

فصل ۱

دایره

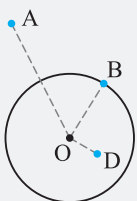
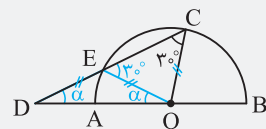
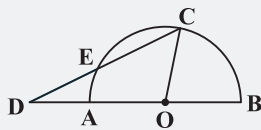
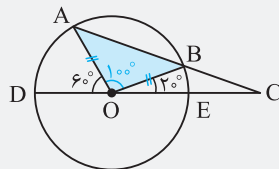
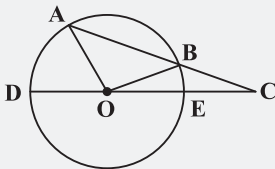
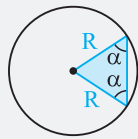
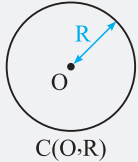


○ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

○ رابطه‌های طولی در دایره

○ چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

دایره و تعاریف اولیه



دایره: مجموعه تمام نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره، مقدار ثابتی است که به این مقدار ثابت شعاع دایره می‌گویند. دایره C به مرکز O و شعاع R را با $C(O, R)$ نشان می‌دهند.

🔗 **نکته:** هر دایره بی‌شمار شعاع دارد. مثلث‌هایی که دو ضلع آن‌ها شعاع دایره باشد، مثلث متساوی‌الساقین هستند. برابر قرار دادن زاویه‌های زیر دو ساق، کلید حل این‌گونه مسائل است. البته ممکن است در بعضی مسائل خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم.

🔗 **تست:** در شکل مقابل، DE قطر دایره و O مرکز آن است. اگر $\widehat{AOD} = 60^\circ$ و $\widehat{BOE} = 20^\circ$ باشند، زاویه BCE چند درجه است؟

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

👉 پاسخ: گزینه (۲)

ابتدا زاویه AOB را به دست می‌آوریم. در نقطه O داریم:

$$60^\circ + \widehat{AOB} + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 100^\circ$$

مثلث AOB متساوی‌الساقین است؛ زیرا $OA = OB = R$. بنابراین در مثلث AOB داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 40^\circ$$

زاویه B در مثلث رنگی، زاویه خارجی مثلث OBC است. پس:

$$40^\circ = 20^\circ + \widehat{BCE} \Rightarrow \widehat{BCE} = 20^\circ$$

🔗 **تست:** در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و DE برابر با شعاع نیم‌دایره است. اگر $\widehat{OCD} = 30^\circ$ باشد، زاویه BDC چند درجه است؟

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

👉 پاسخ: گزینه (۱)

از O به E وصل می‌کنیم. مثلث COE متساوی‌الساقین است؛ زیرا $OC = OE = R$. پس زاویه E در این مثلث نیز 30° است. از طرفی با توجه به این‌که DE برابر شعاع نیم‌دایره است، پس مثلث OED نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و چون زاویه $\widehat{CEO} = 30^\circ$ ، زاویه خارجی این مثلث است، پس:

$$30^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

اوضاع نسبی نقطه و دایره

① **نقطه A بیرون دایره $C(O, R)$ است:** در این حالت فاصله نقطه A از مرکز دایره، از شعاع دایره بیشتر است ($OA > R$).

② **نقطه B روی دایره $C(O, R)$ است:** در این حالت فاصله نقطه B از مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است ($OB = R$).

③ **نقطه D درون دایره $C(O, R)$ است:** در این حالت فاصله نقطه D از مرکز دایره، از شعاع دایره کمتر است ($OD < R$).

❓ **تست:** فاصله نقطه A از مرکز دایره C(O, 3) برابر $7 - x$ است. به ازای چند مقدار صحیح x، نقطه A درون دایره C است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

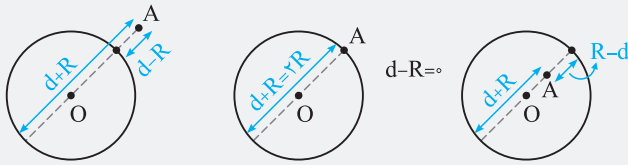
۳ (۲)

۲ (۱)

✓ پاسخ: گزینه (۲)

باید $OA < R$ باشد. در ضمن چون $OA \geq 0$ می باشد. بنابراین داریم:

$$0 \leq OA < R \Rightarrow 0 \leq 7 - x < 3 \Rightarrow -7 \leq -x < -4 \Rightarrow 4 < x \leq 7 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 5 \text{ یا } 6 \text{ یا } 7$$



🔗 **تذکره:** اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره $C(O, R)$ را برابر d فرض کنیم، آن گاه بیشترین و کمترین فاصله نقطه A از محیط دایره C، از روابط زیر به دست می آید که با توجه به شکل های مقابل این روابط به وضعیت نقطه A و دایره C بستگی ندارند.

کمترین = $|d - R|$ و بیشترین فاصله = $d + R$

توجه کنید که وجود قدرمطلق در $|d - R|$ به خاطر این است که اگر A بیرون دایره باشد، کمترین فاصله برابر با $d - R$ و اگر A درون دایره باشد، کمترین فاصله برابر با $R - d$ است که وجود قدرمطلق باعث پوشش هر دو حالت می شود.

❓ **تست:** فاصله نقطه A از مرکز دایره C(O, 3) برابر ۸ است. مجموع فاصله دورترین و نزدیک ترین نقاط دایره تا نقطه A کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

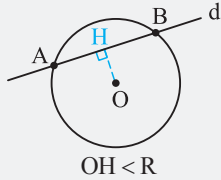
۱۴ (۱)

✓ پاسخ: گزینه (۳)

با توجه به توضیحات سؤال $d = 8$ و $R = 3$ است. پس:

$$\begin{cases} \text{فاصله دورترین نقاط دایره تا A} = d + R = 8 + 3 = 11 \\ \text{فاصله نزدیک ترین نقاط دایره تا A} = d - R = 8 - 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع فاصله ها} = 11 + 5 = 16$$

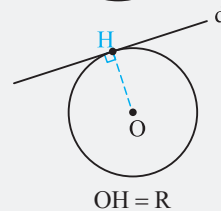
اوضاع نسبه خط و دایره



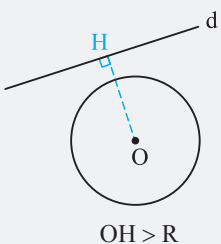
❶ **خط d و دایره C(O, R) متقاطع اند:** در این حالت خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط d، از شعاع دایره کم تر است.



وتر دایره: به پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره می گویند.
قطر دایره: وتری که از مرکز دایره می گذرد، قطر دایره نامیده می شود که طول آن دو برابر شعاع دایره است. قطر دایره بزرگترین وتر دایره می باشد.



❷ **خط d بر دایره C(O, R) مماس است:** در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک هستند که به آن نقطه، نقطه تماس می گویند. فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر با شعاع دایره است.



❸ **خط d دایره C(O, R) را قطع نمی کند:** در این حالت خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند و فاصله مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره بیشتر است.

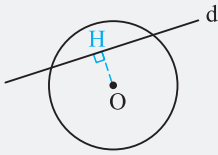
❓ **تست:** خط d به فاصله $10 - x$ از مرکز دایره C(O, 3) قرار دارد و دایره C را در دو نقطه قطع می کند. مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای x کدام است؟

۲۷ (۴)

۳۴ (۳)

۳۲ (۲)

۲۵ (۱)



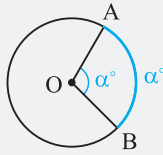
پاسخ: گزینه (۴)

با توجه به شکل مقابل باید $OH < R$ باشد. در ضمن واضح است که $OH \geq 0$ است. پس:

$$0 \leq OH < R \Rightarrow 0 \leq 10 - x < 3 \Rightarrow -10 \leq -x < -7 \Rightarrow 7 < x \leq 10 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 8, 9, 10$$

بنابراین مجموع مقادیر طبیعی x برابر با $8 + 9 + 10 = 27$ است.

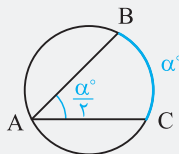
زاویه‌های نام‌دار در دایره



① **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است. اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه‌رو به آن

برحسب درجه، برابر است.

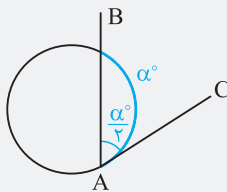
$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} = \alpha^\circ$$



② **زاویه محاطی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره است. اندازه هر زاویه محاطی برابر

با نصف کمان مقابل آن برحسب درجه است.

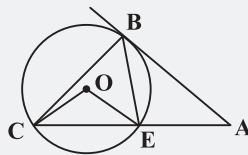
$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\alpha^\circ}{2}$$



③ **زاویه ظلی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است.

اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان مقابل آن برحسب درجه است.

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\alpha^\circ}{2}$$



④ **تست:** در شکل مقابل، O مرکز دایره، $\widehat{BAC} = 40^\circ$ و $\widehat{COE} = 100^\circ$ است. زاویه ACB چند درجه است؟

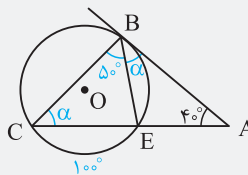
۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

۳۵ (۴)

۵۰ (۳)

پاسخ: گزینه (۲)



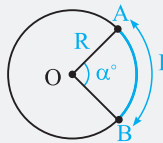
زاویه COE زاویه مرکزی رو به کمان CE است، پس $\widehat{CE} = 100^\circ$. از طرفی چون زاویه CBE زاویه محاطی رو به کمان

CE است، پس $\widehat{CBE} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$ خواهد بود. زاویه ACB زاویه محاطی رو به کمان BE و زاویه EBA زاویه

ظلی رو به کمان BE هستند؛ پس با هم برابرند. حال در مثل ABC داریم:

$$\alpha + (50^\circ + \alpha) + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

کمان، قطاع و قطعه



طول کمان: چون محیط یک دایره، کمانی به اندازه 360° و به طول $2\pi R$ است، پس طول کمان AB به صورت زیر با

یک تناسب ساده به دست می‌آید:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = 2\pi R \times \frac{\alpha}{360^\circ}$$

④ **تست:** در شکل مقابل، طول کمان‌های AB و $A'B'$ با هم برابر است. شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر

شعاع دایره کوچک‌تر است؟

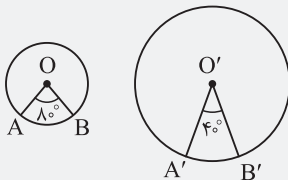
۲ (۲)

۱/۵ (۱)

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

پاسخ: گزینه (۲)



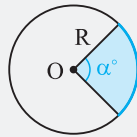
فرض می‌کنیم طول هر دو کمان برابر L و شعاع دایره کوچک R و شعاع دایره بزرگ R' باشند. پس:

$$\begin{cases} L = 2\pi R \times \frac{80^\circ}{360^\circ} \\ L = 2\pi R' \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \end{cases} \Rightarrow 2\pi R \times \frac{80^\circ}{360^\circ} = 2\pi R' \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R \times 80^\circ = R' \times 40^\circ \Rightarrow \frac{R'}{R} = 2$$

قطاع دایره: سطح محصور بین دو شعاع یک دایره را قطاع دایره می‌نامند.

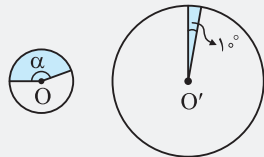


مساحت قطاع: چون مجموع زوایای مرکزی در یک دایره برابر 360° است، پس مساحت قطاع با زاویه مرکزی α به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{S}{\pi R^2} \Rightarrow S = \pi R^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ}$$

تست: در شکل زیر، شعاع دایره بزرگ تر ۴ برابر شعاع دایره کوچک تر است. اگر مساحت دو قطاع رنگی با هم برابر باشد، زاویه α چند



- (۱) 140°
(۲) 150°
(۳) 160°
(۴) 170°

درجه است؟
پاسخ: گزینه (۳)

اگر شعاع دایره کوچک R باشد، شعاع دایره بزرگ $4R$ می‌شود و داریم: $\pi R^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi (4R)^2 \times \frac{1^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R^2 \times \alpha = 16R^2 \times 1^\circ \Rightarrow \alpha = 16^\circ$

نتیجه: اگر به جای زاویه مرکزی قطاع، طول کمان را داشته باشیم، از رابطه زیر برای محاسبه مساحت قطاع استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R} \\ \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{S}{\pi R^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{L}{2\pi R} = \frac{S}{\pi R^2} \Rightarrow S = \frac{RL}{2}$$

تست: مساحت قطاعی از دایره 6π است. اگر طول کمان قطاع 2π باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟

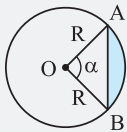
- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۴

پاسخ: گزینه (۲)

با توجه به رابطه $S = \frac{RL}{2}$ که در آن S مساحت قطاع، R اندازه شعاع دایره و L طول کمان متناظر قطاع است، داریم: $6\pi = \frac{R \times 2\pi}{2} \Rightarrow R = 6$

قطعه یک دایره: در یک دایره، ناحیه محصور به یک کمان و وتر متناظرش را قطعه می‌نامیم.

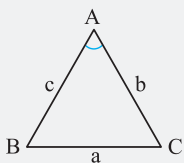
مساحت قطعه: برای محاسبه مساحت قطعه کافی است مساحت مثلث متساوی‌الساقین OAB را از مساحت قطاع، کم کنیم.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{AOB}} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \pi R^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

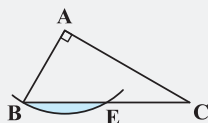
توجه: در فصل سوم خواهیم دید که مساحت مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین دو ضلع است.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$



تست: در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و به اضلاع قائم ۶ و $6\sqrt{3}$ است. به مرکز A و شعاع ۶ دایره‌ای

رسم شده است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



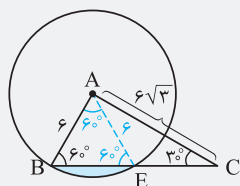
- (۱) $4\pi - \sqrt{3}$
(۲) $2\pi - 2\sqrt{3}$
(۳) $6\pi - 3\sqrt{3}$
(۴) $6\pi - 9\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه (۴)

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow BC^2 = 36 + 36 \times 3 \Rightarrow BC^2 = 4 \times 36 \Rightarrow BC = 2 \times 6 = 12$$

چون ضلع AB برابر نصف وتر است، پس $\hat{C} = 30^\circ$ و در نتیجه $\hat{B} = 60^\circ$ می‌باشد. از نقطه A (مرکز دایره) به E وصل می‌کنیم. مثلث BAE متساوی‌الساقین است و چون زاویه زیر ساق، 60° است، مثلث BAE متساوی‌الاضلاع خواهد بود، پس داریم:



$$S_{\text{رنگی}} = \pi(6)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{4} (6)^2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

۱- نقطه A بیرون دایره C(O, 3) قرار دارد. اگر $OA = 8 - x$ باشد، برای x چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

- ۳ (۴) ۴ (۳) ۵ (۲) ۶ (۱)

۲- خط d و دایره C(O, 4) مفروض است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر 10 باشد، فاصله نزدیک ترین نقاط دایره تا خط d کدام است؟

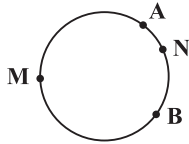
- ۷ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۵ (۱)

۳- نزدیک ترین و دورترین فاصله نقطه A از دایره‌های به ترتیب 7 و 13 است. شعاع دایره کدام می‌تواند باشد؟

- ۶ (۴) ۴ (۳) 10 (۲) ۲ (۱)

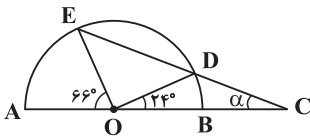
۴- در شکل مقابل، $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ و $\widehat{BN} = 3\widehat{AN}$ است. کمان BN چند درجه است؟

- ۵۴ (۲) ۳۶ (۱)
۶۰ (۴) ۱۸ (۳)



۵- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. α چند درجه است؟

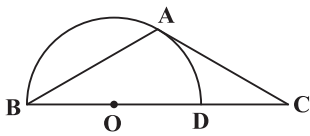
- ۲۰ (۲) ۱۸ (۱)
۲۴ (۴) ۲۱ (۳)



۶- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع 2 است. اگر A نقطه تماس و $AB = AC$ باشد، طول

پاره خط CD کدام است؟

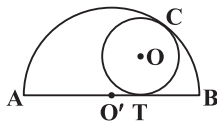
- ۳ (۲) $\sqrt{7}$ (۱)
 $\sqrt{5}$ (۴) ۲ (۳)



۷- در شکل مقابل، O مرکز دایره، O' مرکز نیم‌دایره و نقاط C و T نقاط تماس هستند. اگر $AT = 8$

و $TB = 4$ باشند، اندازه شعاع دایره کدام است؟

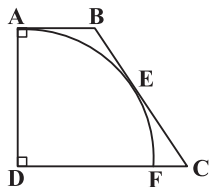
- $\frac{8}{3}$ (۲) ۴ (۱)
 $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{9}{2}$ (۳)



۸- در شکل مقابل، ABCD ذوزنقه قائم‌الزاویه و D مرکز نیم‌دایره است. اگر A و E نقاط تماس،

$EC = 8$ و $FC = 2$ باشد، طول پاره خط BE کدام است؟

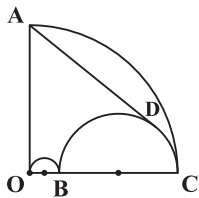
- ۱۰ (۲) ۸ (۱)
۷ (۴) ۹ (۳)



۹- در شکل مقابل، دو نیم‌دایره به شعاع‌های 1 و 4 درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر AD بر

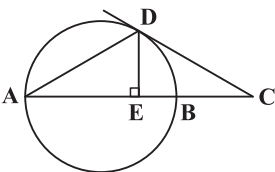
نیم‌دایره بزرگ‌تر مماس باشد، طول AD کدام است؟

- $3\sqrt{10}$ (۱)
 $2\sqrt{30}$ (۲)
 $3\sqrt{20}$ (۳)
 $2\sqrt{15}$ (۴)



۱۰- در شکل مقابل، AB قطر دایره است. اگر $BC = 2BE = 4$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

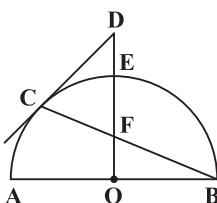
- $3\sqrt{2}$ (۲) ۵ (۱)
۳ (۴) ۴ (۳)

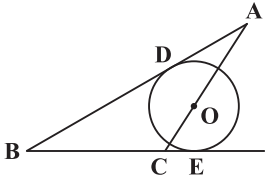


۱۱- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و C نقطه تماس است. اگر $DC = 8$ باشد، طول پاره خط DF

کدام است؟

- ۹ (۱)
۱۰ (۲)
۱۱ (۳)
۸ (۴)





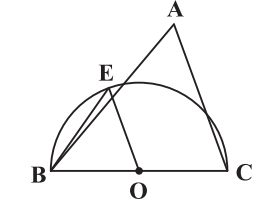
۱۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره، نقاط D و E نقاط تماس، $BC = 6$ و $\widehat{ABC} = 30^\circ$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{24}{11} \quad (4)$$

$$\frac{5}{7} \quad (3)$$



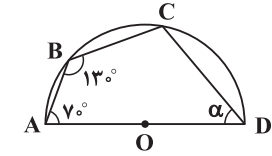
۱۳- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و AC موازی EO است. اگر $\widehat{ACB} = 7^\circ$ و $\widehat{ABE} = 5^\circ$ باشد، زاویه BAC چند درجه است؟

$$50 \quad (2)$$

$$40 \quad (1)$$

$$70 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$



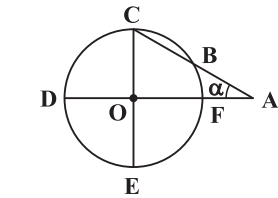
۱۴- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. زاویه α چند درجه است؟

$$50 \quad (2)$$

$$45 \quad (1)$$

$$60 \quad (4)$$

$$55 \quad (3)$$



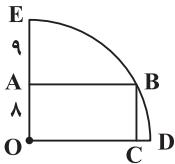
۱۵- در شکل زیر، قطرهای دایره برهم عمودند. اگر $OD = AB$ باشد، زاویه α چند درجه است؟

$$25 \quad (1)$$

$$30 \quad (2)$$

$$35 \quad (3)$$

$$40 \quad (4)$$



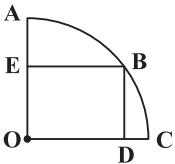
۱۶- در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره است. مساحت مستطیل $ABCO$ کدام است؟

$$80 \quad (1)$$

$$96 \quad (2)$$

$$120 \quad (3)$$

$$128 \quad (4)$$



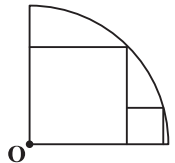
۱۷- در شکل مقابل، مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. حاصل $CD + AE$ کدام است؟

$$6 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

$$5 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$



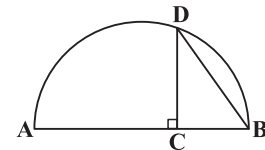
۱۸- در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره و دو چهارضلعی مربع هستند. اگر طول ضلع مربع کوچک برابر ۲ باشد، طول ضلع مربع بزرگ کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$2 + 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2 + 2\sqrt{2} \quad (3)$$



۱۹- در شکل مقابل، DC بر قطر نیم‌دایره عمود است. اگر $DB = 2\sqrt{5}$ و $AC = 8$ باشند، طول پاره‌خط DC کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

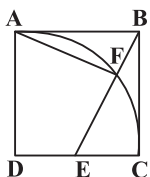
۲۰- در مثلث قائم‌الزاویه، دایره به مرکز رأس قائمه بر وتر مثلث مماس است. اگر طول قطعات ایجادشده روی وتر توسط نقطه تماس ۵ و ۸ باشد، فاصله نقاط تلاقی دایره با اضلاع قائم مثلث کدام است؟

$$4\sqrt{5} \quad (4)$$

$$3\sqrt{5} \quad (3)$$

$$5\sqrt{3} \quad (2)$$

$$4\sqrt{3} \quad (1)$$



۲۱- در شکل مقابل، $ABCD$ مربع به ضلع ۴ و دایره به مرکز D و شعاع ۴ رسم شده است. اگر E وسط ضلع مربع باشد، زاویه AFE چند درجه است؟

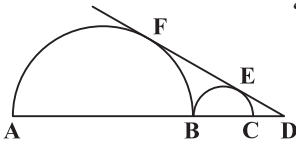
$$85 \quad (2)$$

$$95 \quad (1)$$

$$80 \quad (4)$$

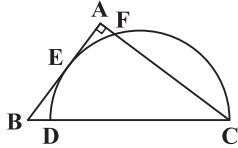
$$90 \quad (3)$$

۲۲- در شکل مقابل، نقاط E و F نقاط تماس هستند. اگر شعاع نیم‌دایره کوچک برابر ۱ و $CD = 1$ باشد، شعاع نیم‌دایره بزرگ کدام است؟



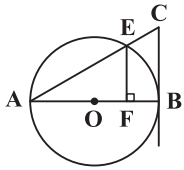
- (۱) ۶
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۲۳- در شکل مقابل، E نقطه تماس است. اگر $AB = 27$ و $AC = 36$ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟



- (۱) ۱۸
- (۲) ۲۰
- (۳) ۱۵
- (۴) ۲۲

۲۴- در شکل مقابل، AB قطر دایره است. اگر $CB = 6$ و $EF = 4$ باشند، اندازه شعاع دایره کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{5}$
- (۲) $3\sqrt{2}$
- (۳) ۴
- (۴) $2\sqrt{3}$

۲۵- در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $\widehat{ADB} = 34^\circ$ باشد، زاویه OAD چند درجه است؟

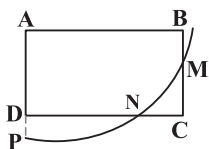
ریاضی داخل ۹۴

- (۱) ۶۸
- (۲) ۷۳
- (۳) ۱۰۲
- (۴) ۱۴۶

۲۶- در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز رأس آن و شعاع $2/5$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع کدام است؟

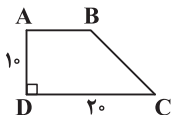
ریاضی داخل ۹۵

- (۱) $1/4$
- (۲) $1/2$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



۲۷- در شکل مقابل، ABCD مستطیل است. دایره به مرکز A ضلع‌های مستطیل و امتداد آن‌ها را در نقاط M، N و P قطع کرده است. اگر $BM = 7$ ، $MC = 8$ و $DP = 10$ باشد، طول پاره خط NC کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) $2/5$
- (۴) $3/5$



۲۸- در دوزنقه شکل مقابل، دایره به رأس A از رئوس B و D می‌گذرد. زاویه C چند درجه است؟

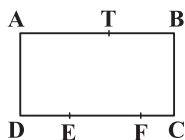
- (۱) ۳۰
- (۲) ۴۵
- (۳) ۶۰
- (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۹- در مستطیل به ابعاد ۴ و ۸، دایره به مرکز یک رأس مستطیل و شعاع ۵، اضلاع آن را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه از هم کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$
- (۲) $3\sqrt{2}$
- (۳) ۴
- (۴) $2\sqrt{5}$

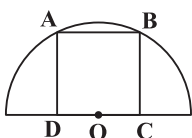
۳۰- عرض مستطیل ABCD برابر ۵ است. دایره‌ای به مرکز یکی از رأس‌ها، طول مستطیل را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر طول قطعات کوچک‌تر ایجادشده بر روی طول‌های مستطیل ۲ و ۳ باشد، شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۳
- (۳) ۱۱
- (۴) ۸



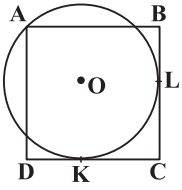
۳۱- در مستطیل شکل مقابل، نقاط T و E روی دایره‌ای به رأس C و نقاط T و F روی دایره‌ای به رأس D قرار دارند. اگر $DE = EF = 4$ و $FC = 2$ باشند، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

- (۱) ۳۶
- (۲) ۴۴
- (۳) ۵۲
- (۴) ۴۸



۳۲- در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره $7/5$ است. مساحت مربع ABCD کدام است؟

- (۱) ۵۴
- (۲) ۳۰
- (۳) ۳۶
- (۴) ۴۵



۳۳- در شکل مقابل، $ABCD$ مستطیل است. O مرکز دایره و نقاط L و K نقاط تماس هستند.

اگر $AB = ۲۵$ و $BC = ۳۲$ باشند، اندازه شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۸

ریاضی خارج ۹۵

۳۴- مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

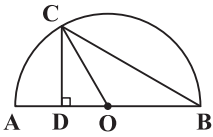
- (۱) $۲/۲۵$
(۲) $۲/۵$
(۳) $۲\sqrt{۲}$
(۴) ۳

۳۵- مربع $ABCD$ مفروض است. شعاع دایره گذرا از دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD برابر ۵ است. مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۶۴
(۲) ۲۵
(۳) ۳۶
(۴) ۴۹

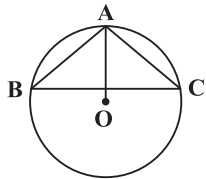
۳۶- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و CO نیمساز زاویه DCB است. اگر $DO = ۴$ باشد، طول پاره خط AD

کدام است؟



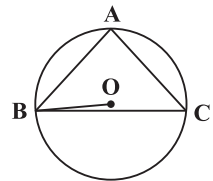
- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۳
(۴) ۵

۳۷- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{OAC} = ۵^\circ$ باشد، زاویه B در مثلث ABC چند درجه است؟



- (۱) 30°
(۲) 40°
(۳) 50°
(۴) 45°

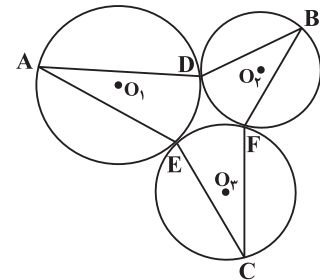
۳۸- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{CBO} = ۵^\circ$ باشد، زاویه \widehat{BAC} چند درجه است؟



- (۱) ۸۵
(۲) ۸۰
(۳) ۷۵
(۴) ۷۰

۳۹- در شکل مقابل، O_1, O_2, O_3 مرکزهای سه دایره و نقاط D, E, F نقاط تماس دایره‌ها

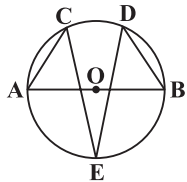
هستند. اگر $\widehat{EAD} = \alpha$ ، $\widehat{DBF} = \beta$ و $\widehat{ECF} = \theta$ باشند، حاصل $\alpha + \beta + \theta$ کدام است؟



- (۱) ۸۵°
(۲) ۹۰°
(۳) ۱۲۰°
(۴) ۸۰°

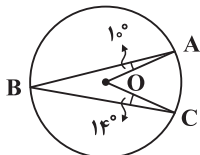
۴۰- در شکل مقابل، O مرکز و AB قطر دایره است. اگر $\widehat{CAB} = ۶۵^\circ$ و $\widehat{ABD} = ۵۰^\circ$ باشند،

زاویه CED چند درجه است؟



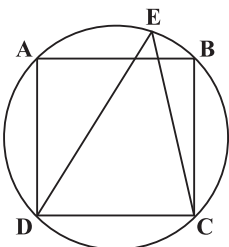
- (۱) ۲۵
(۲) ۲۰
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵

۴۱- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. زاویه AOC چند درجه است؟



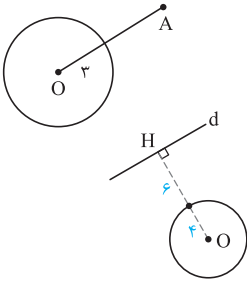
- (۱) ۲۴
(۲) ۲۸
(۳) ۴۸
(۴) ۳۶

۴۲- در شکل مقابل، $ABCD$ مربع است. اگر $\widehat{ADE} = ۳۰^\circ$ باشد، زاویه BCE چند درجه است؟



- (۱) 30°
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۱۰

پاسخ‌های تشریحی



با توجه به داده‌های تست و شکل مقابل داریم: ۱ ۳

مقادیر طبیعی X می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد. $OA > R \Rightarrow 8 - x > 3 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow$

مطابق شکل مقابل، فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d برابر ۶ است. ۲ ۳

اگر نقطه A بیرون دایره باشد، آن‌گاه نزدیک‌ترین فاصله نقطه A تا دایره برابر $d - R$ است و دورترین فاصله آن تا دایره برابر $d + R$ است، پس: ۳ ۳

$$\begin{cases} d - R = 7 \\ d + R = 13 \end{cases} \Rightarrow 2d = 20 \Rightarrow d = 10 \Rightarrow R = 3$$

حال فرض می‌کنیم نقطه A درون دایره باشد. در این حالت نزدیک‌ترین فاصله نقطه A تا دایره برابر $R - d$ و دورترین فاصله آن تا دایره برابر $d + R$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} R - d = 7 \\ d + R = 13 \end{cases} \Rightarrow 2R = 20 \Rightarrow R = 10$$

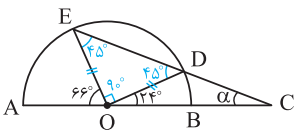
دقت کنید نقطه A نمی‌تواند روی دایره باشد. چون در این حالت نزدیک‌ترین فاصله نقطه A از دایره برابر صفر می‌شود.

محیط دایره توسط نقاط A و B به دو کمان ANB و AMB تقسیم شده است. پس: ۲ ۴

$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \widehat{AMB} + \widehat{ANB} \Rightarrow 36^\circ = 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{36^\circ}{5} = 7.2^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\widehat{ANB} = \widehat{BN} + \widehat{AN} \Rightarrow 7.2^\circ = 3\widehat{AN} + \widehat{AN} = 4\widehat{AN} \Rightarrow \widehat{AN} = 1.8^\circ \Rightarrow \widehat{BN} = 3 \times \widehat{AN} = 3 \times 1.8^\circ = 5.4^\circ$$



چون OD و OE شعاع نیم‌دایره هستند و $\widehat{EOD} = 18^\circ - (66^\circ + 2^\circ) = 9^\circ$ ، پس مثلث ۳ ۵

EOD قائم الزاویه متساوی‌الساقین است و زاویه‌ها به صورت شکل مقابل هستند: زاویه $\widehat{D} = 45^\circ$ ،

$$45^\circ = \alpha + 24^\circ \Rightarrow \alpha = 21^\circ$$

زاویه خارجی مثلث ODC است. پس:

از O به A وصل می‌کنیم. OA بر AC عمود است. از طرفی مثلث OAB متساوی‌الساقین است. ۳ ۶

در ضمن مثلث ABC نیز متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌ها به صورت مقابل هستند. دقت کنید

زاویه AOD زاویه خارجی مثلث OAB است. در مثلث قائم‌الزاویه OAC داریم:

$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است. پس:

$$OA = \frac{OC}{2} \Rightarrow 2 = \frac{OC}{2} \Rightarrow OC = 4 \Rightarrow CD = OC - OD = 4 - 2 = 2$$

با توجه به این‌که $AT = 8$ و $TB = 4$ است، پس اندازه شعاع نیم‌دایره برابر ۶ می‌باشد. با ۲ ۷

توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه O'TO داریم:

$$(6 - r)^2 = 2^2 + r^2 \Rightarrow 36 - 12r + r^2 = 4 + r^2 \Rightarrow 12r = 32 \Rightarrow r = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

از D به E وصل می‌کنیم. DE بر BC عمود است. از طرفی $BE = BA = x$ می‌باشد. در مثلث ۳ ۸

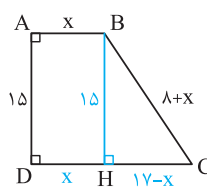
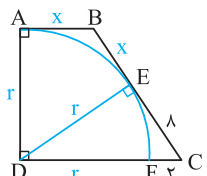
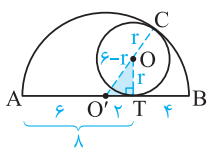
قائم‌الزاویه DEC، داریم:

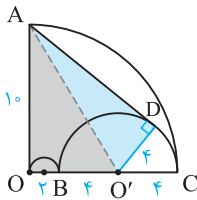
$$r^2 + 8^2 = (r + 2)^2 \Rightarrow r^2 + 64 = r^2 + 4r + 4 \Rightarrow 4r = 60 \Rightarrow r = 15$$

حال، از رأس B بر قاعده CD عمود می‌کنیم. با توجه به اندازه‌های شکل، به کمک قضیه فیثاغورس

در مثلث قائم‌الزاویه CHB، داریم:

$$15^2 + (17 - x)^2 = (8 + x)^2 \Rightarrow 225 + 289 - 34x + x^2 = 64 + 16x + x^2 \Rightarrow 50x = 450 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow BE = 9$$





از A به مرکز نیم‌دایره بزرگ‌تر وصل می‌کنیم. $O'D$ بر AD عمود بوده و چون $O'D$ شعاع نیم‌دایره است، پس $O'D = 4$. حال در مثلث‌های قائم‌الزاویه ADO' و AOO' داریم:

$$\begin{cases} AO'^2 + OO'^2 = AO^2 \\ AD^2 + DO'^2 = AO^2 \end{cases} \Rightarrow AO'^2 + OO'^2 = AD^2 + DO'^2$$

$$\Rightarrow 100 + 36 = AD^2 + 16 \Rightarrow AD^2 = 120 \Rightarrow AD = 2\sqrt{30}$$

از مرکز نیم‌دایره یعنی O به D وصل می‌کنیم. OD بر مماس DC عمود است. در مثلث قائم‌الزاویه ODC داریم:

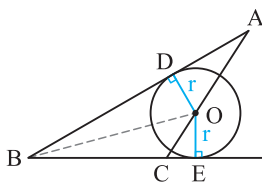
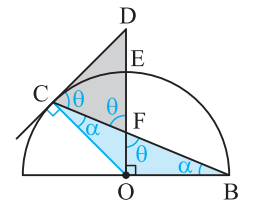
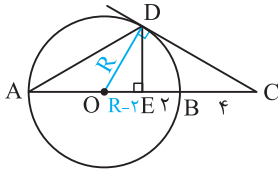
$$OD^2 = OE \cdot OC \Rightarrow R^2 = (R - 2)(R + 4) \Rightarrow R^2 = R^2 + 2R - 8 \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4$$

از O به C وصل می‌کنیم. OC بر CD عمود است. از طرف دیگر $OC = OB$ است. پس مثلث BOC متساوی‌الساقین است. حال فرض می‌کنیم زاویه DCF برابر θ باشد، پس $\alpha + \theta = 90^\circ$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه FOB نیز زاویه F برابر θ خواهد شد، به دلیل این‌که زاویه F در مثلث DCF با این زاویه متقابل به رأس است، پس زاویه F در این مثلث هم برابر θ می‌شود و این یعنی مثلث DCF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $DF = DC = 8$.

از O به D و E وصل می‌کنیم. OD بر AB و OE بر BE عمود است. از آنجایی که مساحت مثلث ABC برابر 24 است، داریم:

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 30^\circ \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times AB \times 6 \times \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 16$$

حال از O به B وصل می‌کنیم و داریم:



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} = \frac{1}{2} AB \times r + \frac{1}{2} BC \times r \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 16 \times r + \frac{1}{2} \times 6 \times r \Rightarrow 24 = 8r + 3r \Rightarrow r = \frac{24}{11}$$

چون $EO \parallel AC$ و $\widehat{ACB} = 70^\circ$ ، پس $\widehat{EOB} = 70^\circ$. مثلث BOE متساوی‌الساقین است، پس $\widehat{E} = \widehat{B} = 55^\circ$. حال در مثلث ABC داریم:

$$\widehat{A} + 55^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

از O به B و C وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOB و COD متساوی‌الساقین هستند، زیرا $OA = OB = R$ و $OC = OD = R$. از طرفی مثلث BOC نیز متساوی‌الساقین است و چون زوایای زیر دو ساق 60° هستند، پس زاویه O نیز از مثلث BOC برابر 60° است و در نتیجه مثلث BOC متساوی‌الاضلاع خواهد بود. پس زاویه O از مثلث COD برابر 80° خواهد شد. حال در مثلث COD داریم:

$$\alpha + \alpha + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

از O به B وصل می‌کنیم. چون OB شعاع دایره است و طبق فرض $OD = AB$ ، پس $OB = AB$ خواهد بود و در نتیجه مثلث OBA متساوی‌الساقین است. واضح است که مثلث BOC نیز متساوی‌الساقین بوده و زوایا به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویه B در مثلث BOC، زاویه خارجی مثلث OBA است. حال در مثلث BOC داریم:

$$2\alpha + 2\alpha + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

از O به B وصل می‌کنیم. چون OB و OE شعاع هستند، پس $OB = OE = 8 + 9 = 17$ است. از آنجایی که OB قطر مستطیل ABCO است، داریم:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow 64 + AB^2 = 289 \Rightarrow AB^2 = 225 \Rightarrow AB = 15$$

$$S = 8 \times 15 = 120$$

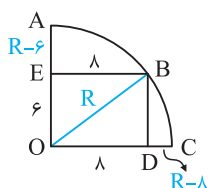
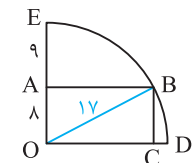
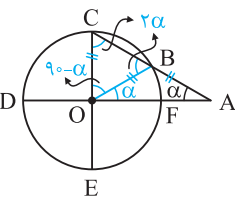
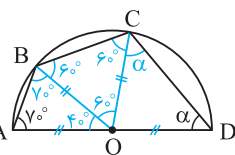
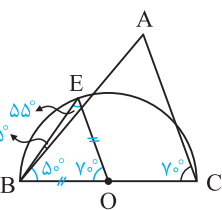
بنابراین مساحت مستطیل ABCO برابر است با:

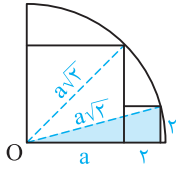
از O به B وصل می‌کنیم. اندازه‌ها به صورت مقابل هستند. در مثلث قائم‌الزاویه OEB داریم:

$$6^2 + 8^2 = R^2 \Rightarrow 100 = R^2 \Rightarrow R = 10$$

بنابراین $AE = 10 - 6 = 4$ و $CD = 10 - 8 = 2$ هستند و داریم:

$$CD + AE = 2 + 4 = 6$$





فرض می‌کنیم طول ضلع مربع بزرگ a باشد. با توجه به شکل مقابل در مثلث دیگر داریم:

۱۸ ۴

$$(a+2)^2 + 2^2 = (a\sqrt{2})^2 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 + 4 = 2a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 8 = 0 \Rightarrow a = 2 + 2\sqrt{3}$$

از A به D وصل می‌کنیم. زاویه ADB برابر 90° است، زیرا زاویه محاطی رو به نیم‌دایره است. در مثلث قائم‌الزاویه ADB داریم:

۱۹ ۳

$$DB^2 = BC \times BA \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = BC \times (BC + 8) \Rightarrow 12 = BC^2 + 8BC$$

$$\Rightarrow BC^2 + 8BC - 12 = 0 \Rightarrow (BC + 10)(BC - 2) = 0 \Rightarrow BC = 2$$

حال، طول DC را به دست می‌آوریم. DC ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ADB است. پس:

$$DC^2 = AC \times CB \Rightarrow DC^2 = 8 \times 2 = 16 \Rightarrow DC = 4$$

ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم. فاصله نقاط D و E مد نظر سؤال است. ابتدا از A به T وصل می‌کنیم. BC عمود است. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

۲۰ ۴

$$AT^2 = BT \times CT \Rightarrow R^2 = 5 \times 8 = 40 \Rightarrow R = 2\sqrt{10}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه EAD داریم:

$$ED^2 = AE^2 + AD^2 \Rightarrow ED^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow ED = \sqrt{2}R \xrightarrow{R=2\sqrt{10}} ED = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

BE را از سمت E امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع مربع را در H قطع کند. دو مثلث BCE و HDE همنهشت هستند، پس $AD = DH = BC = 4$ می‌باشد. حال، از D به F وصل می‌کنیم. چون DF شعاع دایره است، پس $DF = DA = 4$ و این یعنی در مثلث AFH ، میانه وارد بر ضلع AH نصف آن است. پس مثلث AFH قائم‌الزاویه است و این یعنی $\widehat{AFE} = 90^\circ$ می‌باشد.

۲۱ ۳

از مرکز نیم‌دایره‌ها به نقاط تماس وصل می‌کنیم، می‌دانیم OE و $O'F$ بر DF عمودند، پس با هم موازی‌اند. حال به کمک قضیه تالس در مثلث $O'DF$ داریم:

۲۲ ۲

$$\frac{DO}{DO'} = \frac{OE}{O'F} \Rightarrow \frac{2}{3+R} = \frac{1}{R} \Rightarrow 2R = 3+R \Rightarrow R = 3$$

در مثلث قائم‌الزاویه BAC طول وتر BC برابر 45 است. زیرا $AB = 9 \times 3$ و $AC = 9 \times 4$ هستند و می‌دانیم اعداد $3, 4, 5$ هر ضرب غیر صفر آن‌ها اعداد فیثاغورسی هستند، پس $BC = 9 \times 5 = 45$ می‌باشد. حال از مرکز نیم‌دایره به نقطه تماس وصل می‌کنیم. OE بر AB عمود است، پس OE با AC موازی است. به کمک تالس در مثلث BAC داریم:

۲۳ ۲

$$\frac{OE}{AC} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow \frac{R}{36} = \frac{45-R}{45} \Rightarrow 45R = 36 \times 45 - 36R$$

$$\Rightarrow 81R = 36 \times 45 \Rightarrow 9 \times 9 \times R = 36 \times 45 \Rightarrow R = 4 \times 5 = 20$$

AB بر CB عمود است و چون EF و CB هر دو بر AB عمودند، پس با هم موازی‌اند. بنابر قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

۲۴ ۲

$$\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{4}{6} \Rightarrow AF = 4k, AB = 6k \Rightarrow BF = 2k$$

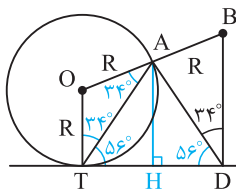
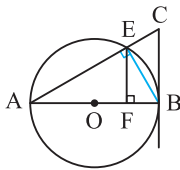
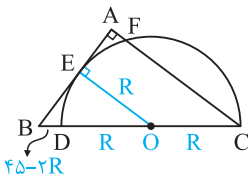
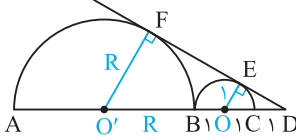
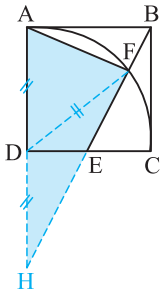
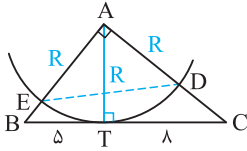
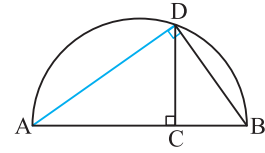
حال از B به E وصل می‌کنیم. زاویه AEB زاویه محاطی رو به نیم‌دایره است؛ پس $\widehat{AEB} = 90^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویه AEB داریم:

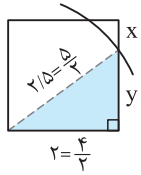
$$EF^2 = AF \times FB \Rightarrow 16 = 4k \times 2k \Rightarrow 16 = 8k^2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$AB = 2R = 6k \Rightarrow R = 3k \xrightarrow{k=\sqrt{2}} R = 3\sqrt{2}$$

از مرکز دایره به نقطه تماس T وصل می‌کنیم. بنابراین $\widehat{T} = 90^\circ$ خواهد بود. از A بر ساق TD عمود می‌کنیم. طبق عکس قضیه تالس در دوزنقه $OBTD$ نتیجه می‌شود که $TH = HD$. پس AH عمود منصف پاره‌خط TD است. پس اگر از A به T وصل کنیم $AT = AD$ خواهد بود و این یعنی مثلث TAD متساوی‌الساقین است، پس $\widehat{T} = \widehat{D} = 56^\circ$. زاویه OTA متمم زاویه $\widehat{T} = 56^\circ$ است. پس $\widehat{OAT} = 34^\circ$ و چون مثلث AOT متساوی‌الساقین است، پس $\widehat{OAT} = 34^\circ$. بنابراین زاویه $\widehat{OAD} = 34^\circ + (180^\circ - 56^\circ - 56^\circ) = 102^\circ$ برابر است با:

۲۵ ۳





با توجه به شکل مقابل، x مد نظر سؤال است. در مثلث قائم‌الزاویه رنگی چون $2/5$ و 2 مضربی از اعداد فیثاغورسی 3 و 4 و 5 هستند، پس $y = \frac{3}{4}$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$x = 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

واضح است که عرض مستطیل برابر 15 می‌باشد. زیرا:

$$AD = BC = BM + MC = 7 + 8 = 15$$

از طرفی، $DP = 10$ است. پس شعاع دایره یعنی AP برابر $15 + 10 = 25$ می‌باشد.

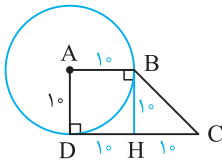
از A به M و N وصل می‌کنیم. چون $AM = AN = 25$ است. شعاع‌های دایره هستند، پس $AM = AN = 25$. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABM ، داریم:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow 25^2 = AB^2 + 7^2 \Rightarrow AB^2 = 576 \Rightarrow AB = 24$$

بنابراین اندازه طول مستطیل برابر 24 است، یعنی $AB = CD = 24$. با فرض $NC = x$ ، $DN = 24 - x$ می‌شود. در مثلث قائم‌الزاویه ADN ، به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 \Rightarrow 25^2 = 15^2 + (24 - x)^2 \Rightarrow 625 = 225 + 576 + x^2 - 48x \Rightarrow x^2 - 48x + 176 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 44) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow NC = 4 \\ x = 44 \text{ غ قق} \end{cases}$$



چون دایره به رأس A از رأس‌های B و D می‌گذرد، پس $AB = AD = 10$. از نقطه B عمودی بر CD رسم می‌کنیم. واضح است چهارضلعی $ABHD$ مربع است. در نتیجه $BH = 10$ و چون $CD = 20$ است، پس $DH = HC = 10$. مثلث BHC ، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C} = 45^\circ$.

دایره به شعاع 5 و به مرکز رأس D رسم شده است که طول‌های مستطیل را در نقاط E و F قطع می‌کند. در مثلث قائم‌الزاویه رنگی داریم:

$$5^2 = 4^2 + AE^2 \Rightarrow AE^2 = 9 \Rightarrow AE = 3$$

حال کافی است از E بر DC عمود کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده داریم:

$$EF^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow EF^2 = 20 \Rightarrow EF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

با توجه به توضیحات ارائه شده در صورت تست، شکل مسأله به صورت مقابل است: در مثلث قائم‌الزاویه رنگی داریم:

$$5^2 + (R - 1)^2 = R^2 \Rightarrow 25 + R^2 - 2R + 1 = R^2 \Rightarrow 2R = 26 \Rightarrow R = 13$$

با توجه به شکل مقابل $DT = DF = 8$ و $CT = CE = 6$ برابر 8 ، 6 و 10 است. چون اضلاع مثلث DTC برابر 8 ، 6 و 10 است، پس مثلث DTC قائم‌الزاویه است و داریم:

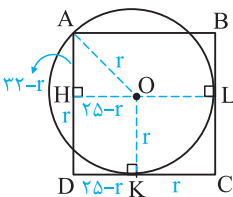
$$S_{ABCD} = 2S_{DTC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 48$$

از O به A و B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه BCO به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 + a^2 = (7/5)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{16} + a^2 = (7/5)^2 \Rightarrow \frac{17}{16}a^2 = (7/5)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{17} \times (7/5)^2 = \frac{16}{17} \times \frac{49}{25} = \frac{1568}{425} \Rightarrow S = 45$$

فرض می‌کنیم اندازه شعاع دایره r باشد. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:

$$r^2 = (25 - r)^2 + (32 - r)^2 \Rightarrow r^2 = 625 - 50r + r^2 + 1024 - 64r + r^2 \Rightarrow r^2 - 114r + 1649 = 0 \Rightarrow (r - 97)(r - 17) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 17 \\ r = 97 \text{ غ قق} \end{cases}$$



۳۲-۳۳

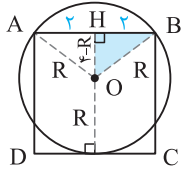
۳۲-۳۳

۳۲-۳۳

۳۲-۳۳

۳۲-۳۳

۳۲-۳۳



۲ ۳۴

با توجه به توضیحات صورت تست، شکل مسأله به صورت مقابل است. در مثلث قائم‌الزاویه OHB به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$R^2 = 2^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + 16 + R^2 - 8R \Rightarrow 8R = 20 \Rightarrow R = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

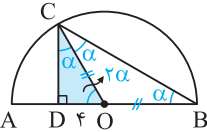
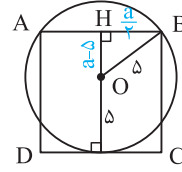
با توجه به شکل مقابل و با فرض این‌که طول ضلع مربع برابر a باشد، داریم:

۱ ۳۵

$$\triangle OHB : OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 25 = (a - 5)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 25 = a^2 - 10a + 25 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 - 10a = 0$$

$$\Rightarrow 5a\left(\frac{a}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^2 = 64$$



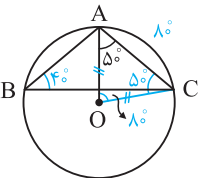
۱ ۳۶

مثلث COB متساوی‌الساقین است، زیرا $OB = OC = R$. زاویه DOC زاویه خارجی مثلث COB است، پس $\widehat{DOC} = 2\alpha$. از طرفی CO نیمساز زاویه DCB است؛ پس $\alpha = \widehat{DCO}$. در مثلث قائم‌الزاویه CDO داریم:

$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

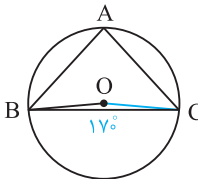
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است. پس $OC = 8$ و این یعنی شعاع دایره برابر ۸ است. پس داریم:

$$AD = OA - OD = 8 - 4 = 4$$



۲ ۳۷

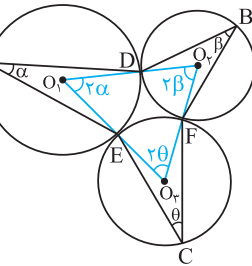
از O به C وصل می‌کنیم. مثلث AOC متساوی‌الساقین است. پس زاویه O از این مثلث برابر 80° است. چون زاویه AOC مرکزی است، پس $\widehat{AC} = 80^\circ$. زاویه ABC زاویه محاطی رو به کمان AC است. پس زاویه ABC برابر $\frac{\widehat{AC}}{2} = 40^\circ$ است. یعنی زاویه B در مثلث ABC برابر 40° است.



۱ ۳۸

از O به C وصل می‌کنیم. مثلث BOC متساوی‌الساقین است. پس زاویه O در مثلث BOC برابر 170° است. زاویه BOC مرکزی است. پس $\widehat{BC} = \widehat{BOC} = 170^\circ$. از طرفی زاویه BAC زاویه محاطی روبه‌رو به کمان BC است. پس:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$



۲ ۳۹

مراکز سه دایره را به هم وصل می‌کنیم. زوایای O_1 ، O_2 و O_3 زوایای مرکزی می‌باشند. بنابراین اندازه‌های آن‌ها مطابق شکل مقابل است. در مثلث $O_1O_2O_3$ ، مجموع زوایای داخلی 180° است. پس:

$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 90^\circ$$

زاویه CAB محاطی است. بنابراین $\widehat{CDB} = 2 \times 65^\circ = 130^\circ$.

۱ ۴۰

چون AB قطر دایره است. پس:

$$\widehat{AC} + \widehat{CDB} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{CDB}=130^\circ} \widehat{AC} + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 50^\circ$$

$$\widehat{ACD} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

$$\widehat{CD} = \widehat{ACD} - \widehat{AC} = 100^\circ - 50^\circ = 50^\circ$$

$$\widehat{CED} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

از طرفی، زاویه ABD نیز محاطی است. بنابراین داریم:

حال، کافی است اندازه کمان CD را به دست آوریم:

چون زاویه CED زاویه محاطی روبه کمان CD است، پس:

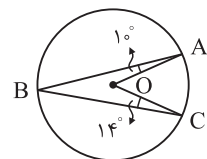
زاویه AOC زاویه مرکزی رو به کمان AC و زاویه ABC زاویه محاطی رو به کمان AC است. پس:

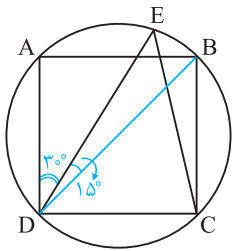
۳ ۴۱

$$\begin{cases} \widehat{AOC} = \widehat{AC} \\ \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$$

حال در چهارضلعی ABCO با فرض $\widehat{ABC} = \alpha$ داریم:

$$2\alpha = 10^\circ + 14^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 24^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 2\alpha = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$$





۲ ۴۲

در مربع ABCD، قطر BD را رسم می‌کنیم. واضح است که زاویه ADB برابر ۴۵° است. از طرفی زاویه ADB زاویه محاطی رو به کمان AEB است. پس $\widehat{AEB} = 90^\circ$ می‌باشد. هم‌چنین زاویه محاطی ADE رو به کمان AE است. پس $\widehat{AE} = 60^\circ$ و داریم:

$$\widehat{AE} + \widehat{EB} = \widehat{AEB} \Rightarrow 60^\circ + \widehat{EB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EB} = 30^\circ$$

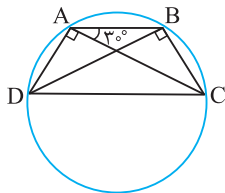
زاویه BCE زاویه محاطی رو به کمان EB است. پس:

$$\widehat{BCE} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

البته می‌توانستیم زاویه EDB را به دست آورده و مستقیم کمان BE را محاسبه کنیم و ...

چون زاویه‌های DAC و DBC برابر ۹۰° هستند، پس A و B روی دایره‌ای به قطر DC هستند. زیرا در این صورت این زوایا، زوایای محاطی رو به نیم‌دایره هستند. با توجه به شکل مقابل، زاویه BAC زاویه محاطی است. پس:

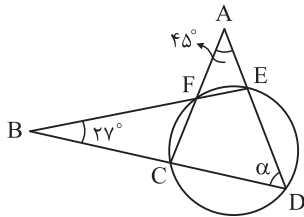
۲ ۴۳



$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ$$

زاویه BDC نیز زاویه محاطی رو به کمان BC است. پس:

$$\widehat{BDC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



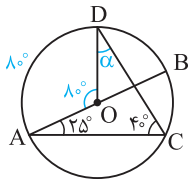
۲ ۴۴

فرض می‌کنیم $\widehat{ADB} = \alpha$ باشد. چون \widehat{ADB} زاویه محاطی رو به کمان CFE است، پس $\widehat{CFE} = 2\alpha$. از طرفی زاویه CFE زاویه محاطی رو به کمان CDE است، از آنجایی که $\widehat{CDE} = 360^\circ - 2\alpha$ ، پس $\widehat{CFE} = 180^\circ - \alpha$. زاویه AFB با زاویه CFE متقابل به رأس است. پس $\widehat{AFB} = 180^\circ - \alpha$. حال در چهارضلعی AFBD داریم:

$$180^\circ - \alpha = 45^\circ + 27^\circ + \alpha \Rightarrow 2\alpha = 108^\circ \Rightarrow \alpha = 54^\circ$$

زاویه ACD محاطی است. پس:

۴ ۴۵



$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

زاویه AOD زاویه مرکزی رو به کمان AD است. پس:

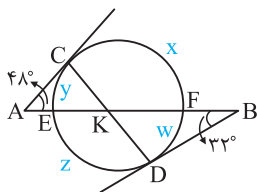
$$\widehat{AOD} = \widehat{AD} = 80^\circ$$

در چهارضلعی ODCA داریم:

$$80^\circ = \alpha + 40^\circ + 25^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

اندازه کمان‌ها را مطابق شکل X, Y, Z و W فرض می‌کنیم و داریم:

۲ ۴۶



$$48^\circ = \frac{X - Y}{2} \Rightarrow X - Y = 96^\circ \Rightarrow Y = X - 96^\circ$$

$$33^\circ = \frac{Z - W}{2} \Rightarrow Z - W = 66^\circ \Rightarrow W = Z - 66^\circ$$

از طرفی، می‌دانیم $X + Y + Z + W = 360^\circ$ است پس:

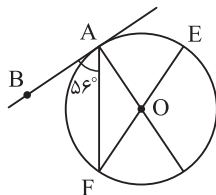
$$X + (X - 96^\circ) + Z + (Z - 66^\circ) = 360^\circ \Rightarrow X + Z = 260^\circ$$

حال داریم:

$$\widehat{CKB} = \frac{X + Z}{2} = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ$$

زاویه BAF ظلی است. پس:

۱ ۴۷



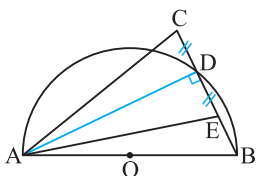
$$\widehat{BAF} = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow 56^\circ = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow \widehat{AF} = 2 \times 56^\circ = 112^\circ$$

از طرفی EF قطر دایره است. پس:

$$\widehat{AE} + \widehat{AF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AE} + 112^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = 68^\circ$$

از A به D وصل می‌کنیم. چون زاویه ADB زاویه محاطی رو به نیم‌دایره است، پس $\widehat{ADB} = 90^\circ$ می‌باشد. از طرفی $CD = DE$ است پس در مثلث CAE، ارتفاع وارد بر CE، میانه نیز هست. لذا مثلث CAE متساوی‌الساقین بوده و داریم:

۲ ۴۸



$$AC = AE \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{CAE} + 80^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CAE} = 20^\circ$$