فصل اول

استـــدلال ریاضـــی

فصل اول

استدلال ریاضی

درسنامه‌ی ۱

درک شهودی

انسان همواره برای درک آن‌چه در اطراف خود می‌گذرد، از شهودش کمک می‌گیرد. به‌عنوان مثال طی قرن‌های متمادی، مردم باور کرده بودند کـه زمـین صاف است و ستاره‌ها به دور آن در گردش‌اند. در حقیقت باور آن‌ها نشأت گرفته از شهودشان بوده و نظریه‌ی گرد بودن زمـین و چـرخش زمـین بـه دور خورشید را قبول نداشتند.

نکته شهود می‌تواند یک **دانش غریزی** یا **احساس بدون استدلال** باشد.

نکته در صورت استفاده از شهود، ممکن است نتیجه‌گیری نادرست باشد. به‌عبارت دیگر نمی‌توانیم با اطمینان صددرصد بگوییم آن نتیجـه‌گیری درست بوده است.

نکته در بسیاری مواقع با کمک درک شهودی می‌توانیم مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف آن بزنیم.

استدلال تمثیلی یا قیاسی

قیاس، در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است و علی‌رغم محدودیت‌هایی که دارد، می‌تواند در ایجاد یک زمینـه‌ی شـهودی بـرای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به ما کمک کند.

مثال: در داستان طوطی و بقال که در کتاب درسی آمده است، طوطی به خاطر ریختن شیشه‌های روغن توسط بقال تنبیه شد و موهای سرش ریخـت. در روز بعد با دیدن هر فرد کچلی، پیش خود فکر می‌کرد که آن‌ها نیز شیشه‌های روغن را ریخته‌اند که کچل شده‌اند! در حقیقت طوطی نـوعی مشـابهت (کچل بودن) بین خودش و آن افراد یافته و براساس آن، نتیجه‌گیری سطحی انجام داده بود.

استدلال استقرایی

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است. این نوع استدلال روشی است که عالمان تجربی با اسـتفاده از آن مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آن‌ها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربـی بـه ایـن نـوع اسـتدلال **روش تجربی** یا **علمی** می‌گویند.

مثال: وارد روستایی شده و متوجه می‌شویم تمام افرادی که با آن‌ها مواجه شده‌ایم، نابینا هستند. شاید به این نتیجه برسیم که تمام افراد آن روستا نابینا هستند. ضعف این نوع استدلال واضح است، زیرا همواره این احتمال وجود دارد، فردی در آن روستا نابینا نباشد! پس به درست بودن نتیجه‌ی حاصـل از استدلال استقرایی نمی‌توان اطمینان داشت.

استدلال استنتاجی

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. نتیجه‌ی به‌دسـت آمـده از ایـن نـوع اسـتدلال، همـواره درست می‌باشد. این جامعیت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی استدلال استنتاجی است.

تمرین **ثابت کنید اگر x فرد باشد، آن‌گاه $x(x+۲)$ نیز فرد است.** (هماهنگ کشوری ۹۰)

پاسخ: با فرض $x = ۲k + ۱, (k \in \mathbb{Z})$ داریم:

$$x(x+۲) = (۲k+۱)(۲k+۱+۲) = ۴k^۲ + ۸k + ۳ = ۴k^۲ + ۸k + ۲ + ۱ = ۲\underbrace{(۲k^۲ + ۴k + ۱)}_{k'} + ۱ = ۲k' + ۱ \Rightarrow$$ $x(x+۲)$ عددی فرد است.

۱- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات، کدام نوع استدلال است؟ (سراسری ۸۸)

۱) قیاسی ۲) درک شهودی ۳) استنتاجی ۴) استقرایی

۲- برای اثبات یک حکم ریاضی، کدام روش اعتبار دارد؟

۱) استدلال استقرایی ۲) استدلال تمثیلی ۳) استدلال استنتاجی ۴) درک شهودی

۳- ضرب‌المثل «مارگزیده، از ریسمان سیاه و سفید می‌ترسد» اشاره به کدام گزینه دارد؟

۱) درک شهودی ۲) استدلال استقرایی ۳) استدلال استنتاجی ۴) استدلال قیاسی

۴- دو تیم فوتبال A و B بیست بازی مقابل هم انجام داده که در تمام بازی‌ها تیم A برنده بوده است. حال اگر با دیدن این ۲۰ بازی نتیجه بگیریم که همیشه تیم A در مقابل B برنده خواهد بود، از چه نوع استدلالی استفاده کرده‌ایم؟

۱) استدلال قیاسی ۲) استدلال استقرایی ۳) درک شهودی ۴) استدلال استنتاجی

۵- اگر برای درک بهتر رابطه‌ی $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$، برای دانش‌آموزان رابطه‌ی $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ را یادآوری کنیم، از چه روشی استفاده کرده‌ایم؟

۱) درک شهودی ۲) تمثیلی ۳) استقرایی ۴) استنتاجی

۶- انسان‌های غارنشین مشاهده می‌کردند که آب، برف و یخ آن‌قدر می‌جوشند تا آن‌که چیزی از آن‌ها باقی نماند. بنابراین از روی آن مشاهدات نتیجه‌گیری کرده بودند که «هر چیزی آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.» روش استدلال آن انسان‌ها چه نام دارد؟ (مثال کتاب درسی)

۱) استدلال استقرایی ۲) استدلال قیاسی ۳) درک شهودی ۴) استدلال استنتاجی

۷- دانش‌آموزی برای درک «حاصل‌ضرب عدد منفی در عدد منفی برابر یک عدد مثبت است»، جمله‌ای به‌صورت «من نمی‌خواهم نروم» به کار برد، نوع استدلال وی کدام است؟

۱) تمثیلی ۲) شهودی ۳) استقرایی ۴) استنتاجی

۸- «فلزات بر اثر گرما منبسط می‌شوند، شیشه بر اثر گرما منبسط می‌شود، هوا بر اثر گرما منبسط می‌شود. در نتیجه هر چیزی بر اثر گرما منبسط می‌شود.» این نتیجه‌گیری، ضعف کدام نوع استدلال را نشان می‌دهد؟

۱) استقرایی ۲) استنتاجی ۳) تمثیلی ۴) مثال نقض

۹- اگر a عددی فرد و b عددی زوج باشد، می‌دانیم مجذور هر عدد فرد یک واحد بیش‌تر از مضرب ۸ است. با کدام استدلال می‌توان نتیجه گرفت که $(a+b)^2 - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است؟

۱) استنتاجی ۲) استقرایی ۳) شهودی ۴) تمثیلی

۱۰- پزشکی اثرات مثبت و منفی تجویز نوعی دارو را برای ۵۰۰ بیمار خاص بررسی کرده و نظریه‌ی خود را بر این نتیجه‌گیری اعلام می‌کند. وی کدام نوع استدلال را به‌کار برده است؟

۱) استنتاجی ۲) استقرایی ۳) شهودی ۴) تمثیلی

۱۱- نتیجه‌ی بیان‌شده در کدام گزینه نادرست است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) اگر باران ببارد، زمین مرطوب می‌شود. الان باران می‌بارد. **نتیجه:** زمین مرطوب است.

۲) خطوط موازی هیچ‌گاه یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی‌اند. **نتیجه:** L_1 و L_2 هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند.

۳) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند، می‌توانند محاسبه کنند. حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد گرفته است. **نتیجه:** حمید می‌تواند محاسبه کند.

۴) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند. نرگس دانش‌آموز است. **نتیجه:** نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.

۱۲- علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجه به شرایط زیر، کوتاه‌ترین فرد بین آن‌ها کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر هستند. **ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است.**

ج) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست. **د) داوود از علی بلندتر است.**

۱) کامران ۲) علی ۳) داوود ۴) ابراهیم

۱۳- اگر a، b و c سه عدد متمایز باشند که « b کوچک‌تر از c است و a کوچک‌ترین عدد نیست.» کدام گزینه الزاماً درست است؟

۱) a بزرگ‌ترین عدد است. ۲) a از b بزرگ‌تر است. ۳) a از c بزرگ‌تر است. ۴) c بزرگ‌ترین عدد است.

۱۴- عبارت زیر کدام نوع استدلال را نشان می‌دهد؟

«مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو زاویه‌ی مساوی است. مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه زاویه‌ی مساوی است که اندازه‌ی هر یک 60° است. بنابراین هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.»

۱) استنتاجی ۲) استقرایی ۳) تمثیلی ۴) شهودی

۱۵- با کدام استدلال می‌توان گفت که دو زاویه‌ی متقابل به رأس در دو خط متقاطع برابرند؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۹۲)

۱) درک شهودی ۲) استنتاجی ۳) استقرایی ۴) تکرار آزمایش

۱۶- هر ۸ عدد فرد متوالی را با هم جمع کنیم، عدد حاصل همواره مضرب n است. بزرگ‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱۶

درسنامه‌ی ۴

مثال نقض

به مثالی که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال: اگر با دیدن اعداد زوج ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ نتیجه بگیریم که تمام اعداد زوج، غیر اول (مرکب) هستند، می‌توانیم عدد ۲ را به‌عنوان مثال نقض معرفی کنیم، زیرا این عدد، عددی زوج بوده ولی اول است. پس نشان دادیم که نتیجه‌گیری کلی انجام شده غلط است.

قضایای شرطی

قضیه‌ی شرطی: جمله‌ی شرطی به‌صورت «اگر p، آن‌گاه q $(p \Rightarrow q)$» را که همواره درست باشد قضیه‌ی شرطی می‌نامند و به قسمت شرطی جمله (یعنی p) فرض قضیه و به نتیجه‌ی جمله (یعنی q) حکم قضیه می‌گویند.

مثال: جمله‌ی شرطی «اگر $x \geq 0$، آن‌گاه $x^3 \geq 0$» یک قضیه‌ی شرطی بوده که فرض آن $x \geq 0$ و حکم آن $x^3 \geq 0$ است.

عکس قضیه‌ی شرطی: برای نوشتن عکس قضیه‌ی شرطی کافی است جای فرض و حکم در قضیه‌ی شرطی را با هم عوض کنیم. پس اگر قضیه‌ی شرطی به‌صورت «اگر p، آن‌گاه q» باشد، عکس این قضیه‌ی شرطی به‌صورت «اگر q، آن‌گاه p $(q \Rightarrow p)$» خواهد بود. شایان ذکر است که عکس یک قضیه‌ی شرطی، همواره یک قضیه‌ی شرطی نیست.

مثال: عکس قضیه‌ی شرطی «اگر $x \geq 0$، آن‌گاه $x^3 \geq 0$» به‌صورت «اگر $x^3 \geq 0$، آن‌گاه $x \geq 0$» است که باز هم قضیه‌ی شرطی می‌باشد، اما عکس قضیه‌ی شرطی «اگر $x = y$، آن‌گاه $x^2 = y^2$» به‌صورت «اگر $x^2 = y^2$، آن‌گاه $x = y$» است که قضیه‌ی شرطی نمی‌باشد، زیرا مثلاً $2^2 = (-2)^2$ اما $2 \neq -2$ است.

قضیه‌ی دو شرطی: اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی، خودش یک قضیه‌ی شرطی باشد (یعنی همواره درست باشد)، آن‌گاه این دو قضیه را به‌صورت یک قضیه می‌نویسیم و به آن قضیه، قضیه‌ی دو شرطی می‌گوییم. قضیه‌ی دو شرطی را معمولاً به‌صورت « p اگر و تنها اگر q $(p \Leftrightarrow q)$» بیان می‌کنند.

مثال: عکس قضیه‌ی شرطی «اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه مربع یک ضلع آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگرش برابر است.» به‌صورت «اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن‌گاه مثلث، قائم‌الزاویه است» می‌باشد که یک قضیه‌ی شرطی است. پس می‌توان این دو قضیه را به‌صورت یک قضیه‌ی دو شرطی به فرم «یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر باشد.» بیان نمود.

تذکر اگر بخواهیم یک قضیه‌ی دو شرطی به‌صورت $p \Leftrightarrow q$ را اثبات کنیم، باید هم قضیه‌ی $p \Rightarrow q$ و هم قضیه‌ی $q \Rightarrow p$ را اثبات کنیم.

قضایای کلی

قضایای کلی، احکامی هستند که همیشه برقرارند. اکثر قضیه‌های مهم ریاضی مانند قضیه‌ی فیثاغورس در هر مثلث قائم‌الزاویه $(a^2 = b^2 + c^2)$ و همه‌ی اتحادهای جبری مانند اتحاد مربع دو جمله‌ای $((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$ قضایای کلی محسوب می‌شوند.

۱۷- کدام عدد کلیت حکم «مربع هر عدد صحیح، مضرب ۷ به علاوه یک است» را نقض می‌کند؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۷)

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۱۸- کدام عدد کلّیت حکم «توان دوم هر عدد بزرگ‌تر از خود آن عدد است.» را نقض می‌کند؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۹۲)

۱) $\sqrt{2} - 1$ ۲) $1 + \sqrt{2}$ ۳) $2 - \sqrt{3}$ ۴) $1 - \sqrt{2}$

۱۹- کدام دو عدد کلیت حکم «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ عددی گنگ است.» را نقض می‌کند؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۳)

۱) $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2} - 2$ و $\sqrt{2} + 1$ ۳) $\sqrt{2} - 1$ و $\sqrt{2} + 1$ ۴) $\sqrt{2} - 1$ و $\sqrt{2}$

۲۰- اگر بخواهیم حکم «اگر x عدد گنگ باشد، آن‌گاه $2x^2 - 4x + 5$ همواره عددی گنگ است» را رد کنیم، از کدام عدد زیر به‌عنوان مثال نقض استفاده کنیم؟

۱) $2 + 2\sqrt{3}$ ۲) $2 - 3\sqrt{2}$ ۳) $1 + 5\sqrt{2}$ ۴) $5 + 4\sqrt{2}$

۲۱- کدام عدد کلیت حکم «رقم سمت راست هر عددی که بر پنج و سه قابل قسمت باشد، صفر است.» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۵

۲۲- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی دو رقمی را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد طبیعی مربع کامل نوشت.» را نقض می‌کند؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷ (تمرین کتاب درسی)

۲۳- کدام مقدار n، حکم «اگر n نقطه روی محیط دایره را توسط پاره‌خط‌هایی دو به دو به هم وصل کنیم، سطح دایره را به 2^{n-1} قسمت تقسیم می‌کند.» را نقض می‌کند؟ (مثال کتاب درسی)

۱) $n = 3$ ۲) $n = 4$ ۳) $n = 5$ ۴) $n = 6$

۲۴- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۶ (سراسری ۸۸ خارج از کشور و سراسری ۹۲ و مثال کتاب درسی)

۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۲۵- برای آن‌که یک جمله‌ی شرطی «اگر p، آن‌گاه q» را به روش مثال نقض رد کنیم، مثال بیان شده باید کدام ویژگی را داشته باشد؟

۱) در p و q صدق کند. ۲) در q صدق کند ولی p به‌ازای آن برقرار نباشد.

۳) در p صدق کند ولی q به‌ازای آن برقرار نباشد. ۴) فقط در q صدق کند.

۲۶- کدام گزینه‌ی زیر، مثال نقض دارد؟ (سراسری ۸۰ و آزمایشی سنجش ریاضی ۸۹)

۱) توان دوم هر عدد، بزرگ‌تر از توان سوم آن است. ۲) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

۳) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲، فرد است. ۴) هر مربع یک لوزی است.

۲۷- کدام‌یک از عبارات زیر مثال نقض دارد؟ (هماهنگ کشوری ۸۸ و ۹۰)

۱) اگر a و b دو عدد صحیح زوج متوالی باشند، آن‌گاه ab مضرب ۸ است.

۲) اگر a و b دو عدد فرد باشند، آن‌گاه تفاضل مربعات آن‌ها همواره مضرب ۴ است.

۳) مجموع هر ۱۰ عدد فرد متوالی همواره بر ۲۰ بخش‌پذیر است.

۴) اگر a و b اعدادی اول باشند، آن‌گاه عدد $a + b$ همواره غیر اول است.

۲۸- کدام حکم زیر یک قضیه‌ی کلی است؟

۱) هر عدد اول فرد است. ۲) هر لوزی یک مستطیل است.

۳) هر مستطیل یک لوزی است. ۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

۲۹- اگر $x \in [a, +\infty)$ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی $\sqrt{x^2+2x+1} = x+1$ یک قضیه‌ی کلی خواهد بود. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -1 ۴) -2

۳۰- کدام‌یک از گزینه‌های زیر قضیه‌ی شرطی بوده و عکس آن مثال نقض <u>ندارد</u>؟

۱) اگر $x = y \neq 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 2$. ۲) اگر $x = y$ باشد، آن‌گاه $\sin x = \sin y$.

۳) اگر $x = y$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 0$. ۴) اگر $(x-1)^4 > 0$ باشد، آن‌گاه $x - 1 > 0$.

۳۱- عکس کدام قضیه‌ی شرطی زیر، یک قضیه‌ی کلی است؟

۱) اگر $x = 1$ باشد، آن‌گاه $x^2 - 3x + 2 = 0$. ۲) اگر $3x^3 - 81 \geq 0$ باشد، آن‌گاه $(x-3)(x+3) \geq 0$.

۳) اگر $x > 2$ باشد، آن‌گاه $x > 1$. ۴) اگر $(a-2)(b-2) = 0$ باشد، آن‌گاه حداقل یکی از a یا b برابر ۲ است.

۳۲- عکس کدام قضیه‌ی شرطی، مثال نقض دارد؟

۱) اگر $|x| \geq x$ باشد، آن‌گاه $x^2 \geq 0$ است.

۲) اگر $x = 1$ باشد، آن‌گاه $(x-1)^2 + (x^2-1)^2 = 0$ است.

۳) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه قطرهای آن با هم برابرند.

۴) اگر نقطه‌ی M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد (یعنی $MA = MB$)، آن‌گاه M بر عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۳۳- کدام‌یک از عبارات زیر همواره درست نمی‌باشد؟ (هماهنگ کشوری ۸۵ و ۸۸ با تغییر)

۱) اگر x عددی فرد باشد، آن‌گاه $3x^2 - 3$ مضرب ۲۴ است.

۲) حاصل‌ضرب هر دو عدد به‌صورت $6k + 5$، به‌صورت $6k'' + 1$ است.

۳) حاصل‌ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۴۸ است.

۴) اگر حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه حاصل جمعشان همواره زوج است.

۳۴- برای کدام‌یک از عبارات زیر مثال نقض نمی‌توان یافت؟ (هماهنگ کشوری ۸۸ و ۸۹)

۱) توان سوم هر عدد حقیقی از توان دوم همان عدد بزرگ‌تر است.

۲) اگر $xy = 0$، آن‌گاه $x = 0$ و $y = 0$.

۳) حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، همیشه عددی گویا است.

۴) مقدار عبارت $2^n + 1$ برای هر عدد طبیعی n، همیشه عددی اول است.

۳۵- کدام‌یک از گزینه‌های زیر همواره درست نمی‌باشد؟ (هماهنگ کشوری ۹۳، ۹۱، ۹۰)

۱) اگر a و b دو عدد فرد باشد، آن‌گاه مجموع مربعات آن‌ها همواره عددی زوج است.

۲) اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $x(x + 3)$ مضرب ۱۸ است.

۳) اگر a و b دو عدد صحیح و فرد و هر دو مضرب ۵ باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها مضرب ۱۰ است.

۴) مقدار عبارت $3^n + 4$ برای هر عدد طبیعی n، همیشه عددی اول است.

۳۶- کدام‌یک از احکام زیر نادرست است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) هر مستطیل یک مربع است.

۲) هر مربع یک مستطیل است.

۳) هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

۴) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

۳۷- کدام عبارت درست است؟

۱) اگر x گویا ولی مخالف صفر و y گنگ باشد، آن‌گاه xy ممکن است گویا باشد.

۲) اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $x + y$ گنگ است.

۳) اگر x گنگ و y گنگ باشد، آن‌گاه $\frac{x}{y}$ گنگ است.

۴) اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $x - y$ ممکن است گویا باشد.

۳۸- اگر a عددی گنگ و b عددی گویا باشد، آن‌گاه کدام عدد همواره گنگ است؟

۱) $\sqrt{a}\,(a^2b)$

۲) $ab(a + b)$

۳) $\sqrt{b}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

۴) $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

۳۹- اگر x و y .... باشند، آن‌گاه x^y همواره .... است.

۱) گنگ ـ گنگ

۲) گویا ـ گویا

۳) یکی گنگ و دیگری گویا ـ گنگ

۴) طبیعی ـ طبیعی

۴۰- جمله‌ی شرطی «اگر $x > 2$، آن‌گاه $x^2 > 4$» معادل کدام جمله‌ی شرطی زیر است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۹۰)

۱) اگر $x^2 \le 4$، آن‌گاه $x \le 2$

۲) اگر $x < 4$، آن‌گاه $x < 2$

۳) اگر $x^2 > 4$، آن‌گاه $x > 2$

۴) اگر $x^2 \ge 4$، آن‌گاه $x \ge 2$

۴۱- می‌دانیم اگر A سخت کار کند، آن‌گاه B یا C خوش‌گذران هستند و اگر B خوش‌گذران باشد، آن‌گاه A سخت کار نخواهد کرد. بنابراین نتیجه می‌گیریم اگر A سخت کار کند، آن‌گاه:

۱) B خوش‌گذران است.

۲) C خوش‌گذران است.

۳) C خوش‌گذران نمی‌باشد.

۴) B و C خوش‌گذران هستند.

۴۲- شخصی برای استخدام به شرکتی مراجعه می‌کند. می‌دانیم اگر وی سابقه‌ی کاری خوب یا مدرک معتبر داشته باشد، در مصاحبه قبول می‌شود و اگر در مصاحبه قبول شود، استخدام می‌شود. اکنون وی استخدام نشده است. بنابراین:

۱) وی سابقه‌ی کاری خوب داشته است.

۲) وی مدرک معتبر نداشته است.

۳) وی نه سابقه‌ی کاری خوبی داشته است و نه مدرک معتبر.

۴) وی سابقه‌ی کاری خوب یا مدرک معتبر نداشته است.

درسنامه‌ی ۳

اصل استقرای ریاضی

مقدمه: نردبانی با تعداد نامتناهی پله را در نظر بگیرید. اگر ۲ شرط زیر برقرار باشد، می‌توانیم تا بی‌نهایت از این نردبان بالا برویم:

۱) بتوانیم روی پله‌ی اول نردبان بایستیم.

۲) اگر روی پله‌ی kام بودیم، بتوانیم پایمان را روی پله‌ی $(k+1)$ام (پله‌ی بعدی) قرار دهیم.

حال با این مقدمه، اصل استقرای ریاضی را بیان می‌کنیم:

اصل استقرای ریاضی: فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در این‌صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست خواهد بود.

برای استفاده از اصل استقرا گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام اول: درستی حکم $P(n)$ را به‌ازای $n=1$ نشان می‌دهیم.

گام دوم: فرض می‌کنیم حکم $P(n)$ به‌ازای $n=k$ (یعنی $P(k)$) درست است. سپس ثابت می‌کنیم که اگر حکم برای $n=k$ درست باشد، آن‌گاه حکم برای $n=k+1$ (یعنی $P(k+1)$) نیز درست است.

تذکر اگر $P(n)$ فقط به‌ازای تعداد محدودی از اعداد طبیعی برقرار باشد، با استقرا نمی‌توان آن را اثبات نمود.

تمرین با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید که رابطه‌ی زیر به‌ازای هر عدد طبیعی n برقرار است. (هماهنگ کشوری ۹۰)

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

پاسخ:

گام اول: نشان می‌دهیم حکم $P(n)$ به‌ازای $n=1$ درست است:

$$P(1):\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad\checkmark$$

گام دوم: با جایگذاری k و $k+1$ به جای n در $P(n)$، فرض و حکم استقرا را می‌یابیم:

$$\text{فرض استقرا}: P(k):\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$

$$\text{حکم استقرا}: P(k+1):\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

برای اثبات حکم استقرا، کافی است به طرفین تساوی فرض، عبارت $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ را اضافه کنیم. با این کار سمت چپ تساوی حکم استقرا به راحتی ایجاد می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}\right)+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\left(2-\frac{k+2}{2^k}\right)+\frac{k+1}{2^{k+1}}\qquad(*)$$

حال سمت راست تساوی $(*)$ را ساده می‌کنیم:

$$2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2+\frac{-2(k+2)+k+1}{2^{k+1}}=2+\frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}}=2+\frac{-k-3}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}\qquad(**)$$

بنابراین با جایگذاری $(**)$ در $(*)$ حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

تمرین برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید 5^n-4n-1 بر عدد ۱۶ بخش‌پذیر است.

پاسخ: باید ثابت کنیم $P(n):5^n-4n-1=16q$ که در آن $q\in\mathbb{Z}$ است.

گام اول:

$$P(1):5^1-4(1)-1=0=16\times 0\quad\checkmark$$

گام دوم:

$$\text{فرض استقرا}: P(k):5^k-4k-1=16q$$

$$\text{حکم استقرا}: P(k+1):5^{k+1}-4(k+1)-1=16q'$$

برای اثبات حکم استقرا، دو طرف فرض را در عدد ۵ ضرب می‌کنیم:

$$5(5^k-4k-1)=5(16q)\Rightarrow 5^{k+1}-20k-5=5(16q)\Rightarrow 5^{k+1}-4k-16k\overbrace{-5}^{-4-1}=16(5q)$$

$$\Rightarrow 5^{k+1}-4k-4-1=16(5q)+16k\Rightarrow 5^{k+1}-4(k+1)-1=16\overbrace{(5q+k)}^{q'}=16q'$$

پس حکم ثابت شد.

اصل استقرای تعمیم‌یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m > 1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است. (در هر مسأله باید m مناسب را یافت.)

برای استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافته، گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام اول: ابتدا با جایگذاری اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ... به جای n در حکم $P(n)$، m مناسب را می‌یابیم.

گام دوم: ثابت می‌کنیم اگر حکم برای $n = k$ $(k \geq m)$ درست باشد، آن‌گاه حکم برای $n = k+1$ نیز درست است.

در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

تمرین **در اصل استقرای تعمیم‌یافته، برای حکم زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب m را مشخص کرده و سپس حکم را برای هر عدد طبیعی n $(n \geq m)$ ثابت کنید.**

$$P(n): \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

پاسخ: ابتدا با جایگذاری اعداد طبیعی با شروع ۱، عدد مناسب m را می‌یابیم که به‌ازای هر عدد طبیعی $n \geq m$ نامساوی فوق همواره برقرار است.

n	۱	۲
$P(n)$	$\frac{1}{\sqrt{1}} > \sqrt{1}$	$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$

$\xrightarrow{\sqrt{2} \simeq 1/4}$

n	۱	۲
$P(n)$	$1 > 1$ ✗	$1/7 > 1/4$ ✓

پس کوچک‌ترین مقدار m برابر ۲ می‌باشد. حال فرض و حکم استقرا را می‌نویسیم:

فرض استقرا: $P(k): \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \qquad (k \geq 2)$

حکم استقرا: $P(k+1): \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}}_{a} > \underbrace{\sqrt{k+1}}_{c}$

برای اثبات، به طرفین نامساوی فرض استقرا، عبارت $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم تا طرف چپ نامساوی حکم استقرا (یعنی a) ایجاد شود:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}}_{a} > \underbrace{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}}_{b}$$

بنابراین به نامساوی $a > b$ رسیدیم و می‌خواهیم ثابت کنیم $a > c$ (حکم استقرا). برای این منظور کافی است نشان دهیم $b > c$ (یا $b \geq c$). زیرا در این صورت داریم:

$a > b, b > c \Rightarrow a > b > c \Rightarrow a > c$ حکم ثابت می‌شود.

البته برای راحتی کار می‌توان از روش زیر استفاده نمود:

سمت راست نامساوی حاصل از فرض (یعنی b) را نوشته و سپس سمت راست نامساوی حکم (یعنی c) را با علامتش می‌نویسیم و نشان می‌دهیم نامساوی حاصل با توجه به شرط $k \geq 2$ همواره برقرار است.

سمت راست نامساوی حاصل از فرض — سمت راست نامساوی حکم با علامتش

$$\underbrace{\boxed{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}}}_{b} \; \underbrace{\boxed{> \sqrt{k+1}}}_{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \xrightarrow[\sqrt{k+1} > 0]{\times(\sqrt{k+1})} \sqrt{k^2+k} + 1 > (\sqrt{k+1})^2 \Rightarrow \sqrt{k^2+k} + 1 > k+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k} > k \xrightarrow{\text{توان } 2} k^2 + k > k^2 \Rightarrow k > 0$$

نامساوی فوق برای هر عدد طبیعی $k \geq 2$ برقرار است. پس حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ درست است.

۴۳- برای اثبات حکم $1 \times 2 + 2 \times 5 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1)$ به روش استقرای ریاضی، باید به دو طرف فرض استقرا کدام عبارت را اضافه نمود؟ (هماهنگ کشوری ۹۱)

۱) $k(3k+2)$ ۲) $(k+1)^2(k+2)$ ۳) $(k+1)(3k+1)$ ۴) $(k+1)(3k+2)$

۴۴- برای اثبات حکم $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$ به روش استقرای ریاضی، باید دو طرف فرض استقرا را در چه عبارتی ضرب نمود؟ (هماهنگ کشوری ۸۷)

۱) $\frac{k^2+2k}{k^2+2k+1}$ ۲) $\frac{k+3}{2k+4}$ ۳) $\frac{k^2+4k+3}{k^2+4k+4}$ ۴) $\frac{(k+2)^2}{k^2+4k+3}$

۴۵- تحت چه شرایطی می‌توان نتیجه گرفت $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است؟

۱) اگر $P(۲)$ درست بوده و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود.

۲) اگر $P(۱)$ و $P(۲)$ درست بوده و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۲)$ نتیجه شود.

۳) اگر $P(۲)$ درست بوده و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۲)$ نتیجه شود.

۴) اگر از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود.

۴۶- در بررسی حکم $P(n)$، اگر $P(۱)$ درست باشد و با فرض درستی $P(k)$ بتوان حکم $P(k+۳)$ را ثابت کنیم $(k \in \mathbb{N})$. آن‌گاه $P(n)$ به‌ازای کدام مقادیر n حتماً درست می‌باشد؟

۱) $\{۳n+۲ \mid n \in \mathbb{N}\}$ ۲) $\{۳n-۲ \mid n \in \mathbb{N}\}$ ۳) $\{۲n-۱ \mid n \in \mathbb{N}\}$ ۴) $\{۲n+۱ \mid n \in \mathbb{N}\}$

۴۷- حاصل عبارت $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\dots+\frac{۱}{۱۰۰\times۱۰۱}$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۱۰۱}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۹۹}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۰۰}{۹۹}$ ۴) $\frac{۱۰۰}{۱۰۱}$

۴۸- کدام‌یک از اعداد زیر را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد فرد متوالی با شروع از عدد ۱ نوشت؟ (مثال کتاب درسی)

۱) ۵۴ ۲) ۶۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲۱

۴۹- حاصل $۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲+\dots+۲۰^۲$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۹۳ با تغییر)

۱) ۲۵۵۸ ۲) ۲۵۸۵ ۳) ۲۸۷۰ ۴) ۲۲۸۵

۵۰- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی با شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد و داشته باشیم $۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳=۹۰۰۰۰$، n کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۹)

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۵۱- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی با شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل $۱۰^۳+۱۲^۳+۱۴^۳+\dots+۳۰^۳$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۱۱۴۱۰۰ ۲) ۱۱۴۲۰۰ ۳) ۱۱۴۳۰۰ ۴) ۱۱۴۴۰۰

۵۲- به‌ازای کدام مقدار a، نامساوی $(۱+a)^n \ge ۱+na$ همواره برقرار نمی‌باشد؟ $(n \in \mathbb{N})$ (تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵۳- اصل استقرای ریاضی در مورد حکم $P(n): ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{n}<\frac{۵n}{۱۲}$ برای اعداد طبیعی $n \ge m$ برقرار است. کوچک‌ترین مقدار m کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۴- در اصل استقرای تعمیم‌یافته، برای حکم $(n \ge m); (n+۱)! > ۴^n$ عدد طبیعی مناسب m کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۱ و مشابه تمرین کتاب درسی و هماهنگ کشوری ۹۳)

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۵۵- اگر $m_۱$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که به‌ازای آن نامساوی $۲^n \ge n^۲$ برقرار باشد و $m_۲$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که به‌ازای هر عدد طبیعی $n \ge m_۲$ نامساوی $۲^n \ge n^۲$ برقرار باشد، آن‌گاه $m_۱.m_۲$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۵۶- تعداد قطرهای یک $(n+۱)$ ضلعی محدب چه‌قدر از تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب بیشتر است؟ $(n \ge ۳)$

۱) n ۲) $n+۱$ ۳) $n-۱$ ۴) $n-۲$

۵۷- مجموع زوایای یک $(n+۱)$ ضلعی محدب چه‌قدر از مجموع زوایای یک n ضلعی محدب بیشتر است؟ $(n \ge ۳)$

۱) ۹۰° ۲) ۳۶۰° ۳) ۲۷۰° ۴) ۱۸۰°

۵۸- تعداد قطرهای یک $(n+۳)$ ضلعی، چهار برابر تعداد قطرهای یک n ضلعی می‌باشد. مجموع زوایای داخلی این n ضلعی کدام است؟

۱) ۵۴۰° ۲) ۱۰۸۰° ۳) ۹۰۰° ۴) ۷۲۰°

۵۹- در اثبات نامساوی $1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2\ ;\ n\geq 1$، با کمک استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی به‌کار می‌رود؟ (سراسری ۹۰)

۱) $4k^2+12k+9=(2k+3)^2$ ۲) $k+1<2k+3$ ۳) $4(k^2+3k+2)<(2k+3)^2$ ۴) $k+1<2k$

۶۰- در اثبات نامساوی $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\ ;(n\geq 3)$ با کمک استقرای تعمیم‌یافته از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟ (سراسری ۹۱ خارج از کشور و تمرین کتاب درسی)

۱) $2^k>k$ ۲) $2^{k+1}>2$ ۳) $2^{k+1}>3$ ۴) $2^k>k^2-1$

۶۱- در اثبات $n\geq 5\ ;\ n^2<2^n$ با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به‌کار می‌رود؟ (سراسری خارج از کشور ۸۶)

۱) $k^2>k$ ۲) $2k-1>5$ ۳) $(k-1)^2>2$ ۴) $(k+1)^2>2$

۶۲- در اثبات حکم $\sqrt{6}^{\,n}<n!$، با اصل استقرای تعمیم‌یافته، از کدام نامساوی بدیهی استفاده می‌شود؟ (سراسری خارج از کشور ۹۲)

۱) $(k+1)>\sqrt{6}\ ;\ k\geq 5$ ۲) $(k+1)>\sqrt{6}\ ;\ k\geq 3$ ۳) $k^2>6\ ;\ k\geq 3$ ۴) $k^2>6\ ;\ k\geq 5$

۶۳- در اثبات نامساوی $n!<2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ با کمک استقرای ریاضی، از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۴)

۱) $2^{k+1}>k+1$ ۲) $2^{k+2}>k$ ۳) $k^2+1>k+1$ ۴) $4^k>k+2$

درسنامه‌ی ۴

اثبات بازگشتی

گاهی اوقات برای اثبات بعضی قضایا (به‌ویژه در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها) حکم قضیه را درست در نظر می‌گیریم و با انجام عملیات ریاضی بر روی آن، به یک رابطه‌ی بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین وضعیتی، اگر بتوانیم نشان دهیم که تمامی مراحل انجام شده برگشت‌پذیر هستند، آن‌گاه اثبات ما معتبر خواهد بود.

تمرین اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: (هماهنگ کشوری ۹۱)

$$2a^2+b^2+1\geq 2(a-ba)$$

پاسخ: حکم را درست فرض کرده و تا حد امکان آن را ساده کرده تا به یک رابطه‌ی بدیهی برسیم:

$$2a^2+b^2+1\geq 2a-2ab\Rightarrow a^2+a^2+b^2+1-2a+2ab\geq 0\Rightarrow (a^2-2a+1)+(a^2+2ab+b^2)\geq 0\Rightarrow (a-1)^2+(a+b)^2\geq 0$$

نامساوی حاصل بدیهی است و چون تمام مراحل بازگشت‌پذیر است (می‌توانیم تمام علامت‌های $\Rightarrow$ را به‌صورت $\Leftrightarrow$ بنویسیم.)، پس حکم اثبات می‌شود.

تمرین با استفاده از اثبات بازگشتی، نامساوی $2\cot\theta(\cos\theta+\sin\theta)\leq 1+2\cot^2\theta$ را اثبات کنید.

پاسخ:

$$2\cot\theta(\cos\theta+\sin\theta)\leq 1+2\cot^2\theta\Leftrightarrow 2\cot\theta\cos\theta+2\cot\theta\sin\theta\leq \underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}+\cot^2\theta+\cot^2\theta$$

$$\Leftrightarrow 0\leq(\sin^2\theta-2\cot\theta\sin\theta+\cot^2\theta)+(\cos^2\theta-2\cot\theta\cos\theta+\cot^2\theta)\Leftrightarrow 0\leq(\sin\theta-\cot\theta)^2+(\cos\theta-\cot\theta)^2$$

رابطه‌ی فوق بدیهی است و تمام مراحل برگشت‌پذیر است. پس حکم مسأله ثابت شد.

۶۴- برای اثبات درستی یک حکم از کدام روش نمی‌توان استفاده کرد؟

۱) روش بازگشتی ۲) استدلال استنتاجی ۳) استقرای ریاضی ۴) مثال نقض

۶۵- در استدلال یک قضیه، فرض کرده‌ایم که حکم برقرار باشد و پس از انجام برخی از اعمال مجاز به یک رابطه‌ی بدیهی و یا فرض قضیه رسیده‌ایم، برای تکمیل اثبات لازم است کدام مورد برقرار باشد؟

۱) اثبات قضیه کامل است و نیاز به فرض دیگری نیست.

۲) مراحل انجام‌شده بازگشت‌پذیر باشد.

۳) یک مثال که در شرایط قضیه صدق و از آن حکم قضیه نتیجه شود مورد نیاز است.

۴) یک مثال نقض ارائه شود.

۶۶- شخصی به کمک اثبات بازگشتی به‌صورت زیر ثابت کرده است که حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی دلخواه a و b، هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. کدام قسمت اثبات وی اشتباه است؟

$$ab\geq 0\Leftrightarrow 2ab\geq 0\xLeftrightarrow{a^2+b^2\geq 0}\underbrace{a^2+b^2+2ab}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}\geq 0\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 0\ \text{(همواره درست)}$$

۱) $a^2+b^2+2ab\geq 0\Leftarrow(a+b)^2\geq 0$ ۲) $2ab\geq 0\Rightarrow a^2+b^2+2ab\geq 0$

۳) $2ab\geq 0\Leftarrow a^2+b^2+2ab\geq 0$ ۴) $ab\geq 0\Leftarrow 2ab\geq 0$