آزمون ۶۱: مشتق ـ تابع مشتق ـ مشتق تابع مرکب

۲۵ دقیقه

۱. تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & |x|\geq 1 \\ -2x & |x|<1 \end{cases}$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ به‌ترتیب چه وضعی دارد؟

۱) مشتق‌پذیر ـ مشتق‌پذیر ۲) مشتق‌پذیر ـ مشتق‌ناپذیر ۳) مشتق‌ناپذیر ـ مشتق‌پذیر ۴) مشتق‌ناپذیر ـ مشتق‌ناپذیر

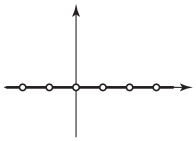
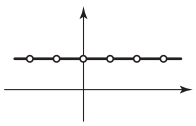
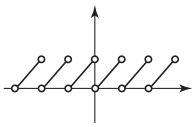
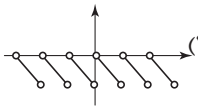
۲. در تابع $f(x)=x^3[x^2-3x+7]$ کدام درست است؟

۱) تابع در $x=1$ فقط مشتق راست دارد و $f'_+(1)=15$ است.
۲) تابع در $x=1$ فقط مشتق چپ دارد و $f'_-(1)=15$ است.
۳) تابع در $x=1$ فقط مشتق راست دارد و $f'_+(1)=12$ است.
۴) تابع در $x=1$ فقط مشتق چپ دارد و $f'_-(1)=12$ است.

۳. تابع $f(x)=|x^2-4|x|-5|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴. نمودار تابع مشتق تابع $f(x)=x-[x]$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵. مقدار مشتق تابع $f(x)=\cos(\sin x)+\sin(|\cos x|)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۰ ۴) وجود ندارد.

۶. در تابع $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & x\geq 1 \\ x^2+ax+b & x<1 \end{cases}$، مقدار $f'(1)$ موجود است. $f(1-\sqrt{2})$ کدام است؟ *(ریاضی خارج از کشور ـ ۹۲)*

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2-2\sqrt{2}$ ۴) $3-2\sqrt{2}$

۷. در تابع $y=|x-1|+3|x-2|$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)+f(2+h^2)-4}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) -7 ۳) -1 ۴) ۲

۸. دو تابع $f(x)=3x+|x|$ و $g(x)=\frac{3}{4}x+a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات، مشتق‌پذیر است؟ *(ریاضی خارج از کشور ـ ۹۳)*

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

۹. اگر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^{2n}-x^n}$ در نقطه‌ی $x=0$ دارای مشتق باشد، حداقل مقدار عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. اگر $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ باشد، حاصل $f'(1)+f'(2)+f'(3)$ کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) -108 ۳) ۸ ۴) -8

۱۱. اگر $(f(\sin x))'=\cos x\cos 2x$ باشد، $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۲. اگر $h(x)=fog(x)$ و $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ و تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، $h'(0)$ برابر کدام است؟

۱) $f'(3)$ ۲) $-f'(3)$ ۳) $-2f'(3)$ ۴) 0

۱۳. در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x<0 \\ x[x+1] & x\geq 0 \end{cases}$ مقدار $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -3

۱۴. مقدار مشتق $y=\ln(\cos^2\sqrt{x})$ به‌ازای $x=\frac{\pi^2}{16}$ چیست؟

۱) $\frac{4}{\pi}$ ۲) $-\frac{4}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) $-\frac{2}{\pi}$

۱۵. در چند نقطه از منحنی $y=e^{x^3-2x}$ ، مماس موازی محور x هاست؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون ۶۲: مشتق ـ تابع مشتق ـ مشتق تابع مرکب

۲۵ دقیقه

۱. تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+1 & x\geq 0 \\ x^2-x & x<0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$:

۱) فقط مشتق راست دارد. ۲) فقط مشتق چپ دارد. ۳) مشتق راست و چپ دارد. ۴) مشتق راست و چپ ندارد.

۲. اگر $\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)f(y)$ و $f(0)\neq 0$ و $f'(0)=2$ باشد، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

۱) $f(0)$ ۲) $2f(0)$ ۳) $f(3)$ ۴) $2f(3)$

۳. اگر $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ باشد، $D_{f'}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{3\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,3\}$

۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{1+x} & x>0 \\ \frac{b+x}{1-x} & x\leq 0 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵. اگر $f(x)=x^x\ ;\ x>0$ باشد $f'(x)$ کدام است؟

۱) x^{x-1} ۲) $x^x\ln x$ ۳) $x^x(1+\ln x)$ ۴) $x^x(x+\ln x)$

۶. در تابع $f(x)=|x^2-\pi^2|\sin x$ ، اگر $D_{f'}=\mathbb{R}-A$ باشد، مجموعه‌ی A چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۷. اگر تابع $f(x)=(x^2-ax+b)[x]$ در نقطه‌ی $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۸. اگر $f(3x-2)=g(x+f(2x))$ و $f(4)=g'(5)=3$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟ (توابع g,f مشتق‌پذیرند)

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۴ ۴) ۳

۹. مشتق راست تابع $f(x)=x^2[x^2-3x+1]$ در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟

۱) -4 ۲) ۴ ۳) -8 ۴) ۸

۱۰. اگر $f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f'_+(0)-f'_-(0)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۱۱. اگر $f(x)=x+(x-1)\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ باشد، مقدار $f'(1)-f(1)$ چیست؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $-\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{\pi}{4}$

۱۲. اگر $f(x)=\frac{a\sin x}{1-\cos x}$ و $f'(\frac{\pi}{2})=1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۳. تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=0$:

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.
۲) پیوسته است و مشتق‌پذیر نیست.
۳) پیوسته نیست و مشتق‌پذیر است.
۴) پیوسته نیست و مشتق‌پذیر نیست.

۱۴. اگر $f(x)=x^3+2x$ و $g(x)=x^2+x$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(fog)(1+h)-12}{h}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۱۵. مشتق کدام تابع برابر $\tan x$ است؟

۱) $\ln|\sin x|$ ۲) $\ln|\cos x|$ ۳) $\ln|\frac{1}{\sin x}|$ ۴) $\ln|\frac{1}{\cos x}|$

آزمون ۶۳: مشتق تابع معکوس ـ مشتق تابع ضمنی ـ مشتق مراتب بالاتر

۲ - ۲۵ دقیقه

۱. مقدار مشتق $y=(\cot^{-1}x)^2$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $-\frac{3\pi}{4}$

۲. مقدار مشتق y نسبت به x از رابطه‌ی $x^3+y^2-xy^3+x=2$ در نقطه‌ای به عرض ۱ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۲-

۳. مقدار مشتق مرتبه‌ی سوم تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در $x=1$ چیست؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $-\frac{8}{27}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{2}{9}$

۴. شیب خط مماس بر منحنی پارامتری $\begin{cases} x=\cot^2 t \\ y=\sin^2 3t \end{cases}$ در نقطه‌ی $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۵. اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم باشد، $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a+4h)}{h}$ برابر کدام است؟

۱) $5f''(a)$ ۲) $-5f''(a)$ ۳) $3f''(a)$ ۴) $-3f''(a)$

۶. اگر $f(x)=x^3+2x-7$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(5)$ کدام است؟

۱) ۷۷ ۲) $\frac{1}{77}$ ۳) ۱۴ ۴) $\frac{1}{14}$

۷. مشتق تابع $y = \tan^{-1}(\cot 3x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{1+9x^2}$ ۲) $\frac{3}{1+9x^2}$ ۳) -3 ۴) 3

۸. اگر $y = a\sin x + b\cos x$ باشد، کدام درست است؟

۱) $y + y' = 0$ ۲) $y - y' = 0$ ۳) $y + y'' = 0$ ۴) $y - y'' = 0$

۹. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq -1 \\ x^4 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -1$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم باشد، مقدار c کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 3 ۴) 5

۱۰. مقدار مشتق $\tan\frac{y}{x} = x$ در نقطه‌ی $(1, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} + 1$ ۲) $\frac{\pi}{4} + 1$ ۳) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

۱۱. مشتق چهارم تابع $y = \ln x$ در $x = 1$ چه‌قدر است؟

۱) 6 ۲) -6 ۳) 3 ۴) -3

۱۲. اگر $f(x) = x\sin x + \cos x$ باشد، مقدار $f^{(5)}(0)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۱۳. مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)$ در $x = 0$ چه‌قدر است؟

۱) 24 ۲) 144 ۳) 6 ۴) صفر

۱۴. شیب خط مماس برمنحنی $y = x + \sin^{-1} x$ در نقطه‌ای به‌طول صفر واقع بر آن کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۵. اگر $x^3 - y^3 = 1$ باشد، مشتق دوم y نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{2}{y^5}$ ۲) $\frac{2x}{y^5}$ ۳) $-\frac{2x}{y^5}$ ۴) $-\frac{2}{y^5}$

آزمون ۶۴: مشتق تابع معکوس ـ مشتق تابع ضمنی ـ مشتق مراتب بالاتر ۲۵ دقیقه

۱. مقدار مشتق تابع $f(x) = (\sin^{-1} x^2)^2$ در $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ چیست؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ ۴) $\frac{4\pi}{3\sqrt{6}}$

۲. اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(3)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

۳. مقدار مشتق دوم تابع $y = \sqrt[3]{\sin x}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۴. اگر $f(x) = \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ باشد، $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(1+h) - f'(1-h)}{h}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۵. اگر $f(x)=\sin x\sin 2x$ باشد، حاصل $f''(x)+f(x)$ کدام است؟

۱) $4\cos^3 x$ ۲) $4\cos 3x$ ۳) $4\sin^3 x$ ۴) $4\sin 3x$

۶. اگر $f(x)=g(\cos^2 2x)$ و $g'(1)=1$ و $g''(1)=3$ باشد، مقدار $f''(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۲۴ ۴) ۲۴-

۷. اگر $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2(3-2x)}{2\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}}$ باشد، مقدار $f''(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۸. اگر $f(x)=\begin{cases}4\sqrt{x+1} & x\geq 0\\ ax|x|+bx+c & x<0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم باشد، مقدار $2a+b+c$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۹. تابع معکوس تابع $y=x+\sin x$ ؛ $-2\pi<x<2\pi$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۰. مقدار مشتق مرتبه‌ی نوزدهم تابع $y=\frac{1}{2^{19}}\cos 2x$ در $x=\frac{\pi}{3}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱. مقدار مشتق مرتبه‌ی سیزدهم تابع $y=(x^2+1)^7$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $12!$ ۳) $13!$ ۴) $14!$

۱۲. اگر $\begin{cases}x=a\sin t\\ y=b\cos t\end{cases}$ باشد، y'_x کدام است؟

۱) $-\frac{y}{x}$ ۲) $-\frac{x}{y}$ ۳) $-\frac{a^2y}{b^2x}$ ۴) $-\frac{b^2x}{a^2y}$

۱۳. مشتق دوم تابع $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ در نقطه‌ای به‌طول $x=\frac{\pi}{2}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴. اگر $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ باشد، y''_x کدام است؟

۱) $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ۲) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ۳) $-2x\sqrt{x}$ ۴) $2x\sqrt{x}$

۱۵. مشتق دوم تابع $y=e^{4x-2x^2}$ در چه نقطه‌هایی برابر صفر است؟

۱) $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2},\frac{1}{2}$

آزمون ۶۵: مشتق تابع معکوس ـ مشتق تابع ضمنی ـ مشتق مراتب بالاتر ۲ ۲۵ دقیقه

۱. اگر $f(x)=\sin ax+\cos ax$ و $f''(x)+4f(x)=0$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 1 ۳) ± 2 ۴) ± 4

۲. اگر $f(x)=(\sin^{-1}x)^3+\sin^{-1}x$ باشد، $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

***

۱۵. **گزینه ۲** چشم‌انداز: $f'(x).g'(f(x))$ برابر $(gof)'(x)$ است.

$$(gof)(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=x\Rightarrow (gof)'=1$$

پاسخ آزمون ۶۱: مشتق ـ تابع مشتق ـ مشتق تابع مرکب

***

۱. **گزینه ۴** پله‌ی یکم:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge 1 \text{ یا } x\le -1\\ -2x & -1<x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & x>1 \text{ یا } x<-1\\ -2 & -1<x<1\\ ? & x=1\\ ? & x=-1\end{cases}$$

پله‌ی دوم: پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^3-3x^2)=1-3=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 3x=-2$$

تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است ولی مشتق راست و چپ آن برابر نیستند $(f'_+(1)=-3, f'_-(1)=-2)$، پس در این نقطه مشتق‌ناپذیراست.

پله‌ی سوم: پیوستگی تابع را در $x=-1$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(-2x)=2$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(x^3-3x^2)=-1-3=-4$$

پس تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=-1$ هم ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

بنابراین تابع $f(x)$ **در هر دو نقطه‌ی** $x=1$ و $x=-1$ **مشتق‌ناپذیر** است.

***

۲. **گزینه ۲** **پله‌ی یکم:** تابع $g(x)=x^2-3x+7$ در اطراف $x=1$ نزولی است *(چون مقدار مشتق تابع که به صورت $y'=2x-3$ است در این نقطه برابر -1 و مقداری منفی است)* پس تابع در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد و $\lim_{x\to 1^-}[g(x)]=[g(1)]=[1-3+7]=5$

(تابع در $x=1$ تابع پیوستگی راست ندارد پس مشتق راست نیز ندارد.)

پله‌ی دوم: تابع در $x=1$ فقط مشتق چپ دارد. $x\to 1^-: f(x)=5x^3\Rightarrow f'(x)=15x^2\Rightarrow f'_-(1)=15$

***

۳. **گزینه ۳** پله‌ی یکم:

$$f(x)=|x^2-4|x|-5|=||x|^2-4|x|-5|=|(|x|-5)(|x|-1)|$$

پله‌ی دوم: تابع $|x|$ در $x=0$ مشتق‌ناپذیر و تابع $||x|-5|$ در نقاطی که $|x|-5=0$ ریشه‌ی ساده دارد، مشتق‌ناپذیر است.

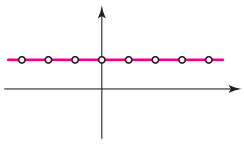
$$|x|-5=0\Rightarrow |x|=5\Rightarrow x=\pm 5$$

پس تابع $f(x)$ **در سه نقطه‌ی** $x=0$ و $x=5$ و $x=-5$ مشتق‌ناپذیر است. *(بدیهی است همواره $|x|+1\neq 0$ است و نمی‌تواند تاثیری در وضعیت مشتق تابع داشته باشد.)*

***

۴. **گزینه ۲** تابع $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است. بنابراین تابع $x-[x]$ نیز در نقاط صحیح ناپیوسته است و در نتیجه در این نقاط مشتق ندارد. در نقاط غیرصحیح مشتق $[x]$ که یک تابع پیوسته است برابر صفر است. $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\Rightarrow f'(x)=1-0=1$

پس نمودار مشتق تابع به‌صورت روبه‌رو است.



***

۵. **گزینه ۴** **پله‌ی یکم:** تابع $y=\cos(\sin x)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق آن برابر است با:

$$y'=-\cos x\sin(\sin x)\Rightarrow y'(\frac{\pi}{2})=0$$

پله‌ی دوم: تابع $y=\sin(|\cos x|)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق‌ناپذیر است ($x=\frac{\pi}{2}$ *ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدرمطلق یعنی* $\cos x=0$ *است.)*

پله‌ی سوم: مجموع یک تابع مشتق‌پذیر و یک تابع مشتق‌ناپذیر، یک تابع مشتق‌ناپذیر است. بنابراین مشتق تابع $f(x)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ ، **وجود ندارد.**

***

۶. **گزینه ۳** **پله‌ی یکم:** شرط لازم برای این‌که تابع در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، این است که در آن نقطه پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow 1+a+b=0$$

پله‌ی دوم: تابع باید در $x=1$ مشتق چپ و راست داشته باشد و مقدار این مشتق‌ها هم با یک‌دیگر برابر باشد.

$$f'(x)=\begin{cases}2x+a & x<1\\ 1+\frac{1}{x^2} & x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 2+a=2\Rightarrow a=0\Rightarrow b=-1$$

پله‌ی سوم:

$$f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-1=\mathbf{2-2\sqrt{2}}$$

***

۷. **گزینه ۴** **پله‌ی یکم:** فرض می‌کنیم $t=h^2$ باشد چون $h\to 0$ پس $t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1+t)+f(2+t)-4}{t}=\frac{f(1^+)+f(2^+)-4}{0}=\frac{3+1-4}{0}=\frac{0}{0}$$

پله‌ی دوم: چون حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ است می‌توانیم از hop استفاده کنیم.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1+t)+f(2+t)-4}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1+t)+f'(2+t)}{1}$$

با توجه به این‌که تابع پیوسته بوده و ضابطه‌ی آن $f(x)=\begin{cases}-4x+7 & x\leq 1\\ -2x+5 & 1\leq x\leq 2\\ 4x-7 & x\geq 2\end{cases}$ است پس حد فوق برابر $f'_+(1)+f'_+(2)$ است.

بنابراین:

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & x<1\\ -2 & 1<x<2\\ 4 & x>2\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)+f'_+(2)=-2+4=\mathbf{2}$$

***

۸. **گزینه ۱** **پله‌ی یکم:** ضابطه‌های f و g عبارت‌اند از: $f(x)=3x+|x|=\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases}$ و $g(x)=\frac{3}{4}x+a|x|=\begin{cases}(\frac{3}{4}+a)x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)x & x<0\end{cases}$

پله‌ی دوم: $(gof)(x)=\begin{cases}(\frac{3}{4}+a)(4x)=(3+4a)x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)(2x)=(\frac{3}{2}-2a)x & x<0\end{cases}$ است که در $x=0$ پیوسته است.

$$(gof)'(x)=\begin{cases}3+4a & x\geq 0\\ \frac{3}{2}-2a & x<0\end{cases}\Rightarrow 3+4a=\frac{3}{2}-2a\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

***

۹. **گزینه ۳** **پله‌ی یکم:** ضابطه‌ی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^{2n}-x^n}=\sqrt[3]{x^n(x^n-1)}$ است.

پله‌ی دوم: تابع $\sqrt[2k+1]{x^n}$ به ازای $n<2k+1$ در $x=0$ مشتق ندارد و به ازای $n\geq 2k+1$ در این نقطه مشتق دارد. پس به ازای $n\geq 3$ تابع در $x=0$ دارای مشتق است. بنابراین حداقل مقدار عدد طبیعی برابر **۳** است. (اگر $n=1$ باشد تابع

$y=\sqrt[3]{x^2-x}=\sqrt[3]{x(x-1)}$ در $x=0$ و $x=1$ مشـــتق ندارد و اگر $n=2$ باشد تابع $y=\sqrt[3]{x^4-x^2}=\sqrt[3]{x^2(x^2-1)}$ در $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ مشتق ندارد.)

***

۱۰. گزینه ۴ **چشم‌انداز:** اگر $f(x)$ دارای عامل صفرکننده در $x=a$ باشد، $f'(a)$ برابر است با مشتق عامل صفرکننده در $x=a$ ضرب در بقیه‌ی عبارات به‌ازای $x=a$.

پله‌ی یکم: $x=2$ و $x=3$ عامل‌های صفرکننده مکرر هستند.پس مشتق در آن نقاط، صفر است یعنی $f'(2)=f'(3)=0$ کافی است مشتق را در عامل صفرکننده‌ی $x=1$ به‌دست آوریم.

$$f'(1)=1\times(1-2)^2\times(1-3)^3=1\times(-1)^2\times(-2)^3=-8$$

پله‌ی دوم:

$$f'(1)+f'(2)+f'(3)=-8+0+0=-8$$

***

۱۱. گزینه ۲

$$(f(\sin x))'=\cos x\cos 2x\Rightarrow \cos x f'(\sin x)=\cos x\cos 2x\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}f'(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

***

۱۲. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=fog(x)\Rightarrow h'(x)=(fog)'(x)\Rightarrow h'(x)=g'(x)f'(g(x)) \\ g(x)=\sqrt{9-x^2}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \end{array}\right\}\Rightarrow h'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}f'(g(x))$$

$$\Rightarrow h'(0)=0\times f'(g(0))=0\times f'(3)=0$$

(حاصل‌ضرب صفر در مشتق یک تابع مشتق‌پذیر، برابر صفر است.)

***

۱۳. گزینه ۲ **پله‌ی یکم:**

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\sin\frac{1}{x}=0 \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}x[x+1]=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}=\frac{f(0^-)-f(0^+)}{0}=\frac{0}{0}$$

حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0 \\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x[x+1]-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}[x+1]=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2f'(2h)+3f'(-3h)}{1}=2f'_-(0)+3f'_+(0)$$

$$2(0)+3(1)=3$$

***

۱۴. گزینه ۲ **چشم‌انداز:** مشتق $\ln u$ از رابطه‌ی $\frac{u'}{u}$ به‌دست می‌آید.

$$y=\ln(\cos^2\sqrt{x})=2\ln(\cos\sqrt{x})\Rightarrow y'=2\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}=\frac{-\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\Rightarrow y'(\frac{\pi^2}{16})=\frac{-\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}$$

***

۱۵. گزینه ۳ **چشم‌انداز:** مشتق تابع $y=e^u$ از رابطه‌ی $y'=u'e^u$ به‌دست می‌آید. در نقاطی مماس بر منحنی موازی محور xها است که مشتق تابع برابر صفر شود.

$$y=e^{x^3-2x}\Rightarrow y'=(3x^2-2)e^{x^3-2x}\xRightarrow{y'=0}3x^2-2=0\Rightarrow x^2=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

بنابراین در **۲ نقطه**، مماس بر منحنی موازی محور xها است.

پاسخ آزمون ۶۲: مشتق ـ تابع مشتق ـ مشتق تابع مرکب

***

۱. **گزینه ۴** **پلـه‌ی یکـم:** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$ اسـت. تابـع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسـتگی چـپ ندارد بنابراین مشتق چپ هم نخواهد داشت.

پله‌ی دوم: تابع در $x=0$ پیوستگی راست دارد پس ضابطه‌ی مشتق راست تابع به صورت $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ و $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$ است.

بنابراین تابع $f(x)$ در $x=0$، **مشتق راست و چپ ندارد.**

***

۲. **گزینه ۴** **پله‌ی یکم:** ابتدا مقدار $f(0)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x=y=0\Rightarrow f(0)=f(0)f(0)\xrightarrow{f(0)\neq 0} f(0)=1$$

پله‌ی دوم:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)f(h)-f(3)}{h}=f(3)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(3)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(3)f'(0)=\mathbf{2f(3)}$$

***

۳. **گزینه ۴** تابع $y=\sqrt[2k+1]{(x-a)^n}$ اگر $n<2k+1$ باشد در $x=a$ مشتق ندارد. بنابراین تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$ در نقاط $x=0$ و $x=3$ مشتق ندارد. بنابراین $D_{f'}$ به صورت $\mathbb{R}-\{0,3\}$ در می‌آید.

***

۴. **گزینه ۳** **چشم‌انداز:** برای این‌که تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ مشـتق‌پذیر باشـد، باید در نقطه‌ی $x=0$ هم مشـتق‌پذیر باشد. بنابراین تابع در $x=0$ هم باید پیوسته باشد و هم مشتق راست و چپ آن برابر باشد.

پله‌ی یکم: پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{1+x}=a\ ,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{b+x}{1-x}=b \text{ و } f(0)=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Rightarrow a=b$$

پله‌ی دوم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a}{1+x} & x>0\\ \frac{b+x}{1-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{-a}{(1+x)^2} & x>0\\ \frac{b+1}{(1-x)^2} & x<0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow\frac{-a}{(1+0)^2}=\frac{b+1}{(1-0)^2}\Rightarrow -a=b+1\xrightarrow{a=b}-a=a+1\Rightarrow -2a=1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

***

۵. **گزینه ۳** **چشم‌انداز:** از طرفین، ln می‌گیریم و مشتق را محاسبه می‌کنیم.

$$\ln f=\ln x^x=x\ln x\Rightarrow\frac{f'}{f}=\ln x+\frac{1}{x}\times x=1+\ln x\Rightarrow f'=\mathbf{x^x(1+\ln x)}$$

***

۶. **گزینه ۱** تابـع $|x^2-\pi^2|$ فقـط در $x=\pm\pi$ مشـتق ندارد، ولـی تابع $\sin x$ در نقاط $x=\pm\pi$ برابر صفر می‌شـود بنابراین تابع $|x^2-\pi^2|\sin x$ در نقاط $x=\pm\pi$ دارای ریشه‌ی مکرر است و مشتق‌پذیر می‌شود. بنابراین $D_{f'}=\mathbb{R}$ می‌شود و مجموعه‌ی A **صفر** عضو دارد.

***

۷. **گزینه ۳** **روش اول:** بـرای این‌کـه تابع $f(x)$ در $x=3$ مشـتق‌پذیر باشـد، باید $x=3$ ریشـه‌ی مضاعف عبارت x^2-ax+b باشد. بنابراین تابع باید به‌صورت $y=(x-3)^2[x]$ باشد.

$x^۲-ax+b=(x-۳)^۲ \Rightarrow x^۲-ax+b=x^۲-۶x+۹ \Rightarrow a=۶\ ,\ b=۹ \Rightarrow b-a=۹-۶=۳$

روش دوم: اگر نخواهیم از روش بالا استفاده کنیم! به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$x\to ۳^+ : f(x)=۳(x^۲-ax+b)\ ,\ x\to ۳^- : f(x)=۲(x^۲-ax+b)$

شرط پیوستگی این است که $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$ باشد. $۳(۹-۳a+b)=۲(۹-۳a+b) \Rightarrow b-۳a=-۹$

شرط مشتق‌پذیری هم در این نقطه باید برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x\to ۳^+ : f'(x)=۳(۲x-a) \\ x\to ۳^- : f'(x)=۲(۲x-a)\end{array}\right\} \Rightarrow ۳(۶-a)=۲(۶-a) \Rightarrow a=۶ \xRightarrow{b-۳a=-۹} b=۹ \Rightarrow b-a=۳$$

***

۸. گزینه ۲ **پله‌ی یکم:** $f(۳x-۲)=g(x+f(۲x)) \Rightarrow ۳f'(۳x-۲)=(۱+۲f'(۲x))g'(x+f(۲x))$

پله‌ی دوم: در رابطه‌ی به‌دست‌آمده x را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$۳f'(۴)=(۱+۲f'(۴))g'(۲+f(۴)) \xRightarrow{f(۴)=g'(۵)=۳} ۳f'(۴)=(۱+۲f'(۴))\times ۳ \Rightarrow ۳f'(۴)=۳+۶f'(۴) \Rightarrow ۳f'(۴)=-۳ \Rightarrow$$
$$f'(۴)=-۱$$

***

۹. گزینه ۱ تابع $g(x)=x^۲-۳x+۱$ در اطراف $x=۲$ تابعی صعودی است. (چون $g'(x)=۲x-۳ \Rightarrow g'(۲)>۰$) بنابراین $[g(x)]$ در نقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی راست دارد و $\lim\limits_{x\to ۲^+}[g(x)]=[g(۲)]=-۱ \Rightarrow f(x)=-x^۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x \Rightarrow f'_+(۲)=-۴$

***

۱۰. گزینه ۴ **پله‌ی یکم:** $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰\times$ کردان‌دار $=۰$ و $f(۰)=۰$ است پس تابع $f(x)$ در $x=۰$ پیوسته است.

پله‌ی دوم:
$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x\tan^{-۱}(\frac{۱}{x})}{x}=\lim_{x\to ۰}\tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) \Rightarrow \begin{cases} f'_+(۰)=\tan^{-۱}(+\infty)=\frac{\pi}{۲} \\ f'_-(۰)=\tan^{-۱}(-\infty)=-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

پله‌ی سوم: $f'_+(۰)-f'_-(۰)=\frac{\pi}{۲}-(-\frac{\pi}{۲})=\boldsymbol{\pi}$

***

۱۱. گزینه ۳ **پله‌ی یکم:** مشتق تابع $g(x)=x$ در $x=۱$ برابر ۱ و تابع $h(x)=(x-۱)\sin^{-۱}\sqrt{\frac{x}{x+۱}}$ در $x=۱$ دارای عامل صفرکننده است پس

$h'(۱)=۱\times\sin^{-۱}\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\sin^{-۱}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow f'(۱)=g'(۱)+h'(۱)=۱+\frac{\pi}{۴}$

پله‌ی دوم: $f'(۱)-f(۱)=(۱+\frac{\pi}{۴})-(۱+۰)=\boldsymbol{\frac{\pi}{۴}}$

***

۱۲. گزینه ۲ **پله‌ی یکم:**

$$f'(x)=\frac{a\cos x(۱-\cos x)-\sin x(a\sin x)}{(۱-\cos x)^۲}=\frac{a\cos x-a(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}{(۱-\cos x)^۲}=\frac{a(\cos x-۱)}{(۱-\cos x)^۲}=\frac{a}{\cos x-۱}$$

پله‌ی دوم: $f'(\frac{\pi}{۲})=۱ \Rightarrow \frac{a}{\cos\frac{\pi}{۲}-۱}=\frac{a}{۰-۱}=-a=۱ \Rightarrow \mathbf{a=-۱}$

(می‌توانستیم ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم.

$$f(x)=\frac{a\sin x}{۱-\cos x}=\frac{a(۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲})}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}=a\cot\frac{x}{۲} \Rightarrow f'(x)=-\frac{a}{۲}(۱+\cot^۲\frac{x}{۲})=f'(\frac{\pi}{۲})=-a$$

پاسخ نهایی طبیعتاً فرقی نمی‌کند!)

***

۱۳. **گزینه ۱** **پله‌ی یکم:** تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

پله‌ی دوم: مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی می‌کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\in Q: f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0 \\ x\notin Q: f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

***

۱۴. **گزینه ۳** **پله‌ی یکم:** حاصل حد داده شده را با هوپیتال تعیین می‌کنیم.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fog)(1+h)-12}{h}\overset{H}{=\!=}\lim_{h\to 0}(fog)'(1+h)=(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1))$$

پله‌ی دوم:

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=2x+1\Rightarrow g'(1)=3 \\ f'(x)=3x^2+2\Rightarrow f'(g(1))=f'(2)=14 \end{array}\right\}\Rightarrow g'(1)f'(g(1))=3\times 14=42$$

***

۱۵. **گزینه ۴** **چشم‌انداز:** مشتق تابع $\ln u$ و $\ln|u|$ برابر $\frac{u'}{u}$ است.

گزینه‌ی ۱: $y=\ln|\sin x|\Rightarrow y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

گزینه‌ی ۲: $y=\ln|\cos x|\Rightarrow y'=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

گزینه‌ی ۳: $y=\ln\left|\frac{1}{\sin x}\right|=-\ln|\sin x|\Rightarrow y'=-\cot x$

گزینه‌ی ۴: $y=\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|=-\ln|\cos x|\Rightarrow y'=\tan x$

پس گزینه‌ی ۴ درست است.

پاسخ آزمون ۶۳: مشتق تابع معکوس ـ مشتق تابع ضمنی ـ مشتق مراتب بالاتر

***

۱. **گزینه ۲** **چشم‌انداز:** $y=\cot^{-1}u\Rightarrow y'=\frac{-u'}{1+u^2}$ و $((\cot^{-1}u)^n)'=\frac{-nu'}{1+u^2}(\cot^{-1}u)^{n-1}$ است.

$$y=(\cot^{-1}x)^2\Rightarrow y'=\frac{-2}{1+x^2}\cot^{-1}x\Rightarrow y'(1)=2(\cot^{-1}1)(\frac{-2}{1+1})=-\frac{\pi}{4}$$

***

۲. **گزینه ۱** **چشم‌انداز:** مشتق تابع ضمنی را با استفاده از رابطه‌ی $y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$ به‌دست می‌آوریم.

پله‌ی یکم: در نقطه‌ای به عرض ۱، طول نقطه را محاسبه می‌کنیم: $x^3+1-x+x=2\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$

پله‌ی دوم: مقدار y' در نقطه‌ی $(1,1)$ برابر است با:

$$y'=-\frac{3x^2-y^3+1}{2y-3xy^2}=\frac{y^3-3x^2-1}{2y-3xy^2}\Rightarrow y'=\frac{1-3-1}{2-3}=\frac{-3}{-1}=3$$

***

۳. **گزینه ۱** **چشم‌انداز:** برای محاسبه‌ی مشتق مرتبه‌ی سوم تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ بهتر است که تابع را به‌صورت یک تابع توانی بنویسیم.

پله‌ی یکم:

$$y=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow y''=\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow y'''=\frac{2}{3}(\frac{-1}{3})(\frac{-4}{3})x^{-\frac{7}{3}}$$

(y''' که مشتق مرتبه‌ی سوم تابع است را با $y^{(3)}$ هم نمایش می‌دهند.)

پله‌ی دوم: $y^{(3)}_{(1)} = \frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\times 1 = \frac{8}{27}$

***

۴. گزینه ۱ چشم‌انداز: برای به‌دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی باید $\frac{dy}{dx}$ را تعیین کنیم. برای این‌کار ابتدا حاصل $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ را با توجه به ضابطه‌ی منحنی پارامتری تعیین می‌کنیم سپس حاصل $\frac{dy}{dx}$ را به‌دست می‌آوریم.

پله‌ی یکم:

$$\left.\begin{array}{l} x=\cot^2 t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-2(1+\cot^2 t)\cot t \\ y=\sin^2 3t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=6\sin 3t\cos 3t=3\sin 6t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin 6t}{-2(1+\cot^2 t)\cot t}$$

پله‌ی دوم:

$$t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3\sin\frac{3\pi}{2}}{-2(1+\cot^2\frac{\pi}{4})\cot\frac{\pi}{4}}=\frac{3(-1)}{-2(1+1)\times 1}=\frac{3}{4}$$

***

۵. گزینه ۴ چشم‌انداز: چون حاصل حد $\frac{0}{0}$ است، از قاعده‌ی هوپیتال برای یافتن حاصل حد استفاده می‌کنیم. (چون $f''(a)$ وجود دارد $f'(a)$ نیز موجود است و حد $\frac{0}{0}$ می‌شود.)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a+4h)}{h}=\lim_{h\to 0} f''(a+h)-4f''(a+h)=f''(a)-4f''(a)=-3f''(a)$$

***

۶. گزینه ۴ چشم‌انداز: اگر نقطه‌ی $A(a,b)$ روی تابع معکوس‌پذیر f باشد $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ است.

پله‌ی یکم: چون $(f^{-1})'(5)$ خواسته شده است، پس $b=5$ است. ابتدا a را محاسبه می‌کنیم:

$$x^3+2x-7=5 \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x=a=2$$

پله‌ی دوم:

$$f(x)=x^3+2x-7 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2 \Rightarrow f'(2)=14 \Rightarrow (f^{-1})'(5)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{14}$$

***

۷. گزینه ۳ چشم‌انداز: مشتق تابع را با استفاده از رابطه‌ی $(\tan^{-1}u)'=\frac{u'}{1+u^2}$ به‌دست می‌آوریم.

$$y=\tan^{-1}(\cot 3x) \Rightarrow y'=\frac{(\cot 3x)'}{1+(\cot 3x)^2}=\frac{-3(1+\cot^2 3x)}{1+\cot^2 3x}=-3$$

***

۸. گزینه ۳

$$y'=a\cos x-b\sin x \Rightarrow y''=-a\sin x-b\cos x=-(a\sin x+b\cos x)=-y \Rightarrow y+y''=0$$

***

۹. گزینه ۳ چشم‌انداز: چون تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=-1$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم است، پس تابع در این نقطه پیوسته بوده و مشتق اول و دوم دارد.

پله‌ی یکم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} x^4=1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} ax^2+bx+c=a-b+c \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow a-b+c=1$$

پله‌ی دوم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\ge -1 \\ 4x^3 & x<-1 \end{cases} \Rightarrow f'_-(-1)=f'_+(-1) \Rightarrow -4=-2a+b \Rightarrow 2a-b=4$$

پله‌ی سوم:

$$f''(x)=\begin{cases} 2a & x\ge -1 \\ 12x^2 & x<-1 \end{cases}$$

(توجه کنید که در ضابطه‌های $f'(x)$ و $f''(x)$، $x \geq -1$ نوشتیم زیرا تابع در $x=-1$ مشتق اول و دوم دارد.)

$$f''_-(-1)=f''_+(-1) \Rightarrow 12=2a \Rightarrow a=6 \xrightarrow{2a-b=4} 12-b=4 \Rightarrow b=8 \xrightarrow{a-b+c=1} c=3$$

***

۱۰. گزینه ۴

$$f(x,y)=\tan\frac{y}{x}-x=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-\frac{y}{x^2}(1+\tan^2\frac{y}{x})-1}{\frac{1}{x}(1+\tan^2\frac{y}{x})} \xrightarrow[y=\frac{\pi}{4}]{x=1} y'=-\frac{-\frac{\pi}{4}(1+1)-1}{1+1}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

***

۱۱. گزینه ۲

$$y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow y''=-x^{-2} \Rightarrow y^{(3)}=2x^{-3} \xrightarrow{x=1} -6$$

***

۱۲. گزینه ۱ روش اول:

$$f(x)=x\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x \Rightarrow f'(x)=x\cos x \Rightarrow f''(x)=\cos x-x\sin x$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x \Rightarrow f^{(4)}(x)=-2\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x-3\cos x$$

$$\Rightarrow f^{(5)}(x)=\sin x+x\cos x+3\sin x=x\cos x+4\sin x \Rightarrow f^{(5)}(0)=0\times\cos 0+4\sin 0=0$$

روش دوم: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد مشتق مرتبه‌ی فرد، تابعی فرد و مشتق مرتبه‌ی زوج، تابعی زوج است. بنابراین مشتق پنجم آن تابعی فرد است. *(می‌دانیم در توابع فرد اگر $x=0$ باشد، $y=0$ است)* بنابراین $f^{(5)}(0)=0$ است.

***

۱۳. گزینه ۲ $f(x)=x^6+6x^4+11x^2+6$ است که مشتق چهارم $11x^2$ و ۶، برابر صفر و مشتق چهارم x^4، برابر $4!$ و مشتق چهارم x^6 در $x=0$ برابر صفر است. پس:

$$f^{(4)}(0)=6\times 4!=6\times 24=144$$

***

۱۴. گزینه ۱ **چشم‌انداز:** شیب خط مماس بر منحنی در هر نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

$$f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{مماس } m=f'(0)=1+1=2$$

***

۱۵. گزینه ۳ پله‌ی یکم:

$$x^3-y^3-1=0 \Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{3x^2}{-3y^2}=\frac{x^2}{y^2}$$

پله‌ی دوم: مشتق دوم y نسبت به x را تعیین می‌کنیم. **توجه کنید که:** رابطه‌ی $y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$ فقط برای محاسبه‌ی مشتق اول تابع ضمنی قابل استفاده است و برای مشتقات مراتب بالاتر باید x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته بگیریم.

$$y'=\frac{x^2}{y^2} \Rightarrow y''=\frac{2xy^2-2yy'x^2}{y^4} \xrightarrow{y'=\frac{x^2}{y^2}} \frac{2xy^2-2y(\frac{x^2}{y^2})x^2}{y^4}=\frac{\frac{2xy^3-2x^4}{y}}{y^4}=\frac{2x(y^3-x^3)}{y^5} \xrightarrow{x^3-y^3=1} y''=-\frac{2x}{y^5}$$

پاسخ آزمون ۶۴: مشتق تابع معکوس ـ مشتق تابع ضمنی ـ مشتق مراتب بالاتر

***

۱. گزینه ۴ **چشم اندار:**

$$y=(\sin^{-1}u)^n \Rightarrow y'=\frac{nu'}{\sqrt{1-u^2}}(\sin^{-1}u)^{n-1}$$

$$f(x)=(\sin^{-1}x^2)^2 \Rightarrow f'(x)=2(2x)\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(\sin^{-1}x^2) \Rightarrow f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\sin^{-1}(\frac{1}{2})=2\sqrt{2}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3\sqrt{6}}$$

***

۲. **گزینه ۲** **پله‌ی یکم:** چون $(f^{-1})'(3)$ خواسته شده است، پس مقدار تابع را برابر ۳ قرار می‌دهیم و x متناظر با آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

پله‌ی دوم:

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

***

۳. **گزینه ۲** **پله‌ی یکم:**

$$y = \sqrt[3]{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(\cos x)(\sin x)^{-\frac{2}{3}}$$

(این جور مواقع اگر تابع را به‌صورت توانی بنویسید، سپس مشتق آن‌را حساب کنید کار ساده‌تری خواهید داشت!)

پله‌ی دوم: وقتی مشتق اول در $x = \frac{\pi}{2}$ دارای عامل‌صفرکننده‌ی $\cos x$ است می‌توان برای مشتق دوم، مشتق این عامل یعنی $-\sin x$ را در بقیه‌ی تابع ضرب کرد.

$$y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}(-\sin\frac{\pi}{2})(\sin\frac{\pi}{2})^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

***

۴. **گزینه ۱** **چشم انداز:** چون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است، برای یافتن حاصل آن از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم.

پله‌ی یکم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(f''(1+h)+f''(1-h)) = 2f''(1)$$

پله‌ی دوم:

$$f(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

پله‌ی سوم:

$$\text{حاصل حد} = 2f''(1) = \frac{2\times 2\times 1}{(1+1)^2} = 1$$

***

۵. **گزینه ۲** **پله‌ی یکم:** با استفاده از رابطه‌ی $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ داریم:

$$f(x) = \sin x \sin 2x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f''(x) = \frac{9}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x$$

پله‌ی دوم:

$$f''(x) + f(x) = \frac{9}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x = \mathbf{4\cos 3x}$$

***

۶. **گزینه ۲**

$$f(x) = g(\cos^2 2x) \Rightarrow f'(x) = (-2\times 2\times \cos 2x \sin 2x)g'(\cos^2 2x) = (-2\sin 4x)\, g'(\cos^2 2x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = (-8\cos 4x)g'(\cos^2 2x) + (-2\sin 4x)^2 g''(\cos^2 2x) \quad f''(\frac{\pi}{2}) = (-8\cos 2\pi)g'(1) = -8$$

***

۷. **گزینه ۳** **چشم‌انداز:** $f(x)$ دارای عامل $(2x-1)^2$ است. بنابراین برای به‌دست‌آوردن مقدار مشتق دوم تابع در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ که ریشه‌ی این عبارت است، کافی است مشتق دوم عبارت $(2x-1)^2$ را حساب کرده و با ضرب آن در بقیه‌ی تابع به ازای $x = \frac{1}{2}$ مقدار مشتق دوم تابع را در $x = \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آوریم.

$$((2x-1)^2)'' = (4(2x-1))' = 8 \Rightarrow f''(\frac{1}{2}) = \frac{8(3-1)}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = 8$$

***

۸. **گزینه ۲** پله‌ی یکم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=4\sqrt{0+1}=4\times 1=4\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0+0+c\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow c=4$$

پله‌ی دوم:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=2(x+1)^{-\frac{1}{2}} & x\geq 0\\ -2ax+b & x<0\end{cases}\Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow 2=0+b\Rightarrow b=2$$

پله‌ی سوم:

$$f''(x)=\begin{cases}-(x+1)^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{(x-1)^3}} & x\geq 0\\ -2a & x<0\end{cases}\Rightarrow f''_+(0)=f''_-(0)\Rightarrow -2a=-1\Rightarrow 2a=1$$

در نتیجه $2a+b+c=1+2+4=7$

***

۹. **گزینه ۲** **چشم‌انداز:** اگر تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد در نقاطی که مقدار مشتق تابع، برابر صفر می‌شود تابع معکوس در نقاط متناظر آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.

$$y=x+\sin x\Rightarrow y'=1+\cos x=0\Rightarrow \cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

جواب‌های این معادله در بازه‌ی $(-2\pi,2\pi)$، $-\pi$ و π هستند. بنابراین تابع معکوس تابع y در **۲** نقطه‌ی $f(\pi)=\pi$ و $f(-\pi)=-\pi$ مشتق‌ناپذیر است.

***

۱۰. **گزینه ۳** **چشم‌انداز:** مشتق مرتبه‌ی n ام تابع $f(x)=k\cos ax$ برابر است با: $f^{(n)}(x)=ka^n\cos(\frac{n\pi}{2}+ax)$

که به‌جای n در $\cos(\frac{n\pi}{2}+ax)$، می‌توانیم هم‌نهشت آن را به پیمانه‌ی ۴ قرار دهیم.

$$y^{(19)}=\frac{1}{2^{19}}\times 2^{19}\times\cos(\frac{19\pi}{2}+2x)\overset{19\equiv 3}{=\!=\!=}\cos(\frac{3\pi}{2}+2x)=\sin 2x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}}\sin 2(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

***

۱۱. **گزینه ۴** **چشم‌انداز:** مشتق مرتبه‌ی $(n-1)$اُم تابع $y=ax^n$ برابر $a(n!)x$، مشتق مرتبه‌ی n ام آن $a(n!)$ و مشتقات مرتبه‌ی $n+1$ و $n+2$ و ... آن برابر صفر است.

پله‌ی یکم:

$$y=(x^2+1)^7=(x^2)^7+7(x^2)^6+\cdots=x^{14}+7x^{12}+\cdots$$

تابع به‌صورت یک چند جمله‌ای درجه‌ی چهاردهم است که جمله‌ی x^{13} ندارد. پس مشتق سیزدهم جملات $7x^{12}+\cdots$ برابر صفر و مشتق سیزدهم x^{14} برابر $14!x$ است.

پله‌ی دوم: مقدار مشتق مرتبه‌ی سیزدهم تابع به ازای $x=1$ برابر است با: $f^{(13)}(1)=14!\times 1=14!$

***

۱۲. **گزینه ۴** **روش اول:** **چشم‌انداز:** y'_x همان مشتق y نسبت به x یا $\frac{dy}{dx}$ است. برای به‌دست‌آوردن $\frac{dy}{dx}$ ابتدا $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dx}{dt}$ را تعیین می‌کنیم.

پله‌ی یکم:

$$\begin{cases}x=a\sin t\Rightarrow \dfrac{dx}{dt}=a\cos t\\ y=b\cos t\Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=-b\sin t\end{cases}\Rightarrow y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-b\sin t}{a\cos t}$$

پله‌ی دوم: با قراردادن $\sin t=\frac{x}{a}$ و $\cos t=\frac{y}{b}$، حاصل y'_x را به‌دست می‌آوریم:

$$y'_x=\frac{-b\frac{x}{a}}{a\frac{y}{b}}=\frac{-b^2x}{a^2y}$$

روش دوم: با در نظر گرفتن $\sin t=\frac{x}{a}$ و $\cos t=\frac{y}{b}$، حاصل y'_x را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\sin t=\frac{x}{a}\\ \cos t=\frac{y}{b}\end{array}\right\}\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0\Rightarrow y'_x=-\frac{2b^2x}{2a^2y}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

***

۱۳. **گزینه ۳** **پله‌ی یکم:** ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\cot\frac{x}{2}$$

پله‌ی دوم:

$$y'=-\frac{1}{2}(1+\cot^2\frac{x}{2})\Rightarrow y''=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})2\cot\frac{x}{2}(1+\cot^2\frac{x}{2})=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}(1+\cot^2\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow y''(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4}(1+\cot^2\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\times 2=1$$

***

۱۴. **گزینه ۱** **چشم‌انداز:** ابتدا ضابطه‌ی تابع y برحسب x را تعیین می‌کنیم.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\Rightarrow\sqrt{y}=1-\sqrt{x}\Rightarrow y=1+x-2\sqrt{x}\Rightarrow y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1-x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow y''=0+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

***

۱۵. **گزینه ۱** **پله‌ی یکم:**

$$y=e^{4x-2x^2}\Rightarrow y'=(4-4x)e^{4x-2x^2}\Rightarrow y''=-4e^{4x-2x^2}+(4-4x)^2e^{4x-2x^2}=e^{4x-2x^2}(-4+(4-4x)^2)$$

پله‌ی دوم: همواره $e^{4x-2x^2}\neq 0$ پس:

$$y''=0\Rightarrow(4-4x)^2=4\Rightarrow 4-4x=\pm 2\Rightarrow x=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

پاسخ آزمون ۶۵: مشتق تابع معکوس ـ مشتق تابع ضمنی ـ مشتق مراتب بالاتر

***

۱. **گزینه ۳** **پله‌ی یکم:**

$$f'(x)=a\cos ax-a\sin ax\Rightarrow f''(x)=-a^2\sin ax-a^2\cos ax$$

پله‌ی دوم:

$$f''(x)+4f(x)=0\Rightarrow -a^2\sin ax-a^2\cos ax+4\sin ax+4\cos ax=0\Rightarrow$$

$$(4-a^2)\sin ax+(4-a^2)\cos ax=0\Rightarrow 4-a^2=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

***

۲. **گزینه ۱** **پله‌ی یکم:** با مساوی قراردادن $f(x)$ با عدد صفر، x ای که در آن رابطه‌ی $f(x)=0$ برقرار است را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=0\Rightarrow(\sin^{-1}x)^3+\sin^{-1}x=0\Rightarrow(\sin^{-1}x)\left((\sin^{-1}x)^2+1\right)=0\Rightarrow\sin^{-1}x=0\Rightarrow x=0$$

پله‌ی دوم: برای به‌دست‌آوردن مقدار $(f^{-1})'(0)$ می‌توانیم مقدار $\frac{1}{f'(0)}$ را حساب کنیم $(f(0)=0)$.

$$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}(\sin^{-1}x)^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow f'(0)=3(0)^2+1=1\Rightarrow(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

***

۳. **گزینه ۲** **روش اول:**

$$y=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Rightarrow y'=\frac{\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\times x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}}{1+\frac{1-x^2}{x^2}}=\frac{\frac{\frac{-x^2-1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2}}{\frac{x^2+1-x^2}{x^2}}=\frac{\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$