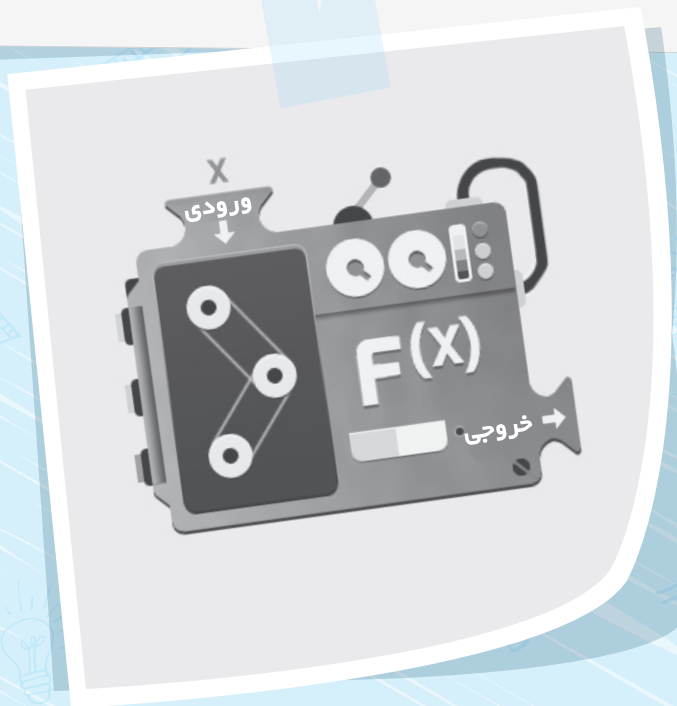


فصل ۱۴

تابع



مفهوم تابع

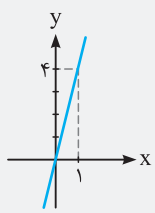
ضابطه جبری تابع

نمودار تابع خطی

نمودار تابع درجه دوم

رابطه و زوج مرتب

رابطه: در زندگی روزمره متغیرهای زیادی وجود دارند که به نحوی با هم در ارتباطند، مثل رابطه بین قد و وزن یک کودک و سن آن، یا رابطه بین مسافت طی شده توسط یک ماشین و مدت زمان حرکت آن. در ریاضیات هم متغیرهای زیادی هستند که با هم در ارتباطند، مثل رابطه بین شعاع و مساحت یک دایره یا رابطه بین محیط‌های دو شکل هندسی.



رابطه خطی: بعضی از رابطه‌ها به صورت خطی هستند، یعنی وقتی رابطه بین دو متغیر را به صورت ریاضی می‌نویسیم، به صورت خطی $y = ax + b$ می‌شود. مثلاً رابطه بین محیط مربع (P) و طول ضلع آن (x) که به صورت خطی $P = 4x$ می‌شود. در این رابطه، طول ضلع (x) به صورت مستقل تغییر می‌کند ولی محیط (P) براساس تغییرات x، تغییر می‌یابد، در واقع می‌توان گفت تغییرات متغیر P تابعی از تغییرات متغیر x است. به همین دلیل به x متغیر مستقل و به P متغیر وابسته می‌گوییم. اگر نمودار رابطه‌های خطی را رسم کنیم، به صورت یک خط می‌شود. مثلاً اگر نمودار رابطه $P = 4x$ (y = 4x) را رسم کنیم، به صورت مقابل است:

توجه در دستگاه مختصات، همه x و y‌هایی که روی این خط قرار دارند، با رابطه $y = 4x$ با هم در ارتباطند، پس می‌توانیم بگوییم، اگر مختصات نقطه‌ای در دستگاه مختصات در این معادله ($y = 4x$) صدق کند، آن نقطه روی این خط قرار دارد و بالعکس، اگر نقطه‌ای روی این خط قرار داشته باشد، مختصات آن در معادله $y = 4x$ صدق می‌کند. به عبارتی عرض هر نقطه روی این خط، ۴ برابر طول همان نقطه است. جدول زیر را ببینید:

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۱۲	-۸	-۴	۰	۴	۸

همیشه یادم باشه

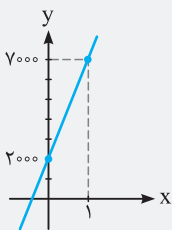
- بعضی از رابطه‌های بین دو متغیر را می‌توانیم به صورت خطی $y = ax + b$ بنویسیم که در این رابطه به x متغیر مستقل و به y متغیر وابسته گفته می‌شود، چون مقادیر x دلخواه است، ولی مقادیر y به‌ازای آن مقادیر x به‌دست می‌آید.
- نمودار رابطه‌های خطی، یک خط می‌شود که برای رسم آن داشتن مختصات ۲ نقطه کافی است.
- هر نقطه‌ای در دستگاه مختصات که مختصات آن در معادله یک خط صدق کند روی آن خط قرار دارد و بالعکس، اگر نقطه‌ای روی یک خط قرار داشته باشد، مختصات آن در معادله خط صدق می‌کند.

مثال برای ورود به یک شهر بازی در ابتدا باید مبلغ ۲۰۰۰ تومان بابت ورودی و سپس به‌ازای هر ۱ ساعت بازی، مبلغ ۵۰۰۰ تومان جداگانه پرداخت شود. رابطه بین تعداد ساعات بازی و پول پرداختی را بنویسید و این رابطه را در دستگاه مختصات رسم کنید. اگر شخصی بعد از ورود به شهر بازی، ۵ ساعت بازی کند، چند تومان باید بپردازد؟

پاسخ: چون مبلغ پرداختی وابسته به تعداد ساعات بازی است، پس اگر x را تعداد ساعات بازی و y را مبلغ پرداختی کل در نظر بگیریم، داریم:

$$y = 2000 + 5000x$$

مبلغ پرداختی مبلغ ورودی
برای x ساعت بازی



برای رسم این رابطه در دستگاه مختصات، کافی است به x مقادیر مختلف بدهیم و y آن را پیدا کنیم که البته چون رابطه خطی است، پیدا کردن دو نقطه برای رسم آن (خط) کافی می‌باشد:

x	۰	۱
y	۲۰۰۰	۷۰۰۰

حال اگر شخصی ۵ ساعت بازی کند، آن‌گاه $x = 5$ است و در نتیجه y آن برابر است با:

$$y = 2000 + 5000 \times 5 = 2000 + 25000 = 27000$$

پس با ۵ ساعت بازی باید ۲۷۰۰۰ تومان پرداخت کند.

زوج مرتب: همان‌طور که دیدید هر X و Y ای که توسط یک رابطه با هم در ارتباط هستند، یک نقطه را در صفحه مختصات مشخص می‌کنند که می‌توانیم آن را به صورت یک زوج به شکل (X, Y) بنویسیم. از آنجایی که ترتیب قرار گرفتن X و Y در این زوج، مهم است به آن **زوج مرتب** می‌گویند. در زوج مرتب (X, Y) به X مؤلفه اول و به Y مؤلفه (یا مختص) دوم گفته می‌شود. مثلاً در رابطه $Y = 4X$ می‌توانیم نقاط را به صورت $(-۳, -۱۲)$ ، $(-۲, -۸)$ ، ... و $(۲, ۸)$ بنویسیم.

تساوی دو زوج مرتب: می‌گوییم دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) با هم مساوی هستند، هرگاه $b = d$ و $a = c$ و برعکس، اگر $b = d$ و $a = c$ ، آن‌گاه $(a, b) = (c, d)$.

همیشه یادم باشه

۱ یک زوج مرتب به شکل (a, b) است که ترتیب قرار گرفتن a و b مهم می‌باشد. به a مؤلفه اول و به b مؤلفه دوم می‌گوییم و اگر آن را به‌عنوان نقطه‌ای در دستگاه مختصات در نظر بگیریم، a طول نقطه و b عرض نقطه است.

۲ $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$

مثال اگر دو زوج مرتب $(۳, -۶)$ و $(a - b, ۲b)$ با هم مساوی باشند، مقادیر a و b را پیدا کنید.

پاسخ: باید مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم هم با یکدیگر مساوی باشند:

$$(a - b, 2b) = (3, -6) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - (-3) = 3 \Rightarrow a + 3 = 3 \Rightarrow a = 0$$

رابطه غیرخطی نمتاب (نمایه توده بدنی): یکی از رابطه‌هایی که می‌توانیم کاربرد آن را در زندگی روزمره خودمان ببینیم، رابطه نمتاب (BMI) است. این رابطه، بین قد و وزن افراد به صورت مقابل برقرار است:

$$\text{نمتاب} = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجدور طول قد برحسب متر}^2}$$

با توجه به جواب به دست آمده از رابطه بالا می‌توان نتایج زیر را در مورد هر شخص به دست آورد:

وضعیت بدنی	نمتاب x
لاغر، کمبود وزن	$x < 19$
سلامت وزنی، طبیعی	$19 \leq x < 25$
اضافه وزن	$25 \leq x < 30$
چاقی، وضعیت بحرانی	$x \geq 30$

از طرفی وزن مطلوب با سن هر شخص هم رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن، میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نمتاب افزایش می‌یابد. جدول مقابل، نمتاب مناسب را با توجه به سن افراد نشان می‌دهد:

نمتاب	گروه سنی
۲۲	۱۹ - ۲۴
۲۳	۲۵ - ۳۴
۲۴	۳۵ - ۴۴
۲۵	۴۵ - ۵۴
۲۶	۵۵ - ۶۴
۲۷	۶۵ به بالا

حال با داشتن نمتاب متناسب با هر گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

توان دوم یا مربع قد برحسب متر \times نمتاب = وزن مطلوب برحسب کیلوگرم

همان‌طور که می‌بینید وزن مطلوب هر شخص، تابعی از طول قد آن است و به نمتاب نیز بستگی دارد. پس می‌توان گفت طول قد و نمتاب، متغیر مستقل و وزن، متغیر وابسته است.

حال به نظر شما آیا این رابطه، خطی است؟ واضح است که نه! رابطه بین طول ضلع و مساحت یک مربع چه‌طور؟ اگر X طول ضلع و S مساحت مربع باشد، رابطه بین آن‌ها به صورت $S = X^2$ می‌شود که خطی نیست. بنابراین رابطه‌های بسیاری هم وجود دارند که خطی نیستند، در ادامه کم‌کم با آن‌ها هم آشنا می‌شوید.

همیشه یادم باشه

برای حل سؤالات نمتاب، باید دوتا فرمول آن را حفظ باشیم و موقع جای‌گذاری اعداد، حتماً وزن را برحسب کیلوگرم و قد را برحسب متر در فرمول قرار دهیم.

مثال اگر سن فردی ۴۷ سال و قد او ۱۷۰ سانتی‌متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را به دست آورید.

پاسخ: این شخص در گروه سنی ۴۵ - ۵۴ سال قرار دارد، پس نمتاب مناسب برای او ۲۵ است. در نتیجه داریم:


کیلوگرم $72/25 = 25 \times (1/7)^2 = 25 \times 2/49 = 72/25$ = مربع قد برحسب متر \times نمتاب = وزن مطلوب

فانم اجازه! ما وزن مناسب خودمون رو به دست آوردیم، ۱۵ کیلو اضافه وزن داریم! بیچاره شدیم.

پاسخ: برا چی بیچاره! یه کم رژیم بگیر، درست میشی. اگر این قدر که می‌فوری، درس می‌فوندی، الان پروفیسور شده بودی!

۱- رابطه R مجموعه زوج مرتب‌هایی روی $A = \{0, 1, 2\}$ است که مجموع مؤلفه‌های اول و دوم آن‌ها زوج می‌باشد. R چند عضو دارد؟

آزمون‌های سراسری گاج (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲- اگر $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < 9\}$ و $R = \{(x, y) \mid x \in A, y^2 = x + 1\}$ ، آن‌گاه برد رابطه R شامل چند عدد طبیعی است؟ 

(۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۸

۳- رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq 4\}$ شامل چند زوج مرتب است؟

آزمون‌های سراسری گاج

(۱) ۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۸

۴- کدام یک از رابطه‌های زیر خطی نیست؟

(۱) رابطه بین طول ضلع و محیط مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) رابطه بین تعداد ساعت‌کاری و حقوق یک فرد

(۳) رابطه بین طول یک ضلع و وتر، در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین (۴) رابطه بین طول قطر و مساحت یک مربع

۵- اگر دو زوج مرتب $(x, 2)$ و $(3y - x, 4 - x)$ با هم برابر باشند، مقدار y کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{4}$

۶- اگر دو زوج مرتب $(2x - 1, 2y - x)$ و $(x - y, 2)$ با هم برابر باشند، آن‌گاه حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

آزمون‌های سراسری گاج

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷- رضا از ساعت $7:30$ صبح شروع به کار کرد و پس از ۴ ساعت کار از شرکت خارج شد. و دوباره بعد از $1:30$ به شرکت برگشت و تا

ساعت $18:30$ سرکار بود. اگر او ساعتی ۸۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این روز چند تومان حقوق دریافت خواهد کرد؟

(۱) ۷۶۰۰۰ (۲) ۶۸۰۰۰ (۳) ۷۲۰۰۰ (۴) ۶۴۰۰۰

۸- مریم و مینا در یک مغازه مشغول به کار هستند. مینا ۳ ساعت دیرتر از مریم سرکار حاضر می‌شود و ساعتی ۵۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرد. اگر

مریم ساعتی ۴۵۰۰ تومان حقوق بگیرد، رابطه‌ای که حقوق مریم را بر حسب ساعت کاری مینا (h) نشان دهد، کدام است؟  آزمون‌های سراسری گاج

(۱) $4500h - 13500$ (۲) $5000h + 1500$ (۳) $5000h - 1500$ (۴) $4500h + 13500$

۹- در سؤال قبل، اگر مینا بعد از h ساعت کار ۶۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، مریم بعد از h ساعت کار چند تومان کم‌تر حقوق خواهد گرفت؟

(۱) ۱۲۰۰۰ (۲) ۶۰۰۰ (۳) ۵۰۰۰ (۴) ۱۰۰۰۰


۱۰- دستمزد ساعتی فروشنده و حسابدار یک مؤسسه به ترتیب ۸۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ ریال و ساعت کار آن‌ها به ترتیب از ۷ صبح و ۹ صبح شروع

می‌گردد. چنانچه مجموع دستمزدها با w و ساعت کار حسابدار با h نشان داده شود، چه تابعی مجموع دستمزد آن دو را در هر

ساعت از روز بر حسب ساعات کار حسابدار مشخص می‌نماید؟

(۱) $w = 8000h + 12000(h - 2)$ (۲) $w = 20000(2h + 2)$

(۳) $w = 8000(h + 2) + 12000h$ (۴) $w = 20000(2h - 2)$

۱۱- علی برای آمادگی جسمانی جهت شرکت در مسابقه‌ای هر روز تمرین می‌کند. اگر او روز اول ۲۰ دقیقه تمرین کرده باشد و به‌ازای هر روز 

۳ دقیقه به طول تمرینات خود اضافه کند، پس از ۲۰ روز (در روز بیست و یکم) چند دقیقه تمرین می‌کند؟

آزمون‌های سراسری گاج

(۱) ۸۰ (۲) ۷۷ (۳) ۶۰ (۴) ۵۷

۱۲- اگر وزن شخصی با قد ۱۶۰ سانتی‌متر، ۶۵ کیلوگرم باشد، این شخص از لحاظ وضعیت بدنی در چه شرایطی است؟

(۱) کمبود وزن (۲) طبیعی (۳) اضافه وزن (۴) وضعیت بحرانی

۱۳- اگر سن علی ۲۷ سال و قد او ۱۸۰ سانتی‌متر باشد، وزن مناسب برای او کدام است؟

(۱) ۷۱/۲۸ (۲) ۷۷/۷۶ (۳) ۷۴/۵۲ (۴) ۷۲/۲۲

۱۴- مریم با قد ۱۵۵ سانتی‌متر دارای ۷۰ کیلوگرم وزن است. او تقریباً چه قدر باید وزن کم کند تا به حداکثر وزن طبیعی که می‌تواند داشته

باشد، برسد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۸ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۵- مهدی ۲۰ سال سن دارد. وزن مطلوب او با استفاده از نماتوب $79/42$ به‌دست آمده است، قد او چند سانتی‌متر است؟

(۱) ۱۸۰ (۲) ۱۷۵ (۳) ۱۹۰ (۴) ۱۶۵

تابع و انواع نمایش آن

تعریف تابع: یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می‌شود، هرگاه به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

حالا این تعریف یعنی چی؟ به زبان ساده می‌توان تابع را یک ماشین در نظر گرفت که به‌ازای هر ماده اولیه‌ای که به آن می‌دهیم، تنها یک وسیله تولید کند و بیرون دهد.

به زبان دیگر به هر رابطه‌ای که به‌ازای هر مقدار برای متغیر مستقل آن مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای متغیر وابسته آن، مانند y به‌دست آید، یک تابع می‌گوییم. به طور مثال در رابطه $P = 4x$ به‌ازای هر مقداری که به x بدهیم، تنها یک مقدار برای P به‌دست می‌آید، یعنی به‌ازای هر طول ضلع، تنها یک مقدار برای محیط وجود دارد. به این رابطه، تابع می‌گوییم. در رابطه مساحت ($S = x^2$) نیز چون $x, S > 0$ است، به‌ازای هر x یک مقدار برای S به‌دست می‌آید و این رابطه هم تابع است. اما اگر رابطه $y^2 = x$ را داشته باشیم، این رابطه دیگر تابع نیست، چون x هر مقدار غیرصفری که داشته باشد، به‌ازای آن، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید. مثلاً به‌ازای $x = 1$ ، دو مقدار $y = 1$ و $y = -1$ را برای آن داریم.

روش‌های مختلف نمایش یک رابطه و شرط تابع بودن آن:

۱ نمایش جدولی: یک جدول دو سطری رسم می‌کنیم که در بالا، متغیر مستقل (مانند x) و در پایین، متغیر وابسته (مانند y) را می‌نویسیم. سپس مقادیر x و مقادیر y متناظر آن‌ها را در جدول یادداشت می‌کنیم.

شرط تابع بودن: یک جدول مربوط به یک رابطه در صورتی نشان‌دهنده یک تابع است که به‌ازای هر x در سطر اول آن، تنها یک مقدار برای y در سطر دوم وجود داشته باشد.

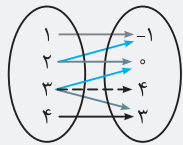
مثال آیا جدول مقابل، نشان‌دهنده یک تابع است؟

x	-۱	۰	۱	۲
y	۲	-۱	۳	۱

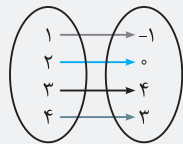
پاسخ: اگر دقت کنیم، خواهیم دید که در سطر بالای جدول $۲ = ۱$ است و این یعنی به‌ازای $x = 1$ در سطر اول، دو مقدار $y = 3$ و $y = 1$ را در سطر دوم داریم، پس این جدول، مربوط به یک تابع نیست.

۲ نمودار پیکانی: از یک شکل هندسی که معمولاً بیضی یا دایره است، برای رسم نمودار پیکانی کمک می‌گیریم. دو تا از آن‌ها را کنار هم می‌کشیم، سپس مقادیر متغیر مستقل را در شکل سمت چپی و مقادیر متغیر وابسته را در شکل سمت راستی قرار می‌دهیم (البته برعکس این هم مشکلی ندارد، ولی عرف این‌طوری است). بعد از هر عضو مجموعه اول (سمت چپ)، یک پیکان به یک عضو مجموعه دوم (سمت راست) که متناظر آن است، رسم می‌کنیم.

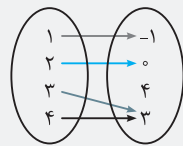
شرط تابع بودن: یک نمودار ون تنها در صورتی نشان‌دهنده یک تابع است که از هر عضو مجموعه اول تنها یک پیکان به هر عضو مجموعه دوم خارج شده باشد.



مثال نمودار پیکانی مقابل، با حذف حداقل چند پیکان تبدیل به یک تابع می‌شود؟



پاسخ: باید از هر عضو مجموعه اول تنها یک پیکان خارج شود، پس چون از عضو ۲، دو پیکان و از عضو ۳، سه پیکان خارج شده، حداقل باید از پیکان‌های عدد ۲، یک و از پیکان‌های عدد ۳، دو پیکان را حذف کنیم تا تبدیل به نمودار یک تابع شود. مثلاً به‌صورت روبه‌رو:



یک نکته مهم که در این جا باید به آن دقت کنید، این است که حواستان باشد، پیکان‌ها را طوری حذف کنید که حتماً به هر عضو مجموعه دوم، یک پیکان وارد شود، چون در غیر این‌صورت، نمودار تابع نمی‌شود. مثلاً اگر پیکان‌ها را به‌صورت مقابل، حذف می‌کردیم، نمودار تابع نبود، چون به عضو ۴ در شکل سمت راست، هیچ پیکانی وارد نشده بود.

۳ نمایش زوج مرتبی: اگر هر مقدار متغیر مستقل را به‌عنوان مؤلفه اول و هر مقدار متغیر وابسته متناظر آن را به‌عنوان مؤلفه دوم یک زوج مرتب در نظر بگیریم، آن‌گاه مجموعه این زوج مرتب‌ها رابطه ما را تشکیل می‌دهند.

شرط تابع بودن: یک رابطه زوج مرتبی تنها در صورتی نشان‌دهنده یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند. به عبارتی تنها در صورتی یک رابطه زوج مرتبی، تابع است که اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان داشتیم، مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم با یک‌دیگر برابر باشند.

مثال اگر رابطه $f = \{((-1)^2, 2), (1, a+1), (\sqrt{9}, b), (3, a)\}$ نشان دهنده یک تابع باشد، مقادیر a و b را پیدا کنید.

پاسخ: اولاً توجه کنید که معمولاً رابطه و تابع را با حروف کوچک انگلیسی نشان می‌دهند (و مجموعه را با حرف بزرگ). ثانیاً رابطه f را می‌توان به شکل $f = \{(1, 2), (1, a+1), (3, b), (3, a)\}$ نوشت، چون $(-1)^2 = 1$ و $\sqrt{9} = 3$ است. حال در این رابطه، دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, a+1)$ دارای مؤلفه اول برابر ۱ هستند، پس برای این که f تابع باشد، باید مؤلفه دوم آن‌ها نیز برابر شود. در نتیجه:

$$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

برای دو زوج مرتب $(3, a)$ و $(3, b)$ هم به همین صورت داریم:

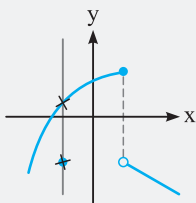
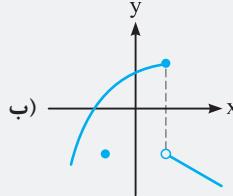
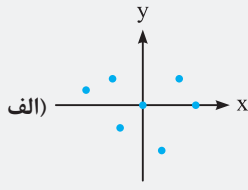
$$a = b \stackrel{a=1}{\Rightarrow} b = 1$$

پس این رابطه به شکل $f = \{(1, 2), (3, 1)\}$ درمی‌آید که تابع است.

۴ نمودار مختصاتی: اگر هر یک از زوج مرتب‌های یک رابطه را یک نقطه مانند (x, y) در صفحه، فرض کنیم که x مقدار متغیر مستقل و y مقدار متغیر وابسته متناظر آن است و تمام نقاط این رابطه را در یک دستگاه مختصات، مشخص کنیم، آن‌گاه نمودار مختصاتی آن رابطه به دست می‌آید. **شرط تابع بودن:** یک نمودار مختصاتی در صورتی نشان دهنده یک تابع است که اگر هر خطی موازی محورهای رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. به عبارتی هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محورهای باشد، قرار نداشته باشند.

تذکره! نمودار مختصاتی یک رابطه ممکن است از چند نقطه تشکیل شده باشد یا به شکل یک خط یا منحنی یا ... باشد.

مثال کدام یک از نمودارهای زیر که هر کدام مربوط به یک رابطه هستند، یک تابع را مشخص می‌کنند؟



پاسخ: الف) تابع است. چون هر خطی که موازی محورهای بکشیم، هیچ‌گاه دو نقطه از نمودار را قطع نمی‌کند. ب) تابع نیست. چون خطی موازی محورهای وجود دارد که نمودار رابطه را در دو نقطه قطع می‌کند:

فانم اجازه! اون نقطه تو خالیه تو قسمت (ب) یعنی چی؟

پاسخ: نقطه توپر که یعنی نقطه جزو تابع یا رابطه هست ولی نقطه توخالی یعنی جزو تابع یا رابطه نیست. همیشه این نقاط رو در نمایش تابع به صورت دایره توخالی مشخص می‌کنند.

۵ ضابطه جبری: گاهی می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های یک رابطه را با یک ضابطه یا قانون بیان کنیم. (همان‌طور که در درسنامه قبل گفتیم، مانند $y = 4x$) در ضابطه جبری یک رابطه، با قرار دادن هر مقدار از متغیر مستقل در آن، مقدار متغیر وابسته متناظر آن به دست می‌آید که معمولاً به صورت $y = f(x)$ نشان داده می‌شود.

شرط تابع بودن: یک ضابطه در صورتی نشان دهنده یک تابع است که به ازای هر مقداری که به متغیر مستقل آن می‌دهیم، تنها یک مقدار برای متغیر وابسته آن به دست آید.

مثال کدام یک از ضابطه‌های زیر، یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $y = -5x + \sqrt{x}$ ب) $|y| = 2x - 1$

پاسخ: الف) اگر به x هر مقداری (نامنفی) بدهیم، تنها یک مقدار برای y به دست می‌آید، پس تابع است.

ب) تابع نیست، چون مثلاً به ازای $x = 1$ ، دو مقدار $y = 1$ و $y = -1$ برای آن به دست می‌آید.

۶ نمایش توصیفی: یکی دیگر از نمایش‌هایی که کم‌تر استفاده می‌شود، نمایش توصیفی است. در این نمایش رابطه بین دو متغیر x و y با توضیحات فارسی بیان می‌شود. مثلاً «اگر x را دو برابر کرده و به اضافه یک کنیم، y به دست می‌آید.» که اگر آن را به صورت جبری بنویسیم، به شکل $y = 2x + 1$ می‌شود. هم‌چنین رابطه‌هایی که بین موارد مختلف اشیاء یا افراد یا ... در اطراف ما وجود دارند، به این نحو بیان می‌شوند، مثلاً رابطه‌ای که به هر فرد، وزن او را نسبت می‌دهد.

شرط تابع بودن: باید به ازای هر مقدار متغیر مستقل، تنها یک مقدار برای متغیر وابسته آن وجود داشته باشد.

مثال کدام یک از رابطه‌های زیر، یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) رابطه‌ای که به هر استان، مرکز آن را نسبت می‌دهد. ب) رابطه‌ای که به هر عدد، خود عدد و قرینه آن را نسبت می‌دهد.

پاسخ: الف) این رابطه تابع است، چون برای هر استان تنها یک مرکز وجود دارد و استانی وجود ندارد که دو مرکز داشته باشد.

ب) تابع نیست، زیرا متناظر هر عدد دو مقدار وجود دارد، یکی خود عدد و دیگری قرینه آن.

فانم اجازه! ما می‌تونیم تابع به شکل‌های جدولی، پیکانی و مختصاتی رو به شکل زوج مرتبی بنویسیم، بعد تابع بودنش رو بررسی کنیم؟
پاسخ: پرا نمی‌تونی! تو هل تست که هیچ مشکلی نداره، ولی برای امتحان باید هر شکل از تابع رو با دلایل مربوط به خودش رد یا تأیید کنی. تو شکل مفتضاتی هم فقط وقتی نمودار از نقطه تشکیل شده باشه، می‌تونی اون رو به شکل زوج مرتبی بنویسی وگرنه که نمی‌تونی این کار رو انجام بری.

همیشه یادم باشه

- یک رابطه را به ۶ روش می‌توانیم نمایش بدهیم و برای هر روش، یک راه تشخیص برای تابع بودن یا نبودن آن وجود دارد. این روش‌ها عبارت‌اند از:
- ۱ جدولی \leftarrow شرط به‌ازای هر مقدار در سطر اول، یک مقدار در سطر دوم وجود داشته باشد.
 - ۲ پیکانی \leftarrow از هر عضو مجموعه اول تنها یک پیکان به هر عضو مجموعه دوم خارج شده باشد.
 - ۳ زوج مرتبی \leftarrow هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشیم.
 - ۴ نمودار مختصاتی \leftarrow هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
 - ۵ ضابطه جبری \leftarrow شرط برای هر مقدار x ، تنها یک مقدار برای y به‌دست آید.
 - ۶ توصیفی \leftarrow برای هر مقدار متغیر مستقل تنها یک مقدار برای متغیر وابسته وجود داشته باشد.

فانم اجازه! کدوم نمایش مهم‌تره و بهتر باید بلد باشیم؟

پاسخ: همشون مهم هستن ولی بیشتر در تست‌ها از نمایش زوج مرتبی و نموداری برای تابع بودن یا نبودن یک رابطه سؤال دراز می‌شه. پس این دوتا رو خیلی خیلی خوب بلد باشید.

نکته اگر A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد، n^m تابع از A به B می‌توان تعریف کرد، زیرا برای عضو اول A ، n انتخاب داریم، چون به این عضو A هر کدام از n عضو B را می‌توان نظیر کرد. برای عضو دوم A هم n انتخاب داریم و ... به همین ترتیب برای عضو m ام A هم n انتخاب وجود دارد، در واقع $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{m}$ انتخاب داریم که می‌شود n^m .

مثال از مجموعه ۳ عضوی A به مجموعه ۲ عضوی B چند تابع می‌توان تعریف کرد؟

پاسخ: با توجه به نکته قبل، $2^3 = 8$ تابع می‌توان تعریف کرد. یک مثال می‌زنیم تا به خوبی مفهوم را درک کنید:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$

$f_1 = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$, $f_2 = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$, $f_3 = \{(1,1), (2,2), (3,1)\}$

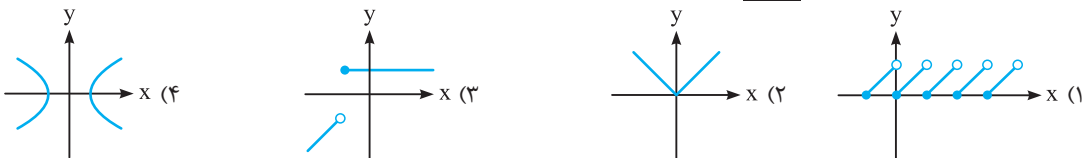
$f_4 = \{(1,1), (2,2), (3,2)\}$, $f_5 = \{(1,2), (2,1), (3,1)\}$, $f_6 = \{(1,2), (2,1), (3,2)\}$

$f_7 = \{(1,2), (2,2), (3,1)\}$, $f_8 = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$

۱۶- کدام رابطه، بیانگر یک تابع نیست؟

- (۱) رابطه بین هر شهر و جمعیت آن در یک زمان خاص
- (۲) رابطه بین اعداد و مربع آن‌ها
- (۳) رابطه بین افراد و ورزش مورد علاقه آن‌ها
- (۴) رابطه بین هر دانش‌آموز و روز تولدش

آزمون‌های سراسری گاج



۱۷- کدام نمودار مربوط به یک تابع نیست؟

۱۸- اگر x متغیر مستقل و y متغیر وابسته باشد، کدام‌یک از جدول‌های زیر، یک تابع را نشان می‌دهد؟

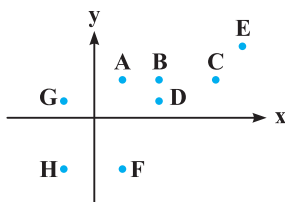
x	۱	۲	۳	$\sqrt{4}$
y	۴	۳	-۲	۰

x	۱	۲	۳	۴
y	۵	۵	۵	۵

x	۲	۲	۲	۲
y	۱	۲	۳	۴

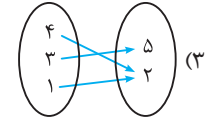
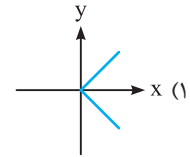
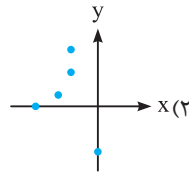
x	۱	۲	$(-1)^2$	۳
y	-۱	۰	۳	۱

۱۹- با حذف کدام نقطه‌ها از نمودار زیر، می‌توان یک تابع ساخت؟



- (۱) C, B, A
- (۲) G, F, B
- (۳) E, F, D
- (۴) H, E, A

۲۰- کدام یک از روابط زیر، نمایش دهنده یک تابع است؟

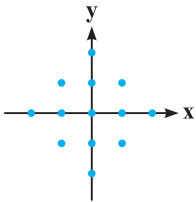


(۴) $\{(-\sqrt{9}, 3), (4, 2), (-3, 2), (5, 3)\}$

آزمونهای سراسری گاج

۲۱- حداقل چند نقطه از رابطه مقابل را حذف کنیم تا به یک تابع تبدیل شود؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴) ۸



آزمونهای سراسری گاج

۲۲- به ازای کدام مقدار برای b ، رابطه $R = \{(0, 1), (a, b + 1), (2, 6), (0, a - 1)\}$ یک تابع است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۳- نمودار تابع $f = \{(4, 5), (-a, b), (-1, a + 2), (2a, 1), (-1, 3)\}$ از چند نقطه تشکیل شده است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

آزمونهای سراسری گاج

۲۴- حداقل چند نقطه از نمودار رابطه $R = \{(n^2, n) | n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 4\}$ را حذف کنیم تا به یک تابع برسیم؟

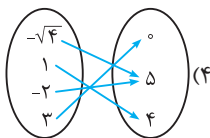
- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۳

۲۵- اگر جدول مقابل مربوط به نقاط یک تابع باشد، $a - b$ کدام است؟

x	۱	۰	۲	$(-1)^0$	$2 - \sqrt{4}$
y	۳	a	-۴	b	-۱

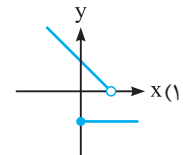
- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۶- کدام یک از گزینه‌های زیر، یک تابع را نشان می‌دهد؟

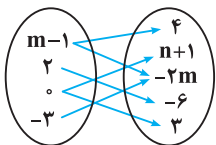


x	2^0	-۱	۰	۱
y	-۱	۲	-۱	۲

(۲) $2y^2 = x + 8$



۲۷- اگر نمودار پیکانی مقابل مربوط به یک تابع باشد، $n + m$ کدام است؟



- (۱) صفر (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) هیچ وقت تابع نیست.

۲۸- به ازای کدام مقدار m رابطه $R = \{(3, m^2), (3, 1), (-4, m), (1, m + 2), (m, 4)\}$ یک تابع است؟

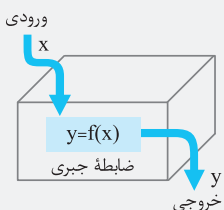
- (۱) -۱ (۲) ± 2 (۳) -۲ (۴) ± 1

۲۹- از مجموعه n عضو A به مجموعه 4 عضو B ، 256 تابع تعریف شده است. A چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

درسنامه ۳

ضابطه جبری، مقدار تابع و دامنه و برد



ضابطه جبری: همان طور که گفتیم، گاهی می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های یک تابع را با یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. مثلاً تابع $f = \{(1, 0), (3, 2), (-1, -2)\}$ را در نظر بگیرید. اگر به مؤلفه‌های اول و دوم دقت کنید، می‌بینید که اگر از مؤلفه‌های اول، یک واحد کم کنید، مؤلفه‌های دوم متناظر آن‌ها به‌دست می‌آیند. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$ ، آن‌گاه $y = x - 1$ ، به این معادله، ضابطه تابع f می‌گوییم. تأثیر تابع f روی متغیر مستقل x را با $f(x)$ نشان می‌دهیم که حاصل این تأثیر همان متغیر وابسته y است، در واقع $y = f(x)$. همان‌طور که در درسنامه قبلی گفتیم، می‌توانیم تابع را به‌عنوان یک ماشین در نظر بگیریم که به‌ازای هر ورودی، یک خروجی داریم. حال شکل این ماشین تابع را می‌توانیم به‌صورت مقابل رسم کنیم:

مثال تابع f طوری است که هر عددی به آن می‌دهیم، ۲ برابر کرده و بعد ۳ واحد به آن اضافه می‌کند و حاصل از آن خارج می‌شود. ضابطه f را بنویسید.

پاسخ: اگر x ورودی تابع f باشد، طبق توضیحات عملکرد آن، ابتدا $2x$ و بعد $2x + 3$ را تولید می‌کند، پس در نهایت $y = 2x + 3$ از آن خارج می‌شود، یعنی ضابطه آن به صورت $f(x) = 2x + 3$ است.

مقدار تابع: اگر مقدار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را به ازای $x = a$ بخواهیم، کافی است a را در ضابطه تابع به جای همه x ها قرار دهیم و حاصل، یعنی $f(a)$ را به دست آوریم.

مثال مقدار تابع $f(x) = \frac{-x^2 + 1}{x}$ را به ازای $x = 1$ و $x = -2$ به دست آورید.

$$f(1) = \frac{-1^2 + 1}{1} = \frac{-1 + 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

پاسخ: ابتدا به جای x ها عدد ۱ را قرار می‌دهیم و مقدار $f(1)$ را به دست می‌آوریم:

سپس به جای x ها عدد -2 را قرار می‌دهیم و $f(-2)$ را می‌یابیم:

$$f(-2) = \frac{-(-2)^2 + 1}{-2} = \frac{-4 + 1}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

تذکره! گاهی به جای این‌که مقدار تابع را به ازای یک عدد بخواهند، مقدار تابع را به ازای یک متغیر یا یک عبارت می‌خواهند، مثلاً مقدار تابع $f(x)$ را به ازای $x = t$ یا $x = a^2 + 1$ از ما می‌خواهند. در این حالت هم کافی است به جای تمام x ها در $f(x)$ ، t یا $a^2 + 1$ را قرار دهیم و مقدار تابع را به ازای آن‌ها به دست آوریم.

نکته گاهی تابع‌هایی تودرتو داریم، مثل $f(f(x))$ و می‌خواهیم مقدار این تابع را به ازای $x = a$ به دست آوریم. در این حالت ابتدا از تابع درونی، یعنی $f(x)$ شروع می‌کنیم و مقدار $f(x)$ را به ازای $x = a$ یعنی $f(a)$ را می‌یابیم. حال اگر $f(a) = b$ باشد، این مقدار را در تابع بیرونی قرار می‌دهیم، یعنی $f(f(a)) = f(b)$ و مقدار $f(b)$ را به دست می‌آوریم. پس اگر $f(a) = b$ و $f(b) = c$ باشد، یعنی در ضابطه تابع f ، نقاط (a, b) و (b, c) وجود داشته باشند، آن‌گاه داریم:

$$f(f(x)) \stackrel{x=a}{=} f(\underbrace{f(a)}_b) = f(b) = c \Rightarrow f(f(a)) = c$$

مثال اگر $f(x) = x^2 - 2x$ ، آن‌گاه مقدار $f(t-1)$ و $f(f(-1))$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$x = t - 1 \Rightarrow f(t - 1) = (t - 1)^2 - 2(t - 1) = t^2 - 2t + 1 - 2t + 2 = t^2 - 4t + 3$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 1 + 2 = 3 \Rightarrow f(-1) = 3 \Rightarrow f(f(-1)) = f(3) = 3^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$$

فانم اجازه! پس وقتی به جای y عدد، مقدار تابع رو به ازای x به عبارت بخوان باز هم هیچ فرقی نمی‌کنه، ما عبارت رو به همون چشم عدد می‌بینیم و به جای x های تابع، اون عبارت رو قرار می‌دیم. درسته دیگه!

پاسخ: بله! آفرین. دقیقاً همین‌ه. فقط هواسه باشه وقتی منفی، پشت دو یا پنر جمله است. یادت نره منفی رو روی دومی و بعری‌ها هم اثر بری. یه اشتباهیه که اکثر بچه‌ها همیشه مرتکب میشن و تو این سؤال‌ها فیلی اتفاق میفته.

دامنه و برد تابع: دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری است که متغیر مستقل (x) دارد و آن را با D_f نشان می‌دهیم. برد تابع، مجموعه مقادیری است که متغیر وابسته (y) دارد و در واقع مقادیری است که به متغیرهای مستقل نظیر شده و آن را با R_f نمایش می‌دهیم.

اگر تابع f از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده باشد، آن را به صورت $\begin{cases} f = A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ می‌نویسیم که $y = f(x)$ ضابطه تابع و A دامنه تابع است. اعضای برد با توجه به اعضای A و از ضابطه f به دست می‌آیند.

فانم اجازه! چرا نمی‌گید B برد تابع است؟

پاسخ: سؤال خوبی پرسیدی، آفرین. چون B در واقع برد نیست. B هم دامنه نامیده می‌شه که برد تابع زیرمجموعه‌ای از B یا همون هم دامنه است. اسم

هم دامنه در کتاب نیومره ولی بهتر بود که می‌گفت، چون تو تمرین‌ها با توجه به تعریفی که از تابع کرده بچه‌ها دچار ابهام میشن. مثلاً تابع $\begin{cases} f(x) : A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x + 1 \end{cases}$

که $A = \{0, 1, 2, 3\}$ رو در نظر بگیر. در این‌جا $B = \mathbb{R}$ هست ولی برد تابع \mathbb{R} نیست. در واقع برد تابع برابر $R = \{1, 2, 3, 4\}$ هست که با توجه به A و ضابطه f به دست میاد.

البته لازم نیست فوراً رو درگیر این موضوع و این اسم بکنی. فقط گفتیم که برونی و آگه تو یه سوالی دیری که B با برد برابر نیست، دچار ابهام و اشکال نشی.

دامنه و برد در نمایش‌های مختلف تابع:

- ۱ **جدولی:** مجموعه همه مقادیر سطر اول، دامنه تابع و مجموعه همه مقادیر سطر دوم جدول، برد تابع است.
 - ۲ **نمودار پیکانی:** مجموعه همه مقادیری که پیکان از آن‌ها خارج شده، دامنه تابع و مجموعه همه مقادیری که پیکان به آن‌ها وارد شده، برد تابع را تشکیل می‌دهند.
 - ۳ **زوج مرتبی:** مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها، دامنه تابع و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها برد تابع را تشکیل می‌دهند.
 - ۴ **نمودار مختصاتی:** مجموعه همه طول‌های نقاط نمودار، دامنه تابع و مجموعه همه عرض‌های نقاط نمودار، برد تابع را می‌سازند.
 - ۵ **ضابطه جبری:** مجموعه همه مقادیر متغیر مستقل (X)، دامنه تابع و مجموعه همه مقادیر متغیر وابسته (Y)، برد تابع را تشکیل می‌دهند.
- نکته خانم اجازه!** پس همیشه گفت اعضای مجموعه دامنه همیشه اون اولی‌ها هستن (سطر اول، مجموعه اول، مؤلفه اول، طول نقاط، X ها) و اعضای مجموعه برد، همیشه اون دومی‌ها هستن (سطر دوم، مجموعه دوم، مؤلفه دوم، عرض نقاط، Yها)، درست‌ه؟
 پاسخ: بله! آفرین. مثل این که درس دامنه و برد رو فوب یاد گرفتی. خیلی هم قشنگ به زهنت سپردی!

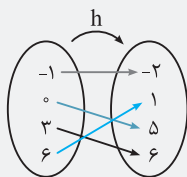
دو تابع خاص:

تابع همانی: تابع $f(x) = x$ را همانی گوییم، زیرا هر مقدار X در دامنه را به همان مقدار در برد نظیر می‌کند. پس دامنه و برد این تابع با هم برابر است.
تابع ثابت: تابع $f(x) = c$ را که $c \in \mathbb{R}$ است، ثابت گوییم، زیرا هر مقدار X در دامنه را به مقدار ثابت C در برد نظیر می‌کند. پس دامنه این تابع هر چیزی می‌تواند باشد ولی برد آن مجموعه تک عضوی {C} است.

همیشه یادم باشه

- * یک تابع مانند ماشینی است که به‌ازای هر ورودی، یک خروجی دارد و اگر $(x, y) \in f$ ، آن‌گاه $y = f(x)$ را ضابطه یا قانون تابع می‌گوییم.
 - * مقدار تابع f به‌ازای $x = a$ برابر $f(a)$ است که به‌جای همه Xها در ضابطه تابع، a را قرار داده‌ایم.
 - * وقتی تابعی با ضابطه $y = f(x)$ از مجموعه A به مجموعه B تعریف می‌شود، آن را به صورت $f: A \rightarrow B$ نشان می‌دهیم که A دامنه است و برد با توجه به اعضای A به‌دست می‌آید.
 - * در تمام نمایش‌های تابع، مجموعه مقادیر متغیر مستقل، دامنه و مجموعه مقادیر متغیر وابسته، برد تابع را تشکیل می‌دهند:
- | | |
|--------------------------|---|
| ۱ جدولی: | $D_f = \{\text{همه اعداد سطر اول}\}$ ، $R_f = \{\text{همه اعداد سطر دوم}\}$ |
| ۲ نمودار پیکانی: | $D_f = \{\text{عضوهایی که پیکان به آن‌ها وارد شده}\}$ ، $R_f = \{\text{عضوهایی که پیکان از آن‌ها خارج شده}\}$ |
| ۳ زوج مرتبی: | $D_f = \{\text{همه مؤلفه‌های اول}\}$ ، $R_f = \{\text{همه مؤلفه‌های دوم}\}$ |
| ۴ نمودار مختصاتی: | $D_f = \{\text{عرض همه نقاط نمودار}\}$ ، $R_f = \{\text{طول همه نقاط نمودار}\}$ |
| ۵ ضابطه جبری: | $D_f = \{\text{همه مقادیر X}\}$ ، $R_f = \{\text{همه مقادیر Y}\}$ |
- * هم‌چنین دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است و برد تابع ثابت $f(x) = c$ برابر {C} می‌باشد.

مثال برای تابع‌های زیر، دامنه و برد را مشخص کنید.



(ج) $g = \{(1, 2), (-4, 0), (3, -1), (4, 5)\}$

(الف) $f: A \rightarrow B$, $A = \{-2, 0, 1, \frac{3}{4}, 4\}$
 $f(x) = x^2 + 1$

پاسخ: الف) مجموعه A دامنه تابع است. برای به‌دست آوردن برد آن، مقادیر مجموعه A را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم و مقادیر برد را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\ x = \frac{3}{4} \Rightarrow f(\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \\ x = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{-2, 0, 1, \frac{3}{4}, 4\} , R_f = \{5, 1, 2, \frac{25}{16}, 17\}$$

ب) مجموعه همه مؤلفه‌های اول، دامنه و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم، برد تابع را تشکیل می‌دهند:

$D_g = \{1, -4, 3, 4\}$ ، $R_g = \{2, 0, -1, 5\}$

ج) مجموعه همه اعدادی که پیکان از آن‌ها خارج شده، دامنه و مجموعه اعدادی که پیکان‌ها به آن‌ها وارد شده، برد تابع را می‌سازند:

$D_h = \{-1, 0, 3, 6\}$ ، $R_h = \{-2, 1, 5, 6\}$

مثال الف اگر $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد که $A = \{-1, 2, 3, 5\}$ ، برد تابع را به دست آورید.

ب اگر $g: A \rightarrow B$ یک تابع باشد که $A = \mathbb{R}$ ، برد تابع را بنویسید.

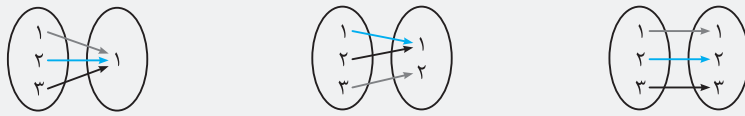
پاسخ: الف) f تابع همانی است، پس برد تابع برابر دامنه اش است: $R_f = \{-1, 2, 3, 5\}$

ب) g تابع ثابت است که تمام اعضای دامنه را به عدد ۲ نظیر می‌کند، پس برد آن برابر $R_g = \{2\}$ می‌باشد.

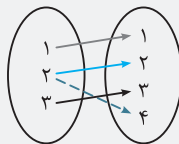
نکته در یک تابع با دامنه متناهی، تعداد اعضای برد همواره کوچک‌تر یا مساوی تعداد اعضای دامنه است. اگر در ضابطه‌ای تعداد اعضای برد بیشتر از تعداد اعضای دامنه بود، آن ضابطه مربوط به یک تابع نیست.

فانم اجازه! همیشه در مورد این نکته بیشتر توضیح بدید؟

پاسخ: بله، چرا همیشه! فرض کن یک تابع داریم که دامنه اون 3 تا عضو داره، تو این تابع، هتماً برد 3 تا عضو یا کم‌تر داره، حالا چرا؟ با به مثال برات توضیح میدم. آگه دامنه، مجموعه $\{1, 2, 3\}$ باشه، برد می‌تونه مجموعه سه‌عضوی مثلاً $\{1, 2, 3\}$ یا دو‌عضوی $\{1, 2\}$ یا حتی یک‌عضوی $\{1\}$ باشه. این تابع‌ها رو با نمودار پیکانی نشون میدم تا ببینید چه طوری هستن:



اما حالا آگه برد یک مجموعه چهار‌عضوی مثل $\{1, 2, 3, 4\}$ باشه، اون وقت نمودار پیکانی باید به صورت



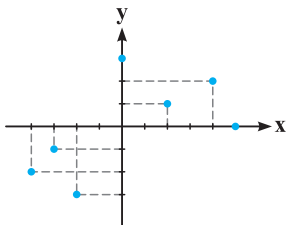
نست، چون یکی از عضوهای دامنه مجبوره که به دو تا عضو برد نظیر بشه و همین تابع بودن رو فراب می‌کنه و هرچی اعضای برد بیشتر بشن این فرایه هم بیشتر میشه!

۳۰- اگر نمودار تابع f شامل نقاط $(5, 2)$ ، $(4, -1)$ ، $(1, 5)$ و $(-3, 4)$ باشد، مقدار $f(4) - 2f(5)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) -۸

۳۱- برد تابع f در شکل مقابل، کدام است؟

- (۱) $\{-4, -3, -2, 0, 2, 4, 5\}$
 (۲) $\{-3, -2, 0, 3, 4, 5\}$
 (۳) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 (۴) $\{-4, -3, -1, 0, 2, 3, 4\}$



انسانی خارج ۹۵

۳۲- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 7}$ باشد، $f(4) - f(2\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۳- اگر دامنه تابع $y = -2x^2 + 1$ مجموعه $\{2, 1, 0, -2\}$ باشد، مجموعه برد آن کدام است؟

- (۱) $\{-7, -1, 1, 7\}$ (۲) $\{-7, -1, 1\}$ (۳) $\{-7, 1, 7\}$ (۴) $\{-7, -1\}$

۳۴- اگر دامنه تابع $f(x) = -2x + 3$ ، مجموعه $\{4, 3, 2, 1, 0, -1\}$ باشد، آن‌گاه برد تابع شامل چند عدد مثبت است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

انسانی داخل ۹۲

۳۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$ ، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

انسانی خارج ۹۳

۳۶- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ باشد، $f(3 + 2\sqrt{6})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) $2 + \sqrt{6}$ (۴) ۶

انسانی داخل ۹۱

۳۷- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، حاصل $f(1 + \sqrt{2}) - f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

انسانی داخل ۸۸

۳۸- اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ ، آن‌گاه $f(2 + \sqrt{7}) - f(2)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

انسانی داخل ۹۳

۳۹- اگر $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x-2}$ باشد، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $1 + \sqrt{2}$

انسانی خارج ۸۶

۴۰- در تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx - 2$ با شرط $f(1) = -3$ و $f(3) = 7$ ، مقدار b کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۴۱- مجموع اعضای برد تابع $f = \{(a, a-b), (1, 2a), (-2, 3), (1, -4), (2, 3)\}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۱

آزمون‌های سراسری گاج

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۳	۵	۷

۴۲- ضابطه تابع جدول مقابل کدام است؟

- (۱) $y = x^2 + 1$ (۲) $y = 2x + 1$ (۳) $y = x + 1$ (۴) $y = x + 2$

۴۳- اگر دامنه تابع $f(x) = x + 1$ ، مجموعه $A = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ باشد، آن‌گاه برد آن کدام است؟

- (۱) \mathbb{Z} (۲) \mathbb{N} (۳) \mathbb{W} (۴) \mathbb{R}

۴۴- اگر $f: A \rightarrow B$ و $f(x) = 3$ ، آن‌گاه برد f چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

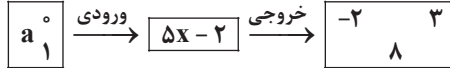
۴۵- اگر $f = \{(3, x-y), (3, -1), (4x+y, -1)\}$ تابعی باشد که دامنه آن تنها یک عضو دارد، زوج مرتب $(\Delta x, \Delta y)$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(2, 7)$ (۳) $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ (۴) $(5, 7)$

۴۶- اگر f تابعی همانی با دامنه $\{a, 1, -2, b+1\}$ و برد $\{2, -a, 0, 1\}$ باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(2, 0)$ (۳) $(-2, -1)$ (۴) $(2, -1)$

آزمون‌های سراسری گاج



۴۷- طبق ماشین مقابل، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) ۲ (۴) $-\frac{6}{5}$

تجربی خارج ۸۹

۴۸- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۴۹- اگر $f(x) = x^2 - x$ باشد، حاصل $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{h^2 + 3h + 4}{h}$ (۲) $h - 3h$ (۳) $h + 3$ (۴) $h^2 + 3h$

انسانی خارج ۸۹

۵۰- اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، آن‌گاه $f(x+2) - f(x-2)$ برابر کدام است؟

- (۱) $4(x-3)$ (۲) $4(x-2)$ (۳) $4(2x-1)$ (۴) $4(2x-3)$

انسانی داخل ۸۵

۵۱- اگر $f(x) = -x^2 + 3x$ ، حاصل $f(x+2) - f(2)$ کدام است؟

- (۱) $-x^2 - x$ (۲) $-x^2 + x$ (۳) $-x^2 - x + 1$ (۴) $-x^2 + x - 1$

انسانی داخل ۸۹

۵۲- اگر $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$ ، آن‌گاه $f(2x+1) + \frac{1}{3}f(0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{x^2 + x}$ (۲) $\frac{1}{x^2 - x}$ (۳) $\frac{2}{x^2 + x}$ (۴) $\frac{2}{x^2 - x}$

آزمون‌های سراسری گاج

۵۳- اگر $f(x) = 2x - x^2$ باشد، $f(2-a)$ برابر با کدام است؟

- (۱) $f(2) - f(a)$ (۲) $f(2+a)$ (۳) $2 - f(a)$ (۴) $f(a)$

۵۴- اگر $f(x) = -x + 2$ باشد، $f(2f(-3))$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) -۸ (۴) -۵

پاسخ‌های تشریحی

اعضای زوج مرتب‌های رابطه R را از A انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را طوری می‌نویسیم که مجموع مؤلفه اول و دوم آن‌ها زوج باشد:

$$R = \{(0,0), (0,2), (1,1), (2,0), (2,2)\} \Rightarrow \text{عضو دارد. } 5$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow R = \{(-1,0), (0,1), (0,-1), (1,\sqrt{2}), (1,-\sqrt{2}), (2,\sqrt{3}), (2,-\sqrt{3})\}$$

$$\Rightarrow R_R = \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$$

پس برد R تنها شامل عدد طبیعی ۱ است.

فانم اجازه! چرا زوج مرتب $(-2, -1)$ رو ننوشتید؟

پاسخ: باز از اون سؤال‌های بی‌دقتی پرسیدری! آفه چه طوری y^2 می‌تونه برابر -1 بشه؟ y^2 همواره نامنفیه، پس به ازای $x = -2$ ، هیچ زوج مرتبی برای R همیشه نوشت.

ابتدا X و Y هایی را که در رابطه $x^2 + y^2 \leq 4$ صدق می‌کنند، پیدا می‌کنیم:

$$x = 3 \Rightarrow 9 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq -5 \Rightarrow y = \times$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 3 \Rightarrow y = 0, 1, -1$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 4 \Rightarrow y = 0, 1, -1, 2, -2$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 3 \Rightarrow y = 0, 1, -1$$

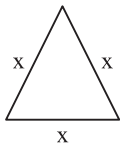
$$x = -2 \Rightarrow 4 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = -3 \Rightarrow 9 + y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq -5 \Rightarrow y = \times$$

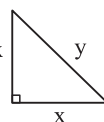
پس رابطه R برابر است با:

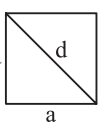
$$R = \{(2,0), (1,0), (1,1), (1,-1), (0,0), (0,1), (0,-1), (0,2), (0,-2), (-1,0), (-1,1), (-1,-1), (-2,0)\} \Rightarrow \text{عضو دارد. } 13$$

بررسی گزینه‌ها:

۱)  $\Rightarrow \text{محیط} = 3x \quad \checkmark$
تعداد ساعت کاری

۲) $X \times \text{حقوق ساعتی} = \text{حقوق فرد} \quad \checkmark$

۳)  $\Rightarrow \text{فیثاغورث: } x^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow 2x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \checkmark$

۴)  $\Rightarrow \text{فیثاغورث: } a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow 2a^2 = d^2 \Rightarrow a^2 = \frac{d^2}{2}$ و مساحت $S = a^2 \Rightarrow S = \frac{d^2}{2} \quad \times$
قطر

باید مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها نیز با هم برابر باشند:

$$(3y - x, 4 - x) = (x, 2) \Rightarrow \begin{cases} 3y - x = x \Rightarrow 3y = 2x \\ 4 - x = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$(2x - 1, 2y - x) = (x - y, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x - y \Rightarrow 2x - x = -y + 1 \Rightarrow x = 1 - y & (*) \\ 2y - x = 2 \xrightarrow{(*)} 2y - (1 - y) = 2 \Rightarrow 2y - 1 + y = 2 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} x = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

رضا از ۷:۳۰ صبح تا وقتی که از شرکت خارج شده، ۴ ساعت کار کرده، یعنی در ساعت ۱۱:۳۰ از شرکت بیرون رفته و بعد از ۱:۳۰ یعنی در ساعت ۱۳ به شرکت برگشته است. در نتیجه تا ساعت ۱۸:۳۰، دوباره ۵:۳۰ کار کرده است. بنابراین در مجموع ۹:۳۰ در این روز ساعت کاری داشته، بنابراین حقوق او برابر است با:

$$9/5 \times 8000 = 76000$$

چون مینا ۳ ساعت دیرتر از مریم سرکار حاضر می‌شود، پس ۳ ساعت کمتر از مریم کار می‌کند. بنابراین وقتی مینا h ساعت کار کرده، مریم $h + ۳$ ساعت کار کرده است. پس رابطه‌ای که حقوق مریم را برحسب h نشان می‌دهد به صورت زیر است:

$$R = ۴۵۰۰(h + ۳) = ۴۵۰۰h + ۱۳۵۰۰$$

حقوق مینا پس از h ساعت کار برابر $۵۰۰۰h$ است، در نتیجه داریم:

$$۵۰۰۰h = ۶۰۰۰۰ \Rightarrow h = \frac{۶۰۰۰۰}{۵۰۰۰} = ۱۲$$

بنابراین حقوق مریم پس از ۱۲ ساعت کار برابر می‌شود با:

$$۱۲ \times ۴۵۰۰ = ۵۴۰۰۰$$

یعنی پس از ۱۲ ساعت کار، مریم $۶۰۰۰۰ - ۵۴۰۰۰ = ۶۰۰۰$ تومان کمتر از مینا حقوق می‌گیرد.

حسابدار با h ساعت کار، $۱۲۰۰۰h$ ریال دستمزد می‌گیرد. چون فروشنده، صبح ۲ ساعت زودتر کار خود را شروع می‌کند، پس وقتی حسابدار h ساعت کار کرده، فروشنده $h + ۲$ ساعت کار کرده است. در نتیجه دستمزد فروشنده برابر $۸۰۰۰(h + ۲)$ است. بنابراین مجموع دستمزد آن‌ها

$$w = ۱۲۰۰۰h + ۸۰۰۰(h + ۲)$$

برحسب ساعت کار حسابدار برابر است با:

توجه کنید که اگر سؤال، مجموع دستمزدها را برحسب ساعت فروشنده (با فرض h ساعت کار) می‌خواست، آن‌گاه گزینه (۱) درست می‌شد.

اگر رابطه بین روزها و دقیقه‌های تمرین علی را به صورت زیر بنویسیم، آن‌گاه می‌بینیم که به ازای هر ۱ واحد افزایش در روزها، ۳ واحد به ۲ دقیقه‌ها اضافه می‌شود:

$$۲۰ + ۳ = ۲۰ + ۳ \times ۱ \rightarrow \text{روز دوم}$$

$$۲۰ + ۳ + ۳ = ۲۰ + ۳ \times ۲ \rightarrow \text{روز سوم}$$

$$۲۰ + ۳ + ۳ + ۳ = ۲۰ + ۳ \times ۳ \rightarrow \text{روز چهارم}$$

⋮

پس می‌توانیم رابطه خطی $y = ۲۰ + ۳(x - ۱)$ را بنویسیم که در آن x شماره روز و y تعداد دقیقه تمرین علی است. پس در روز ۲۱ام یعنی پس از ۲۰ روز، تعداد دقیقه‌های تمرین او برابر می‌شود با:

$$y = ۲۰ + ۳(۲۱ - ۱) = ۲۰ + ۳ \times ۲۰ = ۲۰ + ۶۰ = ۸۰$$

باید نماتوب این شخص را به دست آوریم:

$$\text{افزافه وزن} = ۲۵ > ۲۵/۴ = \frac{۶۵}{۲/۵۶} = \frac{۶۵}{(۱/۶)^۲} = \frac{۶۵}{۱/۳۶} = ۲۳۴۰ > ۲۵ \Rightarrow \text{افزافه وزن}$$

چون سن علی در گروه سنی ۲۵ - ۳۴ است، پس نماتوب بدنی او باید ۲۳ باشد. در نتیجه داریم:

$$۲۳ \times (۱/۸)^۲ = ۲۳ \times ۳/۲۴ = ۷۴/۵۲$$

برای داشتن وزن طبیعی باید نماتوب کمتر از ۲۵ باشد. حالا اگر نماتوب را ۲۵ در نظر بگیریم، وزن مریم باید برابر باشد با:

$$۲۵ = \frac{x}{(۱/۵۵)^۲} \Rightarrow x = ۲۵ \times ۲/۴۰۲۵ = ۶۰/۰۶۲۵ \approx ۶۰ \text{ کیلوگرم}$$

پس او تقریباً باید ۱۰ - ۶۰ = ۷۰ کیلوگرم وزن کم کند تا به حداکثر وزن طبیعی برسد.

مهدی در گروه سنی ۲۴ - ۱۹ سال قرار دارد، پس نماتوب بدنی او باید ۲۲ باشد. در نتیجه داریم:

$$۲۲ = \frac{x}{۲۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{۷۹/۴۲}{۲۲} = ۳/۶۱ \Rightarrow x = \sqrt{۳/۶۱} = ۱/۹ \text{ متر}$$

پس قد او ۱۹۰ سانتی‌متر است.

فانم اجازه! اون جدول «نماتوب وضعیت بدنی» و «نماتوب گروه سنی» رو باید حفظ باشیم؟

پاسخ: سعی کن که بلد باشی. برای به فاطر سپردنش روندی که تو سطرهای هر گروه نسبت به سطر قبلیش و محور داره رو پیدا کن، تا با به فاطر سپردن سطر اول، بقیه سطرها رو بتونی بدون حفظ کردن، فوراً بنویسی و به عدد هاش برسی.

بررسی گزینه‌ها:

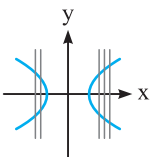
(۱) هر شهر در یک زمان خاص، دارای یک جمعیت است، پس این رابطه تابع می‌باشد.

(۲) هر عدد دارای یک مربع است، پس این رابطه هم تابع می‌باشد.

(۳) هر فرد می‌تواند به دو یا سه یا ... ورزش علاقه داشته باشد، پس این رابطه تابع نیست.

(۴) هر دانش‌آموز تنها یک روز تولد دارد، پس این رابطه تابع است.

فقط در گزینه (۴)، خط‌هایی موازی محور لایها وجود دارند که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.



۱) بررسی گزینه‌ها: به‌ازای $x = 1$ در سطر اول، دو مقدار $y = -1$ و $y = 3$ را در سطر دوم داریم، پس تابع نیست. \Rightarrow

x	۱	۲	۱	۳
y	-۱	۰	۳	۱

۲) به‌ازای $x = 2$ در سطر اول، ۴ مقدار متمایز در سطر دوم داریم، پس تابع نیست. \Rightarrow

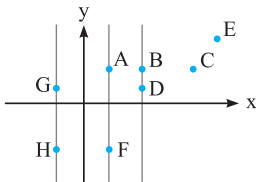
x	۲	۲	۲	۲
y	۱	۲	۳	۴

۳) به‌ازای هر x در سطر اول، یک y در سطر دوم داریم، پس تابع هست. \Rightarrow

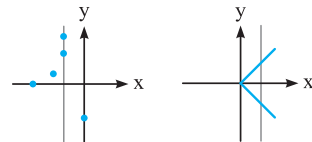
x	۱	۲	۳	۴
y	۵	۵	۵	۵

۴) به‌ازای $x = 2$ در سطر اول، دو مقدار $y = 3$ و $y = 0$ را در سطر دوم داریم، پس تابع نیست. \Rightarrow

x	۱	۲	۳	۲
y	۴	۳	-۲	۰

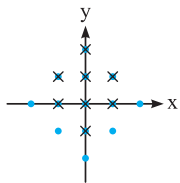


باید هر خطی که موازی محور y ها رسم می‌کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. پس حداقل یکی از نقاط A یا F یا B یا D یا G یا H را باید حذف کنیم.



بررسی گزینه‌ها: ۱ و ۲) خطی موازی محور y ها وجود دارد که نمودار تابع‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیستند.

۳) از هر عضو مجموعه اول تنها یک پیکان خارج شده است، پس تابع هست.
۴) چون $-\sqrt{9} = -3$ ، پس دو زوج مرتب متمایز $(-3, 3)$ و $(-3, 2)$ با مؤلفه‌های اول برابر وجود دارند، در نتیجه تابع نیست.



وقتی نمودار یک رابطه داده شده، این نمودار وقتی تابع است که اگر هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، پس حداقل با حذف ۸ نقطه علامت زده شده به یک تابع می‌رسیم.

رابطه R در صورتی تابع است که زوج مرتب‌های متمایز با مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشیم یا در صورت داشتن زوج مرتب‌هایی با مؤلفه‌های اول برابر، مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند:

$$(0, 1), (0, a-1) \in R \Rightarrow a-1=1 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow R = \{(0, 1), (2, b+1), (2, 6)\} \Rightarrow (2, b+1), (2, 6) \in R \Rightarrow b+1=6 \Rightarrow b=5$$

f تابع است، پس نباید زوج مرتب‌های متمایز با مؤلفه‌های اول برابر داشته باشیم:

$$(-1, a+2), (-1, 3) \in f \Rightarrow a+2=3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f = \{(4, 5), (-1, b), (-1, 3), (2, 1)\}$$

$$(-1, b), (-1, 3) \in f \Rightarrow b=3 \Rightarrow f = \{(4, 5), (-1, 3), (2, 1)\}$$

پس نمودار f از ۳ نقطه تشکیل شده است.

به‌جای n اعداد صحیح بزرگ‌تر مساوی -3 و کوچک‌تر مساوی 4 را قرار می‌دهیم:

$$R = \{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$$

باید از بین زوج مرتب‌هایی که مؤلفه‌های اول برابر و دوم متمایز دارند، یکی را حذف کنیم. پس اگر حداقل یکی از نقاط $(4, 2)$ و $(9, 3)$ را حذف کنیم، به یک تابع می‌رسیم.

فانم اجازه! ما نقاط $(1, -1)$ ، $(4, 2)$ و $(9, -3)$ رو حذف کردیم، یعنی اشتباه کردیم؟

پاسخ: نه بانم. چرا اشتباه! از هر جفت زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر، کافی است یکی رو حذف کنیم. حالا هر کدوم رو برداریم فرقی نمی‌کنه. یعنی حذف یک زوج مرتب از بین جفت زوج مرتب‌های $(9, -3)$ و $(9, 3)$ ، $(4, -2)$ و $(4, 2)$ و هم‌پنین $(1, -1)$ و $(1, 1)$. کاملاً درسته.

چون $1 = (-1)^0$ و $2 - \sqrt{4} = 2 - 2 = 0$ ، پس جدول داده شده به‌صورت مقابل درمی‌آید:

x	۱	۰	۲	۱	۰
y	۳	a	-۴	b	-۱

حال برای این‌که این جدول، متعلق به یک تابع باشد، باید به‌ازای هر مقدار x تنها یک مقدار برای y داشته باشیم، پس:

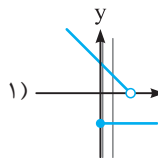
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=a \\ x=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-1$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=1 \Rightarrow y=b \end{cases} \Rightarrow b=3$$

$$\Rightarrow a-b = -1-3 = -4$$

بررسی گزینه‌ها:

۱ ۲۶



۱) تابع نیست. \Rightarrow خط‌هایی موازی محور y ها وجود دارند که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

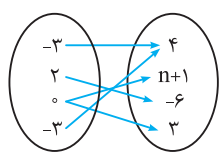
۲) $2y^2 = x + 8 \xrightarrow{x=0} 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow$ تابع نیست.

۳) $2^0 = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{matrix} \Rightarrow$ به‌ازای $x = 1$ در سطر اول، دو مقدار -1 و 2 را در سطر دوم داریم.

۴) $-\sqrt{4} = -2 \Rightarrow$ تابع هست.

باید از هر عضو مجموعه اول تنها یک پیکان خارج شود. پس اگر از عضوی دو پیکان خارج شده، باید عضوهای نظیر آن در مجموعه دوم با هم برابر باشند:

$(m-1, 4) = (m-1, -2m) \in$ تابع $\Rightarrow 4 = -2m \Rightarrow m = -2$



حال نمودار به‌صورت مقابل می‌شود، دو تا -3 در مجموعه اول داریم ولی هر دو به 4 رفته‌اند و در واقع یک عضو $(-3, 4)$ است که مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما باز از صفر دو تا پیکان خارج شده که ایجاد مشکل می‌کند.

$(0, n+1) = (0, 3) \Rightarrow n+1 = 3 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n+m = 2-2 = 0$

پس باید داشته باشیم:

باید زوج مرتب‌های متمایز با مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشیم و در صورتی که مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر هستند، باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند تا رابطه تبدیل به یک تابع شود:

$(3, m^2) = (3, 1) \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

حال هر کدام از مقادیر m را در رابطه R قرار می‌دهیم تا ببینیم شرط تابع بودن برقرار شده است یا نه:

$m = 1 \Rightarrow R = \{(3, 1), (-4, 1), (1, 3), (1, 4)\}$

به خاطر وجود دو زوج مرتب $(1, 3)$ و $(1, 4)$ این رابطه به‌ازای $m = 1$ تابع نمی‌باشد.

$m = -1 \Rightarrow R = \{(3, 1), (-4, -1), (1, 1), (-1, 4)\} \Rightarrow$ تابع هست.

۳ ۲۹

می‌دانیم از مجموعه n عضوی A به مجموعه 4 عضوی B ، تعداد 4^n تابع تعریف می‌شود، در نتیجه:

$4^n = 256 = 4^4 \Rightarrow n = 4$

$f(5) = 2, f(-1) = 4, f(1) = 5, f(4) = -3$

طبق نقاط داده شده می‌توان نوشت:

زیرا مثلاً نقطه $(5, 2)$ یعنی $x = 5$ و $y = 2$ و یا به عبارتی مقدار تابع به‌ازای $x = 5$ برابر 2 است. در نتیجه داریم:

$f(5) - 2f(4) = 2 - 2(-3) = 2 - (-6) = 2 + 6 = 8$

با توجه به شکل، تابع f را به‌صورت زوج مرتبی می‌نویسیم تا امکان اشتباهمان کم شود:

$f = \{(-4, -2), (-3, -1), (-2, -3), (0, 3), (2, 1), (4, 2), (5, 0)\}$

پس برد تابع برابر است با:

$R_f = \{-2, -1, -3, 3, 1, 2, 0\}$

$\begin{cases} f(4) = \sqrt{4^2 - 7} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3 \\ f(2\sqrt{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(4) - f(2\sqrt{2}) = 3 - 1 = 2$

$x = -2 \Rightarrow y = -2(-2)^2 + 1 = -8 + 1 = -7$

$x = 0 \Rightarrow y = -2(0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -2(1)^2 + 1 = -2 + 1 = -1$

$x = 2 \Rightarrow y = -2(2)^2 + 1 = -8 + 1 = -7$

$\Rightarrow R_y = \{-7, -1, 1\}$

اعضای مجموعه دامنه را در تابع قرار می‌دهیم و مقادیر برد را به‌دست می‌آوریم:

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2(-1) + 3 = 2 + 3 = 5$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2(1) + 3 = -2 + 3 = 1$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = -2(2) + 3 = -4 + 3 = -1$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$

پس مجموعه برد تابع $\{5, 3, 1, -1, -3, -5\}$ است که شامل ۳ عدد مثبت می‌باشد.

۱ ۳۴

۲ ۳۳

۱ ۳۰

۱ ۲۸

۱ ۲۷

۳ ۳۵

$$f(2-\sqrt{3}) = \sqrt{-2(2-\sqrt{3})^2 + 8(2-\sqrt{3}) + 7} = \sqrt{-2(4-4\sqrt{3}+3) + 16-8\sqrt{3}+7}$$

$$= \sqrt{-8+8\sqrt{3}-6+23-8\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$$

۲ ۳۶

$$f(3+2\sqrt{6}) = \sqrt{(3+2\sqrt{6})^2 - 6(3+2\sqrt{6}) + 10} = \sqrt{9+12\sqrt{6}+24-18-12\sqrt{6}+10} = \sqrt{25} = 5$$

کافی است در $f(x)$ یک بار به جای x عدد $1+\sqrt{2}$ و یک بار عدد 2 را قرار دهیم:

۱ ۳۷

$$\begin{cases} f(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) + 3 = 1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}+3 = 4 \\ f(2) = 2^2 - 2(2) + 3 = 4-4+3 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1+\sqrt{2}) - f(2) = 4-3 = 1$$

۲ ۳۸

$$\begin{cases} f(2+\sqrt{7}) = \sqrt{-(2+\sqrt{7})^2 + 4(2+\sqrt{7}) + 12} = \sqrt{-4-4\sqrt{7}-7+8+4\sqrt{7}+12} = \sqrt{9} = 3 \\ f(2) = \sqrt{-2^2 + 4(2) + 12} = \sqrt{-4+8+12} = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2+\sqrt{7}) - f(2) = 3-4 = -1$$

۱ ۳۹

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{-2(1-\sqrt{2})^2 + 5(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}-2} = \frac{-2(1-2\sqrt{2}+2) + 5-5\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}} = \frac{-6+4\sqrt{2}+5-5\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}} = \frac{-1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}} = 1$$

۱ ۴۰

$$f(1) = -3 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) - 2 = -3 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow a = -1 - b (*)$$

$$f(3) = 7 \Rightarrow a(3)^2 + b(3) - 2 = 7 \Rightarrow 9a + 3b = 9 \xrightarrow{(*)} 9(-1-b) + 3b = 9 \Rightarrow -9-9b+3b = 9 \Rightarrow -6b = 18 \Rightarrow b = -3$$

چون f تابع است، پس نباید زوج مرتب‌های متمایز با مؤلفه‌های اول برابر داشته باشیم:

۴ ۴۱

$$(1, 2a), (1, -4) \in f \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

حال با گذاشتن $a = -2$ در ضابطه تابع، دو زوج مرتب متمایز $(-2, a-b)$ و $(-2, 3)$ با مؤلفه‌های اول برابر ایجاد می‌شوند. پس:

$$(-2, a-b), (-2, 3) \in f \Rightarrow a-b = 3 \xrightarrow{a=-2} -2-b = 3 \Rightarrow -b = 5 \Rightarrow b = -5$$

$$\Rightarrow f = \{(-2, 3), (1, -4), (2, 3)\} \Rightarrow R_f = \{3, -4\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای برد} = 3-4 = -1$$

فانم اجازه! مگه مجموعه برد به صورت $\{3, -4, 3\}$ نیست؟ چرا شما اشتباه نوشتین؟

پاسخ: از اون سؤال‌هایی پرسیدی که باید به فاطرش پرمه‌ات کنم! مگه نمی‌دونیم تکرار عضو تو مجموعه بی‌تاثیره و نباید عضو تکراری رو بنویسیم؟ ریگه پیژهای اصولی رو هم یادتون رفته! پس ۳ رو نباید ۲ بار بنویسیم و برد تابع تنها دارای ۲ عضو ۳ و ۴- میشه.

۲ ۴۲

روش اول: اگر به X و Y ها خوب دقت کنید می‌بینید که هر X ای ۲ برابر شده و سپس ۱ واحد به آن اضافه شده تا Y متناظر آن به‌دست آمده است، پس می‌توانیم ضابطه تابع این جدول را به صورت $y = 2x + 1$ بنویسیم.

روش دوم: X و Y های داده شده در جدول را در ضابطه‌ها امتحان می‌کنیم. در هر کدام که صدق کردند، آن ضابطه، جواب است:

$$1) x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 = 2 \quad \times$$

$$2) x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 5 \quad \checkmark$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 2(3) + 1 = 7 \quad \checkmark$$

$$3) x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \quad \times$$

$$4) x = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2 \quad \times$$

اگر مقادیر دامنه را در ضابطه تابع قرار دهیم، داریم:

۲ ۴۳

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 3 + 1 = 4, \dots$$

$$\Rightarrow R_f = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$$

چون f تابع ثابت است، پس برد آن تنها شامل یک عضو $\{3\}$ می‌باشد.

۳ ۴۴

۴۵

چون دامنه تک عضوی است و در دوتا از زوج مرتبها مؤلفه اول ۳ است، پس در زوج مرتب $(4x + y, 2)$ هم باید مؤلفه اول برابر ۳ باشد:

$$4x + y = 3 \quad (*)$$

از طرفی چون f تابع است، نباید دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول برابر داشته باشیم. در نتیجه: $(3, x - y), (3, -1) \in f \Rightarrow x - y = -1 \quad (**)$ حال از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود که:

$$(**) \Rightarrow y = x + 1 \xrightarrow{(*)} 4x + x + 1 = 3 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \xrightarrow{y=x+1} y = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5} \Rightarrow (\Delta x, \Delta y) = (2, 7)$$

در واقع تابع f ، دارای یک عضو $(3, -1)$ است: $f = \{(3, -1)\}$.

نتیجه وقتی دامنه تک‌عضوی است، برد هم تک‌عضوی می‌باشد.

۴۶

چون f تابعی همانی است، پس باید دامنه و برد آن برابر باشد. در مجموعه دامنه، عدد -2 وجود دارد که در برد نیست، پس باید $-a = -2$ و

$$D_f = \{2, 1, -2, b + 1\}, R_f = \{2, -2, 0, 1\}$$

یعنی $a = 2$ باشد. بنابراین داریم:

$$(a, b) = (2, -1)$$

حال در مجموعه برد، عدد صفر هست که در دامنه نیست. پس باید $b + 1 = 0$ و یعنی $b = -1$ باشد. در نتیجه:

به‌ازای ورودی‌های 0 ، a و 1 ، خروجی‌های 2 ، 3 و -2 از ماشین به‌دست آمده است. حال ببینیم کدام ورودی مربوط به کدام خروجی است،

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 5(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

در صورتی که $f(x) = 5x - 2$ ضابطه تابع ماشین می‌باشد:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 5(1) - 2 = 5 - 2 = 3$$

بنابراین از ورودی‌های 0 و 1 ، خروجی‌های -2 و 3 به‌دست آمد. در نتیجه باید خروجی 1 مربوط به ورودی a باشد:

$$x = a \Rightarrow f(a) = 1 \Rightarrow 5(a) - 2 = 1 \Rightarrow 5a = 1 + 2 \Rightarrow a = 2$$

۴۸

$$f(x^2) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x - 1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x + 1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{1 - x^2}$$

۴۹

$$f(x) = x^2 - x \Rightarrow \begin{cases} f(r + h) = (r + h)^2 - (r + h) = r^2 + 2rh + h^2 - r - h = h^2 + 2rh + r \\ f(r) = r^2 - r = r^2 - r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(r + h) - f(r)}{h} = \frac{h^2 + 2rh + r - r^2 + r}{h} = \frac{h^2 + 2rh}{h} = \frac{h(h + 2r)}{h} = h + 2r$$

۵۰

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(x + 2) = (x + 2)^2 - 3(x + 2) + 2 = x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 + 2 = x^2 + x \\ f(x - 2) = (x - 2)^2 - 3(x - 2) + 2 = x^2 - 4x + 4 - 3x + 6 + 2 = x^2 - 7x + 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x + 2) - f(x - 2) = x^2 + x - (x^2 - 7x + 12) = x^2 + x - x^2 + 7x - 12 = 8x - 12 = 4(2x - 3)$$

روش اول: یک بار به جای تمام x ها، $x + 2$ و یک‌بار 2 را در ضابطه تابع $f(x) = -x^2 + 3x$ قرار می‌دهیم:

۵۱

$$\begin{cases} f(x + 2) = -(x + 2)^2 + 3(x + 2) = -(x^2 + 4x + 4) + 3x + 6 = -x^2 - 4x - 4 + 3x + 6 = -x^2 - x + 2 \\ f(2) = -2^2 + 3(2) = -4 + 6 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x + 2) - f(2) = -x^2 - x + 2 - 2 = -x^2 - x$$

روش دوم (روش عددگذاری): این یک روش تستی است که در حل بسیاری از تست‌ها راهگشا است و رسیدن به جواب را تسریع می‌کند. در

این روش به جای x عددی دلخواه (که البته در سؤال و گزینه‌ها مشکل‌ساز نشود، یعنی مثلاً مخرج کسر را صفر نکند) در عبارت تابع داده‌شده

در صورت سؤال را قرار می‌دهیم و مقدار تابع را به‌ازای آن به‌دست می‌آوریم، بعد همان عدد را در گزینه‌ها قرار داده و مقدار گزینه‌ها را به‌ازای

آن x پیدا می‌کنیم. هر گزینه‌ای که مقدار آن با مقدار به‌دست آمده از عبارت سؤال برابر شد، جواب می‌باشد.

ببینید اگر مثلاً به جای x عدد صفر را قرار دهیم، دوتا از گزینه‌ها صفر می‌شوند که به درد ما نمی‌خورد، بنابراین مثلاً $x = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$x = 1 \Rightarrow f(x + 2) - f(2) = f(3) - f(2) = -3^2 + 3(3) - (-2^2 + 3(2)) = -9 + 9 - 2 = -2$$

حالا گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم تا ببینیم کدام یک برابر -2 می‌شود:

$$1) x = 1 \Rightarrow -1^2 - 1 = -1 - 1 = -2 \quad \checkmark$$

$$2) x = 1 \Rightarrow -1^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \quad \times$$

$$3) x = 1 \Rightarrow -1^2 - 1 + 1 = -1 + 0 = -1 \quad \times$$

$$4) x = 1 \Rightarrow -1^2 + 1 - 1 = -1 + 0 = -1 \quad \times$$

همان‌طور که می‌بینید تنها مقدار گزینه (۱) برابر -2 شد، پس همین گزینه جواب است.