نکته‌ی ۳: با توجه به تعریف فاکتوریل می‌توانیم بنویسیم: $(n+1)! = (n+1)\times \underbrace{n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1}_{=n!} = (n+1)n!$ این، یک مطلب **کلیدی** در حل مسئله‌ها است.

مثال ۱۰. به کمک نکته‌ی ۳ می‌توانیم بنویسیم: $\frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 5\times4\times3$ و $9! = 9\times8! = 9\times8\times7!$.

نکته‌ی مهم: هرگاه در روی سؤال اشاره‌ای به متمایزبودن یا نبودن رقم‌ها نشده باشد، سؤال را با فرض این که **تکرار مجاز است** پاسخ می‌دهیم.

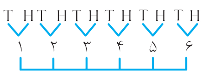
خب! همین‌جا بحثمون درباره‌ی اصل شمارش رو به پایان می‌بریم و می‌ریم سراغ الگوهای رایج تو تست‌های آزمون سراسری، از مبحث اصل شمارش (اصل بنیادی ضرب). امیدوارم درس رو خوب خونده باشین و بتونین به سؤال‌ها پاسخ برین.

الگوی ۱ این الگو ساده‌ترین کاربرد اصل ضرب و دقیقاً از خود تعریف بهره می‌گیره. تو این الگو، حالت‌ها می‌تونن تکراری هم باشن

۱. یک تاس (شش‌وجهی) که روی آن اعداد از ۱ تا ۶ نوشته‌اند را همراه با یک سکه پرتاب می‌کنیم. چند حالت گوناگون ممکن است رخ بدهد؟ *(مؤلف)*

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

پاسخ: هر یک از اعداد ۱,۲,۳,۴,۵,۶ ممکن است هنگام نشستن تاس بر روی زمین، رو شوند. پس نشستن تاس (به عنوان بخش نخست کار) دارای ۶ طریق رخداد، و پرتاب سکه (به عنوان بخش دیگری از کار) دارای ۲ طریق رخداد است که یکی متناظر نشستن سکه به پشت (با نماد T) و دیگری متناظر نشستن سکه به رو (با نماد H) می‌باشد. بنابر اصل بنیادی ضرب، شمار رخدادهای گوناگون این پرتاب‌ها برابر $12 = 2\times6$ است.



۲. یک آزمون ۵ سؤالی قرار است برگزار شود. اگر هر سؤال، یک تست سه گزینه‌ای باشد و برای هر سؤال تنها یک گزینه در پاسخ‌نامه علامت زده شود، آن‌گاه به چند طریق ممکن است پاسخ‌نامه پر شود؟ (پاسخ به هر سؤال، اجباری است.) *(مشابه تمرین ۴ صفحه‌ی ۸۰، کتاب درسی ریاضی ۲)*

۱) ۱۵ ۲) 5^3 ۳) 3^5 ۴) ۷۵

پاسخ: برای ۵ سؤال داده شده، پنج جایگاه در نظر می‌گیریم که متناظر با سؤال‌های شماره‌ی ۱ تا ۵ باشند. برای انتخاب گزینه در سؤال ۱، ۳ انتخاب داریم (گزینه‌های الف، ب و ج) و برای سؤال شماره‌ی ۲ هم ۳ انتخاب و ... و برای سؤال شماره‌ی ۵ هم ۳ انتخاب داریم. پس بنابر اصل بنیادی ضرب، شمار حالت‌هایی که می‌توان پاسخ‌نامه را پر کرد، برابر با $3^5 = 3\times3\times3\times3\times3$ می‌باشد.

۳	۳	۳	۳	۳
۱	۲	۳	۴	۵

۳. با ارقام ۰,۱,۲,۳ چند عدد سه رقمی که تکرار رقم‌ها مجاز باشد می‌توان نوشت؟ *(سنجش ریاضی – ۸۰)*

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۳	۴	۴

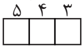
پاسخ: رقم صفر را نمی‌توانیم در جایگاه سمت چپ قرار دهیم، اما می‌توانیم آن را در جایگاه وسط یا سمت راست قرار دهیم. از آن‌جا که رقم‌ها می‌توانند تکراری باشند (شمار حالت‌ها را بالای جایگاه‌ها نوشته‌ایم)، پس بنابر اصل ضرب شمار عددهای موردنظر برابر می‌شود با $48 = 4\times4\times3$.

الگوی ۲ تو این الگو، حالت‌های رخداد یک عمل، متمایزن برای این جور سؤال‌ها، اصل ضرب رو تو حالتی بکار می‌بریم که رفته‌رفته شمار حالت‌ها کم‌تر بشن.

۴. با حروف واژه‌ی STORE چند واژه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت. به‌گونه‌ای که تکرار حروف جایز نباشد؟ *(مؤلف)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

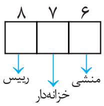
پاسخ: سه جایگاه برای واژه‌ی سه حرفی موردنظر، رسم می‌کنیم. هر کدام از ۵ حرف واژه‌ی STORE را می‌توانیم در خانه‌ی سمت چپ قرار دهیم. پس از انتخاب یکی از این ۵ حرف، آن را کنار می‌گذاریم، پس ۴ حرف برای خانه‌ی وسط باقی می‌ماند و پس از انتخاب این حرف، ۳ حرف هم برای خانه‌ی سمت راست. در نتیجه ۶۰ = ۳ × ۴ × ۵ واژه می‌توانیم بسازیم.



۵. از میان ۸ عضو یک شرکت قرار است یک رئیس، یک منشی و یک خزانه‌دار انتخاب شوند. اگر هر عضو حداکثر در یکی از سمت‌ها بتواند باشد، به چند روش می‌توان انتخاب آن‌ها را انجام داد؟ *(مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۱۸۶، کتاب درسی ریاضی ۲)*

۱) ۵۱۲   ۲) ۳۳۶   ۳) ۲۱۰   ۴) ۵۶

پاسخ: برای انتخاب رئیس ۸ حالت داریم (هر ۸ عضو می‌توانند مدنظر باشند)، پس از انتخاب رئیس، ۷ حالت برای انتخاب خزانه‌دار و سپس ۶ حالت برای انتخاب منشی باقی می‌ماند. در نتیجه بنابر اصل ضرب، شمار روش‌های انتخاب برابر است با ۳۳۶ = ۶ × ۷ × ۸ .



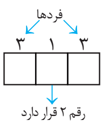
الگوی ۳ این تیپ سؤال‌ها مربوط به اون حالتی می‌شن که باید پاسخ‌ها رو با هم جمع کنیم و شمار انتخاب‌های ممکن رو مشخص کنیم.

۶. با رقم‌های {۱،۲،۳،۴،۵} چند عدد سه رقمی می‌توانیم بسازیم، به شرطی که فقط رقم دهگان آن زوج باشد؟ *(مؤلف)*

۱) ۱۶   ۲) ۱۸   ۳) ۱۲   ۴) ۲۴

پاسخ: از میان رقم‌های داده شده تنها دو رقم ۲ و ۴ زوج هستند. اکنون مسئله را در دو حالت حل می‌کنیم:

حالت یکم. گیریم رقم دهگان برابر ۲ باشد، پس رقم یکان و صدگان نمی‌توانند زوج باشند. اگر شمار انتخاب‌های ممکن برای یکان و صدگان را بالای آن بنویسیم، این کار به $n_1 = ۳ \times ۱ \times ۳ = ۹$ طریق ممکن است (از میان ۳ رقم فرد باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم).



حالت دوم. گیریم رقم دهگان برابر ۴ باشد، پس رقم‌های یکان و صدگان مشابه با حالت یکم به $n_2 = ۳ \times ۱ \times ۳ = ۹$ طریق می‌توانند انتخاب شوند.

اکنون شمار حالت‌های ممکن برای ساختن عدد سه رقمی موردنظر، برابر است با $n_1 + n_2 = ۱۸$.

*** ۷. با ارقام ۱،۳،۵،۷،۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان» می‌توان نوشت؟** *(سراسری ریاضی - ۹۱)*

۱) ۸   ۲) ۹   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲

* با روش حل کوتاه‌تر این تست، در واحد ۳ و پاسخ آزمونک (۳) آشنا می‌شویم.

پاسخ: با توجه به شرط مسئله روشن است، که هم رقم‌ها باید متمایز باشند (با توجه به شرط صدگان > دهگان > یکان) و هم رقم ۹ نمی‌تواند به عنوان یکان یا دهگان به کار رود. اکنون مسئله را در چند حالت حل می‌کنیم:

حالت یکم. رقم یکان برابر ۱ باشد، در این حالت با توجه به شرط سؤال رقم صدگان یکی از رقم‌های ۵، ۷ یا ۹ می‌تواند انتخاب شود. تنها حالتی که برای رقم صدگان ۵ ممکن است رخ بدهد به صورت $\overset{۱}{\boxed{۵}}\overset{۱}{\boxed{}}\overset{۱}{\boxed{۱}}$ است که با عدد ۳ پر می‌شود، یعنی این حالت تنها به $n_1 = ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$ روش ممکن اســـت. هرگاه رقم صدگان برابر ۷ باشـــد، آن‌گاه دهگان را می‌توانیم با یکی از ۲ رقم ۳ یا ۵ پر کنیم، یعنی این حالت به $n_2 = ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲$ روش ممکن اســـت: $\overset{۱}{\boxed{۷}}\overset{۲}{\boxed{}}\overset{۱}{\boxed{۱}}$؛ به همین شـــیوه در حالتی که رقم ۹ در صدگان قرار گیرد، به $n_3 = ۱ \times ۳ \times ۱ = ۳$ روش می‌توانیم عدد موردنظر را بسازیم: $\overset{۱}{\boxed{۹}}\overset{۳}{\boxed{}}\overset{۱}{\boxed{۱}}$ پس روی‌هم رفته، حالت یکم به ۶ = ۳ + ۲ + ۱ طریق ممکن است.

حالت دوم. اگر رقم یکان برابر ۳ باشد، با حالت‌های $\overset{۱}{\boxed{۷}}\overset{۱}{\boxed{}}\overset{۱}{\boxed{۳}}$ و $\overset{۱}{\boxed{۹}}\overset{۲}{\boxed{}}\overset{۱}{\boxed{۳}}$ روبه‌رو هستیم، که به ترتیب به $n_4 = ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$ و $n_5 = ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲$ روش امکان‌پذیرند. یعنی این حالت، روی‌هم رفته به ۳ = ۲ + ۱ طریق ممکن است.

حالت سوم. اگر رقم یکان برابر ۵ باشد، تنها حالت ممکن به صورت $\overset{۱}{\boxed{۹}}\overset{۱}{\boxed{}}\overset{۱}{\boxed{۵}}$ است، یعنی خانه‌ی وسط را تنها با رقم ۷ می‌توانیم پر کنیم. پس این مرحله فقط به $n_6 = ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$ روش امکان‌پذیر است. بنابراین مسئله در مجموع، دارای ۱۰ = ۱ + ۳ + ۶ جواب است.

۸. با ارقام ۷, ۵, ۲, ۱, ۰، چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت، به شرطی که رقم‌ها متمایز باشند؟ (مؤلف)

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

پاسخ: در دو حالت مسئله را پاسخ می‌دهیم:

حالت یکم. رقم یکان صفر باشد، در این صورت شمار انتخاب‌ها برابر است با $4\times3\times2\times1=4!=24$

۴	۳	۲	۱
			رقم یکان ۰

حالت دوم. رقم یکان ۲ باشد، در این صورت رقم ۰ نمی‌ تواند در سمت چپ قرار گیرد و شمار انتخاب‌ها برابر است با $3\times3\times2\times1=3(3!)=18$؛ در نتیجه شمار عددهای موردنظر، روی هم برابر می‌شود با $24+18=42$.

۳	۳	۲	۱
			رقم یکان ۲

الگوی ۴ تو یه سری از سؤال‌ها، عبارت‌هایی همراه با واژه‌ی «نباشد» یا «بدون» یا «فاقد» و ... می‌آد.

۹. چند عدد سه رقمی بدون رقم ۸ داریم؟ (تمرین ۵ صفحه‌ی ۱۸۲، کتاب درسی ریاضی ۲)

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۴۸ ۳) ۵۷۶ ۴) ۴۴۸

پاسخ: رقم ۸ را از جمع ۱۰ رقم ۹,...,۳,۲,۱,۰ کنار می‌گذاریم. حال مسئله تبدیل می‌شود به این که: با رقم‌های ۹,۷,۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟ با توجه به شمار انتخاب‌های ممکن در این حالت، که بالای جایگاه‌ها نوشته‌ایم، شمار عددهای سه رقمی مطلوب برابر می‌شود با $8\times9\times9=648$.

۸	۹	۹

۱۰. با حروف کلمه‌ی «جمهوری» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آن‌ها حرف نقطه‌دار نباشد؟ (سراسری ریاضی ـ ۶۷)

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

پاسخ: برای حل این سؤال، از روش **متمم** بهره می‌گیریم، یعنی شمار حالت‌هایی را که موردنظر ما نیستند از شمار کل حالت‌ها کم می‌کنیم. در این‌جا شمار واژه‌های ۳ حرفی با حروف متمایز که می‌توانیم از ۶ حرف واژه‌ی «جمهوری» بسازیم، برابر است با $6\times5\times4=120$. اکنون در دو حالت، حرف نخست این واژه‌ها، نقطه‌دار است:

۴	۵	۶

حالت یکم. حرف «ج» در آغاز واژه قرار گیرد، در این صورت به تعداد $4\times5\times1=20$ واژه خواهیم داشت.

۴	۵	۱
		ج

حالت دوم. حرف «ی» در آغاز واژه قرار گیرد، که در این صورت به فرم نقطه‌دار «یـ» ظاهر می‌شود. تعداد واژه‌ها در این حالت هم برابر با $4\times5\times1=20$ خواهد بود.

۴	۵	۱
		یـ

بنابراین شمار واژه‌هایی که حرف آغازین آن‌ها نقطه‌دار نباشد، برابر است با $120-2\times20=80$.

نکته‌ی ۴: در **روش متمم**، شمار حالت‌های مطلوب برابر است با: (شمار حالت‌های نامطلوب − شمار کل حالت‌های ممکن)

الگوی ۵ این الگو اختصاص داره به سؤال‌های شمارشی درباره‌ی مجموعه‌ها یا گردایه‌هایی از اعداد.

۱۱. به کدام تعداد ماتریس 2×2 با درایه‌های صفر یا ۱ وجود دارد؟ (سنجش ریاضی ـ ۸۱)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: هر ماتریس 2×2 به فرم $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اســت که دارای ۴ درایه اســت. به جای هر کدام از درایه‌های a، b، c و d می‌توانیم رقم‌های صفر یا ۱ بگذاریم (یعنی هر درایه را به ۲ حالت می‌توانیم پر کنیم). اگر شمار حالت‌های ممکن برای هر درایه را در بالای جایگاه مربوط به آن بنویسیم، بنابر اصل بنیادی ضرب به تعداد $2^4=16$ ماتریس با درایه‌های صفر یا ۱ خواهیم داشت.

۲	۲	۲	۲
a	b	c	d

۱۲. **چند مجموعه‌ی متفاوت از اعداد طبیعی یک رقمی می‌توان ساخت که هر کدام حاوی همه‌ی اعداد اول یک رقمی باشند؟** *(آزاد ریاضی - ۶۶)*

۱) ۱۲۶   ۲) ۳۲   ۳) ۶۴   ۴) ۲۴

پاسخ: از میان عددهای {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹}، اعداد ۲,۳,۵,۷ اول هستند (اعدادی که به جزء خودشان و عدد ۱، بر هیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نیستند). اکنون مجموعه‌های موردنظر ما همگی شامل عددهای اول یاد شده هستند، پس این اعداد را کنار می‌گذاریم (زیرا آن‌ها را انتخاب کرده‌ایم) و در ادامه، دنبال آنیم که ببینیم هر کدام از ۵ عدد باقی‌مانده‌ی ۱,۴,۶,۸,۹، آیا در مجموعه‌های مدنظر ما قرار می‌گیرند یا نه. اگر بودن یا نبودن این عددها را با ۱ و صفر نظیر کنیم، این کار را به

۲	۲	۲	۲	۲

$۲^۵ = ۳۲$ روش می‌توانیم انجام دهیم.

توجه. در واقع مسئله، همان مسئله‌ی یافتن شمار زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی ۵ عضوی {۱,۴,۶,۸,۹} است که برابر $۲^۵$ می‌باشد.

آزمونک ۱

۱. **عبارت $(x+y+z)(a+b)(c+d)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟** *(تمرین ۴ بند (ب) صفحه‌ی ۱۸۲، کتاب درسی ریاضی ۲)*

۱) ۱۲   ۲) ۱۶   ۳) ۱۸   ۴) ۲۴

۲. **با ارقام مربع یک رقمی، چند عدد سه رقمی می‌توانیم بسازیم؟** *(مؤلف)*

۱) ۸۱   ۲) ۶۴   ۳) ۳۶   ۴) ۲۷

۳. **چند عدد سه رقمی متشکل از رقم‌های ۰,۵,۶,۹ و بخش‌پذیر بر ۵ وجود دارد؟** *(سنجش ریاضی - ۸۲)*

۱) ۱۲   ۲) ۱۸   ۳) ۲۴   ۴) ۳۶

۴. **با حروف واژه‌ی Sterling چند واژه‌ی ۴ حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که با حرف صدادار آغاز شود؟** *(مؤلف)*

۱) ۴۷۲   ۲) ۴۲۰   ۳) ۳۶۰   ۴) ۲۱۰

۵. **چند عدد سه رقمی وجود دارد، که درست دو رقم ۶ داشته باشد؟** *(مؤلف)*

۱) ۲۹   ۲) ۲۷   ۳) ۲۶   ۴) ۲۵

۶. **با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟** *(سنجش ریاضی - ۸۷)*

۱) ۳۶   ۲) ۴۰   ۳) ۴۸   ۴) ۶۰

۷. **با حروف واژه‌ی triangle چند واژه‌ی ۴ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت، که حرف دوم آن نقطه‌دار نباشد؟** *(مؤلف)*

۱) ۱۴۷۰   ۲) ۱۴۴۰   ۳) ۱۳۲۰   ۴) ۱۹۸۰

۸. **چند ماتریس مانند $A_{2\times 2}$ وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 8 & 4\end{bmatrix}$ باشد؟** *(آزاد ریاضی - ۹۱)*

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) بی‌شمار   ۴) ۲

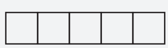
۹. **مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند زیرمجموعه دارد، به‌گونه‌ای که ۳ کوچک‌ترین عضو آن باشد؟** *(مؤلف)*

۱) ۴   ۲) ۶   ۳) ۸   ۴) ۱۲

۱۰. **مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند زیرمجموعه دارد، به‌گونه‌ای که کوچک‌ترین عضو آن یک عدد زوج باشد؟** *(مؤلف)*

۱) ۸   ۲) ۹   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲

۱۱. **به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را با سه رنگ آبی، سبز و قرمز رنگ کرد، به‌گونه‌ای که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشد؟** *(تمرین ۶ صفحه‌ی ۱۸۲، کتاب درسی ریاضی ۲)*



۱) ۱۲   ۲) ۲۴   ۳) ۳۶   ۴) ۴۸

۱۲. **چند عدد سه رقمی متقارن داریم؟** *(تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۸۱، کتاب درسی ریاضی ۲)*

۱) ۹۰۰   ۲) ۸۱۰   ۳) ۱۰۰   ۴) ۹۰

۱۳. با رقم‌های ۲, ۳, ۵, ۷, ۹ چند بردار $a=(a_1, a_2, a_3)$ می‌توانیم بسازیم، طوری که $a_1 < a_2 < a_3$ باشد؟ (مؤلف)

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۱۴. با ارقام ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ و بدون تکرار رقم‌ها، چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که از ۴۰۰ بزرگ‌تر باشد؟ (مؤلف)

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۱۵. معلم درس هندسه‌ی کلاس چهارم دبیرستان، که ۱۵ دانش‌آموز دارد، می‌خواهد به ۳ نفر از کسانی که بالاترین نمره‌ی درس را گرفته‌اند، جایزه بدهد. مهسا بالاترین نمره را و ۲ نفر هم پایین‌ترین نمره‌ها را گرفته‌اند. معلم به چند روش می‌تواند جایزه‌ها را به دانش‌آموزان بدهد؟ (مؤلف)

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۳۲ ۴) ۱۷۸

۱۶. تعداد اعداد چهار رقمی زوج، که در ساختمان آن رقم ۶ وجود ندارد کدام است؟ (سراسری هنر ـ ۹۴)

۱) ۱۹۴۴ ۲) ۲۱۸۷ ۳) ۲۴۳۰ ۴) ۲۵۹۲

پاسخ‌نامه

۱. (۱) عمل ضرب پرانتزها دو مرحله دارد: مرحله‌ی یکم، ضرب پرانتز سمت چپ در پرانتز وسطی، و مرحله‌ی دوم ضرب عبارت به‌دست آمده در مرحله‌ی یکم، در پرانتز سمت راست. چون پرانتزها دارای ۳، ۲ و ۲ جمله‌اند، پس بنابر اصل بنیادی ضرب، عبارت داده شده دارای ۱۲ = ۲×۲×۳ جمله است.

۲. (۴) ارقام یک رقمی و مربع عبارتند از ۱, ۴, ۹، پس شمار عددهای سه رقمی با این ارقام برابر می‌شود با ۲۷ = ۳×۳×۳ (شمار حالت‌ها را بالای جایگاه‌ها نوشته‌ایم).

۳	۳	۳

۳	۴	۲

۳. (۳) مشابه با مثال ۵ در متن درس، شمار عددهای موردنظر برابر است با ۲۴ = ۲×۴×۳ .

۴. (۲) واژه‌ی Sterling دارای ۸ حرف است، که ۲ حرف e و i صدادار هستند. پس جایگاه سمت چپ را به ۲ حالت می‌توانیم پر کنیم و پس از انتخاب این حرف، ۷ حرف برای جایگاه دوم باقی می‌ماند و به همین شیوه، ۶ و ۵ حرف برای جایگاه‌های دیگر. پس شمار این واژگان برابر است با ۴۲۰ = ۵×۶×۷×۲ .

۲	۷	۶	۵

صدادار

۵. (۳) برای پاسخ به سؤال، ۳ حالت در نظر می‌گیریم و در نهایت شمار حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم. داریم:

حالت یکم. رقم‌های یکان و دهگان ۶ باشند، در این‌صورت صفر را در جایگاه صدگان نمی‌توانیم قرار دهیم و ۶ را هم همین‌طور، از این رو شمار انتخاب‌ها برابر می‌شود با ۸ = ۱×۱×۸ .

۸	۱	۱
	۶	۶

حالت دوم. رقم‌های یکان و صدگان ۶ باشند، در این‌صورت صفر را می‌توانیم در جایگاه دهگان قرار دهیم و شمار انتخاب‌ها برابر می‌شود با ۹ = ۱×۹×۱ .

۱	۹	۱
۶		۶

حالت سوم. رقم‌های دهگان و صدگان ۶ باشند، در این صورت مانند حالت دوم شمار انتخاب‌ها برابر می‌شود با ۹ (شکل زیر). پس روی‌هم شمار عددهای موردنظر برابر است با ۲۶ = ۹+۹+۸ .

۱	۱	۹
۶	۶	

۶. (۱) مشابه با تست ۸ از متن درس عمل می‌کنیم:

۵	۴	۱

رقم یکان ۰

حالت یکم. رقم یکان برابر صفر باشد، آن‌گاه شمار عددهای موردنظر برابر ۲۰ = ۱×۴×۵ می‌شود.

۴	۴	۱

رقم یکان ۵

حالت دوم. رقم یکان برابر ۵ باشد، آن‌گاه شمار عددهای موردنظر برابر ۱۶ = ۱×۴×۴ می‌شود.

در نتیجه روی‌هم ۳۶ = ۱۶+۲۰ عدد با ویژگی موردنظر خواهیم داشت.

۷. (۱) در آغاز تکلیف حرف دوم (جایگاه دوم) را روشن می‌کنیم. چون تنها حرف نقطه‌دار واژه‌ی triangle، i است پس نمی‌توانیم آن را در جایگاه دوم قرار دهیم و این جایگاه با ۷ حرف باقی‌مانده پر می‌شود. اکنون با کنار رفتن حرف انتخابی برای این جایگاه و تکراری نبودن حروف، برای جایگاه‌های نخست و سوم و چهارم به تعداد ۷، ۶ و ۵ انتخاب باقی می‌ماند، در نتیجه شمار واژه‌های موردنظر برابر می‌شود با ۱۴۷۰ = ۵×۶×۷×۷ .

۷	۷	۶	۵

بی‌نقطه

۸. (۳) گیریم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، حال درایه‌های حاصل‌ضرب دو ماتریس را از ضرب سطرهای A در ستون‌های ماتریس $\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}$، به دست می‌آوریم. داریم: $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+0b&a+0b\\2c+0d&c+0d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a&a\\2c&c\end{bmatrix}$ با مقایسه‌ی ماتریس به دست آمده با ماتریس داده شده در سؤال باید داشته باشیم $\begin{bmatrix}2a&a\\2c&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\8&4\end{bmatrix}$ که نتیجه می‌دهد $a=0$ و $c=4$. پس $A=\begin{bmatrix}0&b\\4&d\end{bmatrix}$ و درایه‌های b و d می‌توانند هر عدد دلخواهی باشند. پس بی‌شمار ماتریس A می‌توانیم داشته باشیم.

۹. (۱) چون ۳ کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه‌های موردنظر است، پس دو عدد ۱و۲ کنار می‌روند. اکنون می‌ماند این‌که تکلیف دو عدد ۴ و ۵ را روشن کنیم که آیا عضو زیرمجموعه‌های مدنظر ما هستند یا نه. مشابه با تست ۱۲ عمل می‌کنیم، که در این صورت پاسخ مسئله برابر $2^2=4$ است (در واقع شمار زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{4,5\}$ را می‌یابیم).

۱۰. (۳) دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت یکم. کوچک‌ترین عضو، ۲ باشد. آن‌گاه بودن یا نبودن اعداد ۳،۴ و ۵ در زیرمجموعه‌های موردنظرمان را مشابه با سؤال پیش، به $1\times2\times2\times2=8$ طریق می‌توانیم تعیین کنیم (عدد صفر را نظیر نبودن و عدد ۱ را نظیر بودن می‌گیریم).

۱	۲	۲	۲
۴			

حالت دوم. کوچک‌ترین عضو، ۴ باشد. آن‌گاه بودن یا نبودن عدد ۵ را به $1\times2=2$ طریق می‌توانیم تعیین کنیم. که عبارتند از مجموعه‌های $\{4\}$ و $\{4,5\}$. در نتیجه شمار زیرمجموعه‌های مطلوب برابر است با $8+2=10$.

۱	۲
۴	

۱۱. (۴) خانه‌ها را نامگذاری می‌کنیم. برای رنگ‌آمیزی خانه‌ی a، ۳ انتخاب (آبی، قرمز و سفید) داریم، از آن‌جا که رنگ خانه‌های مجاور باید متفاوت باشد، پس خانه‌ی b را به ۲ حالت می‌توانیم رنگ کنیم. حال خانه‌ی c را نمی‌توانیم همرنگ با خانه‌ی b رنگ کنیم و باید از میان ۲ رنگ دیگر، یکی را انتخاب کنیم و این جایگاه را رنگ نماییم، با ادامه‌ی این روند هر کدام از خانه‌های d و e را هم با یکی از ۲ رنگ متمایز با خانه‌ی مجاورشان می‌توانیم رنگ کنیم. پس بنابر اصل ضرب، شمار حالت‌های مطلوب برابرمی‌شود با $3\times2\times2\times2\times2=48$.

۳	۲	۲	۲	۲
a	b	c	d	e

۱۲. (۴) هر عدد به صورت aba یک عدد ۳ رقمی متقارن است. هرگاه رقم یکان را انتخاب کنیم، به طور خودکار رقم صدگان را هم انتخاب کرده‌ایم و برعکس. برای انتخاب رقم صدگان، نمی‌توانیم صفر را به کار بریم. پس بنابر اصل بنیادی ضرب، شمار عددهای موردنظر برابر می‌شود با $9\times10\times1=90$.

۹	۱۰	۱

۱۳. (۲) این تست، همان تست ۷ (سراسری ۹۱) با بیانی دیگر است، پس گزینه‌ی (۲) درست است.

۱۴. (۳) چون عدد ۳ رقمی موردنظر باید از ۴۰۰ بزرگ‌تر باشد، پس رقم صدگان را باید از میان یکی از رقم‌های ۴، ۵، ۶ و۷ برگزینیم؛ سپس رقم دهگان را می‌توانیم از میان ۵ رقم باقی‌مانده (یک رقم را پیش‌تر برای صدگان کنار گذاشته‌ایم) انتخاب کنیم و به همین شیوه، رقم یکان را هم به ۴ طریق می‌توانیم پر نماییم. در نتیجه بنابر اصل بنیادی ضرب، شمار عددهای موردنظر برابر می‌شود با $4\times5\times4=80$.

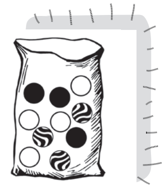
۴	۵	۴

۱۵. (۳) چون مهسا نفر اول است، پس پیش از همه انتخاب شده است. ۲ نفر هم که پایین‌ترین نمره را گرفته‌اند شانسی برای دریافت جایزه ندارند و کنار می‌روند حال معلم باید نفرات دوم و سـوم را از میان ۱۲ نفر باقی‌مانده انتخاب کند. برای این‌کار به تعداد $12\times11=132$ روش می‌تواند جایزه‌ها را به دانش‌آموزان بدهد.

مهسا		
	نفردوم	نفرسوم

۱۶. (۴) مشابه با تست ۹ عمل می‌کنیم. عدد ۶ را از میان ۱۰ رقم ۰،۱،۲،۳،...،۹ کنار می‌گذاریم. حال مسئله تبدیل می‌شود به این‌که: با رقم‌های ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۷،۸،۹ چند عدد زوج ۴ رقمی می‌توان نوشـت؟ اگر شمار امکان‌های موجود را بالای جایگاه ارقام بنویسیم، آن‌گاه پاسخ مسئله به سادگی به دست می‌آید. از آن‌جا که در سؤال، شرطی درباره‌ی رقم‌ها ذکر نشده، پس **تکرار مجاز است**. چون صفر را در خانه‌ی سمت چپ نمی‌توانیم بگذاریم، پس شمار عددهای موردنظر برابر می‌شود با $8\times9\times9\times4=2592$.

۸	۹	۹	۴



۱ پدیده‌های تصادفی

در این واحد درسی با مفهوم آزمایش تصادفی و پدیده‌ی تصادفی آشنا می‌شویم؛ تصادفی بودن این آزمایش‌ها (عدم قطعیت‌شان) باعث می‌شود تا درباره‌ی رخداد آن‌ها به زبان احتمال سخن بگوییم. از این مباحث گاهی ۱ سؤال در کنکور طرح می‌شود.

■ گاه پیش می‌آید که می‌خواهیم برخی پدیده‌ها را تجربه کنیم و از نتایج رخداد آن‌ها آگاه شویم، در این میان بسیاری از پدیده‌ها وجود **دارند که با مشاهده‌ی تکراری** آن‌ها می‌توانیم نتیجه‌ی تجربه‌ی (آزمایش) خود را به طور قطع مشخص کنیم و بسیاری پدیده‌های **دیگر هم وجود دارند** که با تکرار آزمایش آن‌ها، نمی‌توانیم به نتیجه‌های قطعی دست یابیم. در این جا می‌خواهیم به پدیده‌هایی که **نتیجه‌ی رخداد آن‌ها از پیش**، برای ما معلوم نیست بپردازیم. بحث را با یک مثال آغاز می‌کنیم.

مثال ۱. **هنگامی که سنگریزه‌ای را رها کنیم**، پس از مدتی [هر چند کوتاه] به زمین خواهد خورد؛ یا هرگاه مقداری آب را در یک **ظرف حرارت دهیم**، سرانجام خواهد جوشید. دو آزمایش رها کردن سنگریزه یا جوشاندن آب، نمونه‌هایی از **پدیده‌های قطعی** هستند که در زیر آن را توصیف می‌کنیم:

با فرض یکسان بودن شرایط، در **پدیده‌های قطعی**، نتیجه‌ی **آزمایش** و یا **مشاهده** را پیش از وقوع می‌توان به طور قطع مشخص کرد.

در کنار پدیده‌ها و آزمایش‌هایی که نتیجه‌ی آزمایش و یا مشاهده‌ی پدیده را، پیش از وقوع بتوانیم مشخص کنیم، پدیده‌های دیگری هم هستند که به طور قطع نمی‌توانیم نتیجه‌ی آن‌ها را مشخص کنیم. به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۲. هنگامی که یک سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم، این‌که سکه **شیر** بیاید یا **خط** قابل پیش‌بینی نیست. حتا اگر ۱۰۰ بار هم آزمایش را تکرار کنیم، نمی‌توانیم به طور قطع بگوییم که شیر می‌نشیند یا خط (شیر و خط را به ترتیب همان **رو** و **پشت** سکه هم در نظر می‌گیرند). به عنوان نمونه‌ای دیگر، اگر بخواهیم یک کارت از میان یک دسته کارت‌بازی ۵۲تایی بیرون بکشیم، از پیش نمی‌دانیم که چه خالی را بیرون خواهیم آورد.

با فرض یکسان بودن شرایط، در **پدیده‌های تصادفی**، نتیجه‌ی آزمایش و یا مشاهده را پیش از وقوع **نمی‌توان** به طور قطع مشخص کرد.

در پدیده‌های تصادفی هر چند نمی‌توانیم نتیجه را پیش از وقوع و به طور قطعی تعیین کنیم، اما می‌توانیم نتیجه‌هایی را که می‌توانند رخ دهند، مشخص کنیم. مجموعه‌ی چنین نتایجی دارای نامی است و آن را در زیر تعریف می‌کنیم.

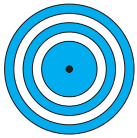
تعریف: مجموعه‌ی همه‌ی نتایج (برآمدهای) ممکن یک پدیده‌ی تصادفی را **فضای نمونه‌ای** آن پدیده‌ی تصادفی می‌نامیم و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم. فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ی همه چیزهایی (اطلاعاتی) است که درباره‌ی یک پدیده‌ی تصادفی می‌دانیم.

مثال ۳. اگر نشستن سکه به حالت رو یا پشت را به ترتیب با «ر» یا «پ» نشان دهیم، فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب سکه (مجموعه‌ی همه‌ی برآمدهای ممکن) برابر خواهد بود با S={ر , پ}. یا هرگاه یک تاس سالم را بریزیم (پرتاب کنیم)، فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی برابر خواهد شد با مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$.

مثال‌های بالا نمونه‌ای از **فضاهای نمونه‌ای گسسته** هستند؛ یعنی فضاهایی که یا متناهی هستند و یا **نامتناهی شمارش‌پذیر** (هر مجموعه‌ی نامتناهی شمارش‌پذیر را **نامتناهی شما را** هم می‌گویند).

مثال ۴. هنگامی که انسانی به دنیا می‌آید، اگر مرده به دنیا بیاید طول عمر او صفر است، اما چنان‌چه فرض کنیم زنده به دنیا آید و طول عمر انسان بالای ۲۰۰ سال نباشد، آن‌گاه سن او می‌تواند هر عدد حقیقی مثبتی (بر حسب سال) که مثبت است و از ۲۰۰ بیش‌تر نیست، باشد. پس داریم $S=\{t\in\mathbb{R}:۰\leq t\leq ۲۰۰\}=[۰,۲۰۰]$، که t نشان‌گر سن (طول عمر) است.

مثال ۵. گیریم بر روی صفحه‌ای چند دایره‌ی هم‌مرکز، به عنوان هدف‌های تیراندازی، رسم شده است و تیراندازان بخواهند به سمت این دایره‌ها شلیک کنند، به طوری که هرچه تیر به دایره‌ی کوچک‌تر نزدیک‌تر باشد امتیاز بیش‌تری به تیرانداز تعلق بگیرد و بیرون از سطح بزرگ‌ترین دایره، هیچ امتیازی نداشته باشد. در این صورت سطح بزرگ‌ترین دایره (ناحیه‌ی سایه‌خورده) را به عنوان **صفحه‌ی هدف** در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که نقطه‌ی برخورد تیر می‌تواند یکی از نقاط واقع بر سطح دایره‌ها باشد، پس فضای نمونه‌ای برابر می‌شود با $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}:x^{۲}+y^{۲}\le k^{۲}\right\}$، که k شعاع بزرگ‌ترین دایره است.



دو مثال اخیر هم نمونه‌ای از **فضاهای نمونه‌ای پیوسته** هستند؛ یعنی فضاهایی که نامتناهی هستند و شمارش‌ناپذیر. چنین فضاهایی به صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی و یا شکل‌ها و حجم‌های هندسی ظاهر می‌شوند.

مثال ۶. هرگاه یک تاس و یک سکه را با هم به هوا بیندازیم، آن‌گاه فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با:

S={(پ , ۶) و (پ , ۵) و (پ , ۴) و (پ , ۳) و (پ , ۲) و (پ , ۱) و (ر , ۶) و (ر , ۵) و (ر , ۴) و (ر , ۳) و (ر , ۲) و (ر , ۱)}

در حالت کلی و بنا بر **اصل بنیادی ضرب**، نکته‌ی زیر را خواهیم داشت:

نکته‌ی ۱: هرگاه آزمایش تصادفی $E_۱$ دارای $n_۱$ برآمد، آزمایش تصادفی $E_۲$ دارای $n_۲$ برآمد، . . . و آزمایش تصادفی E_m دارای n_m برآمد باشد، آن‌گاه فضای نمونه‌ای آزمایشی که طی آن همه‌ی آزمایش‌های $E_۱, E_۲, ..., E_n$ را **با هم** انجام دهیم، دارای $n_۱n_۲...n_m$ عضو است (یعنی $S=S_۱\times S_۲\times...\times S_m$ که S فضای نمونه‌ای آزمایش ماست و S_i فضای نمونه‌ای آزمایش E_i است).

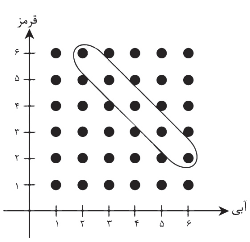
مثال ۷. بنا بر نکته‌ی ۱ فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه با هم یا پرتاب دو تاس با هم، به ترتیب دارای $S=۲\times۲\times۲=۸$ و $S=۶\times۶=۳۶$ عضو است.

گیریم S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد. گاهی علاقه‌مندیم که برآمد آزمایش، یکی یا چند عضو مورد نظر از میان عضوهای S باشد، یعنی به زیرمجموعه‌ای از S توجه داریم مانند مثال زیر.

مثال ۸. فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس سالم، برابر است با مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. هرگاه در این آزمایش، رو شدن یک عدد اول مورد نظر باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی نتایج مورد نظر ما عبارت است از $A=\{۲,۳,۵\}$ و رخداد دست‌کم یکی از عضوهای A، نظر ما را برآورده می‌کند. چنین زیرمجموعه‌هایی دارای نامی ویژه‌اند که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

تعریف: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک **پیشامد** می‌گوییم. اگر $A\subseteq S$ یک پیشامد باشد، می‌گوییم A رخ داده است هرگاه برآمد آزمایش، عضوی از A باشد (لزومی ندارد همه‌ی عضوهای A رخ دهند).

مثال ۹. دو تاس آبی و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد ظاهر شدن دو عدد با مجموع ۸ باشد، آن‌گاه A را مشخص کنید.



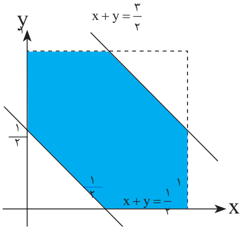
پاسخ: فضای نمونه‌ای هر یک از تاس‌های آبی و قرمز عبارت است از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، پس فضای نمونه‌ای حاصل از پرتاب این دو تاس با هم، می‌شود حاصل‌ضرب دکارتی این دو مجموعه، یعنی $S=\{(x,y):x=۱,۲,۳,۴,۵,۶ \text{ و } y=۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$.
پیشامد A که در آن دو عدد با مجموع ۸ ظاهر شوند، برابر است با مجموعه‌ی $A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$ که در نمودار هم آن را نشان داده‌ایم.

نکته‌ی ۲: پرتاب کردن n سکه با هم درست مانند این است که یک سکه را n بار پرتاب کنیم. به همین شیوه پرتاب n تاس با هم درست مانند پرتاب یک تاس به تعداد n بار است.

مثال ۱۰. گیریم دو عدد حقیقی بین ۰ و ۱ به تصادف انتخاب شوند، فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامد B را که در آن انتخاب دو عدد حقیقی با مجموع کوچک‌تر از ۱/۵ و بزرگ‌تر از ۰/۵ مدنظر باشد، مشخص کنید.

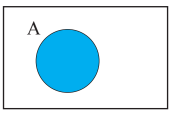
(مثال ۱۳، صفحه‌ی ۷۹، کتاب درسی جبر و احتمال)

پاسخ: فضای نمونه‌ای این آزمایش، چنین است: $S=\{(x,y):0<x<1\,,\,0<y<1\}$. حال پیشامد B به زبان مجموعه‌ها برابر می‌شود با $B=\{(x,y):\frac{1}{2}<x+y<\frac{3}{2}\,,0<x<1,0<y<1\}$. نمودار فضای نمونه‌ای به صورت یک مربع (بی‌مرز) است و B عبارت است از ناحیه‌ی سایه‌خورده، که در آن ناحیه‌ی بین دو خط $x+y=\frac{1}{2}\,,\,x+y=\frac{3}{2}$ را سایه زده‌ایم.

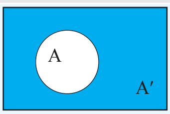
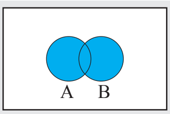
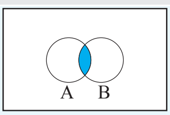
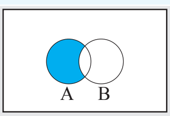
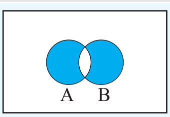
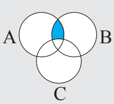


عملیات بر روی پیشامدها

گیریم S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد. پیش از این گفتیم که یک پیشامد مانند $A\subseteq S$ هنگامی رخ می‌دهد که برآمد آزمایش، یکی از عضوهای A باشد. به کمک بهره‌گیری از جبر مجموعه‌ها می‌توانیم پیشامدهای تازه‌ای از روی پیشامدهای فضای نمونه‌ای موردنظر بسازیم، که آن را عملیات روی پیشامدها می‌گوییم.



نمودار ون مربوط به حالتی که A رخ دهد را در شکل روبه‌رو رسم کرده‌ایم و ناحیه‌ی مطلوب سایه‌خورده است. در جدول (۱) مهم‌ترین پیشامدها و تعبیر آن‌ها را به طور یک‌جا آورده‌ایم. فرض بر این است که A، B و C سه پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند:

پیشامد	تعبیر پیشامد	نمودار ون
A'	A' **متمم** پیشامد A است و تنها هنگامی رخ می‌دهد که A **رخ ندهد**.	
$A\cup B$	اجتماع دو پیشامد هنگامی رخ می‌دهد که پیشامد A یا B و یا هر دو رخ بدهند. هر گاه حرف **یا** و واژه‌ی حداقل را دیدیم یاد پیشامد اجتماع باید بیفتیم و برعکس.	S 
$A\cap B$	اشتراک دو پیشامد هنگامی رخ می‌دهد که A و B هر دو رخ بدهند. هر گاه حرف **و** یا واژه‌ی **هم** را دیدیم یاد پیشامد اشتراک باید بیفتیم و برعکس.	S 
$A-B=A\cap B'$	تفاضل B از A هنگامی رخ می‌دهد که A رخ بدهد ولی B رخ ندهد؛ به بیانی دیگر: **تنها** A **رخ دهد**.	S 
$A\Delta B$ $=(A\cup B)-(A\cap B)$ $=(A-B)\cup(B-A)$	پیشامد تفاضل متقارن هنگامی رخ می‌دهد که تنها یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد؛ به بیانی دیگر: **یا** A **رخ دهد یا** B **و نه هر دو.**	S 
$(A\cap B)-C$	این پیشامد بدان معناست که: پیشامد A **و** پیشامد B رخ دهند، اما C رخ ندهد.	

جدول (۱)

نکته‌ی ۳: چون $S\subseteq S$ و $\phi\subseteq S$، پس خود S و ϕ هم پیشامد هستند که به ترتیب آن‌ها را پیشامد **حتمی** و پیشامد **نشدنی** می‌نامیم. روشن است که $S'=\phi$ و $\phi'=S$ (متمم یک‌دیگرند).

خب! اینم از درس‌نامه‌ی کوتاه ولی مهم پیشامدها، امیدوارم خوب یاد گرفته باشین این مباحث رو. طبق روند همیشگی تو این بخش می‌ریم سراغ تست‌های مربوط به موضوع پیشامدها و الگوهای رایج اون.

الگوی ۱ این الگو عبارته از مشخص کردن فضای نمونه‌ای یه آزمایش تصادفی.

۱. یک کیســـه محتوی ۲ مهره‌ی آبی یکسان و ۲ مهره‌ی سفید یکسان است. مهره‌ای از این کیسه بیرون می‌آوریم. فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی ما، مبنی بر رنگ مهره‌ی انتخابی، کدام است؟ (مؤلف)

۱) {سفید و آبی}

۲) {آبی آبی × سفید سفید}

۳) {آبی}×{سفید} ∪ {سفید}×{آبی}

۴) {سفیدآبی آبی‌سفید , آبی‌سفید آبی‌سفید , آبی‌آبی سفیدسفید , آبی‌سفید سفیدآبی , سفیدآبی سفیدآبی , سفیدسفید آبی‌آبی}

پاسخ: چون آزمایش تصادفی ما بر پایه‌ی رنگ مهره‌ی انتخابی از کیسه است، پس به هر صورتی که مهره‌ها را به تصادف از کیسه بیرون آوریم رنگ آن مهره یا آبی است و یا سفید، یعنی فضای نمونه‌ای این آزمایش (مبنی بر مشاهده‌ی رنگ) تنها دارای ۲ عضو و عبارت از S = {سفید , آبی} است. از این رو گزینه‌ی (۱) درست است.

۲. سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، شامل اعضای کدام مجموعه‌ی زیر است؟ (تمرین ۸ صفحه‌ی ۸۳، کتاب درسی جبر و احتمال)

۱) {(پ , پ) , (ر , پ) , (۲ , ر) و (۱ , ر)}

۲) {(۱ , ر) , (۵ , ر) , (ر , ر , پ) , (ر , پ , پ)}

۳) {(ر , ۲) , (۲ , ر) , (ر , ۱) , (۱ , ر)}

۴) {(ر , ر , پ) , (۳ , ۱ , ر) , (۱ , ۱ , ر) , (۵ , ر) , (۶ , ر)}

پاسخ: اگر سکه رو بیاید، تاس را می‌ریزیم که فضای نمونه‌ای این بخش از آزمایش ما برابر خواهد شد با:

S_1 = {ر} × {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶} = {(ر , ۱) , (ر , ۲) , (ر , ۳) , (ر , ۴) , (ر , ۵) , (ر , ۶)}، به همین شیوه اگر سکه پشت بیاید و آن‌گاه سکه را دوبار دیگر پرتاب کنیم، فضای نمونه برابر می‌شود با:

S_2 = {پ} × {ر , پ} × {ر , پ} = {(پ , پ , پ) , (ر , پ , پ) , (پ , ر , پ) , (ر , ر , پ)}

در نتیجه فضای نمونه‌ای این آزمایش دو قسمتی برابر است با $S = S_1 \cup S_2$، که شامل عضوهای مجموعه‌ی گزینه‌ی دوم است.

الگوی ۲ تو این الگو از ما می‌خوان تا شمار عضوهای فضای نمونه رو به دست بیاریم.

۳. در پرتاب ۴ سکه و یک تاس با هم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟ (سنجش ریاضی - ۸۷)

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

پاسخ: اگر ۴ سکه را پرتاب کنیم، دارای $۲\times۲\times۲\times۲ = ۲^۴ = ۱۶$ برآمد است و پرتاب یک تاس هم دارای ۶ برآمد است؛ پس اگر این دو کار را با هم انجام دهیم بنابر نکته‌ی ۱، فضای نمونه‌ای دارای $۱۶\times۶ = ۹۶$ برآمد (عضو) خواهد بود.

الگوی ۳ این الگو اختصاص داره به تعریف پیشامد و شناسایی یه پیشامد از روی تعریف.

۴. اگر $S = \{۲a, b, ۲, ۱\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد، کدام مجموعه یکی از پیشامدهای آن است؟ (سنجش ریاضی - ۸۱)

۱) $\{۲a, b+۲\}$ ۲) $\{a+b, ۱\}$ ۳) $\{a, b, ۲\}$ ۴) $\{۲a, ۲, ۲\}$

پاسخ: بنا بر تعریف، هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، یک پیشامد است و در میان گزینه‌ها: $\{۲a, ۲, ۲\} \subseteq \{۲a, b, ۲, ۱\}$ (توجه کنید که تکرار عضوهای یک مجموعه، آن را تغییر نمی‌دهد و در واقع $\{۲a, ۲, ۲\} = \{۲a, ۲\}$). پس گزینه‌ی (۴) درست است.

الگوی ۴ بعضی سؤال‌ها مربوط می‌شن به عملیات روی پیشامدها.

۵. در خانواده‌ای با سه فرزند، فرض کنید A پیشامد آن باشد که در آن خانواده حداکثر یک فرزند دختر وجود دارد و B پیشامد آن که در آن خانواده فقط یک فرزند دختر موجود است. پیشامد $A'\cup B'$ کدام است؟ *(امتحان نهایی درس جبر و احتمال، خرداد ۹۳)*

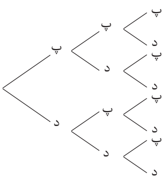
۱) {(د , د , پ) , (پ , د , پ) , (د , پ , پ) , (د , د , د) , (پ , د , د) , (د , پ , د) , (پ , پ , د)}

۲) {(پ , پ , د) , (پ , د , پ) , (د , پ , پ) , (پ , پ , پ)}

۳) {(د , د , د) , (پ , د , د) , (د , پ , د) , (د , د , پ) , (پ , پ , پ)}

۴) {(د , د , د) , (پ , د , د) , (د , پ , د) , (د , د , پ) }

پاسخ: از **نمودار درختی** مسئله را حل می‌کنیم. برای آن‌که پیشامد A را به‌دست آوریم، روی آن شاخه‌هایی جستوجو می‌کنیم که حداکثر یک فرزند دختر وجود دارد (یعنی یا یک دختر وجود دارد و یا دختری وجود ندارد) که به دست می‌آوریم:



A = {(پ , پ , پ) , (پ , پ , د) , (پ , د , پ) , (د , پ , پ)}

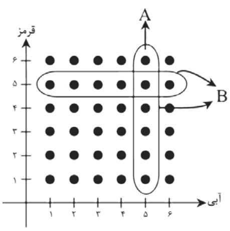
به همین شیوه B (پیشامدی که خانواده فقط یک فرزند دختر دارد) به صورت {(پ , پ , د) , (پ , د , پ) , (د , پ , پ)} = B مشخص می‌شود. از آن‌جا که: $A'\cup B'=(A\cap B)'$ (قوانین دمورگان) و $B\subseteq A$، **پس داریم:**

$(A\cap B)'=B'=$ {(د , د , د) , (پ , د , د) , (د , پ , د) , (د , د , پ) , (پ , پ , پ)}

۶. یک تاس سالم را دو بار می‌اندازیم. فرض کنید A پیشامدی است که در آن، عدد برآمده‌ی بار اول ۵ باشد و B پیشامدی است که در آن عدد برآمده‌ی بار اول یا بار دوم ۵ باشد. پیشامد $B-A$ چند عضو دارد؟ *(امتحان نهایی درس جبر و احتمال، خرداد ۷۷)*

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: می‌توانیم دو پیشامد A و B را با نوشتن عضوهایشان و یا با کمک نمودار، مشخص کنیم. در هر صورت این دو پیشامد به صورت زیر به دست می‌آیند (فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس سالم دارای ۳۶ برآمد (عضو) است که در نمودار هم مشخص شده‌اند.):



$A=\{(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶)\}$

$B=\{(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۶,۵)\}$

پس $B-A=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۶,۵)\}$ که دارای ۵ عضو است (توجه کنید که ناحیه‌ی بسته‌ی عمودی نشان‌گر پیشامد A و اجتماع همین ناحیه با ناحیه‌ی بسته‌ی افقی، نشان‌گر پیشامد B است، یعنی $A\subseteq B$).

آزمونک ۱

۱. یک سکه‌ی سالم و یک تاس مخصوص داریم که به جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو را با هم می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی کدام است؟ *(امتحان نهایی درس جبر و احتمال ـ خرداد ۹۴)*

۱) {۱ , ۲ , ۳} × {پ , ر} × {۱ , ۲ , ۳}

۲) {(۳ , پ) , (۲ , پ) , (۱ , پ) (۳ , ر) , (۲ , ر) , (۱ , ر)}

۳) {(پ , ۱) , (پ , ۱) , (ر , ۳) , (ر , ۳) , (ر , ۲) , (ر , ۲) , (ر , ۱) , (ر , ۱) , (پ , ۳) , (پ ,۳) , (پ , ۲) , (پ , ۲)}

۴) {۱ , ۲ , ۳ } × {۱ , ۲ , ۳} × {پ , ر}

۲. با پرتاب سه سکه و یک تاس با هم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟ *(سنجش ریاضی ـ ۸۱)*

۱) ۲۴ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۸۴

۳. یک سکه و یک تاس داریم، سکه را یک بار پرتاب می‌کنیم اگر رو آمد تاس را پرتاب کرده و اگر پشت آمد، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم اگر پیشامد A آمدن حداقل یک رو باشد، این پیشامد چند عضو دارد؟ (آزمون آزمایشی آموزش و پرورش ـ ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۴. دو تاس همگن را می‌اندازیم. اگر A پیشامد آن باشد که عدد هر دو تاس مضرب ۳ است و B پیشامد آن که مجموع عدد تاس‌ها مضرب ۶ است، آن‌گاه با برآمدن کدام عضو فضای نمونه، پیشامد $A-B'$ رخ می‌دهد؟ (مؤلف)

۱) (۳,۶) ۲) (۲,۴) ۳) (۶,۶) ۴) (۵,۱)

۵. از بین ۸ نفر قبول‌شـدگان المپیاد ۳ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشـامد A که در آن فرد مورد نظر از بین آن‌ها انتخاب شده باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۷۸)

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۴

۶. یک سکه را ۳ بار می‌اندازیم. اگر **A** پیشامدی باشد که در آن لااقل ۲ بار رو بیاید و **B** پیشامدی باشد که در آن هر سه بار به یک طرف ظاهر شود، آن‌گاه پیشامد $A \Delta B$ چند عضو دارد؟ (امتحان نهایی درس جبر و احتمال، خرداد ۸۶)

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷. اگر یک سکه و تاسی را با هم پرتاب کنیم و فرض کنیم که پیشامد B آن است که سکه رو و تاس عدد اول یا سکه رو و تاس عدد فرد باشد، آن‌گاه B چند عضو دارد؟ (امتحان نهایی درس جبر و احتمال، شهریور ۷۷)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۸. سـکه‌ای به شعاع ۲ واحد را بر روی یک صفحه‌ی مربعی به اندازه‌ی ضلع ۷/۵ واحد پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد آن اسـت که هرگاه سـکه کاملاً درون مربع قرار بگیرد برنده شویم. (با محیط مربع تماس داشـته باشد یا بیرون بیفتد بازنده‌ایم)، مساحت نمودار A کدام است؟ (مشابه مثال ۱۴ صفحه‌ی ۸۰، کتاب درسی جبر و احتمال)

۱) ۱۰/۲۵ ۲) ۱۱/۷۵ ۳) ۱۲/۲۵ ۴) ۱۲/۷۵

پاسخ‌نامه

۱. (۲) هنگامی که یک سکه و یک تاس را با هم بیندازیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای ۱۲ عضو خواهد بود، اما از آن‌جا که هر کدام از رقم‌های ۱، ۲ و ۳ دو بار تکرار شده‌اند، پس ۶ جفت مرتب تکراری هستند و فضای نمونه را تغییر نمی‌دهند. در نتیجه خواهیم داشت: S = {(ر , ۱) , (ر , ۲) , (ر , ۳) , (پ , ۱) , (پ , ۲) , (پ , ۳)}.

توجه. همواره ترتیب جفت‌مرتب‌ها را باید یکسان بنویسیم و در سراسر آزمایش آن را ثابت نگه داریم؛ برای نمونه اگر مختص اول را به سکه اختصاص می‌دهیم اجازه نداریم در نوشتن اعضای S، حالت‌های سکه را در مختص دوم بیاوریم. به همین دلیل گزینه‌ی (۳) نادرست است.

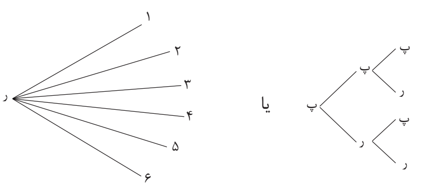
۲. (۳) ۶ = شمار عضوهای فضای نمونه‌ی پرتاب تاس و $۸ = ۲^۳ =$ شمار عضوهای فضای نمونه‌ی پرتاب سه سکه

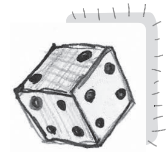
$\Rightarrow$ شمار عضوهای فضای نمونه‌ی آزمایش ما $= ۶ \times ۸ = ۴۸$

۳. (۴) **روش یکم.** پیشامد A را با نوشتن عضوهایش مشخص می‌کنیم (نمودار درختی را ببینید):

A = {(ر , ۱) , (ر , ۲) , (ر , ۳) , (ر , ۴) , (ر , ۵) , (ر , ۶) , (پ , پ , ر) , (پ , ر , پ) , (پ , پ , ر) , (ر , ر , پ)}

همان‌گونه که واضح است، داریم $|A| = ۹$.





۳ احتمال غیر هم‌شانس در فضاهای گسسته

با گســـترش نظریه‌ی احتمال، حالت‌هایی پدید آمد که در آن‌ها برآمدها دیگر شـــانس برابر با هم نداشـــتند، بلکه به صورت نسبت رخدادشان به ازای تکرار در طول زمان (احتمال نسبی) تعریف می‌شدند. از این موضوع گاهی ۱ سؤال در کنکور می‌آید.

■ در واحد پیش همه‌ی عضوها دارای شانس رخداد یکسانی بودند و در اصطلاح: احتمال **به صورت همگن پخش شده است**. اما فضاهایی موجودنـــد که احتمال رخداد پیشـــامدها در آن، از قانون احتمال هم شـــانس پیروی نمی‌کند. به عبارتی دیگـــر **برآمدهای آزمایش هم‌شانس نیستند** یا **احتمال به صورت ناهمگن** در نقاط فضای نمونه‌ای پخش شده بود. در این‌جا به این مطلب خواهیم پرداخت.

مثال ۱. گیریم یک سکه را ۱۰۰ بار بیندازیم و در این ۱۰۰ بار، ۴۰ بار شیر و ۶۰ بار خط آمده باشد. بر پایه‌ی محاسبه‌ی فراوانی (نسبت تعداد رخداد موردنظر به همه‌ی حالت‌ها) احتمال رخداد شیر برابر می‌شود با $P\,(\text{ش})=\frac{۴۰}{۱۰۰}=۰/۴$ و $P\,(\text{خ})=\frac{۶۰}{۱۰۰}=۰/۶$.

همان‌گونه که می‌بینیم در این‌جا $P\,(\text{خ})\neq P\,(\text{ش})\neq\frac{۱}{۲}$ و $S=\{\text{ش}\,,\text{خ}\}$.

مثال بالا نمونه‌ای از محاســـبه‌ی احتمال با کمک **فراوانی** اســـت، که ممکن اســـت حالت‌های غیر هم‌شانس را به‌دست دهد. اکنون می‌خواهیم ببینیم که در حالت کلی، در یک فضای غیر هم‌شانس چگونه می‌توانیم احتمال‌ها را به برآمدها نسبت دهیم. نخست، به یک تعریف توجه می‌کنیم.

تعریف: هر زیرمجموعه‌ی تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای S را یک **پیشامد ساده** می‌گوییم و هر اجتماع از پیشامدهای ساده را یک پیشامد مرکب.

گیریم $S=\{e_۱,e_۲,...,e_n\}$ یک فضای نمونه‌ای n عضوی باشد. به هر پیشامد ساده‌ی $\{e_k\}$ $(k=۱,...,n)$ یک عدد حقیقی به صورت $P(\{e_k\})$ یا به طور ساده‌تر $P(e_k)$ نسبت می‌دهیم، به‌گونه‌ای که دو ویژگی زیر را دارا باشد:

۱) احتمال یک پیشامد ساده همواره عددی بین ۰ و ۱ است، یعنی $۰\le p(e_k)\le ۱$؛

۲) مجموع احتمالات همه‌ی پیشامدهای ساده برابر ۱ است، یعنی $p(e_۱)+p(e_۲)+...+p(e_n)=۱$.

اعداد $P(e_۱),...,P(e_n)$ را که دو ویژگی بالا را داشته باشند، **«تخصیص احتمال مقبول (پذیرفتنی)»** می‌نامیم.

گیریم A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای غیر هم‌شانس S است، در این صورت احتمال پیشامد A را در هر حالت، به صورت آمده در جدول (۱) نسبت می‌دهیم:

۱- A پیشامد **نشدنی** (ناممکن) باشد، آن‌گاه $P(A)=۰$.
۲- A پیشامد ساده باشد، $P(A)$ را تخصیص داده‌ایم (مطابق بحث بالا) و کاملاً معین است.
۳- A پیشامد مرکب باشد، آن‌گاه $A=\{e_۱,e_۲,...,e_m\}=\bigcup_{i=۱}^{m}\{e_i\}$ و در نتیجه $P(A)=P(e_۱)+...+P(e_m)$.
۴- اگر A=S، آن‌گاه $P(A)=۱$.

جدول (۱)

مثال ۲. فرض کنید $S=\{a,b,c,d\}$ **فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی در فضای غیر هم‌شانس باشد. تعیین کنید کدام‌یک از تخصیص احتمال‌های زیر پذیرفتنی ست و کدام نه:**

آ) $P(a)=۰/۲۶, P(b)=۰/۳۰, P(c)=۰/۳۶, P(d)=۰/۱۲$

ب) $P(a)=۰/۱۸, P(b)=۰/۲۴, P(c)=۰/۳۲, P(d)=۰/۲۶$

پاسخ: آ) $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۰/۲۸+۰/۳۰+۰/۳۶+۰/۱۲>۱$ ، پس یک تخصیص احتمال پذیرفتنی نیست.

ب) $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۰/۱۸+۰/۲۴+۰/۳۲+۰/۲۶=۱$ ، پس یک تخصیص احتمال پذیرفتنی است.

مثال ۳. **گیریم $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ ، مطلوب است محاسبه‌ی** *(مثال ۶ صفحه‌ی ۱۰۰، کتاب درسی جبر و احتمال)*

آ) $P(a_۱)$ اگر $P(a_۱)=۲P(a_۲), P(a_۳)=P(a_۴)=\frac{۱}{۴}$.

ب) $P(a_۱)$ اگر $P(\{a_۲,a_۳\})=\frac{۲}{۳}, P(\{a_۲,a_۴\})=\frac{۱}{۲}, P(a_۲)=\frac{۱}{۳}$.

پاسخ: آ) گیریم $P(a_۲)=x$ باشد، پس باید $P(a_۱)=۲x$. از آن‌جا که $P(e_۱)+P(e_۲)+P(e_۳)+P(e_۴)=۱$ ، در نتیجه داریم $۲x+x+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$ یا $۳x=۱-\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ که به دست می‌دهد $x=\frac{۱}{۶}$. بنابراین $P(a_۱)=۲x=\frac{۱}{۳}$.

ب) بر پایه‌ی جدول (۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} P(\{a_۲,a_۴\})=P(a_۲)+P(a_۴)=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{P(a_۲)=\frac{۱}{۳}}P(a_۴)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶} \\ P(\{a_۲,a_۳\})=P(a_۲)+P(a_۳)=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{P(a_۲)=\frac{۱}{۳}}P(a_۳)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$P(a_۱)+P(a_۲)+P(a_۳)+P(a_۴)=۱\Rightarrow P(a_۱)=۱-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(a_۱)=\frac{۱}{۶}$$

خب این واحد درسی، به همین اندازه بود! کوتاه و کم‌حجم. امیدوارم مطالبش رو خوب یاد گرفته باشین، حالا بهتره بریم سراغ الگوهای این واحد درسی تو سؤال‌های آزمون‌های سراسری.

الگوی ۱ **تو این الگو نسبت برنده شدن اشخاص و ... در مسابقات یا نسبت رخداد برآمدها در سکه‌ها و تاس‌های ناسالم و ... رو به ما می‌دن و در مقابل احتمال رخداد یه پیشامد رو می‌خوان.**

۱. چهار تیرانداز به شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ در مسابقه‌ای شرکت می‌کنند. اگر شانس برنده شدن هر تیرانداز با شماره‌ی فرد دو برابر شانس برنده شدن هر تیرانداز با شماره‌ی زوج باشد، احتمال این‌که تیرانداز شماره‌ی ۳ یا تیرانداز شماره‌ی ۲ برنده شود، چقدر است؟

(امتحان نهایی درس جبر و احتمال ـ خرداد ۷۷)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای را برابر $S=\{T_۱,T_۲,T_۳,T_۴\}$ می‌گیریم (T_i تیرانداز iام است)، پیشامد مورد نظر عبارت است از $A=\{T_۲,T_۳\}$. اگر فرض کنیم $P(T_۲)=P(T_۴)=a$ ، آن‌گاه $P(T_۱)=P(T_۳)=۲a$ و در نتیجه داریم:

$$P(T_۱)+P(T_۲)+P(T_۳)+P(T_۴)=۱\Rightarrow ۲a+a+۲a+a=۱\Rightarrow ۶a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۶}$$

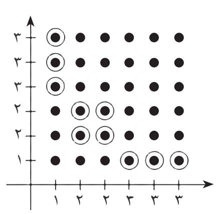
$$P(\{T_۲,T_۳\})=P(T_۲)+P(T_۳)=\frac{۱}{۶}+\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

الگوی ۲ **تو این الگو خود ما باید احتمال غیر هم‌شانس مربوط هر پیشامد رو از روی اطلاعات مسئله بتونیم تشخیص بدیم.**

۲. روی تاسی ارقام ۳، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱ نوشته شده احتمال آن‌که در پرتاب دو بار تاس مجموع چهار ظاهر شود کدام است؟

(آزاد ریاضی – ۸۵)

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$



پاسخ: این تاس، تاسی ناهمگن (ناسالم) است و احتمال رخداد برآمدها با هم یکسان نیست. به کمک نمودار، نقاط پیشامد مطلوب را با دایره نشان داده‌ایم، اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه:

$$P(A)=P(\text{نقطه‌های } \odot)=\text{مجموع}(p(\text{هر نقطه‌ی } \odot))=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}+\dots+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

آزمونک ۳

۱. اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $P(۱)=۲P(۲)=۳P(۳)=۴P(۴)$، $P(۱)$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۷۶)*

۱) $\frac{۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۸}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۲۵}$

۲. فرض می‌کنیم $S=\{s_۱,s_۲,s_۳,s_۴\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه‌ی تصادفی باشد. اگر $P(\{s_۲,s_۳\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{s_۲,s_۴\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(s_۲)=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه $P(s_۱)$ کدام است؟ *(امتحان نهایی درس جبر و احتمال ـ شهریور ۷۷)*

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳. یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب، احتمال وقوع عدد بزرگ‌تر از ۳ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۷)*

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۴. سکه‌ای را هر ۱۵ بار که پرتاب کنیم، ۶ بار به پشت می‌نشیند. با کدام احتمال این سکه در ۳ بار پرتاب، ۲ بار رو می‌نشیند؟ *(مؤلف)*

۱) $\frac{۳۶}{۱۲۵}$ ۲) $\frac{۴۲}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۴۸}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۵۴}{۱۲۵}$

۵. اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی $S=\{۱,۲,۳\}$ باشد و $P(۱)=a^۲, P(۳)=۲P(۲)=a$، آن‌گاه $P(۲)$ کدام است؟ *(امتحان نهایی درس جبر و احتمال – خرداد ۹۴)*

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۵

۶. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است. احتمال آمدن عدد اول چقدر است؟ *(مؤلف)*

۱) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

پاسخ‌نامه

۱. (۳) گیریم $P(۴)=p$، پس داریم: $P(۳)=\frac{۴}{۳}P\ ,\ P(۲)=\frac{۳}{۲}(\frac{۴}{۳}p)=۲p\ ,\ P(۱)=۴p$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱\Rightarrow ۴p+۲p+\frac{۴}{۳}p+p=۱\Rightarrow ۲۵P=۳\Rightarrow P=\frac{۳}{۲۵}\Rightarrow P(۱)=۴\frac{۳}{۲۵}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

۲. (۲) این سؤال همان مثال ۳ بند (ب) متن درس (و مثال ۶ کتاب درسی) است، پس $P(s_۱)=\frac{۱}{۲}$.

۳. (۴) داریم: $A=\{۴,۵,۶\}\ ,\ S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$؛ گیریم $P(۱)=P(۳)=P(۵)=a$، پس $P(۲)=P(۴)=P(۶)=۳a$ و از این‌رو:

$$P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱\Rightarrow a+۳a+a+۳a+a+۳a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow P(A)=P(۴)+P(۵)+P(۶)=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۴. (۴) چون سکه از هر ۱۵ بار ۶ بار به پشت می‌نشیند، پس بنابر محاسبه‌ی فراوانی، احتمال «پ» برابر می‌شود با $P\ (پ)=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$ و در نتیجه $P\ (ر)=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$. حال داریم: $A=\{(ر\,,ر\,,پ)\,,(ر\,,پ\,,ر)\,,(پ\,,ر\,,ر)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\text{مجموع احتمال هر کدام از برآمدها}=\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}==۳(\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵})=\frac{۵۴}{۱۲۵}$$

۵. (۲)

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)=۱\Rightarrow a^۲+\frac{a}{۲}+a=۱\xrightarrow{\times ۲}۲a^۲+۳a=۲\Rightarrow ۲a^۲-۳a-۲=۰$$

$$\Delta=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow a=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۴}=\begin{cases}-۲ & \text{غ ق ق}\\ \frac{۱}{۲} & \text{ق ق}\end{cases}\Rightarrow\quad P(۲)=\frac{a}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

۶. (۱)

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\ ,\ A=\{۲,۳,۵\}\quad,\ P(۲)=P(۴)=P(۶)=a\ ,\ P(۱)=P(۳)=P(۵)=۵a$$

$$P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱\Rightarrow ۱۸a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow P(A)=P(۲)+P(۳)+P(۵)=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۵}{۱۸}+\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$$