فصل اول

آنالیز ترکیبی

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

اصل جمع، اصل ضرب، فاکتوریل، جایگشت
تبدیل با تکرار
ترکیب و ترتیب
شامل و فاقد و پاسکال

اصل جمع ـ اصل ضرب ـ فاکتوریل ـ تبدیل (جایگشت)

۱. یک خانواده۵ نفری به منزل یک خانواده۶ نفری می‌روند. اگر هر دو نفری که یک‌دیگر را می‌بینند با هم دست بدهند، عمل دست دادن به چه تعداد رخ می‌دهد؟

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

۲. می‌دانیم پس از اتمام مسابقه والیبال، بازیکنان یک تیم درکنار تور می‌ایستند و افراد تیم دوم از طرف دیگر تور شروع به دست دادن با آن‌ها می‌کنند. اگر بدانیم در هر تیم۱۲عضو وجود دارد، تعداد تمام دست‌دادن‌ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۴۴ ۴) $۲^{۱۲}$

۳. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد تمام حالات مختلف کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴. هفت دوست با هم مسابقه می‌دهند و قرار می‌شود که نفر اول سوارکول نفر آخر شود، تعداد تمام کولی‌های ممکن کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۵ ۳) ۲۸ ۴) ۲۱

۵. چند عدد ۵ رقمی با ارقام مختلف وجود دارد که با رقم ۷ شروع و به رقم ۹ختم شود؟

۱) ۷۲۹ ۲) ۷۲۰ ۳) ۳۳۶ ۴) ۲۱۰

۶. در مسابقات تیمی کاراته معمولاً هر تیم شامل سه مبارز است. که در ابتدا، اعضای هر تیم در بیرون تاتمی (محوطه مبارزه) می‌نشینند و سپس از هر تیم یک نفر برای مبارزه به داخل تاتمی اعزام می‌شود و پس از اتمام این مبارزه، نوبت نفرات بعدی است تا وقتی که اعضای هر دو تیم در یک مبارزه شرکت کرده باشند. تعداد تمام حالات متنوعی که در مبارزه نفرات دو تیم با هم ممکن است به وجود بیاید، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۷. تعداد اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام متمایز که همه آن‌ها فاقد دو رقم۲ و۵ می‌باشند، کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۱۵

۸. علی سه پیراهن، دو شلوار و دو کفش و خواهرش چهار روسری، دو مانتو و سه کفش دارند. تعداد تمام حالات متنوعی که این دو نفر می‌توانند لباس بپوشند و با هم از خانه بیرون بروند، کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۳ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۸۸

۹. با ارقام۳، ۵ و۷چند عدد ۳رقمی می‌توان ساخت که هر کدام حداقل یک رقم تکراری داشته باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۷ ۳) ۲۱ ۴) ۶

۱۰. با ارقام ۰ ، ۱، ۲، ۳و ۵ چند عدد۳رقمی با ارقام متمایز بخش‌پذیر بر۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۱. با ارقام ۰، ۳ و ۴ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار رقم جایز است.)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۲. با ارقام ۲، ۳، ۵، ۷، ۸ و ۹ چند عدد۳رقمی بدون تکرار رقم کوچکتر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۱۳. با ارقام ۰ ، ۲، ۴، ۵، ۷و ۸چند عدد۴ رقمی زوج کوچک‌تر از۵۰۰۰ با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۳۲ ۴) ۳۱۶

۱۴. پنج اتومبیل وارد یک چهارراه می‌شوند. تعداد تمام حالات مختلف که این پنج اتومبیل می‌توانند از چهارراه خارج شوند، کدام است؟(به شرط آن که هیچ اتومبیلی دور نزند، ترتیب ورود اتومبیل‌ها به چهارراه از نظر زمانی اهمیت ندارد.)

۱) ۶۲۵ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۴۳

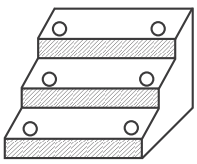
۱۵. در یک روستا،۱۰خانواده۳ فرزندی را اختیار کرده‌ایم، اگر بخواهیم یک خانواده و فرزندی از آن خانواده را به عنوان خانواده نمونه انتخاب کنیم، به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۸۰

۱۶. در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی، ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم، تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی خارج شده هم رنگ باشند؟ *(سراسری خارج از کشور ـ ۹۰)*

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۷. چهار نفر به چند طریق مختلف می‌توانند در دو کناره سه پله بنشینند؟



۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰

۳) ۲۴۸ ۴) ۱۵

۱۸. چند ماتریس ۳×۲ با درایه‌های صفر و یک می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۹. با ارقام ۲، ۳، ۶ و ۹ چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت که در هر کدام حداقل یک رقم تکراری وجود داشته باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۲۸ ۳) ۶۰ ۴) ۴۶

۲۰. چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که مجموع دو رقم اول و آخر آن ۱۲ و مجموع دو رقم وسط آن ۹ باشد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۷۰ ۴) ۴۰

۲۱. با ارقام ۲ ، ۰ و ۵چند عدد ۵ رقمی مضرب ۲۵ می‌توان ساخت؟ (تکرار رقم مجاز است.)

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۵۴ ۴) ۴۸

۲۲. با ارقام ۱، ۲، ۷ و ۹ چند عدد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ می‌توان ساخت؟

۱) ۲۰ ۲) ۷۶ ۳) ۶۴ ۴) ۸۴

۲۳. هر یک از ارقام ۰ ، ۱، ۲، ۰ ، ۳، ۰، ۴ و ۵ را بر روی یک کارت نوشته‌ایم، در چه تعداد از جایگشت‌های این هشت کارت، یک عدد ۶ رقمی حاصل می‌شود؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۴۲۰۰

۲۴. با ارقام ۱، ۰ ، ۴ ، ۴ و ۴ چند عدد ۳رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

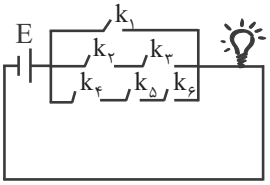
۲۵. تعداد تمام حالاتی که ۷ نفر می‌توانند بر روی یک نیمکت ۴ نفره بنشینند و عکس‌های یادگاری ۴ نفره بگیرند، کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۶۸۰ ۴) ۸۴۰

۲۶. چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت به طوری که دارای یک رقم ۲بوده و فاقد دو رقم ۷ و ۸ باشند؟

۱) ۱۱۴ ۲) ۱۴۱ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۴۷

۲۷. در مدار الکتریکی شکل مقابل، تعداد تمام حالات متنوع در وضعیت کلیدها که باعث روشن شدن لامپ می‌شود، کدام است؟ (هر کلید دارای دو وضعیت بسته و باز است.)



۱) ۷ ۲) ۳۸ ۳) ۴۳ ۴) ۶۳

۲۸. در یک ساختمان ۸ طبقه، آسانسوری با ۳ سرنشین از طبقه همکف شروع به حرکت می‌کند. تعداد تمام حالات مختلف برای توقف این آسانسور کدام است؟ (هیچ ۲ نفری در یک طبقه پیاده نمی‌شوند و آسانسور فقط رو به بالا حرکت می‌کند.)

۱) ۵۶ ۲) $۳^۸$ ۳) $۸^۳$ ۴) ۲۴

۲۹. پانزده کتاب در سه ردیف و در هر ردیف پنج کتاب قرار داده‌ایم به چند طریق می‌توان سه کتاب برداشت به طوری که از هر ردیف یک کتاب برداشته باشیم؟ (ترتیب برداشتن کتاب‌ها مهم است.)

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۵۰ ۳) ۶۵۰ ۴) ۷۵۰

۳۰. مقدار $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$ با کدام عدد برابر است؟

۱) $n(n+۱)$ ۲) $n(n-۱)$ ۳) $\frac{n+۱}{n-۱}$ ۴) $\frac{n(n+۱)}{۲}$

۳۱. شخص به همراه ۶نفر از دوستانش وارد اتاق می‌شوند. اگر خودش بنشیند، بقیه به چند طریق می‌توانند در سمت راست او (در یک ردیف) بنشینند؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۲۵ ۳) ۸۲۵ ۴) ۶۰۰

۳۲. هشت گلدان با گل‌های مختلف را به چند صورت می‌توان در دو کناره هر یک از ۴ پله قرار داد؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۸۴۰۰ ۳) ۶۷۲۰ ۴) ۱۲۲۴

۳۳. یکصد هزار تماشاچی به چند طریق مختلف می‌توانند بر روی یکصد هزار صندلی استادیوم آزادی بنشینند؟

۱) !۱ ۲) ۱۰۰/۰۰۰ ۳) $(۱۰۰/۰۰۰)^۲$ ۴) !۱۰۰/۰۰۰

۳۴. به چند طریق می‌توان ۳ سرباز و ۲ افسر را در یک ردیف نشاند، طوری که سربازها کنار هم و افسرها کنار هم باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۳۵. به چند طریق مختلف می‌توان از میان ۱۲ بازیکن یک تیم والیبال، ۶ نفر را در مناطق شش گانه زمین والیبال قرار داد؟

۱) !۱۲ ۲) $\frac{۱۲!}{۶!}$ ۳) $\frac{۱۲!}{۶!\times ۲!}$ ۴) $\frac{۱۲!}{۶!\times ۶!}$

پاسخنامه

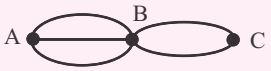
درس نامه ۱: اصل جمع ـ اصل ضرب ـ فاکتوریل ـ تبدیل [جایگشت]

اصل جمع: فرض کنیم برای انجام عمل A مختار باشیم که آن را از طریق A_1 یا A_2 انجام دهیم. اگر برای انجام این عمل از طریق A_1، n_1 حق انتخاب و برای انجامش از طریق A_2، n_2 حق انتخاب داشته باشیم، برای انجام عمل A، $n_1 + n_2$ حق انتخاب وجود دارد.

مثال: برای مسافرت از شهر A به شهر B می‌توانیم از هواپیما یا قطار استفاده کنیم. اگر در روز مورد نظر ما ۳ پرواز و ۲ قطار از A به B داشته باشیم، برای انجام این سفر $۳+۲=۵$ حق انتخاب وجود دارد.

اصل ضرب: فرض کنیم برای انجام عمل A مجبور باشیم که هر دو عمل a_1 و a_2 را انجام دهیم. اگر برای انجام عمل a_1، n_1 حق انتخاب و برای انجام عمل a_2، n_2 حق انتخاب داشته باشیم، برای انجام عمل A، $n_1 \times n_2$ حق انتخاب وجود دارد.

مثال: برای مسافرت از شهر A به شهر C از راه زمینی باید از شهر B بگذریم. اگر از A به B، ۳ مسیر و از B به C، ۲ مسیر وجود داشته باشد، برای مسافرت از A به C، $۳\times۲=۶$ حق انتخاب وجود دارد.



تذکر: هر دو اصل جمع و ضرب قابل تعمیم‌اند.

جایگشت: به هر یک از حالت های قرار گرفتن n شی در کنار هم یک جایگشت می گوییم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $n!$ است.

■ تعداد تمام جایگشت‌های n شیء متمایز مشروط بر آن که k تای آن‌ها کنار هم باشند برابر است با: $(n-k+۱)!\times k!$

■ تعداد تمام‌جایگشت‌های k دسته شیء متمایز که در دسته‌ی اول n_1، در دسته‌ی دوم n_2، ...، و در دسته‌ی k ام n_k شیء وجود دارد برابر است با: $k!\, n_1!\, n_2! \dots n_k!$

مثال: ۵ اهوازی، ۴ اصفهانی و ۲ زاهدانی به چند طریق مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرند به شرط آن‌که هم شهری‌ها کنار هم باشند؟

حل: ابتدا ۵ اهوازی را در یک دسته، ۴ اصفهانی را در یک دسته و ۲ زاهدانی را نیز در یک دسته قرار می‌دهیم، این سه دسته به $۳!$ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و داخل هر دسته افراد می‌توانند به ترتیب به $۵!$ و $۴!$ و $۲!$ طریق مختلف با هم جابه جا شوند و بنابر اصل ضرب کل جایگشت‌های موردنظر برابر است با $۳!\times۵!\times۴!\times۲!$

■ تعداد تمام حالاتی که n شیء متمایز می‌توانند تشکیل دور یا حلقه دهند:

✓ اگر جهت قرار گرفتن‌شان در حلقه اهمیت داشته باشد $(n-۱)!$ است.

✓ اگر جهت قرار گرفتن‌شان در حلقه اهمیت نداشته باشد $\frac{(n-۱)!}{۲}$ است.

تبدیل با تکرار: تعداد جایگشت‌های n شیء که از میان آن‌ها k شیء تکراری هستند برابر است با $\frac{n!}{k!}$.

۱. گزینه‌ی(۳)

هر یک از این ۵ نفر با ۶ نفر دست می‌دهد، پس تعداد دست‌دادن‌ها برابر است با:

$۵\times۶=۳۰$

۲. گزینه‌ی(۳)

هر یک از ۱۲ نفر تیم اول، با ۱۲ نفر تیم دوم دست می‌دهد. پس تعداد دست دادن‌ها برابر است با: $۱۲\times۱۲=۱۴۴$

۳. گزینه‌ی(۴)

به ازای هر یک از دو حالت سکه، ۶ حالت تاس وجود دارد پس $۲\times۶=۱۲$ حالت وجود دارد.

۴. گزینه‌ی(۱)

برای نفر اول شدن ۷ حالت مختلف وجود دارد و به ازای هر یک از این ۷ حالت، برای نفر آخر شدن ۶ حالت وجود دارد. پس تعداد کولی‌ها برابر است با: $۷\times۶=۴۲$

۵. گزینه‌ی(۳)

در مبنای ۱۰ رقم صفر یا یک یا .... یا ۹ است، پس:

$|S| = \underset{\text{هفت}}{\underset{\downarrow}{۱}} \times \underset{\downarrow}{۸} \times \underset{\downarrow}{۷} \times \underset{\downarrow}{۶} \times \underset{\text{نه}}{\underset{\downarrow}{۱}} = ۳۳۶$

۶. گزینه‌ی(۲)

برای نفر اول تیم A، سه حالت مبارزه و برای نفر دوم تیم A، دو حالت مبارزه و برای نفر سوم تیم A، یک حالت مبارزه وجود دارد. بنابراین تعداد تمام حالات مختلف که مبارزات می‌تواند انجام شود $۳\times۲\times۱=۶$ است.

۷. گزینه‌ی(۱)

ابتدا دو رقم ۲ و ۵ را کنار می‌گذاریم: $۰,۱,\cancel{۲},۳,۴,\cancel{۵},۶,۷,۸,۹$

هشت رقم می‌ماند. برای آن‌که عدد زوج باشد، باید رقم یکان‌اش زوج باشد. یعنی یکی از ارقام $\{۰,\cancel{۲},۴,۶,۸\}$.

حالت $\{۰\}$ را از بقیه $\{۴,۶,۸\}$ جدا می‌کنیم:

الف) اگر در رقم یکان $\{۰\}$ بگذاریم، در رقم صدگان هفت حق انتخاب $\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹\}$ داریم و در رقم دهگان شش، حق انتخاب خواهیم داشت:

$\overset{\{۰\}}{\boxed{۱}}\boxed{۶}\boxed{۷}: ۷\times۶\times۱=۴۲$

ب) اگر در رقم یکان یکی از ارقام $\{۴,۶,۸\}$ را بگذاریم، به ازای هر یک از این سه حق انتخاب، برای رقم صدگان شش حق انتخاب (به‌جز صفر و رقمی که در یکان استفاده کرده‌ایم.) و در رقم صدگان نیز شش حق انتخاب خواهیم داشت (در رقم دهگان حق استفاده از صفر را داریم.)

$\overset{\{۴,۶,۸\}}{\boxed{۳}}\boxed{۶}\boxed{۶}: ۶\times۶\times۳=۱۰۸$

پس تعداد کل سه رقمی‌های زوج بدون ارقام ۲ و ۵ و بدون تکرار ارقام برابر است با:

$۴۲+۱۰۸=۱۵۰$

۸. گزینه‌ی(۴)

علی برای لباس پوشیدن $۳\times۲\times۲=۱۲$ حق انتخاب دارد و به ازای هر یک از این ۱۲ فرمی که علی می‌تواند لباس انتخاب کند، خواهرش به تعداد $۴\times۲\times۳=۲۴$ حق انتخاب دارد. بنابراین جواب مسئله با توجه به اصل ضرب، $۱۲\times۲۴=۲۸۸$ می‌باشد.

۹. گزینه‌ی(۳)

از ایده متمم‌گیری استفاده می‌کنیم:

تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار ـ تعداد کل اعداد ۳ رقمی = تعداد اعداد با حداقل یک رقم تکراری

$=(۳\times۳\times۳)-(۳\times۲\times۱)=۲۷-۶=۲۱$

۱۰. گزینه‌ی(۴)

برای این‌که عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز مضرب ۵ باشد، بایستی یکان، ۵ یا صفر باشد. در این موارد برای صفر سمت راست جدا بحث کنید.

$\{0\}$ ○○○ یا $\{5\}$ ○○○

$4\times3\times1 + 3\times3\times1 = 21$

۱۱. گزینه‌ی(۴)

○○○

$2\times3\times3=18$ سه محل اختیار کرده محل سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد. پس عدد می‌توان نوشت.

۱۲. گزینه‌ی(۳)

○○○

$2\times5\times4=40$ اگر قرار است عدد سه رقمی کمتر از ۴۰۰ باشد، باید صدگان ۲ یا ۳ باشد ولی دهگان و یکان هر رقمی می‌تواند باشد.

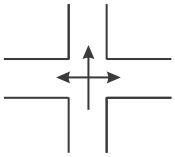
۱۳. گزینه‌ی(۱)

باید در رقم یکان، یکی از اعضای مجموعه $A=\{0,2,4,8\}$ و در رقم هزارگان، یکی از اعضای مجموعه $B=\{2,4\}$ را بگذاریم. اگر از رقم هزارگان شروع کنیم، نیازی به جدا کردن حالات نمی‌باشد.

در رقم هزارگان دو حق انتخاب داریم: ۲ یا ۴ و به ازای هر یک از این دو حق انتخاب در رقم یکان سه و در رقم دهگان چهار و در رقم صدگان سه حق انتخاب خواهیم داشت. پس تعداد جواب‌ها برابر است با:

$\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{3}: 2\times3\times4\times3=72$

۱۴. گزینه‌ی(۴)



هر اتومبیل در هنگام ورود به چهار راه، سه حق انتخاب دارد (راست، روبه‌رو، چپ) پس ۵ اتومبیل دارای $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$ حق انتخاب هستند.

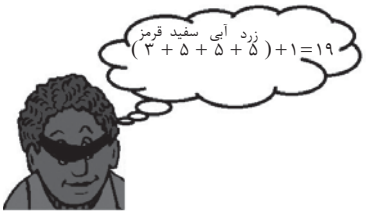
۱۵. گزینه‌ی(۱)

باید یک خانواده از بین ۱۰ خانواده و یک فرزند از بین ۳ فرزند انتخاب کنیم:

$\binom{3}{1}\times\binom{10}{1}=30$

۱۶. گزینه‌ی(۳)

فرض کنید چشمانتان بسته است و نیز بدترین حالت ممکن را در نظر بگیرید:



فرض کنیم در بدترین حالت ۱۸ گوی اول که بر می‌داریم شامل ۳ گوی قرمز، ۵ سفید، ۵ آبی و ۵ زرد باشد. به این ترتیب هنوز ۶ گوی همرنگ بیرون نیاورده‌ایم. اما با درآوردن ۱۹ امین گوی یا یک گوی آبی یا یک گوی زرد بیرون می‌آوریم که به این ترتیب موفق به خارج کردن ۶ گوی همرنگ شده‌ایم.

۱۷. گزینه‌ی(۱)

نفر اول ۶ حق انتخاب، نفر دوم ۵ ، نفر سوم ۴ و نفر چهارم ۳ حق انتخاب دارند:

$6\times5\times4\times3=360$

۱۸. گزینه‌ی(۴)

ماتریس 2×3 دارای ۶ درایه است برای هر درایه، دو وضعیت صفر و یک وجود دارد، پس $2^6=64$ ماتریس می‌توان نوشت.

$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}_{2\times3}$

۱۹. گزینه‌ی(۱)

تعداد اعداد ۳ رقمی فاقد تکرار رقم − تعداد اعداد ۳ رقمی = جواب

$=(4\times4\times4)-(4\times3\times2)=40$

۲۰. گزینه‌ی(۳)

ⓐ[b][c]ⓓ

جمع ارقام یکان و هزارگان باید ۱۲ باشد و جمع دهگان و صدگان باید ۹ باشد، بنابراین داریم:

$a+d=12 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & 3 & 4 & 5 & \dots & 9 \\ \hline d & 9 & 8 & 7 & \dots & 3 \end{array} \Rightarrow$ تعداد حالات $=7$

$c+b=9 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} c & 0 & 1 & \dots & 9 \\ \hline b & 9 & 8 & \dots & 0 \end{array} \Rightarrow$ تعداد حالات $=10$

$\Rightarrow |S|=7\times10=70$

۲۱. گزینه‌ی(۳)

عددی بر ۲۵ بخش‌پذیر است که عدد حاصل از ۲ رقم سمت راست آن مضرب ۲۵ باشد، پس در این‌جا باید دو رقم سمت راست ۲۵ یا ۰۰ یا ۵۰ باشد.

$(2)\times(3)\times(3)\times\overset{\text{۳ حالت}}{\boxed{\bigcirc\ \bigcirc}}=54$

۲۲. گزینه‌ی(۴)

اعداد یک رقمی و دو رقمی و ۳ رقمی همگی از ۱۰۰۰ کوچک‌ترند، پس:

$(4)+(4)\times(4)+(4)\times(4)\times(4)=84$

۲۳. گزینه‌ی(۱)

برای این‌که یک عدد شش رقمی حاصل شود باید ۲ تا از صفرها در سمت چپ چیدمان قرار بگیرند و در سومین مکان از سمت چپ، یک رقم غیر صفر قرار بگیرد:

$\{0\}\{0\}\{1,2,3,4,5\}$

$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{5}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}=5\times5!=5\times120=600$

۲۴. گزینه‌ی(۲)

اگر با این ۵ رقم، تعداد اعداد ۵ رقمی را می‌خواست، جواب به صورت زیر بود:

$\frac{5!}{3!}\times\frac{4}{5}=16$

ولی در این‌جا چون تعداد اعداد ۳ رقمی را خواسته است، باید حالات مختلف را از هم افراز کرده و جدا جدا حساب کنیم و با هم جمع نمائیم:

اعدادی که سه رقمی هستند و ارقامشان متمایز هستند:

$\{104,401,410,140\}$

اعدادی که سه رقمی هستند و دو رقم آن‌ها ۴ است:

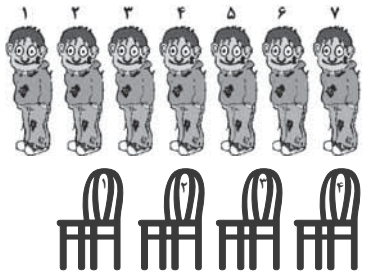
$\{440,404,441,414,144\}$

اعدادی که سه رقمی هستند و سه رقم آن‌ها ۴ است: $\{444\}$

که تعداد آن‌ها جمعاً ۱۰ می‌باشد.

۲۵. گزینه‌ی(۴)

روش اول: صندلی اول به ۷ طریق مختلف، صندلی دوم به ۶ طریق، صندلی سوم به ۵ طریق و صندلی چهارم به ۴ طریق می‌توانند پر شوند. بنابراین تعداد تمام عکس‌های ممکن برابر است با: $7\times6\times5\times4=42\times20=840$

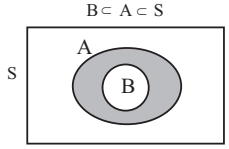


روش دوم: ابتدا ۴ نفر از ۷ نفر را انتخاب می‌کنیم؛ سپس این ۴ نفر روی ۴ صندلی می‌توانند جابه‌جا شوند: $\binom{۷}{۴}\times ۴! = ۳۵\times ۲۴ = ۸۴۰$

۲۶. گزینه‌ی(۱)

روش اول: اگر مجموعه تمام اعداد سه رقمی را با S، مجموعه تمام اعداد سه رقمی فاقد دو رقم ۷ و ۸ را با A و مجموعه تمام اعداد سه رقمی فاقد سه رقم ۷ و ۸ و ۲ را با B نشان دهیم، داریم:

$B\subset A\subset S$



برای محاسبه تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۷ و ۸ و شامل ۲ باید $n(A-B)$ را به دست آوریم.

از آن‌جا که $B\subset A$ است: $n(A-B)=n(A)-n(B)$

پس ابتدا تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۷ و ۸ را می‌یابیم:

$n(A)=\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۶}=۷\times ۷\times ۶$

سپس تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۷ و ۸ که فاقد ۲ نیز می‌باشند را به دست می‌آوریم:

$n(B)=\boxed{۶}\boxed{۶}\boxed{۵}=۶\times ۶\times ۵$

حال تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۷ و ۸ که شامل ۲ می باشند، به دست می‌آید:

$n(A-B)=۷\times ۷\times ۶-۶\times ۶\times ۵=۶(۴۹-۳۰)=۶\times ۱۹=۱۱۴$

روش دوم: ممکن است یک رقم ۲ و یک رقم صفر و یک رقم از $\{۱,۳,۴,۵,۶,۹\}$ یا یک رقم ۲ و دو رقم دیگر از $\{۱,۳,۴,۵,۶,۹\}$ باشد:

جواب $=\binom{۶}{۲}\times ۳!+\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۱}\times\binom{۶}{۱}=۱۱۴$

۲۷. گزینه‌ی(۳)

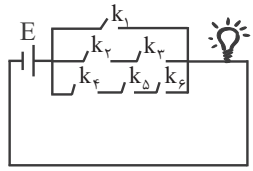
استفاده از ایده متمم مقرون به صرفه‌تر به نظر می‌رسد:

تعداد کل حالات برابر $n(S)=۲^۶=۶۴$ است.

(چرا که هر کلید به نوبه خود و مستقل از بقیه کلیدها، ۲ حق انتخاب دارد.)

برای آن‌که لامپ روشن نشود، باید هر سه شاخه، قطع باشد (مدار باز):

برای این‌که شاخه‌ی اول، قطع باشد، تنها یک حالت وجود دارد.



برای این‌که شاخه‌ی دوم، قطع باشد، سه حالت وجود دارد.

برای این‌که شاخه‌ی سوم، قطع باشد، هفت حالت وجود دارد.

در هر یک از جداول زیر برای بسته بودن کلید، حالت ۱ و برای باز بودن کلید، حالت صفر را در نظر می‌گیریم:

$k_۱$	
۱	✓
۰	× → ۱ حالت

$k_۲$	$k_۳$	
۱	۱	✓
۱	۰	×
۰	۱	×
۰	۰	×

۳ حالت

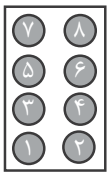
$k_۴$	$k_۵$	$k_۶$	
۱	۱	۱	✓
۱	۱	۰	×
۱	۰	۱	×
۱	۰	۰	×
۰	۱	۱	×
۰	۱	۰	×
۰	۰	۱	×
۰	۰	۰	×

۷ حالت

(علامت ✓ به معنی آن است که جریان از این شاخه رد می‌شود و علامت × به معنی آن است که جریان از این شاخه عبور نمی‌کند.)

به این ترتیب برای آن‌که لامپ روشن نشود $n(A')=۱\times ۳\times ۷=۲۱$ حالت مختلف وجود دارد. بنابراین: $n(A)=n(S)-n(A')=۶۴-۲۱=۴۳$

۲۸. گزینه‌ی(۱)



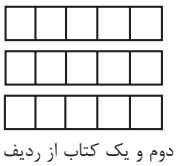
جواب این مسئله تعداد حالات مختلفی است که می‌توان از میان ۸ کلید طبقات آسانسور، ۳ کلید را انتخاب کرد. این تعداد برابر است با:

$\binom{۸}{۳}=۸\times ۷=۵۶$

(دقت کنید اگر تعداد حالاتی که ۳ مسافر پیاده می‌شوند را می‌خواست، جواب $\binom{۸}{۳}\times ۳!=۵۶\times ۶$ است.)

۲۹. گزینه‌ی(۴)

روش اول: کتاب اول را به ۱۵ طریق می‌توان برداشت، بعد از آن کتاب دوم را از ۲ ردیف باقی‌مانده یعنی از ۱۰ کتاب دیگر می‌توان انتخاب کرد و کتاب سوم را فقط از ۵ کتاب ردیف سوم باقی‌مانده می‌توان انتخاب کرد یعنی به $۱۵\times ۱۰\times ۵=۷۵۰$ طریق می‌توان انتخاب کرد.



روش دوم: یک کتاب از ردیف اول یک کتاب از ردیف دوم و یک کتاب از ردیف سوم انتخاب کرده، در جابجایی حالات انتخاب یعنی !۳ ضرب می‌کنیم:

$\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\times ۳!=۷۵۰$

۳۰. گزینه‌ی(۱)

$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!}=(n+۱)n$

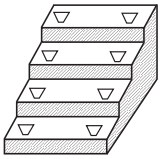
۳۱. گزینه‌ی(۱)

وقتی خودش نشست ۶ دوستش به !۶ طریق مختلف می‌توانند سمت راست او بنشینند:

جواب $=۶!=۷۲۰$

۳۲. گزینه‌ی(۱)

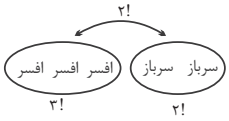
جواب !۸ است چرا که گلدان اول هشت حق انتخاب، گلدان دوم، هفت حق انتخاب و... و گلدان آخر فقط یک حق انتخاب دارد:



$۸!=۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۵۶\times ۳۰\times ۲۴=۴۰۳۲۰$

۳۳. گزینه‌ی(۴)

۳۴. گزینه‌ی(۲)



$|S|=۲!\times ۳!\times ۲!=۲۴$

۳۵. گزینه‌ی(۲)

منطقه یک به ۱۲ طریق، منطقه دو به ۱۱ طریق، ... و منطقه شش به ۷ طریق مختلف می‌تواند پر شود:

(صورت و مخرج را در !۶ ضرب کردیم.) $۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷=\frac{۱۲!}{۶!}$

فصل ششم

احتمال

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

احتمالات ساده
احتمالات شرطی
دو پیشامد مستقل
جمع احتمالات
قانون بیز
احتمال در فضای گسسته
احتمال در فضای پیوسته
تست‌های ترکیبی احتمال با مباحث دیگر

احتمالات ساده

۱. فرض کنیم $S = \{-1,2,5,4,6\}$ باشد، کدام مجموعه زیر یک پیشامد از این فضای نمونه‌ای است؟

۱) $\{1,5\}$ ۲) $\{1,5,6\}$ ۳) $\{2,5,6\}$ ۴) $\{3,6\}$

۲. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ این آزمایش تصادفی چند پیشامد دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰۹۶

۳. فرض کنیم $P(A)=0/2$، $n(A)=8$ و $n(B)=5$ باشد، $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴. چهار لامپ از ده لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم، احتمال این که هر سه لامپ سالم باشند، کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵. نه گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۹ در داخل ظرفی قرار دارند به طور تصادفی دو گوی از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که شماره هر دو گوی، عددی زوج باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۶. دو عدد به تصادف و با جایگذاری از بین اعداد «۶ , ...,۲,۱» انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو عدد فرد و جمع آن‌ها ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{8}{12}$ ۲) $\frac{1}{30}$ ۳) $\frac{2}{36}$ ۴) $\frac{2}{30}$

۷. عددی به تصادف از فضای نمونه‌ای $\{1,2,...,9\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۸. هر یک از اعداد $21,22,...,41$ را روی یک کارت نوشته، یک کارت به طور تصادفی بیرون می کشیم، با کدام احتمال عدد نوشته شده مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{2}{7}$

۹. از میان ۹ نفر دانش‌آموز که ۵ نفر سال سوم و ۴ نفر سال دوم می‌باشند، ۵ نفر انتخاب شده‌اند. احتمال این‌که ۳ نفر سال سوم و ۲ نفر سال دوم باشند چقدر است؟

۱) $\frac{11}{6}$ ۲) $\frac{9}{21}$ ۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{11}{21}$

۱۰. در ظرفی پنج مهره به شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴ , ۵ ریخته‌ایم و دو مهره به تصادف با هم از ظرف بیرون می‌آوریم؛ احتمال آن‌که مجموع شماره‌ها بزرگ‌تر از ۵ باشد کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۱۱. ده کارت به شماره‌های ۱ تا ۱۰ را در کیسه‌ای به صورت درهم قرار داده‌ایم. دو کارت همزمان و به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم؛ احتمال آن‌که اختلاف اعداد روی کارت‌ها ۳ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{7}{90}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{7}{45}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۱۲. از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که ۲ مهره همرنگ نباشند کدام است؟

۱) $\frac{3}{11}$ ۲) $\frac{5}{11}$ ۳) $\frac{6}{11}$ ۴) $\frac{7}{11}$

۱۳. چهار حرف به طور تصادفی از حروف کلمه "RANDOMLY" انتخاب می‌شوند. احتمال آن که این چهار حرف جزء حروف بی‌صدا باشند کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{3}{14}$ ۴) $\frac{1}{14}$

۱۴. بر روی هر یک از چند کارت یکسان، اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{7, 6, 5, 4, 2\}$ را نوشته به تصادف یک کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟ (سراسری - ۸۳)

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۱۵. در کیسه‌ای دو مهره قرمز، یک مهره سفید و یک مهره سیاه وجود دارد، سه مهره به تصادف بیرون می‌آوریم؛ احتمال این‌که از هر رنگ یک مهره خارج شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۶. اعداد $1,2,...,9$، بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟ (سراسری - ۹۱)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۷. از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم، ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟ *(سراسری ـ ۹۱)*

۱) $\frac{۳}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۱۴}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۱۸. ده نقطه $A, B, ..., J$ روی دایره‌ای مفروضند. با این نقاط تمام مثلث‌های ممکن را ساخته‌ایم، احتمال این‌که مثلثی که انتخاب می‌کنیم، یک رأسش A باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۱۹. از میان ۷ نفر، ۳ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم؛ با کدام احتمال شخص a انتخاب شده و شخص b انتخاب نشده است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۰. از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن‌ها در مورد تاریخ است به طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد کدام است؟ *(سراسری خارج از کشور ـ ۹۱)*

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

۲۱. سه دانشجوی پسر و دو دانشجوی دختر به تصادف در یک صف می‌ایستند؛ احتمال این‌که دو دختر در ابتدا و انتهای صف باشند کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

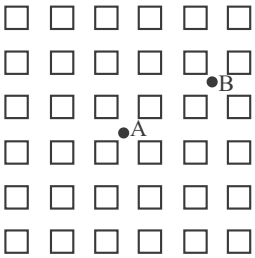
۲۲. از میان ۳ ترک، ۲ کرد و ۳ بلوچ، دو نفر به تصادف اختیار می‌کنیم؛ احتمال این‌که هر دو نفر از یک قوم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۳. پنج مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را در ظرفی ریخته‌ایم، سه مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم؛ با کدام احتمال مجموع شماره‌های سه مهره عدد زوج است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۴

۲۴. شکل مقابل قسمتی از یک محوطه بازی را از نمای بالا نشان می‌دهد، بازی این‌گونه است که یک نفر را با چشمان بسته در نقطه A قرار می‌دهند و سپس جایزه‌اش را در یکی از نقاطی که فاصله آن از نقطه A برابر ۳ قطعه (واحد) باشد (مانند B) به طور تصادفی قرار می‌دهند، اگر شخص حق طی کردن فقط سه قطعه را داشته باشد و از هر قطعه‌ای که می‌رود دیگر برنگردد، با کدام احتمال به جایزه‌اش می‌رسد؟



۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۲۵. افراد a, b, c روی یک نیمکت به تصادف می‌نشینند؛ احتمال این‌که a, b کنار هم باشند کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۲۶. سه نقطه به تصادف از نقاط شکل مقابل اختیار کرده‌ایم. احتمال این‌که این سه نقطه تشکیل یک مثلث دهند کدام است؟

۱) $\frac{۵۶}{۲۲۰}$ ۲) $\frac{۱۱۲}{۲۲۰}$ ۳) $\frac{۲۱۶}{۲۲۰}$ ۴) $\frac{۲۲}{۲۲۰}$

۲۷. عدد n را به تصادف از اعداد طبیعی دو رقمی اختیار کرده‌ایم؛ احتمال این‌که $\log_۲ n$ عددی صحیح باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۸. دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که این دو رأس مجاور باشند برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۹. هر یک از ارقام ۰، ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را بر روی یک کارت نوشته و سپس کارت‌ها را به طور تصادفی در کنار هم قرار می‌دهیم. چقدر احتمال دارد یک عدد چهار رقمی ساخته شده باشد؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴۰}$

۳۰. هر یک از ارقام ۰، ۰، ۱، ۲ و ۳ را بر روی یک کارت نوشته و سپس کارت‌ها را به طور تصادفی در کنار هم قرار می‌دهیم. چقدر احتمال دارد که یک عدد چهار رقمی زوج ساخته شده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۱. از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ *(سراسری تجربی ـ ۹۱)*

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

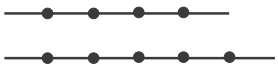
۳۲. در کیسه‌ای ۶ مهره قرار دارد که تعدادی سیاه و تعدادی سفید است، ۳ مهره به تصادف بیرون می‌آوریم؛ اگر احتمال این‌که هر ۳ مهره سفید باشد برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، تعداد مهره‌های سفید کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

۳۳. سه تاس سالم قرمز، سبز و سفید با هم ریخته، احتمال این‌که اعداد رو شده تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت یک دهند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۲۱۶}$

۳۴. چهار نقطه از نه نقطه مقابل را به تصادف انتخاب کرده و متوالیاً به هم وصل می‌کنیم؛ با کدام احتمال یک مثلث ساخته می‌شود؟



۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۸}$

۳۵. در جعبه‌ای ۱۰ مهره وجود دارد که ۶ عدد از آن‌ها سفید و بقیه سیاه هستند. ۴ مهره از این جعبه متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می‌کشیم؛ احتمال این‌که هر چهار مهره سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۳۶. شش نفر $\{a,b,c,d,e,f\}$ به تصادف در یک ردیف کنار هم می‌ایستند. با کدام احتمال a در ابتدای صف بوده و بین b, c هم دقیقاً یک نفر قرار گرفته است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۳۷. شش نقطه F, E, D, C, B, A به ترتیب روی محیط یک دایره قرار دارند. از بین پاره‌خط‌هایی که دوبه‌دوی این نقاط را به هم وصل می‌کنند یک پاره‌خط به تصادف انتخاب می‌کنیم؛ احتمال این‌که این پاره‌خط قطر شش ضلعی ABCDEF باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۸. در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می‌شود، اگر ۲ موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های فراری دیابتی است؟

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۳۹. اگر ۵ پسر و ۵ دختر به تصادف در یک ردیف بنشینند؛ احتمال این‌که یکی در میان نشسته باشند کدام است؟

۱) $\frac{۵!۵!}{۱۰!}$ ۲) $\frac{۲\times۵!}{۱۰!}$ ۳) $\frac{۲\times۵!\times۳!}{۱۰!}$ ۴) $\frac{۲\times۵!\times۵!}{۱۰!}$

۴۰. از میان ۶ زوج متأهل، دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم؛ احتمال آن‌که این دو نفر زن و شوهر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۱}$

۴۱. از بین ده جفت کفش متمایز، دو لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که این دو لنگه جفت هم باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴۰۰}$

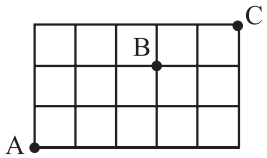
۴۲. از بین سه جفت کفش متمایز، چهار لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که دقیقاً یک جفت کفش در بین آن‌ها باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۴۳. از بین ۱۰ نفر (شامل ۵ مرد و ۵ همسر آن‌ها)، ۳ نفر به تصادف اختیار می‌کنیم، احتمال این‌که یک زن و شوهرش در بین آن‌ها باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۰/۸

۴۴. شخصی به تصادف یکی از کوتاه‌ترین مسیرهای موجود بین دو نقطه‌ی A , C را انتخاب می‌کند؛ با کدام احتمال از نقطه B می‌گذرد؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۴) $\frac{۲۷}{۲۸}$

۴۵. با چشمان بسته، ۱۰ گل از میان ۹۹ گل رز قرمز و ۱ گل رز زرد انتخاب می‌کنیم؛ با کدام احتمال گل زرد در میان گل‌های انتخاب شده است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۷}{۹۰}$

پاسخنامه

درس نامه ۱: تعاریف پایه

آزمایش تصادفی: به آزمایشی که می‌توان تمام نتایج ممکن آن را در یک مجموعه گردآوری نمود، آزمایش تصادفی می‌گوئیم.

رخداد (برآمد): هر یک از نتایج ممکن در انجام یک آزمایش تصادفی را یک رخداد یا یک برآمد می‌گوئیم.

فضای نمونه‌ای: به‌مجموعه تمام‌رخدادهای‌ممکن در انجام یک‌آزمایش‌تصادفی، فضای‌نمونه‌ای آن آزمایش‌گفته و آن‌را با حرف S نشان‌می‌دهیم.

پیشامد: به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، پیشامد گفته می‌شود.

انواع فضای نمونه‌ای:

۱. فضای نمونه‌ای یکنواخت (هم‌شانس)

۲. فضای نمونه‌ای غیر یکنواخت (غیر هم‌شانس)

اگر تمام اعضای یک فضای نمونه‌ای، هم‌شانس باشند، فضای نمونه‌ای، یکنواخت است، در غیر این صورت، فضای نمونه‌ای، غیر یکنواخت یا غیر هم‌شانس است.

مثال۱: در کیسه‌ای ۱ مهره سیاه و ۱ مهره سفید وجود دارد، دستمان را داخل کیسه کرده و یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم، فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{\text{سفید و سیاه}\}$ است که فضایی یکنواخت می‌باشد. حال چنانچه در کیسه، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره سفید وجود داشت، باز هم فضای نمونه‌ای همان قبلی می‌باشد اما آیا هنوز دو رخداد سیاه و سفید هم شانس‌اند؟

خیر ـ چون تعداد مهره‌های سیاه بیشتر از تعداد مهره‌های سفید است. بنابراین شانس خارج شدن مهره سیاه بیشتر از شانس خارج شدن مهره سفید است. (شانس سیاه، $\frac{۳}{۲}$ برابر شانس سفید است.)

تعریف احتمال: احتمال وقوع یک پیشامد، یک عدد کسری است که نشان دهنده شانس وقوع آن پیشامد است؛ احتمال وقوع پیشامد A را به صورت P(A) نشان می‌دهیم. بدیهی است که این عدد کسری بین صفر و یک است و هر چه بزرگتر باشد، یعنی شانس بیشتر است و هر چه کوچکتر باشد، شانس کمتر است.

به پیشامدی که احتمال وقوعش، صفر است، پیشامد نشدنی و به پیشامدی که احتمال وقوعش، یک است، پیشامد حتمی گفته می‌شود.

محاسبه احتمال: اگر فضای نمونه‌ای S یکنواخت باشد، احتمال وقوع پیشامد A برابر است با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$؛ اما اگر فضای نمونه‌ای S غیر یکنواخت باشد، باید ابتدا آن را تبدیل به یکنواخت کنیم و سپس P(A) را محاسبه نمائیم.

مثال۲: در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس همگن، فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است. چون تاس همگن است پس این فضای نمونه‌ای یکنواخت است، در زیر احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای داده شده را محاسبه می‌کنیم:

۱) پیشامد A: تاس ۱ بیاید: $A=\{۱\}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۶}$

۲) پیشامد B: تاس فرد بیاید: $B=\{۱,۳,۵\}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

۳) پیشامد C: تاس بزرگتر از ۲ بیاید: $C=\{۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow P(C)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

۴) پیشامد D: تاس بزرگتر از ۱۰ بیاید: $D=\{\ \}\Rightarrow P(D)=\frac{۰}{۶}=۰$

۵) پیشامد E: تاس کوچکتر از ۱۰ بیاید: $E=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow P(E)=\frac{۶}{۶}=۱$

پیشامد D، نشدنی و پیشامد E، حتمی است.

تذکر: از آن‌جا که پیشامدهای یک آزمایش تصادفی و نیز فضای‌نمونه‌ای آن همگی از نوع مجموعه هستند، تمام قوانین و ویژگی‌های مجموعه‌ها در احتمالات نیز برقرار است.

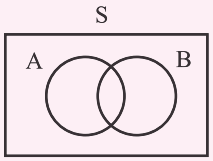
مثال۳:

$(۱)\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$(۲)\ P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$(۳)\ P(A')=۱-P(A)$

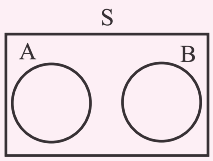
$(۴)\ P[(A\cup B)']=P(A'\cap B')$



دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B که $A\cap B=\phi$ می‌باشد را ناسازگار می‌گوییم؛

بدیهی است اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند: $P(A\cap B)=۰\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تذکر: هر پیشامد با متمم خودش ناسازگار است اما عکس این مطلب همواره صحیح نیست.



A و B ناسازگارند.

۱. گزینه‌ی(۳)

هر زیرمجموعه فضای نمونه‌ای یک پیشامدS است.

---

۲. گزینه‌ی(۴)

فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای$|S|=۲\times۶=۱۲$ عضو است:

$S=\{(۱,\text{رو}),(۲,\text{رو}),\ldots,(۶,\text{پشت})\}$

بنابراین دارای$۲^{۱۲}=۴۰۹۶$ زیرمجموعه است. (به هریک از زیر مجموعه‌های S یک پیشامد می‌گوئیم.)

---

۳. گزینه‌ی(۲)

روش اول:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow ۰/۲=\frac{۸}{n(S)}\Rightarrow n(S)=۴۰$$

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow p(B)=\frac{۵}{۴۰}=\frac{۱}{۸}$$

روش دوم:

$$\begin{cases}p(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}\\ p(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}\end{cases}\Rightarrow\frac{p(A)}{p(B)}=\frac{n(A)}{n(B)}\Rightarrow\frac{۰/۲}{p(B)}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow p(B)=\frac{۱}{۸}$$

---

۴. گزینه‌ی(۲)

چون می‌خواهد۳ لامپ مورد نظر سالم باشد، باید۳ لامپ از۶ لامپ سالم باشد:

$$p=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{\frac{۶\times۵\times۴}{۳!}}{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳!}}=\frac{۱}{۶}$$

---

۵. گزینه‌ی(۴)

مجموعه شماره‌گوی‌های زوج عبارتست از$A=\{۲,۴,۶,۸\}$؛ چون می‌خواهیم شماره دو گوی برداشته شده از نه گوی زوج باشد، تعداد حالات مطلوب عبارتست از$\binom{۴}{۲}=۶$ پس:

$$p=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

---

۶. گزینه‌ی(۳)

تنها جمع دو عدد فرد۳ و۵ برابر۸ می‌شود (در این مسئله)

بنابراین:

$$p=\underbrace{(\tfrac{۱}{۶}\times\tfrac{۱}{۶})}_{\text{(عدد اول۵ و عدد اول۳)}}+\underbrace{(\tfrac{۱}{۶}\times\tfrac{۱}{۶})}_{\text{(عدد دوم۳ و عدد اول۵)}}=\frac{۲}{۳۶}$$

---

۷. گزینه‌ی(۲)

مجموعه اعداد زوج یا مضرب۳ عبارتند از:

$$\begin{matrix}A=\{۲,۴,۶,۸,۳,۹\}\\ S=\{۱,۲,\ldots,۹\}\end{matrix}\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

---

۸. گزینه‌ی(۱)

اگر $S=\{۲۱,۲۲,\ldots,۴۱\}$ باشد، اعداد مضرب۳ در این مجموعه $A=\{۲۱,۲۴,۲۷,۳۰,۳۳,۳۶,۳۹\}$است. بنابراین:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}$$

۹. گزینه‌ی(۳)

$$p=\frac{\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۵}}=\frac{۱۰\times۶}{\frac{۹!}{۴!۵!}}=\frac{۱۰\times۶}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

---

۱۰. گزینه‌ی(۳)

مجموعه حالاتی که جمع شماره دو مهره بزرگ‌تر از۵ باشد راA می‌نامیم:

$$A=\{\{۵,۱\},\{۵,۲\},\{۵,۳\},\{۵,۴\},\{۴,۲\},\{۴,۳\}\}$$

$$p=\frac{۶}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

---

۱۱. گزینه‌ی(۳)

$$\begin{cases}n(S)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵\\ A=\{\{۱,۴\},\{۲,۵\},\{۳,۶\},\{۴,۷\},\{۵,۸\},\{۶,۹\},\{۷,۱۰\}\}\Rightarrow n(A)=۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۷}{۴۵}$$

---

۱۲. گزینه‌ی (۳)

۲ مهره را از بین ۱۱مهره درون کیسه خارج می‌کنیم، برای این‌که۲ مهره همرنگ نباشند باید یکی سفید و یکی سیاه باشد.

$$p=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{۵\times۶}{۵۵}=\frac{۶}{۱۱}$$

---

۱۳. گزینه‌ی (۳)

کلمه "RANDOMLY" دارای هشت حرف است که دو حرفA,O صدادار و شش حرف Y,R,N,D,M,L بی‌صدا هستند.

وقتی به تصادف چهار حرف از این هشت حرف را انتخاب می‌کنیم، تعداد فضای نمونه‌ای$n(S)=\binom{۸}{۴}$ است.

تعداد حالات مطلوب$n(A)=\binom{۶}{۴}$ می‌باشد که تعداد حالاتی است که هر چهار حرف بی‌صدا باشند.

بنابراین:

$$p(A)=\frac{\binom{۶}{۴}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۱\cancel{۵}}{\frac{\cancel{۸}\times۷\times۶\times\cancel{۵}}{\cancel{۴}\times۳\times\cancel{۲}\times۱}}=\frac{۳}{۱۴}$$

---

۱۴. گزینه‌ی (۳)

تعداد اعداد۳رقمی با ارقام متمایز از اعضای مجموعه$\{۲,۴,۵,۶,۷\}$ عبارتند از:

$$n(S)=\binom{۵}{۳}\times۳!$$

و تعداد اعداد ۳ رقمی که۲رقم آن فرد باشد و یک رقم آن زوج (با ارقام متمایز) عبارت است از:

$$n(A)=\binom{۲}{۲}\times\binom{۳}{۱}\times۳!$$

بنابراین:

$$p(A)=\frac{\binom{۲}{۲}\times\binom{۳}{۱}\times۳!}{\binom{۵}{۳}\times۳!}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$$

---

۱۵. گزینه‌ی (۲)

$$p=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۴}{۳}}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶. گزینه‌ی (۲)

$$n(s)=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

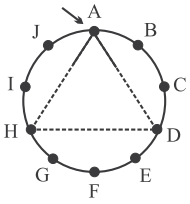
$$A=\{\{۲,۹\},\{۳,۸\},\{۴,۷\},\{۵,۶\}\}\Rightarrow n(A)=۴\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۱۷. گزینه‌ی (۳)

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۴}}{\binom{۹}{۶}}=\frac{\cancel{۶}\times ۵}{\frac{\cancel{۶}\times\cancel{۸}\times ۷}{\cancel{۲}\times\cancel{۲}\times ۱}}=\frac{۵}{۱۴}$$

۱۸. گزینه‌ی (۴)

در محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باید تعداد انتخاب هر۳ نقطه از بین۱۰ نقطه را در نظر بگیریم: $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$ و در محاسبه تعداد حالات مطلوب، باید۲ نقطه از ۹ نقطه $j,\dots,C,B$ را انتخاب کنیم تا به همراه نقطهA تشکیل مثلث بدهند، پس $n(A)=\binom{۹}{۲}$ است. بنابراین:



$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۹}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۳}{۱۰}$$

۱۹. گزینه‌ی(۱)

$$\{\overset{\checkmark}{a},\overset{\times}{b},c,d,e,f,g\}$$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=\binom{۷}{۳}$ است. تعداد زیرمجموعه‌های۳عضوی که a باشد و b نباشد هم انتخاب۲ نفر از میان۵ نفر $\{c,d,e,f,g\}$ است. بنابراین:

$$p(A)=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۲}{۷}$$

۲۰. گزینه‌ی (۳)

$$p=\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۵}}=\frac{۱۰\times ۲۱}{\frac{\cancel{۱۲}\times ۱۱\times\cancel{۱۰}\times ۹\times ۸}{\cancel{۵}\times\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times ۱}}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

۲۱. گزینه‌ی (۱)

پنج نفر به !۵ طریق می‌توانند در یک صف بایستند! $n(S)=۵$ و اگر قرار باشد دو دختر در طرفین صف باشند، به!۳×!۲می‌توانند بایستند. بنابراین:

$$p=\frac{۲!۳!}{۵!}=۰/۱$$

۲۲. گزینه‌ی (۳)

باید هر دو نفر ترک باشند یا هر دو نفر کرد باشند یا هر دو نفر بلوچ باشند.

$$p=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳+۱+۳}{۲۸}=\frac{۱}{۴}$$

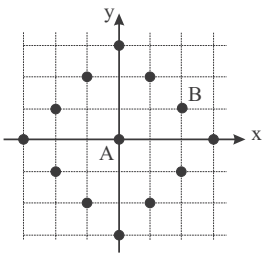
۲۳. گزینه‌ی (۲)

برای این‌که جمع این سه مهره زوج باشد باید دو مهره از سه مهره فرد $\{۱,۳,۵\}$ و یک مهره از مهره‌های زوج $\{۲,۴\}$ انتخاب شوند:

$$p=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۳}}=\frac{۳\times ۲}{۱۰}=۰/۶$$

۲۴. گزینه‌ی(۳)

یک دستگاه محورهای مختصات را در این محوطه بازی منطبق می‌کنیم به طوری که مرکزش روی نقطه A باشد: هر قطعه یا در امتداد x است یا در امتدادy ؛ از آن‌جا که مسیر از سه قطعه تشکیل شده است، بنابراین$|x|+|y|=۳$ پس فضای نمونه‌ای مجموعه، شامل۱۲ نقطه مشخص شده در شکل می‌باشد که یکی از این۱۲ نقطه، نقطهB است. بنابراین احتمال رسیدن به نقطهB ، $\frac{۱}{۱۲}$ است.



۲۵. گزینه‌ی(۱)

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲!\times ۲!}{۳!}=\frac{۲}{۳}$$

۲۶. گزینه‌ی(۳)

روش اول: برای این‌که تشکیل مثلث دهند باید (دو نقطه از روی قطر و یک نقطه از محیط نیم‌دایره) یا (یک نقطه از قطر و دو نقطه از محیط) یا (هر سه نقطه را از محیط) انتخاب کنیم. پس:

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}+\binom{۴}{۱}\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۳}=۶\times ۸+۴\times ۲۸+۵۶=۲۱۶$$

و $n(S)$ هم که $\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$ است. پس:

$$p(A)=\frac{۲۱۶}{۲۲۰}=\frac{۵۴}{۵۵}$$

روش دوم: از ایده متمم استفاده کنیم. حالاتی که انتخاب ۳ نقطه منجر به تشکیل مثلث نمی‌شوند را حساب کرده از کل کم می‌کنیم. اگر هر۳ نقطه را از روی قطر انتخاب کنیم، مثلث ساخته نمی‌شود. پس:

$$n(A')=\binom{۴}{۳}=۴\Rightarrow n(A)=n(S)-n(A')=۲۲۰-۴=۲۱۶$$

$$\Rightarrow p(A)=۱-\frac{۴}{۲۲۰}=\frac{۲۱۶}{۲۲۰}$$

۲۷. گزینه‌ی (۲)

تعداد اعداد طبیعی دو رقمی ۹۰ = ⑩ × ⑨ است.

اگر $\log_n n$ بخواهد عددی صحیح و n دو رقمی باشد باید $n\in\{۱۶=۲^۴\ ,\ ۳۲=۲^۵\ ,\ ۶۴=۲^۶\}$ باشد؛ یعنی:

$$P=\frac{۳}{۹۰}=\frac{۱}{۳۰}$$

۲۸. گزینه‌ی (۲)

روش اول: رأس اول هر کدام انتخاب شود مهم نیست، مهم این است که از بین چهار رأس باقیمانده آن را انتخاب کنیم که مجاور رأس اول باشد. چون دو رأس می‌تواند مجاور رأس اول باشد:

$$p=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: دو رأس از پنج رأس به $n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$ طریق امکان‌پذیر است دو رأس مجاور باشند؛ یعنی روی یک ضلع باشند: $n(A)=۵$ پس $p(A)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

۲۹. گزینه‌ی(۳)

روش اول: تعداد تمام حالاتی که این۷ کارت می‌توانند کنار هم چیده شوند برابر $\frac{۷!}{۳!}$ است. و تعداد حالاتی که منجر به تشکیل عدد چهار رقمی می‌شود برابر!۴ می‌باشد: $\overbrace{۱\ ۲\ ۳\ ۴}^{۴!}\ \circ\circ\circ$ ، پس:

$$p(A)=\frac{۴!}{\frac{۷!}{۳!}}=\frac{۱}{۳۵}$$

تذکر۱: در این روش حل، صفرها را مانند هم گرفتیم و بنابراین در محاسبه $n(S)$، ۷! را تقسیم بر۳! کردیم و در محاسبه $n(A)$ هم جایگشت‌های صفرها را در نظر نگرفتیم اما اگر صفرها را متفاوت می‌گرفتیم، $n(S)=7!$ می‌شد و $n(A)=3!\times 4!$ و چون جایگشت صفرها هم مهم بود: $\overbrace{0\,0\,0}^{3!}\ \overbrace{1\,2\,3\,4}^{4!}$ پس: $p(A)=\frac{3!4!}{7!}$ می‌شود که همان جواب را می‌دهد.

تذکر۲: بسیار دقت کنید که در حل مسائل احتمال در صورت و مخرج کسر یک استراتژی را در پیش بگیرید. اگر در مخرج کسر، عناصر را یکسان فرض کردید، در صورت هم یکسان بگیرید و اگر در مخرج کسر عناصر را متمایز فرض کردید، در صورت هم متمایز بگیرید. مثال زیر را ابتدا خودتان حل کنید و سپس پاسخ را ببینید:

مثال: ۳ گوی سفید و۴ گوی سیاه را به تصادف در یک ردیف کنار هم چیده‌ایم. با کدام احتمال سفیدها کنار هم هستند؟

استراتژی اول: اگرگوی‌ها را یکسان فرض کنیم:

$\overbrace{\bullet\ \boxed{\circ\circ\circ}\ \bullet\bullet\bullet}^{\frac{5!}{4!}}$

$p(A)=\frac{\frac{5!}{4!}}{\frac{7!}{3!4!}}=\frac{1}{7}$

$\underbrace{\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet}_{\frac{7!}{3!4!}}$

استراتژی دوم: اگرگوی‌ها را متمایز فرض کنیم:

$\overbrace{\bullet\ \overbrace{\boxed{\circ\circ\circ}}^{3!}\ \bullet\bullet\bullet}^{5!}$

$p(A)=\frac{3!5!}{7!}=\frac{1}{7}$

$\underbrace{\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet}_{7!}$

روش دوم: برای آن‌که از چیدمان این۷ کارت، یک عدد چهار رقمی ساخته شود باید هر۳ کارت سمت چپ صفر باشند که احتمال آن برابر است با:

$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$

---

۳۰. گزینه‌ی(۴)

صفرها را یکسان فرض می‌کنیم (تعیین استراتژی): $n(S)=\frac{5!}{2!}=60$

برای محاسبه $n(A)$، یکی از صفرها را در سمت چپ می‌گذاریم؛ حال باید با ارقام۰،۱،۲،۳ عدد چهار رقمی زوج بسازیم:

دو حالت در نظر می‌گیریم:

{۰,۲}			{۱,۲,۳}

حالت اول: رقم یکان، صفر باشد:

{۰}			{۱,۲,۳}	
۱	۱	۲	۳	=۶

حالت دوم: رقم یکان، ۲ باشد:

{۲}			{۱,۳}	
۱	۱	۲	۲	=۴

پس $n(A)=6+4=10$ است. بنابراین: $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

---

۳۱. گزینه‌ی(۳)

روش اول:

p (هر دو همرنگ باشند) $=\frac{\binom{3}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{3+6}{21}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$

روش دوم:

p (همرنگ باشند) $=1-p$(هر دو همرنگ نباشند)

$=1-\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}=1-\frac{3\times 4}{7\times 3}=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

روش سوم:

p (همرنگ باشند) $=(\underbrace{\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}}_{\text{دومی سبز و اولی سبز}})+(\underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}}_{\text{یا دومی سفید و اولی سفید}})=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

---

۳۲. گزینه‌ی(۳)

فرض کنیم تعداد مهره‌های سفیدn باشد، بنابراین۳ مهره از۶ مهره خارج کرده $(n(S)=\binom{6}{3}=20)$

چون پیشامد مطلوب این است که هر سه مهره سفید باشد، پس:

$n(A)=\binom{n}{3}$

$p(A)=\frac{\binom{n}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6\times 5\times 4}=\frac{1}{2}\Rightarrow n(n-1)(n-2)=3\times 4\times 5$

$\Rightarrow n=5$

---

۳۳. گزینه‌ی(۳)

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=6\times 6\times 6$ است.

حالات مطلوب جایگشت سه‌تایی‌های(۳,۴,۵)،(۲,۳,۴)،(۱,۲,۳)و(۴,۵,۶) است.

پس: $n(A)=4\times 3!$ می‌باشد. بنابراین: $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4\times 3!}{6\times 6\times 6}=\frac{1}{9}$

---

۳۴. گزینه‌ی(۲)

$n(S)=\binom{9}{4}$ است. برای آن‌که مثلث شود باید یا ۳ نقطه از بالا و یک نقطه از پائین یا ۳ نقطه از پائین و یک نقطه از بالا انتخاب شود. پس:

$p(A)=\frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}+\binom{5}{3}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}}=\frac{10}{21}$

---

۳۵. گزینه‌ی(۳)

روش اول:

$p(A)=\frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{6\times 5\times 4\times 3}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{1}{14}$

روش دوم:

$p=\underbrace{\frac{6}{10}}_{\text{اولی سفید}}\times\underbrace{\frac{5}{9}}_{\text{دومی سفید}}\times\underbrace{\frac{4}{8}}_{\text{سومی سفید}}\times\underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{چهارمی سفید}}=\frac{1}{14}$

---

۳۶. گزینه‌ی(۳)

$a\ b\ c\ d\ e\ f\Rightarrow n(S)=6!$

برای محاسبه $n(A)$، a را در ابتدای صف می‌گذاریم و c,b را به فاصله یک نفر از هم قرار می‌دهیم: $\underbrace{c\ \circ\ b}\quad a$

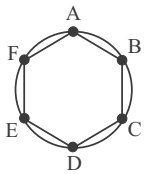
برای پر کردن فاصله بین b و c، ۳ حق انتخاب داریم: d یا e یا f؛ یکی را انتخاب می‌کنیم و بین b و c می‌گذاریم و به هم می‌بندیم. حال بسته $\boxed{c*b}$ را با دو نفر دیگر به !۳ طریق جابه‌جا می‌کنیم. در هر یک از این حالاتb و c هم می‌توانند به !۲ طریق با هم جابه‌جا شوند؛ پس: $n(A)=3\times 3!\times 2$

بنابراین: $p(A)=\frac{3\times 3!\times 2}{6!}=\frac{1}{20}$

---

۳۷. گزینه‌ی (۳)

$n(S)=\binom{6}{2}=15$ است. بـه جز اضـلاع شـش‌ضلعی، بقیه قطر هسـتند. $n(A)=\binom{6}{2}-6=9$ است:



$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}$$

۳۸. گزینه‌ی (۴)

احتمال این‌که یکی سالم و دیگری دیابتی باشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۳۹. گزینه‌ی (۴)

ده نفر به !۱۰ طریق در صف قرار می‌گیرند. برای این‌که یکی در میان باشند به صورت bgbgbgbgbg یا gbgbgbgbgb می‌نشینند:

$$p=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times ۵!۵!}{۱۰!}$$

۴۰. گزینه‌ی (۴)

روش اول: اگر هر زن و شوهرش را یک گروه بگیریم، در جمع۶ گروه داریم که یک گروه را می‌خواهیم؛ بنابراین:

$$p=\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۲}{۲}}=\frac{۶}{۶۶}=\frac{۱}{۱۱}$$

روش دوم: می‌توان گفت نفر اول اهمیت ندارد، هر کس را که انتخاب کردیم اشکالی ندارد، مهم این است که نفر دوم همسر نفر اول باشد؛ در بین۱۱ نفر دیگر فقط یک نفر همسر اولی است؛ پس: $P=\frac{۱}{۱۱}$

۴۱. گزینه‌ی (۳)

روش اول: چون ۲۰ لنگه کفش موجود است و۲ لنگه از بین۲۰ لنگه می‌خواهیم $n(S)=\binom{۲۰}{۲}=۱۹۰$است. حال اگر کفش‌ها را دو تا دو تا جفت کنیم،۱۰ جفت کفش داریم؛ هر کدام را انتخاب کنیم قابل قبول است یعنی $n(A)=\binom{۱۰}{۱}=۱۰$ پس $p(A)=\frac{۱۰}{۱۹۰}=\frac{۱}{۱۹}$

روش دوم: لنگه اول از بین۲۰ لنگه، مهم نیست که کدام لنگه برداشته شود، مهم این است که لنگه دوم جفت لنگه اول باشد. در بین۱۹ لنگه باقیمانده تنها یک لنگه، جفت اولی است. پس: $p=\frac{۱}{۱۹}$

۴۲. گزینه‌ی (۳)

$n(S)=\binom{۶}{۴}$ است؛ برای محاسبه $n(A)$ ابتدا کفش‌ها را جفت می‌کنیم و از بین آن‌ها یک جفت انتخاب می‌کنیم: $\binom{۳}{۱}=۳$ و سپس از بین دو جفت کفش‌هایی که مانده‌اند باید یک لنگه از هر جفت انتخاب کنیم که این‌کار به۲×۲ طریق مختلف امکان‌پذیر است. پس: $n(A)=\binom{۳}{۱}\times ۲\times ۲$ بنابراین:

$$p(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\times ۲\times ۲}{\binom{۶}{۴}}=\frac{۳\times ۲\times ۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}$$

۴۳. گزینه‌ی (۱)

تعداد عضو فضای نمونه‌ای $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$ است. اگر هر زن و شوهرش را یک گروه در نظر بگیریم، باید از بین پنج گروه، یک گروه انتخاب شوند و یک نفر هم از هشت نفر دیگر باشد.

$$p=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۵\times ۸}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳}$$

۴۴. گزینه‌ی(۲)

تعداد کوتاه‌ترین مسیرها بینC,A برابر با $n(S)=\frac{۸!}{۵!\times ۳!}=۵۶$ است که از بین آن‌ها تعداد $n(A)=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}\times\frac{۳!}{۲!۱!}=۳۰$ از B می‌گذرد؛ بنابراین:

$$p(A)=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۴۵. گزینه‌ی(۲)

روش اول:

$$p(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۹۹}{۹}}{\binom{۱۰۰}{۱۰}}=\cdots=\frac{۱}{۱۰}$$

روش دوم: از ایده متمم استفاده می‌کنیم؛ احتمال آن‌که گل زرد را انتخاب نکنیم برابر است با:

$$p(A')=\frac{\binom{۹۹}{۱۰}}{\binom{۱۰۰}{۱۰}}=\frac{\overbrace{۹۹\times ۹۸\times\cdots\times ۹۰}^{۱۰}}{\underbrace{۱۰۰\times ۹۹\times\cdots\times ۹۱}_{۱۰}}=\frac{۹۰}{۱۰۰}=\frac{۹}{۱۰}\Rightarrow p(A)=\frac{۱}{۱۰}$$

۴۶. گزینه‌ی(۲)

برای آن‌که عدد هشت رقمی ساخته شود باید یکی از چهار کارت۱,۱,۱,۱ در سمت چپ قرار بگیرد که احتمال آن $\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۸}$ است.

۴۷. گزینه‌ی(۲)

روش اول:

$n(s)=۱۲\times ۱۲$ و $n(A)=۱۲$ است. پس: $p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۱۲}{۱۲\times ۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$

روش دوم:

نفر اول در هر ماهی متولد شده باشد مهم نیست، مطلوب آن است که ماه تولد نفر دوم با نفر اول یکی باشد که احتمال آن $\frac{۱}{۱۲}$ است.

۴۸. گزینه‌ی (۴)

$$p(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۴}{۳۵}$$

۴۹. گزینه‌ی(۴)

روش اول: $n(S)$ برابر است با:$۳\times ۳\times ۳\times ۳$ چرا که هر یک از ۴ مسافر، سه حق انتخاب دارند.

برای محاسبه $n(A)$ از ایده متمم استفاده می‌کنیم؛ ابتدا احتمال آن‌که هر ۳ هتل انتخاب شوند را محاسبه می‌کنیم: ۳ نفر از ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم و در ۳ هتل قرار می‌دهیم که این کار به $\binom{۴}{۳}\times ۳!$ طریق مختلف انجام می‌شود و سپس نفر چهارم به سه طریق حق انتخاب دارد که کدام هتل را انتخاب کند؛ پس ظاهراً $n(A')=\binom{۴}{۳}\times ۳!\times ۳$ می‌شود، اما دقت کنید که هر حالت، دو بار شمرده شده است. (چرا؟)

پس: $n(A')=\frac{\binom{۴}{۳}\times ۳!\times ۳}{۲}=۳۶$ است؛ بنابراین:

$$p(A')=\frac{۳۶}{۳^۴}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow p(A)=\frac{۵}{۹}$$

روش دوم: از ایده تابع پوشا و غیرپوشا استفاده می‌کنیم. مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را به عنوان مسافران و مجموعه $B=\{a,b,c\}$را به عنوان هتل‌ها در نظر می‌گیریم:

تعداد توابع غیرپوشا عبارت است از: