۱ تعریف مشتق، آهنگ تغییرات، مشتق‌های یک‌طرفه و مشتق‌پذیری

نیوتن با بررسی نرخ تغییرات مکان یک متحرک نسبت به زمان مفهوم جدیدی را به ریاضیات معرفی کرد که بعدها مشتق یک تابع نام گرفت. با گسترش کاربرد این مفهوم، ساختار آن به شکل امروزی درآمد. کاربرد زیاد و حضور پررنگ این مبحث در علم اهمیت بسیار آن را آشکار ساخت و طراحان تست‌های کنکور نیز به‌همین خاطر هر سال در پرسش‌ها از خجالت این مبحث درمی‌آیند!

آهنگ متوسط تغییر تابع: منظور از آهنگ متوسط تغییر تابع f روی بازه‌ی $[x_1, x_2]$ مقدار عبارت:

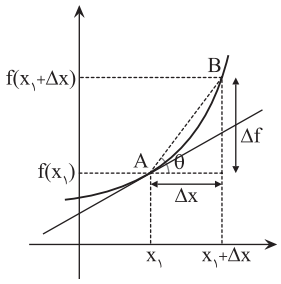
$$\text{آهنگ متوسط تغییر } f \text{ در بازه‌ی } [x_1, x_2] = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

است که در آن $\Delta x = x_2 - x_1$. از نظر هندسی آهنگ متوسط تغییر تابع f از نقطه‌ی A به B برابر شیب وتر گذرا از A و B است، به گویش دیگر: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = (\text{شیب وتر } AB)$.

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع: برای تابع f، حد آهنگ متوسط تغییر تابع f وقتی $\Delta x \to 0$ را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f می‌نامند، به گویش دیگر:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر } f \text{ در نقطه‌ی } x_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

از نظر هندسی آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ی A روی نمودار f، برابر شیب خط مماس بر نمودار f در این نقطه است.



نکته ۱ اگر f در $x = x_1$ پیوسته باشد و $\lim_{\Delta x \to 0} \left|\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\right| = \infty$، آن‌گاه خط $x = x_1$ که از نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$ می‌گذرد را مماس قائم بر نمودار f می‌نامند.

مشتق تابع f در $x = x_1$: بنابه تعریف، منظور از مشتق تابع f در نقطه‌ی $x = x_1$ که آن را با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم، حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر (در صورت وجود) است، به زبان نمادین:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

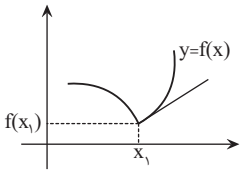
با توجه به تعریف مشتق تابع در $x = x_1$، می‌توان گفت آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = x_1$ و شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x = x_1$ همان مشتق تابع در $x = x_1$ است. بنابراین تابع f در $x = x_1$ مشتق‌پذیر است، هرگاه $f'(x_1)$ وجود داشته باشد، هم‌چنین تابع f را در بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر می‌نامند، هرگاه در همه‌ی نقطه‌های این بازه مشتق‌پذیر باشد.

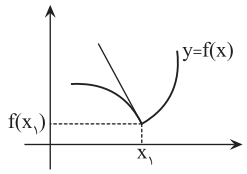
نکته ۲ برای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ برابر آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه‌ی وسط بازه یعنی $\frac{x_1+x_2}{2}$ است، بنابراین $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\frac{x_1+x_2}{2})$.

مشتق‌های یک طرفه (مشتق چپ و راست): با توجه به آن‌که مشتق در یک نقطه به کمک حد تعریف می‌شود و مفهوم حد چپ و راست، می‌توان مشتق چپ و راست را به شکل زیر تعریف کرد.

مشتق راست: منظور از مشتق راست تابع f در $x = x_1$ که آن را با نماد $f'_+(x_1)$ نشان می‌دهیم، حاصل حد $f'_+(x_1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ است.

از نظر هندسی مشتق راست، شیب نیم مماس راست در این نقطه است.





مشتق چپ: به شکل مشابه مشتق چپ تابع f در $x = x_1$ که شیب نیم مماس چپ را نشان می‌دهد برابر است با $f'_-(x_1) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \lim\limits_{x \to x_1^-} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$.

قضیه ۱ تابع f در $x_0 \in D_f$ مشتق‌پذیر است، اگر و فقط اگر:

i) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ii) مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند به گویش دیگر $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

قضیه ۲ اگر تابع f در $x = x_0$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در این نقطه پیوسته است.

یادداشت توجه کنید عکس قضیه‌ی بالا همواره درست نیست، یعنی گاهی یک تابع در یک نقطه پیوسته است، اما مشتق‌پذیر نیست.

برای نمونه $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است، اما مشتق‌پذیر نیست زیرا $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$.

نتیجه: از قضیه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که اگر تابعی در یک نقطه پیوسته نباشد، آن‌گاه در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست، بدیهی است ناپیوستگی از راست (چپ) به عدم وجود مشتق راست (چپ) می‌انجامد.

نکته ۳ هر تابع با ضابطه‌ی $y = |f(x)|$، برای ریشه‌های ساده (غیرمکرر) f مشتق‌ناپذیر است. هم‌چنین تابع‌هایی با ضابطه‌ی $y = [f(x)]$ در نقطه‌هایی که مقدار f صحیح شود ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر هستند. اما اگر نقطه‌ی $x = x_0$ طول مینیمم نسبی f باشد و یا آن‌که عبارتی به شکل $y = (x-x_0)^n[f(x)]$، $n \geq 2$، داشته باشیم، آن‌گاه y در $x = x_0$ پیوسته و در نتیجه مشتق‌پذیر است.

الگو ۱ برخی پرسش‌ها در آزمون‌های تستی مقدار آهنگ متوسط تغییر یک تابع در یک بازه و یا رابطه‌ای میان آهنگ لحظه‌ای در یک نقطه و آهنگ متوسط در بازه‌ای شامل آن نقطه را می‌خواهند که برای حل این تست‌ها کافی است به کمک تعریف آن‌ها مقدارهای خواسته شده را محاسبه کنیم.

۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{36}{x^2}$، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[3]{12}$ بیش‌تر است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: **گزینه‌ی(۱).**

بنابر آن‌چه گفته شد: آهنگ متوسط در $[2,3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{\frac{36}{9}-\frac{36}{4}}{1} = 4-9 = -5$

هم‌چنین $f'(x) = \frac{-72}{x^3}$ و درنتیجه $f'(\sqrt[3]{12}) = \frac{-72}{(\sqrt[3]{12})^3} = \frac{-72}{12} = -6$. بنابراین آهنگ متوسط $-5-(-6) = 1$ از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

الگو ۲ گاهی پرسش‌ها برداشت دیگری از آهنگ لحظه‌ای را مورد توجه قرار می‌دهند. در واقع می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان یک متحرک همان سرعت لحظه‌ای، و آهنگ لحظه‌ای تغییر سرعت یک متحرک همان شتاب لحظه‌ای است. پرسش‌ها با این دیدگاه مطرح می‌شوند. گاهی هم تابعی که آهنگ تغییرات آن را می‌خواهیم داده نشده است و باید به کمک فرض‌ها، ضابطه‌ی آن را بیابیم.

۲. معادله‌ی حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، به صورت $S = -5t^2 + 20t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ (با صرف‌نظر کردن از مقاومت هوا) (سراسری تجربی ـ ۸۲)

۱) -20 ۲) -15 ۳) -10 ۴) -5

پاسخ: **گزینه‌ی(۱).**

در لحظه‌ای که توپ به زمین می‌رسد، $S = 0$. بنابراین $-5t^2 + 20t = 0$ و یا $t = 0$ یا $t = 4$. حال سرعت در این لحظه برابر است با $S'(4)$ و چون $S'(t) = -10t + 20$، پس $S'(4) = -20$.

الگو ۳ هدف برخی پرسش‌ها بررسی مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه است. گاهی هم پرسش با فرض مشتق‌پذیری، تعیین مقدار یک یا چند پارامتر را از ما می‌خواهد. معمولاً بررسی شرط پیوستگی و برابری مشتق چپ و راست تابع به پاسخ پرسش می‌انجامد.

۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(2x+6)^2} & x<1\\ ax+b & x\geq 1\end{cases}$، **مقدار** $f'(1)$ **موجود است. b کدام است؟** (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۰)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

پاسخ: **گزینه‌ی(۴).**

برای وجود $f'(1)$ باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \to \lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{(2x+6)^2}=\lim_{x\to 1^+}(ax+b) \to 4=a+b$$

هم‌چنین باید $f'_+(1)=f'_-(1)$، پس:

$$\left(\sqrt[3]{(2x+6)^2}\right)'_{x=1}=(ax+b)'_{(x=1)} \to 2(\frac{2}{3})(2x+6)^{-\frac{1}{3}}\Big|_{x=1}=a \to \frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=a \to a=\frac{2}{3}$$

بنابراین $b=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$.

الگو ۴ تست‌هایی در آزمون‌ها داده می‌شوند که در ظاهر محاسبه‌ی یک حد را می‌خواهند، اما در واقع حد داده شده در این گونه تست‌ها همان تعریف مشتق تابع در یک نقطه است. معمولاً به کمک روش‌های محاسبه‌ی حد مانند هوپیتال می‌توان این گونه پرسش‌ها را پاسخ داد.

۴. اگر $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$، **حاصل** $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$ **کدام است؟** (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۴)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: **گزینه‌ی(۴).**

با توجه به تعریف مشتق، حد داده شده همان مشتق f در $x=-1$ است، بنابراین:

$$f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2} \to f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} \to f'(-1)=\sqrt[3]{1}+\frac{2(-1-2)}{3\sqrt[3]{-1}}=3$$

الگو ۵ برخی تست‌های این بخش محاسبه‌ی مشتق چپ یا راست یا عبارتی برحسب آن‌ها را از ما می‌خواهند. برای حل این تست‌ها کافی است پس از مشخص کردن وضعیت قدرمطلق‌ها و جزء صحیح‌ها، به کمک تعریف و یا دستورهای مشتق، حاصل عبارت خواسته شده را به‌دست آوریم.

۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|[x]$، **مقدار** $f'_-(0)-f'_+(0)$ **کدام است؟** (سراسری تجربی ـ ۸۷)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: **گزینه‌ی(۳).**

به روشنی تابع در $x=0$ پیوسته است. حال چون $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|[x]-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\times(-1)}{x}=1$ و

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|[x]-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(0)}{x}=0$، پس $f'_-(0)-f'_+(0)=1-0=1$.

۲ روش‌های محاسبه مشتق یک تابع

محاسبه مشتق به‌کمک تعریف گاه بسیار دشوار و حتی غیر ممکن است. *واسه همین مجبوریم روش‌هایی برای محاسبه سریع مشتق بیاموزیم، می‌فهمی مجبوریم! هر سال تو کنکور هم ازش تست میاد، پس مجبوریم!*

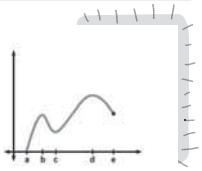
قضیه ۳ روش‌های محاسبه مشتق یک تابع: اگر تابع‌های f و g در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر باشند و c عددی ثابت باشد، آن‌گاه:

۱. مجموع و تفاضل دو تابع نیز در x مشتق‌پذیر است و $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$.

۲. حاصل‌ضرب دو تابع نیز در x مشتق‌پذیر است و $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$.

۳. خارج‌قسمت دو تابع نیز در x مشتق‌پذیر است و $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$.

۴. تابع cf نیز در x مشتق‌پذیر است و $(cf)'(x)=cf'(x)$.



۴ تابع‌های صعودی و نزولی، نقطه‌ی بحرانی و نقطه‌های اکسترمم

بررسی رفتار یک تابع بخش گسترده‌ای از هدف ما در ریاضیات دبیرستانی است. بنابراین یافتن بازه‌های یکنوایی تابع ارزش زیادی دارد. به‌علاوه یافتن بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار یک تابع هم در حل مسائل وابسته به آن تابع اهمیت زیادی دارد، پس بگو! برای همین در کنکور همش ازش تست می‌دهند.

در فصل ۵ با مفهوم صعودی و نزولی بودن یک تابع آشنا شدیم. تشخیص یکنوایی تابع‌ها را به عنوان کاربردی از مشتق می‌آوریم.

قضیه ۵ فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت برای هر $x \in (a,b)$،

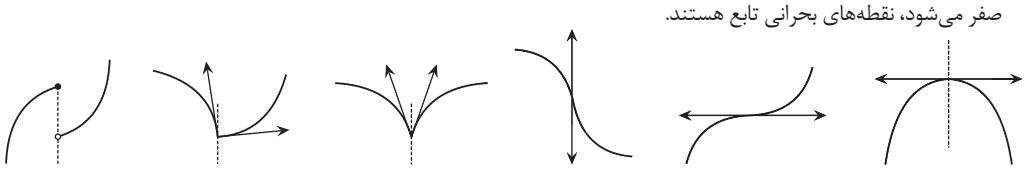
i) اگر $f'(x) > 0$، آن‌گاه f در بازه‌ی $[a,b]$ صعودی‌اکید است.

ii) اگر $f'(x) < 0$، آن‌گاه f در بازه‌ی $[a,b]$ نزولی‌اکید است.

توجه کنید صفر شدن مشتق در نقطه‌های جدا از هم اثری بر یکنوایی تابع ندارد.

نکته ۶ اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ مجانب قائم داشته باشد، آن‌گاه تابع در این بازه یکنوا نیست.

نقطه‌ی بحرانی: نقطه‌ی $a \in D_f$ را یک نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامند، هرگاه بازه باز $I \subseteq D_f$ یافت شود که $a \in I$ و به علاوه $f'(a) = 0$ و یا $f'(a)$ وجود نداشته باشد، به عبارت دیگر نقطه‌هایی که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست و یا آن‌که مشتق تابع در آن‌ها صفر می‌شود، نقطه‌های بحرانی تابع هستند.



(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶)

در شکل بالا نمودار تابع در همسایگی یک نقطه‌ی بحرانی آن کشیده شده است.

به یاد داشته باشیم نقطه‌های ابتدا و انتهای بازه بسته، نقطه‌ی بحرانی نیستند و برای آن‌که یک نقطه بحرانی باشد، باید یکی از حالت‌های زیر رخ دهد.

i) تابع در آن نقطه، ناپیوسته است. (شکل ۱)

ii) مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه برابر نیست. (شکل ۲)

iii) مشتق تابع در آن نقطه بی‌نهایت (نامتناهی) می‌شود. (شکل ۳و۴)

iv) مشتق تابع در آن نقطه صفر می‌شود. (شکل ۵و۶)

نکته ۷ در تابع ثابت و تابع جزءصحیح همه‌ی نقطه‌ها بحرانی هستند.

برای یافتن نقطه‌های بحرانی، نخست از تابع مشتق می‌گیریم، سپس نقطه‌های درونی دامنه‌ی تابع که مشتق در آن‌ها صفر است و یا وجود ندارد را به‌دست می‌آوریم.

ماکزیمم نسبی: می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی $a \in D_f$ ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه بازه‌ی باز $I \subseteq D_f$ یافت شود، به‌گونه‌ای که $a \in I$، و افزون بر آن برای هر $x \in I$، $f(a) \geq f(x)$. در شکل زیر نمودار یک تابع اطراف ماکزیمم نسبی آن کشیده شده است.

مینیمم نسبی: می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی $a \in D_f$ مینیمم نسبی دارد، هرگاه بازه‌ی باز $I \subseteq D_f$ یافت شود، به‌گونه‌ای که $a \in I$ و افزون بر آن برای هر $x \in I$، $f(a) \leq f(x)$. در شکل زیر نمودار یک تابع اطراف مینیمم نسبی آن کشیده شده است.

می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی a اکسترمم نسبی دارد، هرگاه در این نقطه ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

نکته ۸ اگر تابع f در نقطه‌ی a اکسترمم نسبی داشته باشد، در این نقطه تعریف شده است. اما همان‌گونه که در شکل‌های بالا هم دیده می‌شود، درباره‌ی پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع نمی‌توان نظر قطعی داد.

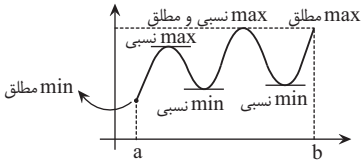
یادداشت برای تابع ثابت همه‌ی نقطه‌ها هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی هستند. برای تابع جزءصحیح نیز نقطه‌های ناصحیح هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی هستند، اما نقطه‌های صحیح فقط ماکزیمم نسبی هستند.

ماکزیمم مطلق: می‌گوییم نقطه‌ی a ماکزیمم مطلق تابع f است، هرگاه برای هر $x \in D_f$، $f(a) \geq f(x)$.

مینیمم مطلق: می‌گوییم نقطه‌ی a مینیمم مطلق تابع f است، هرگاه برای هر $x \in D_f$، $f(a) \leq f(x)$.

تذکر درباره‌ی اکسترمم‌های نسبی و مطلق یک تابع باید به یاد داشته باشیم:

- i) تابع در یک بازه می‌تواند چندین ماکزیمم و مینیمم نسبی داشته باشد، اما مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق، در صورت وجود، یکتاست. دقت کنید «مقدار» ماکزیمم و مینیمم مطلق یکتا است و نه تعداد آن‌ها.
- ii) اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، f در این بازه حتماً ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را می‌گیرد. دقت کنید بسته بودن بازه الزامی است و در بازه‌های نیم بسته یا باز ممکن است این حکم، برقرار نباشد.
- iii) ممکن است اکسترمم‌های نسبی و مطلق در نقطه‌ای برهم منطبق شوند.



قضیه ۶ فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ تعریف شده باشد و در نقطه‌ی $c \in (a,b)$ اکسترمم نسبی داشته باشد. در این صورت اگر f در c مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$.

یادداشت توجه کنید عکس این قضیه همواره برقرار نیست، یعنی اگر f در نقطه‌ی $c \in D_f$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(c) = 0$، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت تابع در c اکسترمم نسبی دارد. برای نمونه تابع $y = x^3$ در مبدأ مختصات چنین است.

نتیجه: از قضیه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت اکسترمم‌های نسبی یک تابع زیرمجموعه‌ای از نقطه‌های بحرانی هستند، هم‌چنین برای یافتن اکسترمم‌های مطلق، نخست مقدار تابع در اکسترمم‌های نسبی و سپس در نقطه‌های آغاز و پایان بازه‌ها (در صورت وجود) را به‌دست می‌آوریم. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این مقدارها (در صورت وجود) به ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع هستند.

قضیه ۷ **(آزمون مشتق اول):** فرض کنید f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر برای $c \in (a,b)$، بدانیم $f'(c) = 0$، آن‌گاه:

- i) وقتی f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، c مینیمم نسبی f است.
- ii) وقتی f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، c ماکزیمم نسبی f است.
- iii) وقتی f' در c تغییر علامت ندهد، آن‌گاه اکسترمم نسبی f نیست.

قضیه ۸ **(آزمون مشتق دوم):** فرض کنید c یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c) = 0$ و برای هر $x \in I$ (I بازه‌ی بازی شامل c است)، f' موجود باشد. در این صورت اگر $f''(c)$ وجود داشته باشد و

- i) $f''(c) > 0$، آن‌گاه f در c مینیمم نسبی دارد.
- ii) $f''(c) < 0$، آن‌گاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

نتیجه: اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $x = c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$ و افزون بر آن نقطه‌ی $(c, f(c))$ روی منحنی است.

نکته ۹ در بسیاری موارد دانستن نمودار تابع و یا رسم نمودار تابع در تشخیص اکسترمم‌ها و نوع آن‌ها راه‌گشاست.

الگو ۱ **تست‌هایی از این بخش مجموعه نقطه‌های بحرانی، تعداد آن‌ها و یا پرسش دیگری درباره‌ی آن‌ها را مورد توجه قرار می‌دهند. برای پاسخ‌گویی کافی است به روش گفته شده نقطه‌ی بحرانی را بیابیم و سپس خواسته‌ی پرسش را به‌دست آوریم.**

۱۷. تعداد نقطه‌های بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه‌ی $[-1,2]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: **گزینه‌ی(۲).**

می‌دانیم تابع در ریشه‌های ساده قدرمطلق، مشتق‌پذیر نیست، بنابراین f در $\{0,\pm1\}$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

$$x^3-x=0 \rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1$$

هم‌چنین از $f'(x)=0$ نتیجه می‌شود $3x^2-1=0$ و یا $x=\frac{\pm1}{\sqrt{3}}$، پس مجموعه نقطه‌های بحرانی $\{0,\pm1,\frac{\pm1}{\sqrt{3}}\}$ که تنها $\{0,1,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ قابل قبول هستند.

الگو ۲ برخی تست‌ها مقدار ماکزیمم یا مینیمم مطلق یک تابع را در یک بازه‌ی بسته از ما می‌خواهند. برای پاسخ‌گویی نخست به روش گفته شده نقطه‌های بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم و سپس به کمک آزمون‌های مشتق نوع آن‌ها را مشخص می‌کنیم. در پایان مقدار تابع در این نقطه‌ها را با مقدار تابع در نقطه‌های انتهایی بازه مقایسه کرده و اکسترمم خواسته شده را به‌دست می‌آوریم.

۱۸. بیشترین مقدار تابع $y=x^3-3x^2-9x+5$، در بازه‌ی $[-2,2]$، کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۲)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

پاسخ: **گزینه‌ی(۲).**

چون تابع چندجمله‌ای است، پس در همه‌ی نقطه‌ها مشتق‌پذیر است و برای یافتن نقطه‌های بحرانی کافیست معادله‌ی $f'(x)=0$ را حل کنیم.

$$f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-6x-9=0 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow (x-3)(x+1)=0 \rightarrow x=3 \text{ یا } -1 \xrightarrow{x\in[-2,2]} x=-1$$

پس:

$$\begin{cases} x=2 \rightarrow y=8-12-18+5=-17 \\ x=-1 \rightarrow y=-1-3+9+5=10 \\ x=-2 \rightarrow y=-8-12+18+5=3 \end{cases}$$

که نشان می‌دهد بیشترین مقدار y برابر ۱۰است.

الگو ۳ تست‌هایی هم هستند که وضعیت یکنوایی یک تابع را در یک بازه یا در دامنه‌اش می‌پرسند. گاهی هم پرسش تعیین مقدار پارامتری را می‌خواهد که برای آن تابع در یک بازه یا دامنه صعودی یا نزولی شود. برای پاسخ‌گویی کافی است، از تابع مشتق بگیریم و به کمک جدول تعیین‌علامت مشتق، وضعیت تابع یا محدوده‌ی پارامتر یا بازه‌ی موردنظر را به‌دست آوریم.

۱۹. با صعود x از $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار کسر $\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ ..... (سراسری تجربی ـ ۷۳)

۱) زیاد می‌شود. ۲) کم می‌شود.

۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. ۴) ابتدا کم می‌شود و سپس زیاد می‌شود.

پاسخ: **گزینه‌ی(۴).**

اگر قرار دهید $u=x^2+x$، آن‌گاه با توجه به روش مشتق‌گیری تابع هموگرافیک داریم:

$$y=\frac{u}{u+1} \rightarrow y'=\frac{(1-0)u'}{(u+1)^2} \rightarrow y'=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \rightarrow$$

x		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
y′	−	0	+	
y	↘	min	↗	

پس تابع ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

الگو ۴ گروهی از تست‌های این بخش نوع اکسترمم نسبی یک تابع را می‌خواهند. در این‌گونه تست‌ها نخست باید نقطه‌های بحرانی را بیابیم و سپس به کمک آزمون‌های مشتق نوع آن‌ها را مشخص کنیم. گاهی هم این پرسش‌ها طول یا عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم نسبی را می‌خواهند.

۲۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-6x^2+8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۰)

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی

۳) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم نسبی

پاسخ: **گزینه‌ی(۱).**

به کمک آزمون مشتق اول داریم:

$$f(x)=x^4-6x^2+8x \rightarrow f'(x)=4x^3-12x+8 \xrightarrow{f'(x)=0} 4(x^3-3x+2)=0$$
$$\rightarrow 4(x-1)^2(x+2)=0 \rightarrow x=1 \text{ یا } x=-2$$

x		-۲		۱	
y′	−	۰	+	۰	−
y	↘	min	↗		↗

بنابراین تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد.

الگو ۵ **دسته‌ای از پرسش‌ها تابعی با یک ضابطه‌ی پارامتری می‌دهند که مختصات طول نقطه‌ی اکسترمم یا عرض نقطه اکسترمم یا اطلاعاتی دیگر از آن در دست است و هدف یافتن پارامترهاست. در پاسخ‌گویی به این پرسش‌ها نکته‌های زیر کارساز است.**

i) مختصات اکسترمم‌های نسبی در تابع صدق می‌کنند.

ii) مشتق تابع به‌ازای طول نقطه‌ی اکسترمم مقداری برابر صفر دارد.

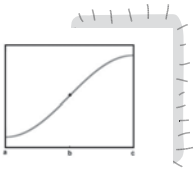
۲۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a\cos 2x+b\sin x$، اگر نقطه‌ی مینیمم آن در $(\frac{\pi}{6},-3)$ باشد، a کدام است؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۹)*

۱) -4 ۲) -2 ۳) -1 ۴) 1

پاسخ: **گزینه‌ی(۲).**

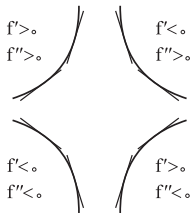
همان‌گونه‌که گفته شد، چون نقطه‌ی داده شده مینیمم تابع است، پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند. یعنی $f(\frac{\pi}{6})=-3$، هم‌چنین $f'(\frac{\pi}{6})=0$. بنابراین چون $f'(x)=-2a\sin 2x+b\cos x$، پس:

$$\begin{cases} a\cos\frac{\pi}{3}+b\sin\frac{\pi}{6}=-3 \\ -2a\sin\frac{\pi}{3}+b\cos\frac{\pi}{6}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{2}=-3 \\ -a\sqrt{3}+\frac{b\sqrt{3}}{2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=-6 \\ b=2a \end{cases} \rightarrow a=-2$$



۵ جهت تقعر، نقطه‌ی عطف و رسم نمودار منحنی

گرچه زیاد یا کم شدن مقدار یک تابع را بررسی کردیم، اما نوع زیاد یا کم شدن تابع که آن را تقعر یک تابع (ازنظر فیزیکی شتاب) می‌نامند نیز مطلب مهمی است که به مفهوم نقطه عطف می‌انجامد. در پایان هم با آنچه تا اینجا آموخته‌ایم شکل تابع را می‌کشیم. اونقدر میشه از این بخش تست داد که هر سال ۲ تست روی شاخشه! اصلاً نمیشه ازش گذشت!



جهت تقعر: می‌گوییم تقعر منحنی تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی باز I رو به بالاست، هرگاه f در I مشتق‌پذیر باشد و در همه‌ی نقطه‌های این بازه خط مماس بر منحنی زیر منحنی باشد. به شکل مشابه می‌گوییم تقعر منحنی تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی باز I رو به پایین است، هرگاه f در I مشتق‌پذیر باشد و در همه‌ی نقطه‌های این بازه خط مماس بر منحنی بالای منحنی باشد.

رابطه‌ی تقعر و مشتق دوم تابع: فرض کنید هنگامی‌که از چپ به راست روی منحنی حرکت می‌کنیم، شیب خط‌های مماس بر منحنی زیاد شود، در این صورت تابع f' صعودی‌اکید است و درنتیجه مشتق آن یعنی f'' مثبت خواهد بود. در این حالت تقعر f رو به بالا خواهد بود. حال فرض کنید هنگامی‌که از چپ به راست روی منحنی حرکت می‌کنیم، شیب خط‌های مماس بر منحنی کم شود، در این صورت تابع f' نزولی‌اکید است و درنتیجه مشتق آن یعنی f'' منفی خواهد بود. در این حالت تقعر f رو به پایین است.

قضیه ۹ فرض کنید تابع f برای هر x در بازه‌ی باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

i) اگر برای هر $x\in I$، $f''(x)>0$، آن‌گاه نمودار f روی I تقعری رو به بالا دارد.

ii) اگر برای هر $x\in I$، $f''(x)<0$، آن‌گاه نمودار f روی I تقعری رو به پایین دارد.

آزمونک

۱. نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدأ مختصات است، آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه‌ی $x=7$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۴)

۱) $\frac{15}{16}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲. اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۲)

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۳. اگر $f(x)=x|\sin \pi x|$، مقدار $f'_+(1)$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۷)

۱) $-\pi$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) π

۴. اگر $g(x)=\sqrt{2x}$ و $f(x)=x^2-x$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x)-f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۵. اگر $f(0)=0$ و $f(x)=\sin(4x-f(x))$، آن‌گاه مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۷۱)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۶. اندازه‌ی مشتق تابع $y=\ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر آن، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۷. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{3+2\cos\frac{\pi}{x}}$ به‌ازای $x=3$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۵)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$، مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹. اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$، حاصل $f'(g(x))\cdot g'(x)$، کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

۱۰. خط مماس بر منحنی به معادله $y=x^3+3x^2+1$، بر خط به معادله‌ی $x-3y=2$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟ (سراسری تجربی ـ ۸۹)

۱) $(1,3)$ ۲) $(1,4)$ ۳) $(2,-6)$ ۴) $(2,-4)$

۱۱. به‌ازای کدام مقدار a، نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=ax^2+4x$، برهم مماسند؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۱)

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۱۲. عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y^2=y\ln(x^2-3)+2x$، در نقطه‌ی $(2,-2)$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۰)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳. اگر $f(x)=\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{e^x+1}$، آن‌گاه $f'(x)-g'(x)$ کدام است؟ (آزاد پزشکی ـ ۷۷)

۱) e^x ۲) e^{2x} ۳) e^{-x} ۴) $\frac{1}{e^x+1}$

۱۴. نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۸۵)

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

پاسخ‌نامه

۱. (۱) فاصله نقطه $M(x,y)$ از مبدا برابر $T=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x+8}$ است، بنابراین:

$$T'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}}\to T'(r)=\frac{2(7)+1}{2\sqrt{7^2+7+8}}=\frac{15}{16}$$

۲. (۱) با کمی دقت دیده می‌شود که حد خواسته شده همان مشتق f در $x=-1$ است. از سوی دیگر به کمک تجزیه به‌دست می‌آید $f(x)=(x+1)(x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ که نشان می‌دهد تابع دارای عامل صفرکننده است، پس با توجه به آن چه در درس‌نامه گفته شد، کافی است تنها از $x+1$ مشتق بگیریم و سپس $x=-1$ را جای‌گذاری کنیم، یعنی:

$$f'(-1)=1\times(-1-2)\sqrt[3]{(-1)^2-7(-1)}=-3\sqrt[3]{8}=-6$$

۳. (۴) چون برای $x>1$، داریم: $\pi x>\pi$، پس $|\sin\pi x|=-\sin\pi x$ و در نتیجه در همسایگی راست ۱ می‌توان گفت $f(x)=-x\sin\pi x$ بنابراین:

$$\xrightarrow{x>1} f'(x)=-\sin\pi x-\pi x\cos\pi x\to f'_+(1)=-\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi$$

۴. (۴) با کمی دقت می‌توان گفت حد خواسته شده همان مشتق fg در $x=2$ است، پس:

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(x^2-x)\sqrt{2x}\to(fg)'(x)=(2x-1)\sqrt{2x}+\frac{\cancel{2}(x^2-x)}{\cancel{2}\sqrt{2x}}\to(fg)'(2)=(2\times2-1)\sqrt{2(2)}+\frac{2^2-2}{\sqrt{2(2)}}=7$$

۵. (۴) به کمک دستورهای مشتق و مشتق تابع مرکب می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sin(4x-f(x))\to f'(x)=(4-f'(x))\cos(4x-f(x))\to f'(0)=(4-f'(0))\cos(0-f(0))$$
$$\xrightarrow{f(0)=0} f'(0)=(4-f'(0))\cancelto{1}{\cos 0}\to 2f'(0)=4\to f'(0)=2$$

۶. (۴) نخست به کمک ویژگی‌های لگاریتم عبارت را ساده می‌کنیم:

$$y=\ln e^{\sqrt{\sin x}}\to y=\sqrt{\sin x}\ln e\to y=\sqrt{\sin x}$$

حال به کمک دستورهای مشتق‌گیری داریم:

$$y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\to y'(\frac{\pi}{6})=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

۷. (۱) به کمک دستورهای مشتق می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\times\frac{-2(\frac{-\pi}{x^2})\sin\frac{\pi}{x}}{2\sqrt{3+2\cos\frac{\pi}{x}}}\to f'(3)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\times\frac{\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}}{2\sqrt{3+2\cos\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\times\frac{\frac{2\pi\sqrt{3}}{18}}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{12}$$

۸. (۳) نخست باید تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم:

$$x>1\to f(x)=x\sqrt{x}+x-1\to f'_+(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+1\to f'_+(1)=\frac{3}{2}\sqrt{1}+1=\frac{5}{2}$$
$$x<1\to f(x)=x\sqrt{x}-x+1\to f'_-(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}-1\to f'_-(1)=\frac{3}{2}\sqrt{1}-1=\frac{1}{2}$$

به این ترتیب $f'_+(1)+3f'_-(1)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$

۹. (۲) بنا به روش محاسبه مشتق تابع مرکب می‌توان نوشت: $f'(g(x)).g'(x) = (f(g(x)))'$ پس عبارت خواسته شده مشتق fog است، بنابراین:

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1+(\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$$

بنابراین $f(g(x)).g'(x) = (f(g(x)))' = \frac{3}{x^2}$

---

۱۰. (۳) چون خط مماس بر خط $x - 3y = 2$ عمود است، پس شیب آن -3 است، یعنی $y' = -3$ و یا :

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \to y' = 3x^2 + 6x \to 3x^2 + 6x = -3 \to x^2 + 2x + 1 = 0 \to (x+1)^2 = 0$$

که نشان می‌دهد طول نقطه تماس $x = -1$ است و در نتیجه عرض آن برابر $y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3$ است. به این ترتیب معادله مماس به شکل زیر خواهد شد:

$$y - 3 = -3(x - (-1)) \to y = -3x$$

که به روشنی از نقطه $(2,-6)$ می‌گذرد.

---

۱۱. (۲) برای آن که دو منحنی بر هم مماس باشند، باید معادله برخورد آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} g(x) = ax^2 + 4x \\ f(x) = x^2 + 1 \end{cases} \xrightarrow{f(x)=g(x)} ax^2 + 4x = x^2 + 1 \to (a-1)x^2 + 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 16 - 4(-1)(a-1) = 0 \to 4a = -12 \to a = -3$$

---

۱۲. (۱) به کمک دستور محاسبه مشتق ضمنی می‌توان نوشت:

$$y^2 = y\ln(x^2 - 3) + 2x \to 2yy' = y'\ln(x^2 - 3) + y(\frac{2x}{x^2 - 3}) + 2$$

$$\xrightarrow[y=-2]{x=2} 2(-2)y' = \underbrace{y'\ln(2^2 - 3)}_{0} + (-2)(\frac{2\times 2}{2^2 - 3}) + 2 \to -4y' = -6 \to y' = \frac{3}{2}$$

بنابراین شیب خط قائم برابر $m' = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}$ است. پس معادله قائم برابراست با:

$$y - (-2) = \frac{-2}{3}(x - 2) \to y = \frac{-2}{3}x - \frac{2}{3}$$

که عرض از مبدأ آن $\frac{-2}{3}$ خواهد بود.

---

۱۳. (۱) چون $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$ ، پس:

$$f(x) - g(x) = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} + e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^x$$

و در نتیجه $f'(x) - g'(x) = e^x$.

---

۱۴. (۴) چون چندجمله‌ای‌ها در همه نقطه‌ها مشتق‌پذیرند، پس تنها نقطه‌های بحرانی تابع ریشه‌های معادله $y' = 0$ هستند، بنابراین:

$$f(x) = x^2(x-2)^2 \to f'(x) = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 2x(x-2)(x-2+x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 2x(x-2)(2x-2) = 0 \to x = 0 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1$$

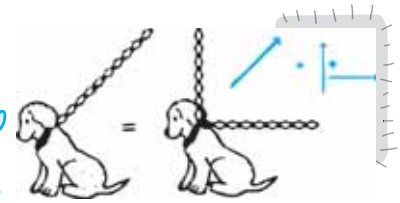
پس رأس‌های مثلث نقطه‌های $A:(0,0)$ ، $B:(1,1)$ و $C:(2,0)$ هستند که به روشنی متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

---

۱۵. (۲) نقطه‌های بحرانی تابع که جواب‌های معادله $y' = 0$ هستند، را به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \to y' = x^3 - 3x^2 - 4x \xrightarrow{y'=0} x(x^2 - 3x - 4) = 0 \to x(x-4)(x+1) = 0 \to x = 0 \text{ یا } -1 \text{ یا } 4$$

حال چون $y(0) = 0$ ، $y(-1) = \frac{-3}{4}$ و $y(4) = -32$ پس می‌نیمم تابع -32 است.



۲ انتگرال نامعین (تابع اولیه)

انتگرال به‌عنوان پادمشتق و یافتن تابعی که مشتق آن را داریم یکی از خواسته‌های دانشمندان در طول تاریخ است. فرمول‌ها و روش‌های مقدماتی انجام این کار را در این بخش می‌آموزیم که از پس تست‌های آزمون بربیاییم. *از اسمش نترس، جداً دشواری نداره!*

در واحد پیش تابع اولیه را تعریف کردیم. با توجه به آن‌چه گفته شد، هر تابع پیوسته یک تابع اولیه دارد که همان تابع مساحت است. حال چون برای مقدار ثابت C رابطه‌ی $(A(x)+C)' = A'(x) = f(x)$ برقرار است، پس یک تابع، نامتناهی تابع اولیه دارد که از افزودن مقدار ثابت به تابع اولیه دیگر به‌دست می‌آید و در واقع یافتن تابع اولیه عکس عمل مشتق‌گیری است. به شکل نمادین تابع اولیه f را با نماد $\int f(x)dx$ نشان می‌دهند و آن را انتگرال نامعین تابع f می‌نامند. بنابراین:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

ویژگی‌های انتگرال معین: فرض کنید f و g تابع‌هایی پیوسته و $k \in \mathbb{R}$ عددی ثابت باشد، در این صورت:

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

ii) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

روش‌های محاسبه‌ی انتگرال نامعین: با توجه به آن‌چه گفته شد، محاسبه‌ی انتگرال نامعین تابع f، هم‌ارز یافتن تابعی مانند F است، به‌گونه‌ای که $F' = f$، یعنی مشتق تابعی را داریم و خود آن تابع را می‌خواهیم. به کمک فرمول‌های زیر می‌توانیم عمل انتگرال‌گیری را به شکل سریع‌تر و ساده‌تری انجام دهیم.

i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$

ii) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

iii) $\int \sin(u)du = -\cos(u) + C$

iv) $\int \cos(u)du = \sin(u) + C$

v) $\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

vi) $\int (1+\cot^2 ax)dx = \frac{-1}{a}\cot ax + C$

vii) $\int e^u du = e^u + C$

یادآوری می‌کنیم که در فرمول‌های بالا، u تابعی از x است، بنابراین گاهی در پرسش‌ها به جای du از $u'dx$ استفاده می‌کنند.

یافتن مقدار C در انتگرال نامعین: گاهی یک تابع اولیه با شرایط ویژه‌ای موردنظر است، این شرایط ویژه را داده‌های اولیه می‌نامند. به کمک داده‌های اولیه و جایگذاری در پرسش مقدار C موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه **(دومین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال):** اگر F یک تابع اولیه‌ی دلخواه برای تابع پیوسته f باشد، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

با توجه به این قضیه برای محاسبه‌ی انتگرال‌های معین (به ویژه انتگرال‌هایی که مساحت محدود به یک منحنی را می‌خواهند) می‌توان از تابع اولیه کمک گرفت. برای نمونه مساحت زیر نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ از $x = 1$ تا $x = 4$ برابر است با:

$$S = \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^4 x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^4 = \frac{-1}{x}\Big|_1^4 = \frac{-1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}$$

الگو ۱ گروهی از تست‌های این بخش به شکل مستقیم محاسبه‌ی یک انتگرال نامعین را می‌خواهند. و برای حل این گونه پرسش‌ها کافی است نخست عبارت را تا جای ممکن ساده کنیم و سپس به کمک فرمول‌های انتگرال، محاسبه را انجام دهیم.

۴. حاصل $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۶)

۱) $x+\sin x+C$ ۲) $x-\sin x+C$ ۳) $-x+\cos x+C$ ۴) $x-\cos x+C$

پاسخ: **گزینه‌ی(۱).**

همان‌گونه که گفته شد، نخست عبارت را ساده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx=\int (1+\cos x)\,dx=x+\sin x+C$$

الگو ۲ گاهی با یک انتگرال نامعین روبه‌رو هستیم که تابع اولیه‌ی آن محاسبه شده است اما در تابع اولیه پارامترهایی هست که مقدار آن‌ها خواسته‌ی پرسش است. برای حل این پرسش‌ها باید انتگرال نامعین متناظر را محاسبه کنیم و با مقایسه‌ی با تابع اولیه داده شده پارامترها را بیابیم.

۵. اگر $\int \frac{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,f(x)+c$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۷۷)

۱) $2-2x$ ۲) $2-x$ ۳) $1+2x$ ۴) $1+x$

پاسخ: **گزینه‌ی(۱).**

نخست انتگرال نامعین را محاسبه می‌کنیم:

$$\int \frac{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{1-3x}{\sqrt{x}}dx=\int (x^{-\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+C=\sqrt{x}(2-2x)+C$$

حال از مقایسه با تابع اولیه‌ی داده شده به‌دست می‌آوریم $f(x)=2-2x$.

الگو ۳ برخی تست‌ها ضابطه‌ی مشتق تابعی را داده و مقدار تابع در یک نقطه و یا حاصل عبارتی برحسب خود تابع را از ما می‌خواهند. در این دسته پرسش‌ها نخست به کمک انتگرال نامعین یک تابع اولیه برای تابع می‌یابیم و سپس به کمک داده‌های اولیه، مقدار ثابت C را می‌یابیم. در پایان خواسته‌ی پرسش را به‌دست می‌آوریم.

۶. اگر $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$ و $f(\frac{\pi}{4})=0$، آن‌گاه $f(\frac{3\pi}{4})$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۷۷)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: **گزینه‌ی(۳).**

با توجه به تعریف انتگرال نامعین داریم:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}dx=\int (\frac{1}{\tan^2 x}+1)\,dx=\int (\cot^2 x+1)\,dx=-\cot x+C$$

حال چون $f(\frac{\pi}{4})=0$، پس $-\cot\frac{\pi}{4}+C=0$ و یا $C=1$. بنابراین $f(x)=-\cot x+1$ و درنتیجه $f(\frac{3\pi}{4})=-\cot(\frac{3\pi}{4})+1=2$.

الگو ۴ در برخی تست‌ها محاسبه‌ی یک انتگرال معین موردنظر است که به کمک مساحت و تعریف انتگرال معین محاسبه‌پذیر نیست، بلکه باید با استفاده از قضیه‌ی اساسی دوم آن‌ها را محاسبه کنیم.

۷. حاصل $\int_{e}^{e^{2}} \frac{dx}{x \ln x}$، کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۷۵)

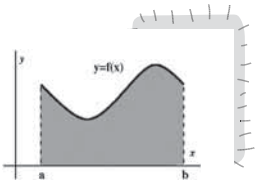
۱) $\log_{2}^{e}$ ۲) $\log_{e}^{2}$ ۳) $\log_{e}^{2}-1$ ۴) $\log_{2}^{e}-1$

پاسخ: **گزینه‌ی (۲).**

با کمی دقت می‌توان گفت اگر $u=\ln x$، آن‌گاه $u'=\frac{1}{x}$ و درنتیجه $\int \frac{dx}{x \ln x}=\int \frac{u'dx}{u}=\ln(u)+C$. بنابراین:

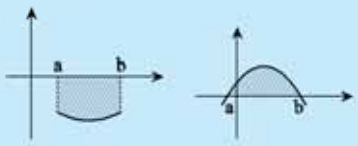
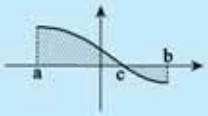
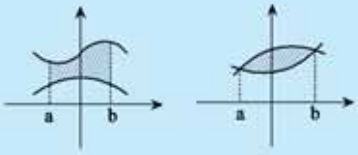
$$\int_{e}^{e^{2}} \frac{dx}{x \ln x}=\ln(\ln(x))\Big|_{e}^{e^{2}}=\ln(\ln e^{2})-\ln(\ln e)=\ln(2)-\ln(1)=\log_{e}^{2}$$

۳ محاسبه‌ی سطح زیر نمودار



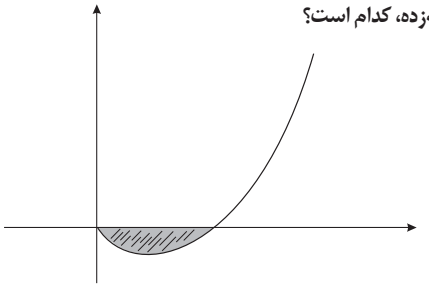
آنچه در بخش ۱ دیدیم مساحت علامت‌دار بود، الان می‌خواهیم مساحت واقعی (که همیشه مثبت بود!) را بررسی کنیم. در واقع به کمک دو بخش قبلی می‌خواهیم واقعاً مساحت به‌دست آوریم! چون از دو بخش قبلی در حل تست‌هاش استفاده میشه، برای تست دادن عالیه!

گرچه انتگرال معین به معنی سطح زیر منحنی است، اما در انتگرال معین، مساحت یک کمیت علامت‌دار است و با مساحت به مفهوم هندسی متفاوت است. بنابراین برای محاسبه‌ی سطح محصور با یکی از حالت‌های جدول زیر روبه‌رو هستیم:

$S=\left\lvert\int_{a}^{b} f(x)dx\right\rvert$		سطح محصور بین یک منحنی و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$.
$S=\left\lvert\int_{a}^{c} f(x)dx\right\rvert+\left\lvert\int_{c}^{b} f(x)dx\right\rvert$		سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$، هنگامی‌که f محور xها را در $c\in[a,b]$ قطع کند.
$S=\left\lvert\int_{a}^{b} (f(x)-g(x))dx\right\rvert$		سطح محصور بین دو منحنی در بازه $[a,b]$ و یا بین دو نقطه برخورد دو منحنی

الگو ۱ در برخی تست‌ها نموداری داده می‌شود و مقدار مساحت یک ناحیه‌ی هاشورخورده را می‌خواهند. برای پاسخ‌گویی به این پرسش‌ها نخست به کمک جدول بالا انتگرال موردنظر را تشکیل می‌دهیم و سپس با محاسبه‌ی انتگرال نامعین متناظر و قضیه‌ی اساسی دوم مقدار مساحت را می‌یابیم.

۸. با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x-\sqrt{x}$، مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده، کدام است؟



۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: **گزینه‌ی(۱).**

نخست با حل معادله $y=0$ نقطه‌های برخورد منحنی با محور x ها را می‌یابیم:

$$y=0 \Rightarrow x-\sqrt{x}=0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0\\ \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1\end{cases}$$

حال مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده برابر است با:

$$\left|\int_0^1 (x-\sqrt{x})\,dx\right|=\left|\int_0^1 (x-x^{\frac{1}{2}})\,dx\right|=\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right|=\left|\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1\right|=\left|(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})-0\right|=\frac{1}{6}$$

الگو ۲ گاهی هدف پرسش یافتن ناحیه‌ی محصور بین دو منحنی است که معادله‌ی آن‌ها داده شده، اما نمودار آن‌ها و حدود انتگرال‌گیری داده نشده است. در این‌گونه پرسش‌ها باید حدود انتگرال‌گیری و حالتی از جدول که مورد استفاده قرار می‌گیرد را از روی نمودار دو تابع و یا به کمک شناختی که از تابع‌ها داریم، مشخص کنیم.

۹. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=(x-3)^2$ و $y=-3x+9$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ـ ۷۷)*

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

پاسخ: **گزینه‌ی(۲).**

برای یافتن حدود انتگرال‌گیری باید دو منحنی را قطع دهیم، پس:

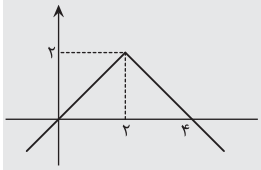
$$\begin{cases}y=-3x+9\\ y=(x-3)^2\end{cases} \rightarrow (x-3)^2=-3x+9 \rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x=0 \text{ یا } 3$$

بنابراین به کمک حالت سوم جدول می‌توان نوشت:

$$S=\left|\int_0^3 ((x-3)^2-(-3x+9))\,dx\right|=\left|\int_0^3 (x^2-3x)\,dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\Big|_0^3\right|=\left|(9-\frac{27}{2})-(0-0)\right|=4/5$$

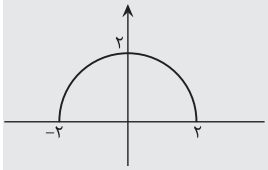
آزمونک

۱. با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_{0}^{4}(2-|x-2|)\,dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۲)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

۲. با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۲)



۱) $2\pi-2$
۲) $\pi+2$
۳) 2π
۴) 4π

۳. حاصل $\int_{-2}^{2}(2-[x])\,dx$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴. اگر $\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=\sqrt[3]{x}\,f(x)+C$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۰)

۱) $x-4$ ۲) $x-2$ ۳) $2x-1$ ۴) $4x-1$

۵. ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در هر نقطه $M:(x,y)$ واقع بر آن، مربع معکوس طول آن نقطه است. اگر نمودار تابع از نقطه‌ی $(1,1)$ بگذرد، $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۷۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

۶. با شرط $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$، حاصل $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۲)

۱) $\sin x+\cos x+C$ ۲) $\sin x-\cos x+C$ ۳) $-\sin x+\cos x+C$ ۴) $-\sin x-\cos x+C$

۷. با شرط $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$، حاصل $\int\sqrt{1+\tan^2 x}\,\sin 2x\,dx$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۲)

۱) $-2\cos x+C$ ۲) $-2\sin x+C$ ۳) $2\cos x+C$ ۴) $2\sin x+C$

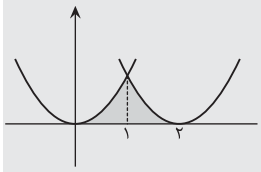
۸. اگر $f(x)=\int_{2}^{2x}\frac{t+1}{t}dt$، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=1$ واقع بر آن کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۱)

۱) $x-2y=1$ ۲) $x+2y=1$ ۳) $x+3y=1$ ۴) $x-3y=1$

۹. مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x & -2\le x\le 0\\ x^2 & 0\le x\le 3\end{cases}$، محور x ها و دو خط $x=-2$ و $x=3$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

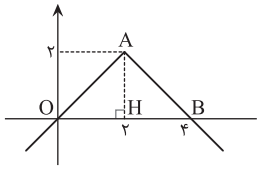
۱۰. مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی به معادلات $y=x^2$ و $y=(x-2)^2$ و محور x ها کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۵)



۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) ۱
۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ‌نامه

۱. (۴) با توجه به آن‌که در شکل، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=2-|x-2|$ داده شده است و به کمک تعریف انتگرال، می‌توان گفت $\int_0^4 (2-|x-2|)\,dx$ برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ است. بنابراین: $\int_0^4 (2-|x-2|)\,dx = S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{1}{2}AH\times OB = \frac{1}{2}\times 2\times 4 = 4$



---

۲. (۳) می‌دانیم $x^2+y^2=4$ دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۲ است. حال داریم $y^2=4-x^2$ و یا $y=\sqrt{4-x^2}$. بنابراین با توجه به تعریف انتگرال، حاصل عبارت خواسته شده برابر مساحت نیم دایره داده شده در شکل است، پس:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 2\pi$$

---

۳. (۳) به کمک ویژگی‌های جزء صحیح می‌توان نوشت:

$$\int_{-2}^{2}(2-[x])\,dx = \int_{-2}^{2}2\,dx - \int_{-2}^{2}[x]\,dx = 2(2-(-2)) - \int_{-2}^{-1}(-2)\,dx - \int_{-1}^{0}(-1)\,dx - \int_{0}^{1}0\,dx - \int_{1}^{2}1\,dx$$
$$= 8+2(-1-(-2))+1(0-(-1))-0(1-0)-1(2-1) = 8+2+1-1 = 10$$

---

۴. (۱) به کمک محاسبه‌های جبری و روش محاسبه‌ی انتگرال نامعین می‌توان نوشت:

$$\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \frac{4}{3}\int\frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \frac{4}{3}\int\left(\frac{x}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx = \frac{4}{3}\int\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$$
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{2}{3}}x^{1-\frac{2}{3}}\right)+C = x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+C = x^{\frac{1}{3}}(x-4)+C = \sqrt[3]{x}\,(x-4)+C$$

بنابراین $f(x)=x-4$.

---

۵. (۲) چون ضریب زاویه (شیب) خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، همان مشتق تابع در آن نقطه است، پس:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2} \rightarrow dy=\frac{1}{x^2}dx \rightarrow \int dy=\int\frac{1}{x^2}dx \rightarrow y=\int x^{-2}dx \rightarrow y=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C$$

پس $y=\frac{-1}{x}+C$. حال چون منحنی از (۱,۱) می‌گذرد، پس $1=\frac{-1}{1}+C$ و یا $C=2$. بنابراین $y=\frac{-1}{x}+2$ و درنتیجه

$f(\frac{1}{3})=\frac{-1}{\frac{1}{3}}+2=-1$.

---

۶. (۲) می‌دانیم $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$، پس:

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx = \int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\,dx = \int\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}\,dx = \int(\cos x+\sin x)\,dx = \sin x-\cos x+C$$

۷. (۳) چون $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$، پس $\sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{-1}{\cos x}$. حال داریم:

$$\int \sqrt{1+\tan^2 x}\,\sin 2x\,dx = \int \frac{-1}{\cos x} \times 2\sin x\cos x\,dx = -2\int \sin x\,dx = 2\cos x + C$$

---

۸. (۳) نخست به کمک قضیه‌ی اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال شیب خط مماس و پس از آن شیب خط قائم را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که بنابر قضیه اساسی اول اگر $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$، آن‌گاه $F'(x) = f(x)$ اما در صورتی که $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$، آن‌گاه $G'(x) = g'(x).f(x)$. بنابراین:

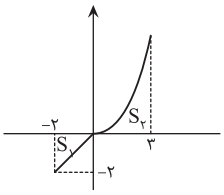
$$f(x) = \int_2^{2x} \frac{t+1}{t}dt \rightarrow f'(x) = 2(\frac{2x+1}{2x}) \rightarrow f'(1) = 2(\frac{3}{2}) = 3 \rightarrow \text{شیب قائم} = -\frac{1}{3}$$

از سوی دیگر عرض نقطه‌ی موردنظر برابر $f(1) = \int_2^2 \frac{t+1}{t}dt = 0$ است، پس معادله‌ی خط قائم به شکل زیر خواهد بود:

$$y - 0 = \frac{-1}{3}(x-1) \rightarrow 3y = -x+1 \rightarrow 3y + x = 1$$

---

۹. (۴) اگر نمودار تابع در بازه‌ی موردنظر را رسم کنیم، می‌توان نوشت:



$$\int_{-2}^{3}|f(x)|dx = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{0} x\,dx\right| + \int_{0}^{3} x^2 dx$$

$$= \left|\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}\right| + \left|\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{3}\right| = \left|(0-\frac{4}{2})\right| + \left|(\frac{27}{3}-0)\right| = 11$$

---

۱۰. (۲) با توجه به نمودار داده شده و تقارن شکل کافی است سطح محصور به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2$ و محور x ها را در بازه‌ی $[0,1]$ به‌دست آورده، دو برابر کنیم. پس $S = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2(\frac{1}{3}-0) = \frac{2}{3}$.

---

۱۱. (۴) باید نخستین نقطه‌ی برخورد منحنی با محور x ها را بیابیم:

$$f(x) = 0 \rightarrow \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

پس مساحت موردنظر برابر است با:

$$S = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\,dx\right| = (-\cos x + \sin x\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (-1+0) = \sqrt{2}+1$$

---

۱۲. (۴) با توجه به وجود قدرمطلق و جزء صحیح بازه‌بندی مناسب انجام می‌دهیم:

$$\int_{-2}^{1}(|x| - [x])dx = \int_{-2}^{-1}(|x|-[x])dx + \int_{-1}^{0}(|x|-[x])\,dx + \int_{0}^{1}(|x|-[x])dx$$

$$= \int_{-2}^{-1}(-x+2)dx + \int_{-1}^{0}(-x+1)dx + \int_{0}^{1} x dx = (\frac{-x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^{-1} + (\frac{-x^2}{2} + x\Big|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} =$$

$$(\frac{-1}{2} - 2 + 2 + 4) + (0 + \frac{1}{2} + 1) + (\frac{1}{2} - 0) = \frac{11}{2} = 5/5$$