و b, a, d, c, b

یکسانند ولی دور a, b, d, c, a با آن‌ها فرق دارد.



۱۸. در گراف K_p به تعداد $\binom{p}{i}\frac{(i-1)!}{2}$ دور به طول i وجود دارد.

تست ۱۱. تعداد دورهای به طول ۴ در گراف K_7 چه تعداد از دورهای به طول ۳ در آن گراف بیش‌تر است؟

۱) ۷۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۳۵

حل: ✔ ۲ ۳ ۴

$$\text{تعداد دورهای به طول ۴} = \binom{7}{4} \times \frac{3!}{2} = 105$$

$$\text{تعداد دورهای به طول ۳} = \binom{7}{3} \times \frac{2!}{2} = 35$$

$$\Longrightarrow ? = 105 - 35 = 70$$

۱۹. می‌دانیم تعداد یال‌های یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۹ یکی از مقادیر ۰ تا ۳۶ می‌باشد. وضعیت شامل دور بودن و یا فاقد دور بودن آن در محدوده‌ی زیر مشخص شده است:

$0, 1, 2$	$, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	$, 9, 10, 11, \cdots, 36$
فاقد دور	می‌تواند فاقد و یا شامل دور باشد	شامل دور

تست ۱۲. دنباله‌ی درجه رئوس گرافی از مرتبه‌ی ۶ به صورت ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۳ می‌باشد. آن گراف:

۱) همبند است ۲) ناهمبند است ۳) فاقد دور است ۴) شامل دور است

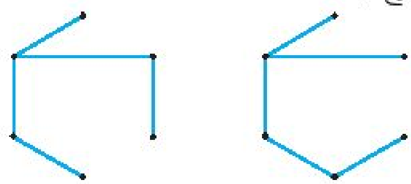
حل: ۱ ۲ ۳ ✔

چون $q = \frac{\sum}{2} = 7$ بنابراین با توجه به نکته‌ی ۱۵ معلوم می‌شود که آن گراف هم می‌تواند همبند باشد و یا ناهمبند و نیز با توجه به نکته‌ی ۱۹ معلوم می‌شود که آن گراف حتماً شامل دور است.

۲۰. گرافی از مرتبه‌ی p که در آن دوری به طول p موجود باشد همیلتنی خوانده می‌شود. گراف‌های ناهمبند هیچ کدام همیلتنی نیستند و نیز گراف‌هایی که در آن‌ها رأسی با درجه‌ی ۱ دیده می‌شود نمی‌تواند همیلتنی باشد.

۲۱. دو گراف را هم‌نوع گویند هرگاه بتوان آن دو گراف را بدون آن‌که یالی را از رأس کنده و به رأس دیگری وصل کنیم به هم قابل انطباق باشند، به عنوان مثال گراف‌های زیر با هم، هم‌نوعند.

ولی گراف‌های زیر با هم، هم‌نوع نیستند:



از شرایط لازم برای هم‌نوع بودن گراف‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد ولی هیچ یک از آن‌ها شرط کافی نمی‌باشند:

I. باید هم مرتبه باشند.

II. باید هم‌اندازه باشند.

III. باید دنباله درجه رئوس یکسانی داشته باشند.

IV. اگر یکی از آن‌ها از k مؤلفه‌ی همبندی تشکیل شده باشد دیگری نیز باید از k مؤلفه‌ی همبندی تشکیل شده باشد.

V. اگر در یکی از آن‌ها رأس متناظر به Δ به رئوسی با درجه‌های α، β، γ ... متصل شده باشد در دیگری نیز چنین باشد.

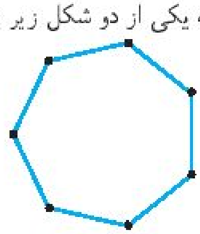
به عنوان مثال علت ناهم‌نوع بودن دو گراف آخری که کشیده شده‌اند آن است که در یکی از آن‌ها رأس با درجه‌ی ۳ به رئوسی با درجه‌های ۱، ۱ و ۲ متصل است در حالی که در دیگری تنها رأس با درجه‌ی ۳ به رئوسی با درجه‌های ۱، ۲ و ۲ متصل شده است.

تست ۱۳. چند نوع گراف ۲ـمنتظم از مرتبه‌ی ۷ وجود دارد؟

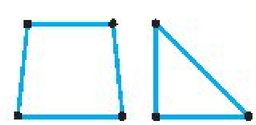
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

انواع گراف‌های ۲ـمنتظم از مرتبه‌ی ۷ به یکی از دو شکل زیر می‌باشد:



یا



تست ۱۴. در گرافی $p = ۵۴$ و همه‌ی رئوس از درجه‌ی ۲ می‌باشند. این گراف حداکثر چند دور به طول ۴ دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۰

حل: ✔ ۲ ۳ ۴

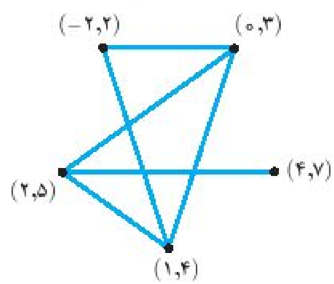
اگر ۱۲ تا گراف به شکل چهارضلعی در کنار هم قرار دهیم و در نهایت نیز با ۶ رأس باقی‌مانده یک شش‌ضلعی درست کنیم آن‌گاه گراف به‌دست آمده گراف مطلوب می‌باشد. اما اگر ۱۳ تا چهارضلعی در کنار هم قرار دهیم آن‌گاه فقط دو رأس باقی می‌ماند که با آن دو رأس، گرافی ۲ـمنتظم نمی‌توان درست کرد.

۲۲. اگر به هر یک از چند بازه‌ی متمایز داده شده یک رأس اختصاص دهیم و رئوس متناظر به دو بازه را با یک یال به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر آن دو بازه اشتراک داشته باشند آن‌گاه گراف به‌دست آمده را گراف بازه‌ها گویند.

تست ۱۵. در گراف متناظر به بازه‌های زیر حاصل $\Delta + ۳\delta$ چقدر است؟

$$(-۲,۲), (۰,۳), (۴,۷), (۱,۴), (۲,۵)$$

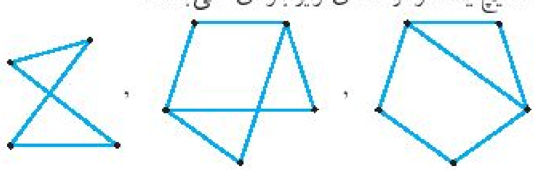
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷



حل: ۱ ۲ ✔ ۴

گراف متناظر به بازه‌های داده شده به شکل زیر می‌باشد: معلوم است که در آن گراف $\Delta = ۳$ و $\delta = ۱$، بنابراین حاصل $\Delta + ۳\delta$ برابر ۶ می‌شود.

۲۳. همه‌ی گراف‌ها بازه‌ای نمی‌باشند. به عنوان مثال اگر در یک گراف، nضلعی بدون قطر $(n \geq ۴)$ دیده شود نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد. هیچ یک از گراف‌های زیر بازه‌ای نمی‌باشند:



۲۴. گراف ساده‌ی G را اویلری گویند هرگاه بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با گذر از هر یال دقیقاً یک بار، چنان رسم کرد که نقطه‌ی پایان همان نقطه‌ی شروع باشد و اگر بتوان با شرایط فوق آن را چنان رسم کرد که

نقطه‌ی پایان با نقطه‌ی شروع متمایز باشد آن‌گاه آن را نیمه اویلری و یا شبه‌اویلری گویند.

۲۵. یکی از شرایط لازم برای اویلری و یا نیمه اویلری بودن گراف آن است که آن گراف همبند باشد. شرط لازم دیگر برای اویلری بودن آن است که درجه‌ی تمام رئوس آن زوج باشند. شرط لازم دیگر برای نیمه اویلری بودن آن است که درجه‌ی دو رأس از آن فرد و درجه‌ی مابقی رئوس همگی زوج باشند.

تست ۱۶. در بین گراف‌های k_2، k_3، k_4، k_5 و k_6 تعداد گراف‌های اویلری را a و تعداد گراف‌های نیمه اویلری را b می‌نامیم. حاصل $2a + b$ کدام است؟

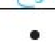
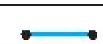
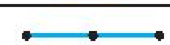
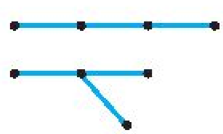
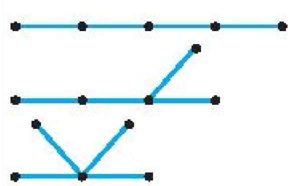
۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

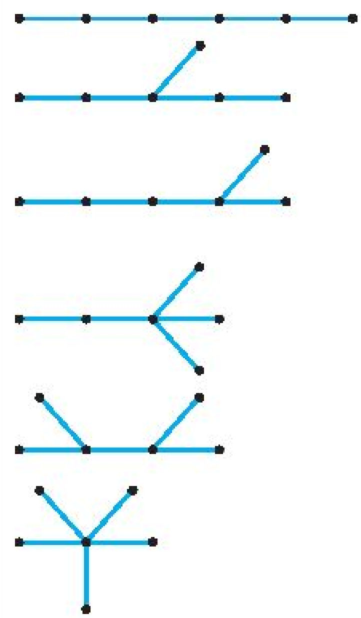
حل: ۱ ۲ ✓ ۴

گراف k_2 نیمه اویلری است. گراف‌های k_3 و k_5 اویلری هستند و گراف‌های k_4 و k_6 نه اویلری هستند و نیمه اویلری. بنابراین $a = 2$ و $b = 1$ و حاصل $2a + b$ برابر ۵ به‌دست می‌آید.

۲۶. درخت گراف همبندی است که فاقد دور باشد. در درخت بین مرتبه و اندازه رابطه‌ی $q = p - 1$ برقرار است. در واقع هر گرافی که دو ویژگی از سه ویژگی **فاقد دور بودن، همبند بودن، رابطه‌ی $q = p - 1$ برقرار بودن** را داشته باشد درخت بوده و خودبه‌خود سومین ویژگی را نیز خواهند داشت.

۲۷. انواع درخت‌های از مرتبه‌ی ۱ تا ۶ به شکل زیر می‌باشند.

مرتبه	تعداد	انواع
۱	۱	
۲	۱	
۳	۱	
۴	۲	
۵	۳	

	۶	۶

۲۸. تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۲ و بالاتر حداقل دو رأس از درجه‌ی واحد دارند. بنابراین در تمام آن درخت‌ها مقدار δ برابر ۱ می‌باشد.

۲۹. اگر ماکزیمم درجه‌ی رئوس درختی Δ باشد آن‌گاه در آن درخت حداقل به اندازه‌ی Δ تا رأس از درجه‌ی واحد وجود دارد.

۳۰. برای پیدا کردن تعداد رئوس از درجه ۱ در یک درخت به شکل زیر عمل می‌کنیم:

- از هر یک از درجه‌های غیر ۱ درخت ۲ واحد کم می‌کنیم.
- اعداد حاصل را با هم جمع کرده و ۲ واحد به آن مجموع، اضافه می‌کنیم. به عنوان مثال اگر دنباله‌ی ۵, ۴, ۴, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱, ۰۰۰, ۱ دنباله‌ی رئوس یک درخت باشد آن‌گاه تعداد "۱"ها برابر ۱۰ می‌باشد زیرا:

$$? = [(۳ + ۲ + ۲ + ۱ + ۰ + ۰) + ۲] = ۱۰$$

تست ۱۷. درخت G شامل ۹ رأس از درجه‌ی واحد می‌باشد. مقدار Δ چند عدد متمایز می‌تواند باشد؟

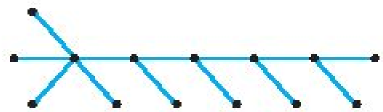
۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

حل: ۱ ✔ ۳ ۴

طبق نکته‌ی ۲۹ مقدار Δ نمی‌تواند از ۹ بیش‌تر باشد. تنها درختی که مقدار Δ در آن برابر ۱ باشد به صورت زیر است:

درخت‌هایی که مقدار Δ در آن برابر ۲ باشد درخت‌های خطی‌ای مانند درخت زیر هستند که در آن‌ها تعداد رئوس واحد فقط دو تا می‌باشد.

اما به ازای اعداد ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ برای Δ درخت وجود دارد. به عنوان مثال برای $\Delta = ۵$ درختی به شکل زیر وجود دارد:



تست ۱۸. چند نوع درخت از مرتبه‌ی ۸ وجود دارد که بین Δ و δ در هر یک از آن درخت‌ها رابطه‌ی $\Delta + ۲\delta = ۷$ برقرار باشد؟

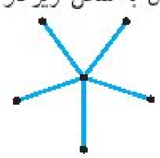
۱) ۱　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۶

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

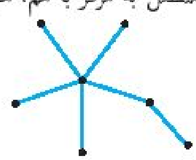
در هر درختی از مرتبه‌ی ۲ یا بالاتر مقدار δ برابر ۱ می‌باشد، بنابراین:

$$\Delta + ۲(۱) = ۷ \Longrightarrow \Delta = ۵$$

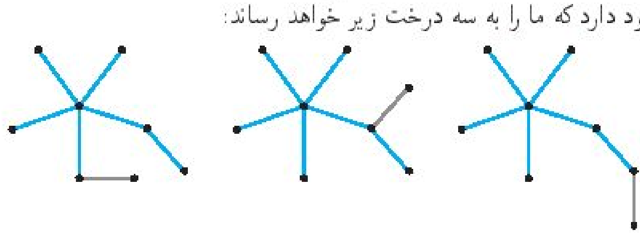
برای شروع کار باید درختی با ۶ رأس و ۵ یال به شکل زیر در نظر بگیریم:



حال معلوم است که دو رأس و دو یال باقی مانده است که برای اتصال یال و رأس یکی مانده به آخر؛ دقیقاً یک چاره وجود دارد، چون هر پنج رأس متصل به مرکز با هم، هم‌نوعند. پس به گراف زیر خواهیم رسید:



در درخت فوق به غیر از رأس متناظر به Δ، سه نوع رأس وجود دارد بنابراین برای اتصال رأس و یال آخر سه انتخاب وجود دارد که ما را به سه درخت زیر خواهد رساند:



تست ۱۹. میانگین درجه رئوس درختی برابر ۱/۹ است، مرتبه‌ی آن درخت کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

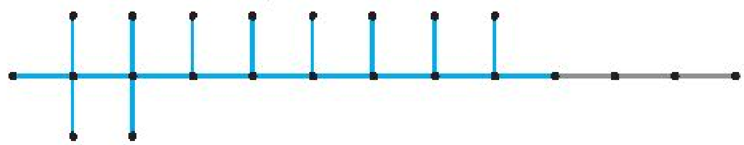
$$\frac{\sum \deg(v_i)}{p} = ۱/۹ \implies \frac{۲q}{p} = ۱/۹$$
$$\implies \frac{۲(p-۱)}{p} = ۱/۹ \implies ۲p - ۲ = ۱/۹p \implies ۰/۱p = ۲ \implies p = ۲۰$$

تست ۲۰. درختی از مرتبه‌ی ۲۳ چنان است که در آن $\Delta = ۴$. اگر تعداد رئوس از درجه‌های ۳ و ۴ در آن درخت به ترتیب برابر ۲ و ۶ باشند آن‌گاه تعداد رئوس از درجه‌ی ۲ در آن درخت کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

حل: ✔ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: می‌توان یک نمونه از انواع درخت‌های مطلوب را رسم کرد:



راه‌حل دوم: تعداد رئوس از درجه‌ی ۲ را x در نظر می‌گیریم لذا با توجه به این‌که تعداد رئوس از درجه‌ی ۴ برابر ۲ و تعداد رئوس از درجه‌ی ۳ برابر ۶ می‌باشد، تعداد رئوس از درجه‌ی ۱ برابر $۲۳ - (۲ + ۶ + x)$ یعنی $۱۵ - x$ خواهد شد. بنابراین:

$$\sum \deg(v_i) = ۲q = ۲(p-۱) = ۴۴$$
$$\implies ۴ \times ۲ + ۶ \times ۳ + x \times ۲ + (۱۵ - x) \times ۱ = ۴۴$$
$$\implies x = ۳$$

راه‌حل سوم: چون مرتبه‌ی درخت برابر ۲۳ است پس اندازه‌ی آن ۲۲ بوده و مجموع درجه رئوسش ۴۴ می‌شود به این معنا که مجموع اعضاء دنباله درجه رئوس باید ۴۴ شود. اگر دنباله را متشکل از ۲ تا ۴، ۶ تا ۳ و ۱۵ تا ۱ در نظر بگیریم آن‌گاه مجموع آن‌ها ۴۱ می‌شود که ۳ واحد از ۴۴ کم‌تر است. به این معنا که باید ۳ تا از ۱ها را به ۲ تبدیل کنیم تا مجموع ۴۴ شود.

۳۱. در یک درخت بین هر دو رأس دلخواه متمایز دقیقاً یک مسیر به طول ۱ یا بیشتر وجود دارد. بنابراین در درختی از مرتبه‌ی p به تعداد $\binom{p}{2}$ مسیر به طول ۱ یا بیش‌تر وجود دارد و اگر مسیرهای به طول صفر در آن درخت را نیز حساب کنیم تعداد کل مسیرها در آن درخت $p + \binom{p}{2}$ خواهد شد.

تست ۲۱. تعداد مسیرهای با طول ۲ یا بیش‌تر در درختی از مرتبه‌ی ۱۱ کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۵ ۴) ۴۴

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

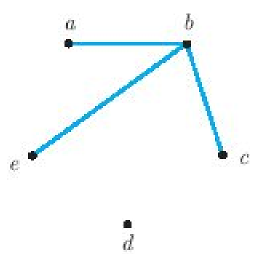
$$\text{تعداد مسیرهای با طول ۱ یا بیش‌تر} = \binom{11}{2} = 55$$

$$\text{تعداد مسیرهای با طول ۱} = \text{تعداد یال} = 10$$

$$\Longrightarrow \text{تعداد مسیرهای با طول ۲ یا بیش‌تر} = 55 - 10 = 45$$

۳۲. اگر گراف ساده‌ای با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ و با مجموعه یال‌های E موجود باشد آن‌گاه ماتریس مربعی از مرتبه‌ی p را متناظر به آن گراف گویند هرگاه اولاً سطر و ستون iام از آن ماتریس متناظر به رأس v_i از آن گراف بوده و ثانیاً درایه‌ی m_{ij} از آن ماتریس ۱ باشد هرگاه دو رأس v_i و v_j از آن گراف با هم مجاور باشند، در غیر این صورت آن درایه برابر با ۰ باشد.

تست ۲۲. ماتریس متناظر به دو گراف مقال چند درایه‌ی «۰» دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱۹
۴) ۲۲

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

ماتریس مجاورت گراف داده شده به شکل زیر می‌باشد:

$$M(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۳. تعداد "۱"های موجود در ماتریس مجاورت یک گراف ساده، دو برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد.

۳۴. مجموع کل درایه‌های ماتریس مجاورت گراف ساده، برابر مجموع درجه رئوس آن گراف و در نتیجه دو برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد.

۳۵. ماتریس مجاورت یک گراف ساده، متقارن بوده و نیز تمامی درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن صفر می‌باشند.

۳۶. هر یک از درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G، نشانگر درجه‌ی رأس متناظر در آن گراف می‌باشد.

تست ۲۳. مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۴ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

حل: ۱ ۲ ✓ ۴

با توجه به نکته‌ی ۳۶ معلوم می‌شود که مجموع خواسته شده همان مجموع درجه رئوس و دو برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد بنابراین عددی زوج است. چون تعداد یال‌های گرافی از مرتبه‌ی ۴ حداکثر برابر ۶ است بنابراین عدد زوج مورد نظر کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ است.

۳۷. درایه‌ی واقع بر سطر iام و ستون jام از ماتریس $M^۲$ نشانگر تعداد مسیرهای به طول ۲ از رأس i به رأس j در گراف متناظر می‌باشد.

۳۸. مجموع کل درایه‌های $M^۲$ با مجموع مربعات درجه رئوس گراف متناظر برابر است.

۳۹. هر یک از درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف K_p برابر $p-۱$ و هر یک از سایر درایه‌های آن $p-۲$ می‌باشد.

تست ۲۴. مجموع درایه‌های واقع بر سطر اول از مربع ماتریس مجاورت گراف K_p برابر ۴۹ می‌باشد. در آن گراف چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۵۶ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

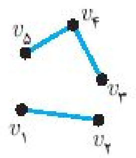
حل: ۱ ✓ ۳ ۴

در سطر اول یک درایه‌ی $p-۱$ و مابقی درایه‌های $p-۲$ می‌باشند:

$$۱ \times (p-۱) + (p-۱) \times (p-۲) = ۴۹$$
$$\Longrightarrow (p-۱)^۲ = ۴۹ \Longrightarrow p = ۸$$
$$\Longrightarrow ? = \binom{۸}{۳} \times \frac{(۳-۱)!}{۲} = ۵۶$$

۴۰. اگر گراف G ناهمبند باشد آنگاه می‌توان رئوس آن را با v_1، v_2، ...، v_p چنان نام‌گذاری کرد که ماتریس مجاورت آن خاصیت زیر را داشته باشد:

- می‌توان بین سطر i و $i+1$ خطی افقی و نیز بین ستون i و ستون $i+1$ خطی عمودی چنان رسم کرد که دو ماتریس از چهار ماتریس به وجود آمده صفر باشند. به عنوان مثال در شکل مقابل که گرافی ناهمبند است ماتریس مجاورت خاصیت مورد اشاره را دارد.



$$\Longrightarrow \quad M = \left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

۱-۳ سؤالات کنکور

A. تعاریف اولیه

۱ تعداد رأس و یال‌های گراف $G(V,E)$ با $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ و $E=\{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_1v_5\}$ به ترتیب برابر:

۱) ۸ و ۵ است. ۲) ۵ و ۸ است. ۳) ۵ و ۴ است. ۴) ۵ و ۷ است.

حل: ۱ ۲ ✓ ۴ «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۷۶»

مجموعه‌ی V یعنی مجموعه‌ی رئوس مجموعه‌ای ۵ عضوی و مجموعه‌ی E یعنی مجموعه یال‌ها مجموعه‌ای ۴ عضوی است.

۲ کدام گزینه درست است؟

۱) تعداد رأس‌های فرد هر گراف فرد است. ۲) تعداد رأس‌های فرد هر گراف زوج است.
۳) تعداد رأس‌های زوج هر گراف زوج است. ۴) تعداد رأس‌های زوج هر گراف فرد است.

حل: ۱ ✓ ۳ ۴ «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۷۷»

چون مجموع کل درجه رئوس هر گرافی زوج است پس تعداد رئوس از درجه‌ی فرد در هر گرافی زوج است.

۳ در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس‌های زوج عددی ...و تعداد رأس‌های فرد عددی ...است.

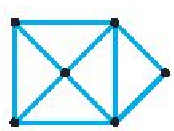
۱) فرد ـ فرد ۲) فرد ـ زوج ۳) زوج ـ فرد ۴) زوج ـ زوج

حل: ۱ ۲ ۳ ✓ «سراسری داخلی ـ ۱۳۸۶»

همانند سؤال قبلی معلوم است که تعداد رئوس فرد در آن گراف زوج است و در نتیجه مابقی آن‌ها که (زوج − ۱۶) تا می‌شود دارای درجه زوج می‌باشند و عدد (زوج − ۱۶) عددی زوج است.

۴ در گراف ساده‌ی زیر حاصل $5p^2 - 5q^2 + (\Delta^3 - \delta^3)\dfrac{\Delta}{\delta} + 208$ چقدر است؟

۱) -7
۲) ۱۷
۳) صفر
۴) ۱



حل: ۱ ۲ ✓ ۴ «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۹۱»

$$p=6,\ q=10,\ \Delta=4,\ \delta=2$$
$$\Longrightarrow ?=5(6)^2-5(10)^2+(4^3-2^3)\frac{4}{2}+208=0$$

B. گراف کامل و استفاده از ویژگی‌های آن

۱ در گراف ساده‌ی $G(V,E)$ و $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)$ پانزده عضو دارد. از هر عضو V حداقل چند یال می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

«سراسری داخلی ـ ۱۳۷۵»

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

گراف داده شده دارای ۶ رأس و ۱۵ یال است، بنابراین کامل است. از هر رأس گراف K_6 دقیقاً ۵ یال می‌گذرد.

۲ گرافی با درجه رئوس $\{۴,۴,۴,۴,۴\}$ دارای چند یال است؟

۱) ۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۲»

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

گراف اشاره شده K_5 می‌باشد که $\frac{۵\times ۴}{۲}$ یعنی ۱۰ یال دارد.

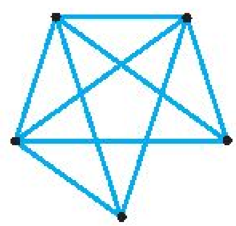
۳ در گرافی با رئوس a، b، c، d و e و درجه رئوس $\{۳,۳,۴,۴,۴\}$ چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۴»

حل: ۱ ✔ ۳ ۴

گراف داده شده گرافی است که از یک گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ دقیقاً یک یال برداشته شده باشد. گراف K_5 دارای $\binom{۵}{۳}$ یعنی ۱۰ دور به طول ۳ دارد که با برداشته شدن یک یال از آن، ۳ دور به طول ۳ از آن گراف کم می‌شود.



۴ در گرافی $p=۱۰$ دارای دو رأس درجه ۵ است، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۴۱ ۲) ۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۳۷

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۵»

حل: ۴ ۳ ۲ ۱

گراف مطلوب گرافی است که از هر یک از دو رأس گراف K_{10} چهار یال برداشته باشیم (که یکی از آن یال‌ها مشترک بین آن دو رأس می‌باشد). چون گراف K_{10} دارای ۴۵ یال می‌باشد بنابراین اگر از آن گراف ۷ یال برداریم مجموعاً ۳۸ یال باقی می‌ماند که متأسفانه چنین عددی در بین گزینه‌ها نیامده است.

۵ در گرافی تعداد رئوس $p=۱۰$ و تعداد یال‌ها $q=۳۱$ است. حداکثر چند رأس با درجه‌ی ۹ می‌توان نوشت؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۵»

حل: ۱ ۲ ۳ ✔

K_{10} دارای ۴۵ یال است که درجه‌ی هر ۱۰ رأس آن ۹ است. قرار است از آن گراف ۱۴ یال برداشته شود و هر چه رئوس دست نخورده (یعنی با درجه ۹) بیش‌تر باشد بهتر است. برای کاشتن و یا برداشتن ۱۴ یال وجود حداقل ۶ رأس لازم است بنابراین ۶ رأس از درجه ۹ بودن ساقط شده و ۴ رأس با درجه‌ی ۹ باقی می‌ماند.

۶ در گرافی $p = 20$ و $q = 17$ حداکثر چند رأس درجه صفر می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

حل: ✓ (۱) «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۷»

گراف کامل از مرتبه‌ی ۶ دارای ۱۵ یال است بنابراین برای درگیر کردن ۱۷ یال حداقل ۷ رأس لازم است. بنابراین با ۷ رأس به صورت متراکم ۱۷ یال را مشغول کرده و مابقی ۱۳ رأس با درجه‌ی صفر باقی می‌مانند.

۷ در گرافی $p = 10$ و $q = 42$. حداکثر چند رأس با درجه‌ی ۸ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۳

حل: ✓ (۳) «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۸»

گراف کامل از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۴۵ یال می‌باشد که درجه‌ی هر رأس از آن برابر ۹ می‌باشد، بنابراین گراف داده شده گرافی است که از یک گراف K_{10}، سه یال برداشته شده باشد. اگر سه یال را به صورت جداجدا از K_{10} جدا کنیم شش رأس با درجه‌ی ۸ ایجاد خواهد شد.

۸ گراف ساده‌ای با اندازه‌ی $q = 13$، حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

حل: ✓ (۴) «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۸»

گراف کامل از مرتبه‌ی p به تعداد $\binom{p}{2}$ یال دارد بنابراین نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$q \leq \binom{p}{2} \implies 13 \leq \binom{p}{2} \implies 13 \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\implies 26 \leq p(p-1) \implies p_{\min} = 6$$

۹ در گرافی با $p = 10$ و $q = 25$ حداکثر چند رأس با درجه‌ی ۹ وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۵

حل: ✓ (۱) «دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۹۰»

گراف کامل از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۴۵ یال است. پس باید ۲۰ یال از آن کم کنیم. قبل از حذف آن ۲۰ یال درجه‌ی هر یک از ده رأس، برابر ۹ است. برای حذف ۲۰ یال حداقل ۷ رأس تحت تأثیر قرار گرفته و تغییر می‌کنند (گراف کامل از مرتبه‌ی ۷ به تعداد ۲۱ یال دارد) بنابراین حداکثر ۳ رأس از آن ۱۰ رأس تغییر نکرده و با درجه‌ی ۹ باقی می‌مانند.

۱۰ در یک گراف $p = ۱۲$ و $q = ۶۲$ حداکثر چند رأس با درجه‌ی ۱۰ می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۹۱»

حل: ✔ ۲ ۳ ۴

گراف داده شده گرافی است که از یک گراف کامل $K_{۱۲}$ به تعداد ۴ یال برداشته شده باشد. قبل از این‌که از $K_{۱۲}$ یالی برداشته شده باشد درجه‌ی تمام رئوس آن ۱۱ است که اگر ۴ یال را به صورت جداجدا و نچسبیده به هم از آن گراف برداریم آن‌گاه درجه‌ی ۸ رأس از آن ۱۲ رأس از ۱۱ به ۱۰ تقلیل خواهد یافت.

C. شمارش گراف‌ها

D. معرفی Δ و δ

E. مکمل یک گراف

۱ مرتبه‌ی گراف G، ۸ و اندازه‌ی آن ۲۷ می‌باشد. درجه‌ی چند رأس آن ماکزیمم است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

«سراسری داخلی ـ ۱۳۷۶»

حل: ۱ ✔ ۳ ۴

اگر گراف ۸ رأس و ۲۸ یال می‌داشت کامل بوده و $K_۸$ می‌شد و چون ۲۷ یال دارد پس آن گراف چنان است که انگار از $K_۸$ دقیقاً یک یال برداشته شده است. چنین گرافی دارای دو رأس از درجه‌ی ۶ و شش رأس از درجه‌ی ۷ خواهد داشت که این شش رأس نقش رئوس ماکزیمم را دارند.

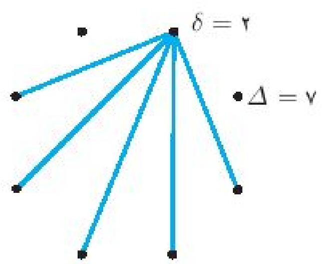
۲ گرافی دارای هشت رأس و بیست و سه یال می‌باشد. بیش‌ترین مقدار $\Delta(G) - \delta(G)$ (Δ ماکسیمم درجه و δ می‌نیمم درجه رئوس است) کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۱»

حل: ✔ ۲ ۳ ۴

اگر آن گراف کامل بود آن‌گاه ۲۸ یال داشت بنابراین گراف داده شده گرافی است که از $K_۸$ به تعداد ۵ یال برداشته شده باشد. اگر آن ۵ یال همگی از یک رأس کنده شوند آن‌گاه مقدار Δ برابر ۷ باقی‌مانده و مقدار δ برابر ۲ شده و حاصل $\Delta - \delta$ برابر ۲ می‌شود.



۳ گرافی با ۶ رأس دارای ۱۴ یال است. درجه‌ی چند رأس از این گراف ۵ است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۸۳»

حل: ✔ ۲ ۳ ۴

اگر آن گراف ۶ رأس و ۱۵ یال می‌داشت کامل بوده و K_6 می‌شد و چون ۱۴ یال دارد پس آن گراف چنان است که انگار از K_6 دقیقاً یک یال برداشته شده است. چنین گرافی دارای دو رأس از درجه‌ی ۴ و چهار رأس از درجه‌ی ۵ خواهد داشت.

F. دنباله‌ی درجه رئوس

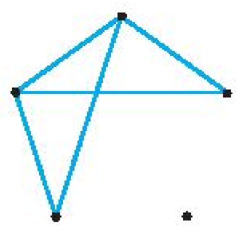
۱ **کدام دنباله می‌تواند دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های یک گراف باشد؟**

۱) ۰، ۲، ۳، ۴، ۵   ۲) ۰، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳   ۳) ۰، ۲، ۲، ۳، ۴   ۴) ۰، ۲، ۳، ۳، ۵

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۷۵»

حل: ۱ ✓ ۳ ۴

گراف از مرتبه‌ی ۵ رأسی با درجه‌ی ۵ ندارد، پس گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند. درگزینه‌های ۳ با بودن رأسی با درجه‌ی ۴ رأسی با درجه‌ی ۰ باقی نمی‌ماند. گراف متناظر به گزینه‌ی ۲ به شکل مقابل می‌باشد:



۲ **گرافی شامل ۵ رأس است. کدام گزینه نمی‌تواند نشان دهنده‌ی تعداد یال‌های آن باشد[۲]؟**

۱) $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ ۲) $\{۴, ۴, ۴, ۴, ۴\}$ ۳) $\{۰, ۱, ۱, ۱, ۱\}$ ۴) $\{۲, ۲, ۲, ۲, ۲\}$

«دانشگاه آزاد اسلامی ـ ۱۳۷۸»

حل: ✓ ۲ ۳ ۴

درگزینه‌ی ۱ عضو تکراری وجود ندارد که یکی از لازمه‌های دنباله درجه رئوس بودن است.

۳ **درجه‌ی رأس‌های گراف همبند G به صورت ۲، ۳، ۴، ۵، b، a است. کم‌ترین عدد $a+b$ کدام است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

«سراسری داخلی ـ ۱۳۸۳»

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

با توجه به زوج بودن مجموع درجه‌های رئوس هر گرافی معلوم می‌شود که $a+b$ زوج است. از طرف دیگر رأس با درجه‌ی ۵ به تمام رئوس از جمله به a و b متصل است و همچنین رأس با درجه‌ی ۴ حداقل به یکی از دو رأس a و b متصل است. بنابراین $a+b \geq ۳$. با مقایسه‌ی دو گزاره‌ی فوق و نیز با توجه به گزینه‌ها $a+b=۴$ به‌دست می‌آید.

٤ **در یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۶، دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟**

۱) ۰، ۲، ۲، ۳، ۴، ۵   ۲) ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۵   ۳) ۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵   ۴) ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵

«سراسری داخلی ـ ۱۳۸۵»

حل: ۱ ۲ ۳ ✓

همه‌ی دنباله‌ها ۶ عضوی هستند، پس گراف مطلوب ۶ رأس دارد. درگزینه‌ی ۱ با بودن عضو ۵ عضو ۰ نیز وجود دارد که نامطلوب است. در دنباله‌ی ۲ تعداد اعضاء فرد، فرد است. در دو دنباله‌ی ۳ و ۴ با بودن عضو ۵ معلوم می‌شود آن رأس به غیر از خود به تمام رئوس دیگر متصل است. بودن عضو ۴

۲) به نظر می‌رسد منظور سؤال درجه رئوس آن گراف می‌باشد.