۴ دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی

دسته‌بندی

برای سروسامان دادن به داده‌های کمّی (گسسته یا پیوسته) که دارای عدد و رقم هستند، از روشی استفاده می‌کنیم که به آن دسته‌بندی داده‌ها گفته می‌شود. در این روش چند اصطلاح مهم وجود دارد که به ترتیب آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

① **دامنهٔ تغییرات:** برای دسته‌بندی داده‌ها ابتدا آن‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. در این صورت دامنهٔ تغییرات که آن را با R نشان می‌دهیم، عبارت است از: $R = Max - Min$

دامنهٔ تغییرات در واقع طول بازه‌ای است که متغیر تصادفی در آن تغییر می‌کند و اگر دامنهٔ تغییرات **زیاد** باشد، یا با متغیرهای کمّی **پیوسته** سروکار داشته باشیم، باید داده‌ها را دسته‌بندی کنیم و اگر به کل جامعه دسترسی نداشته باشیم، این کار را روی نمونه انجام می‌دهیم.

مثال۱ نمرهٔ ریاضیات دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است:

۱۲,۶,۱۳ / ۲۵,۲۰,۲۰,۱۵,۱۵,۱۴ / ۵,۱۳ / ۷۵,۱۲ / ۲۵,۱۱ / ۵,۱۷,۱۸,۱۸,۲۰,۷ / ۲۵,۱۰,۱۹,۱۸ / ۵

دامنهٔ تغییرات نمرات چه‌قدر است؟

پاسخ۱ نمرات مرتب‌شده به صورت زیر است:

Min ... Max

۶,۷ / ۲۵,۱۰,۱۱ / ۵,۱۲,۱۲ / ۲۵,...,۱۹,۲۰,۲۰ $\Rightarrow$ $R = ۲۰ - ۶ = ۱۴$

② **تعداد دسته‌ها:** بعد از پیداکردن دامنهٔ تغییرات گام بعدی تعیین تعداد دسته‌هاست که این تعداد را که با K نشان می‌دهیم، بستگی به دامنهٔ تغییرات دارد و هر چه دامنهٔ تغییرات بزرگ‌تر باشد، باید تعداد دسته‌ها را بیشتر در نظر بگیریم.

③ **طول دسته‌ها:** پس از پیداکردن دامنهٔ تغییرات و انتخاب تعداد دسته‌ها (طبقه‌ها) می‌توانیم طول دسته‌ها را که با c نشان می‌دهیم، از رابطهٔ مقابل به دست آوریم: $R = cK$

مثال۲ نمرهٔ ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر می‌باشد.

۱۷,۱۲ / ۵,۱۸,۱۳,۱۱ / ۲۵,۱۹,۷,۲۰,۱۹ / ۷۵,۲,۱۴ / ۵,۹,۱۵,۱۶ / ۲۵,۸ / ۵,۱۰ / ۲۵,۱۱ / ۷۵,۱۶ / ۵,
۱۳ / ۵,۱۷ / ۷۵,۱۹ / ۲۵,۲۰

این داده‌ها را در ۶ دسته طبقه‌بندی کنید.

پاسخ۲ داده‌های مرتب‌شده به صورت زیر هستند:

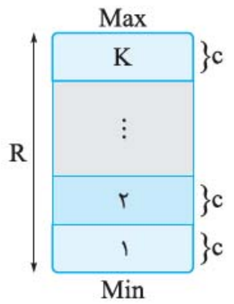
۲,۷,۸/۵,۹,۱۰/۲۵,۱۱/۲۵,۱۱/۷۵,۱۲/۵,۱۳,۱۳/۵,۱۴/۵,۱۵,۱۶/۲۵,۱۶/۵,۱۷,۱۷/۷۵,۱۸,۱۹,
۱۹/۲۵,۱۹/۷۵,۲۰,۲۰

$R = \text{Max} - \text{Min} = ۲۰ - ۲ = ۱۸\ ,\ R = cK \Rightarrow ۱۸ = c \times ۶ \Rightarrow c = ۳$

داده‌های هر دسته	دسته‌ها
۲	۲ − ۵
۷	۵ − ۸
۸/۵,۹,۱۰/۲۵	۸ − ۱۱
۱۱/۲۵,۱۱/۷۵,۱۲/۵,۱۳,۱۳/۵	۱۱ − ۱۴
۱۴/۵,۱۵,۱۶/۲۵,۱۶/۵	۱۴ − ۱۷
۱۷,۱۷/۷۵,۱۸,۱۹,۱۹/۲۵,۱۹/۷۵,۲۰,۲۰	۱۷ − ۲۰

اما خوشبختانه یا متأسفانه در کنکور به ما چند داده نمی‌دهند و بگویند آن‌ها را دسته‌بندی کنید. بلکه اطلاعاتی از یک جدول دسته‌بندی در اختیار ما می‌گذارند و اطلاعات دیگری را می‌خواهند که برای حل این تیپ از مسائل با الهام از یک روش مهندسی یک مدل ساده و مفهومی برایتان ارائه می‌کنم که دیگر نیازی به استفاده از فرمول و یا روش‌های پیچیده و غیرقابل لمس نیست. روش از این قرار است:

روش ساختمانی برای حل مسائل دسته‌بندی کنکور



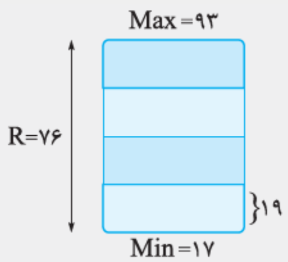
در این روش فرض می‌کنیم یک ساختمان K طبقه به ارتفاع R داریم که طول (ارتفاع) هر طبقه c است و تمام اطلاعات داده‌شده در مسئله را روی این ساختمان پیاده می‌کنیم؛ مطابق شکل:

وایسا!! در بسیاری از مسائل دسته‌بندی صحبت از دستهٔ وسط به میان می‌آید که شمارهٔ این دسته برابر است با:

$\text{شمارهٔ دستهٔ وسط} = \dfrac{K+۱}{۲}$

طبیعی است که اگر تعداد طبقات زوج باشد، دستهٔ وسط وجود ندارد.

مثال۳ **بیشترین و کم‌ترین داده‌های آماری به ترتیب ۹۳ و ۱۷ هستند. اگر این داده‌ها را در ۴ طبقه دسته‌بندی کنیم، طول هر دسته چه‌قدر است؟**

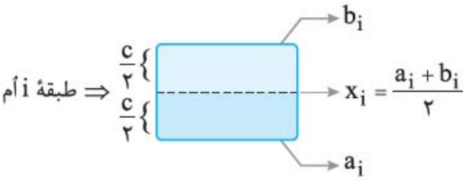


پاسخ۳ ارتفاع کف طبقهٔ اول ساختمان ۱۷ و ارتفاع سقف طبقهٔ آخر ساختمان ۹۳ است، پس ارتفاع این ساختمان $R = ۹۳ - ۱۷ = ۷۶$ است. حال یک ساختمان به ارتفاع ۷۶ داریم که ۴ طبقه است، بنابراین طول هر طبقه $۱۹ = \frac{۷۶}{۴}$ است.

البته این مسئله بسیار ساده و ابتدایی بود و با همان رابطهٔ $R = cK$ نیز به راحتی قابل حل بود. یعنی:

$R = \text{Max} - \text{Min} = ۹۳ - ۱۷ = ۷۶ \Rightarrow ۷۶ = c \times ۴ \Rightarrow c = ۱۹$

④ **جزئیات درون هر طبقه:** یک طبقه از این ساختمان K طبقهٔ رسم‌شده را در نظر بگیرید. درون هر طبقه ۳ چیز مهم وجود دارد که عبارت‌اند از:



الف) **کران پایین دسته:** به ارتفاع کف هر طبقه، کران پایین آن طبقه گفته می‌شود و با a_i نشان داده می‌شود.

ب) **کران بالای دسته:** به ارتفاع سقف هر طبقه کران بالای آن طبقه گفته می‌شود و با b_i نشان داده می‌شود.

پ) **مرکز دسته:** اگر در یک دسته (طبقه) کران پایین a_i و کران بالا b_i باشد، مرکز آن دسته که آن را با نماد x_i نشان می‌دهند و به آن **نشان دسته** یا **نمایندهٔ دسته** هم گفته می‌شود، از میانگین کران بالا و پایین (سقف و کف طبقه) به دست می‌آید.

دو چیز مهم دربارهٔ مرکز دسته

① مرکز هر دسته در واقع ارتفاع میان‌طبقه را نشان می‌دهد و می‌توان تمام داده‌های موجود در یک طبقه را **برابر مرکز دسته** فرض کرد.

② اگر مرکز یک دسته x_i و طول طبقات c باشد، برای پیداکردن کران بالا و پایین آن دسته کافی است **نیم‌طبقه**، از مرکز دسته به بالا یا پایین برویم، یعنی کران بالا $x_i+\frac{c}{۲}$ و کران پایین $x_i-\frac{c}{۲}$ خواهد بود.

دو چیز مهم دربارهٔ دسته‌ها

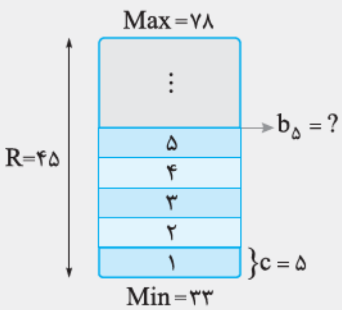
① اگر کران پایین یک دسته a_i و کران بالای آن b_i باشد، بازه‌ای که آن دسته را مشخص می‌کند به صورت $[a_i,b_i)$ خواهد بود. مگر دستهٔ (طبقهٔ) آخر که به صورت $[a_i,b_i]$ می‌باشد، یعنی:

هرگز سقف (کران بالای) یک طبقه جزء آن طبقه نیست مگر در طبقهٔ آخر.

② همیشه فاصلهٔ کف (کران پایین) دو طبقهٔ متوالی یا سقف (کران بالای) دو طبقهٔ متوالی یا فاصلهٔ دو میان‌طبقهٔ (مرکز یا نشان دستهٔ) متوالی، طول دسته‌ها (ارتفاع طبقات) را به ما می‌دهد، یعنی: $c=a_{i+۱}-a_i=b_{i+۱}-b_i=x_{i+۱}-x_i$

اگر کران بالای طبقات هفتم و هشتم در یک دسته‌بندی ۱۹ و ۲۳ باشد به این معنی است که در یک ساختمان چندطبقه ارتفاع سقف طبقهٔ هفتم (که البته همان ارتفاع کف طبقهٔ هشتم نیز محسوب می‌شود) برابر ۱۹ و ارتفاع سقف طبقهٔ هشتم ساختمان نیز ۲۳ است. بنابراین معلوم می‌شود در این ساختمان طول هر طبقه برابر $c=۲۳-۱۹=۴$ است.

مثال۴ **در یک دسته‌بندی آماری کم‌ترین داده ۳۳ و بیشترین داده ۷۸ می‌باشد. اگر طول دسته‌ها ۵ باشد، کران بالای دستهٔ وسط کدام است؟**



پاسخ۴ می‌دانیم که ارتفاع ساختمان (دامنهٔ تغییرات) برابر است با: $R=۷۸-۳۳=۴۵$ و ارتفاع هر طبقه (طول هر دسته) نیز ۵ است. پس تعداد طبقات برابر است با: $K=\frac{R}{c}=\frac{۴۵}{۵}=۹$ بنابراین شمارهٔ دستهٔ وسط $\frac{۹+۱}{۲}=۵$ است و حال ارتفاع سقف طبقهٔ پنجم مطابق شکل برابر است با: $b_۵=۳۳+۵\times۵=۵۸$

روش دسته‌وسط

به طورکلی ارتفاع میان‌طبقهٔ (مرکز دستهٔ) وسط همواره برابر است با:

$$x_M = \frac{Max + Min}{۲}$$

بنابراین برای پیداکردن حدود دستهٔ وسط کافی است نیم‌طبقه از مرکز دستهٔ وسط به بالا و پایین برویم:

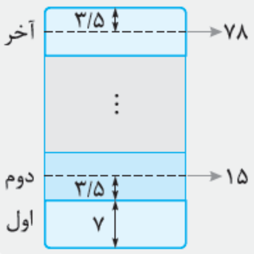
$$[x_M - \frac{c}{۲}, x_M + \frac{c}{۲})$$

حل مثال ۴ به روش دسته‌وسط: نیم‌طبقه از مرکز دستهٔ وسط به بالا و پایین می‌رویم، بنابراین:

$$x_۵ = \frac{۷۸ + ۳۳}{۲} = ۵۵/۵ \, , \, \frac{c}{۲} = ۲/۵ \Rightarrow \text{دستهٔ‌وسط} = [\underset{a_۵}{\underset{\downarrow}{۵۳}}, \underset{b_۵}{\underset{\downarrow}{۵۸}})$$

مثال ۵ در دسته‌بندی ۱۲۰ دادهٔ آماری در K طبقه، طول دسته‌ها ۷ به دست آمده است. اگر داده‌هایی که در یک دسته قرار دارند، یکسان در نظر گرفته شوند، مقدار مشترک آن‌ها در دستهٔ دوم و دستهٔ آخر ۱۵ و ۷۸ خواهد بود. دامنهٔ تغییرات این داده‌ها کدام است؟

پاسخ ۵ منظور از مقدار مشترک دسته‌ها، نشان دسته‌هاست:



$$\Rightarrow \begin{cases} Max = ۷۸ + ۳/۵ = ۸۱/۵ \\ Min = ۱۵ - ۷ - ۳/۵ = ۴/۵ \end{cases} \Rightarrow R = ۸۱/۵ - ۴/۵ = ۷۷$$

سوال‌ها

تیپ اول: دسته‌بندی با یک طول دستهٔ مشخص

۲۸- در دسته‌بندی داده‌های آماری، نمایندهٔ طبقات اول، دوم و آخر به ترتیب ۴۴، ۴۹ و ۸۴ می‌باشد. تعداد طبقات کدام است؟ *(انسانی دههٔ ۷۰)*

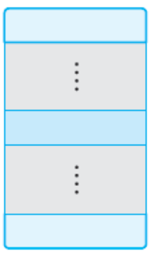
۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۲۹- در یک آزمون تحصیلی کم‌ترین نمره ۲۲ و بیشترین نمره ۹۷ و تمام نمرات اعداد صحیح هستند. اگر آن‌ها را در ۱۵ طبقه دسته‌بندی کنیم، حدود دستهٔ وسط کدام است؟ *(داخل انسانی ۷۹)*



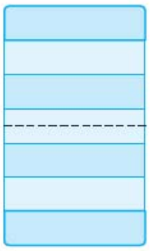
۱) ۶۲ − ۵۸

۲) ۶۳ − ۵۸

۳) ۶۱ − ۵۷

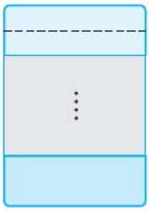
۴) ۶۲ − ۵۷

۳۰- داده‌های آماری اعداد صحیح هستند که در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر دامنهٔ تغییرات آن‌ها ۲۱ و نشان دستهٔ وسط ۳۶ باشد، حد بالای دستهٔ آخر کدام است؟ *(داخل انسانی ۸۰)*



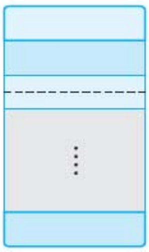
۱) ۴۵
۲) ۴۶
۳) ۴۷
۴) ۴۸

۳۱- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری ۱۷/۲ و ۲۲/۶ هستند. اگر کران پایین دستهٔ دوم ۱۷/۸ باشد، مرکز دستهٔ آخر، کدام است؟ *(خارج تجربی ۸۶)*



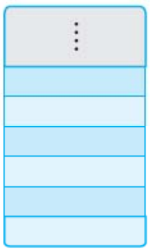
۱) ۲۱/۷
۲) ۲۱/۸
۳) ۲۲/۳
۴) ۲۲/۴

۳۲- در ۵۶ دادهٔ آماری، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها به ترتیب ۸۶ و ۶۵ است. این داده‌ها به ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر داده‌هایی که در یک دسته قرار دارند، یکسان در نظر گرفته شوند، مقدار مشترک آن‌ها در دستهٔ پنجم کدام است؟ *(داخل انسانی ۸۸)*



۱) ۷۷
۲) ۷۷/۵
۳) ۷۸
۴) ۷۸/۵

۳۳- در ۹۶ دادهٔ آماری، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها به ترتیب ۳۹ و ۷۵ هستند. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، کران بالای دستهٔ ششم کدام است؟ *(خارج انسانی ۹۳)*

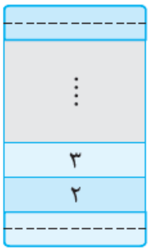


۱) ۵۹
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۳

۳۴- در دسته‌بندی داده‌های آماری، مناسب‌ترین مقداری که می‌توانیم به هر یک از افراد یک دسته نسبت دهیم، کدام است؟ *(داخل انسانی ۹۴)*

۱) مرکز دسته
۲) کران پایین
۳) میانگین مقادیر دسته
۴) کران بالا

۳۵- در دسته‌بندی داده‌های آماری نشان دستهٔ اول و آخر ۱۸/۵ و ۳۹/۵ و دامنهٔ تغییرات ۲۴ است. کران پایین دستهٔ سوم کدام است؟



۱) ۲۴/۵

۲) ۲۳

۳) ۲۶

۴) ۲۳/۵

۳۶- در دسته‌بندی داده‌های آماری کران پایین دستهٔ دوم ۷ و کران بالای دستهٔ چهارم ۱۹ و دامنهٔ تغییرات ۲۴ است. اگر داده‌هایی که در یک دسته قرار دارند، یکسان در نظر گرفته شوند، مقدار آن‌ها در دستهٔ آخر کدام است؟

۱) ۲۷

۲) ۲۵

۳) ۲۶

۴) ۲۶/۵

۳۷- در دسته‌بندی داده‌های آماری کران بالای دستهٔ آخر ۴۹ و کران پایین دستهٔ ماقبل آخر ۳۹ و دامنهٔ تغییرات ۳۵ است. حدود دستهٔ وسط کدام است؟

۱) ۲۹ – ۲۴

۲) ۲۹/۵ – ۲۴/۵

۳) ۳۴/۵ – ۲۹/۵

۴) ۳۴ – ۲۹

تیپ دوم: تغییر طول دسته یا تعداد طبقات

در این تیپ ابتدا صحبت از یک دسته‌بندی است. سپس طول دسته‌ها یا تعداد طبقات را تغییر می‌دهند و سؤالی از دسته‌بندی دوم می‌پرسند. چیز مهمی که در تغییرات طول دسته یا تعداد طبقات باید بدانیم این است که با تغییر طول دسته یا تعداد طبقات **۳ چیز** مهم همچنان ثابت می‌ماند:

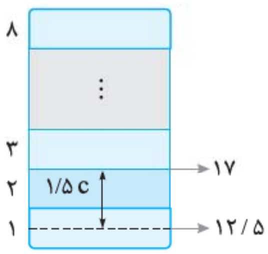
۱) مینیمم داده‌ها (کران پایین دستهٔ اول)

۲) ماکزیمم داده‌ها (کران بالای دستهٔ آخر)

۳) دامنهٔ تغییرات

یعنی طول ساختمان جدید و ارتفاع کف طبقهٔ اول و سقف طبقهٔ آخر همان است و فقط درون ساختمان طبقات بازسازی می‌شود، یعنی ساختمان را نمی‌کوبیم و ساختمان جدیدی بسازیم و در درون همان ساختمان قبلی تغییراتی ایجاد می‌کنیم.

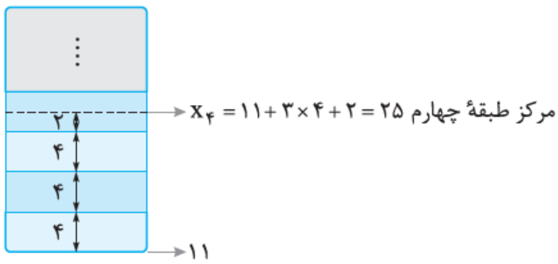
⋮ داده‌های آماری در ۸ طبقه دسته‌بندی شده‌اند به طوری که نشان دستهٔ اول ۱۲/۵ و کران پایین دستهٔ سوم ۱۷ می‌باشد. اگر این داده‌ها را در ۶ طبقه دسته‌بندی کنیم، مرکز دستهٔ چهارم کدام است؟



= به کمک اطلاعات داده‌شده Max، Min و R را پیدا می‌کنیم و سپس با این اطلاعات به سراغ دسته‌بندی دوم می‌رویم (البته در این مسئله نیازی به Max نیست ولی روش به دست آوردن آن را ببینید).

$$۱/۵c = ۱۷ - ۱۲/۵ = ۴/۵ \Rightarrow c = \underset{\text{طول هر طبقه}}{\underset{\downarrow}{۳}} \Rightarrow \begin{cases} R = ۸ \times ۳ = ۲۴ \\ \text{Min} = ۱۲/۵ - \underbrace{۱/۵}_{\text{نیم‌طبقه}} = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \text{Max} = ۱۱ + ۲۴ = ۳۵$$

حالا یک ساختمان ۲۴ متری داریم که ۶ طبقه است. پس طول هر طبقه ۴ $c = \frac{۲۴}{۶} = ۴$ است و کف طبقهٔ اول هم ۱۱ می‌باشد، پس اگر ۳/۵ طبقه بالا برویم، مطابق شکل به مرکز طبقهٔ چهارم می‌رسیم:

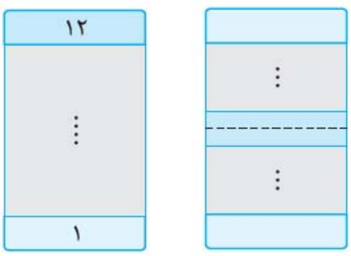


حالا با حل این نمونه به سراغ تست‌های تیپ دوم می‌رویم.

سوال‌ها

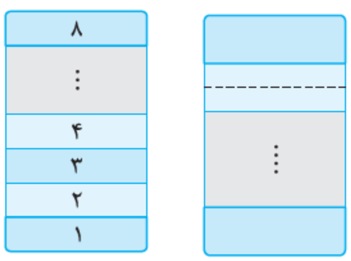
۳۸- داده‌های آماری در ۱۲ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. حدود دستهٔ اول به صورت [۲۳,۲۶) می‌باشد. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دستهٔ وسط کدام است؟ *(داخل انسانی ۹۰)*

۱) ۴۰/۵
۲) ۴۱
۳) ۴۱/۵
۴) ۴۲

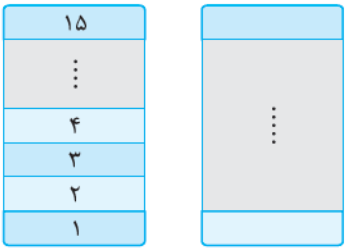


۳۹- داده‌های آماری در ۸ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. بازهٔ دستهٔ چهارم به صورت [۲۶,۲۹) می‌باشد. اگر این داده در ۶ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دستهٔ پنجم کدام است؟ *(خارج انسانی ۹۰)*

۱) ۳۴
۲) ۳۴/۵
۳) ۳۵
۴) ۳۵/۵



۴۰- در دسته‌بندی ۱۳۵ دادهٔ آماری در ۱۵ طبقه، حدود دستهٔ چهارم به صورت [۷۴,۷۷) است. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، کران پایین دستهٔ آخر کدام است؟ *(داخل انسانی ۹۳)*



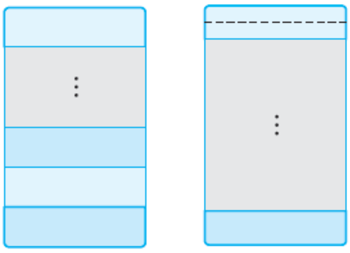
۱) ۹۵

۲) ۹۸

۳) ۱۰۲

۴) ۱۰۵

۴۱- در دسته‌بندی ۸۰ دادهٔ آماری حدود دستهٔ سوم [۲۵,۲۹) و کران پایین دستهٔ آخر ۴۹ است. اگر طول دسته‌بندی داده‌ها یک واحد کاهش یابد، در دسته‌بندی جدید نشان دستهٔ آخر کدام است؟



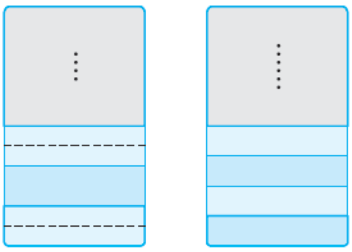
۱) ۵۱

۲) ۵۱/۵

۳) ۵۲

۴) ۵۰/۵

۴۲- در دسته‌بندی داده‌های آماری نشان دسته‌های اول و سوم ۱۳ و ۲۵ است. اگر طول دسته‌بندی داده‌ها را نصف کنیم، کران بالای دستهٔ چهارم کدام است؟



۱) ۲۱

۲) ۲۲

۳) ۱۹

۴) ۲۵

رسم جدول فراوانی

اصولاً رسم جدول فراوانی به منظور سروسامان دادن به داده‌ها می‌باشد که در بعضی موارد به دلیل **تنوع زیاد** داده‌ها یا **اختلاف زیاد** بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها مجبور به دسته‌بندی داده‌ها نیز می‌شویم. حال با رسم جدول فراوانی می‌خواهیم ببینیم تعداد دفعات تکرار یک داده یا داده‌های موجود در یک دسته چه‌قدر است؟ برای درک بهتر مطلب به دو مثال زیر دقت کنید:

مثال ۶ در یک نمونه‌گیری از ۲۰ دانش‌آموز یک کلاس گروه خونی آن‌ها به صورت زیر به دست آمده است:

A,O,O,AB,B,B,B,A,AB,AB,B,A,O,B,B,AB,B,B,A,A

یک جدول رسم کنید و فراوانی مربوط به هر گروه خونی را مشخص کنید.

پاسخ ۶ تنوع داده‌ها زیاد نیست و نیازی به دسته‌بندی وجود ندارد.

نوع گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی	۵	۸	۴	۳

(I)

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، آن اطلاعات پراکنده سروسامان داده شد و اکنون با یک نگاه به راحتی می‌توان فهمید ۵ نفر از دانش‌آموزان دارای گروه خونی A و ۸ نفر آن‌ها دارای گروه خونی B و ۴ نفر دارای گروه خونی AB و هم‌چنین ۳ نفر نیز دارای گروه خونی O هستند.

مثال۷ در معاینهٔ چشم دانش‌آموزان یک کلاس ۲۰ نفره، مجموع نمرهٔ چشم چپ و راست آن‌ها اعداد

۰/۲۵,۱/۵,۰,۲/۲۵,۳/۷۵,۱/۲۵,۴/۷۵,۶/۵,۷,۴/۵,۶,۹/۲۵,۱۱/۷۵,۰/۷۵,۱,۲,۲/۵,۱۰/۲۵,۱۱,۸

به دست آمده است. این داده‌ها را در ۴ دسته طبقه‌بندی کنید و یک جدول فراوانی برای این داده‌های دسته‌بندی‌شده رسم کنید.

پاسخ۷ همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تعداد داده‌ها بسیار زیاد است و از تنوع بسیار بالایی برخوردار هستند، بنابراین بهتر است آن‌ها را دسته‌بندی کنیم:

$$R = Max - Min = ۱۱/۷۵ - ۰ = ۱۱/۷۵ \Rightarrow c = \frac{R}{K} = \frac{۱۱/۷۵}{۴} \simeq ۲/۹۴$$

دقت کنید! همان‌طور که می‌بینید طول دسته یک عدد ناجور به دست آمد، در این موارد عدد را به سمت عدد رُند بعد از آن گرد می‌کنیم[۱]. یعنی طول دسته‌ها را $c = ۳$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه دسته‌ها به صورت $[۰,۳),[۳,۶),[۶,۹),[۹,۱۲]$ به دست می‌آید. حال جدول فراوانی برای این داده‌های دسته‌بندی‌شده به صورت زیر خواهد بود:

(II)

حدود دسته‌ها	۰ − ۳	۳ − ۶	۶ − ۹	۹ − ۱۲
فراوانی	۹	۳	۴	۴

این جدول نشان می‌دهد، ۹ نفر نمرهٔ چشم‌شان در بازهٔ $[۰,۳)$ و ۳ نفر در بازهٔ $[۳,۶)$ و ... است.

دقت کنید! این جدول فراوانی را به جای نشان‌دادن با حدود دسته‌ها با مرکز دسته‌ها نیز به صورت زیر می‌توان نشان داد:

(III)

مرکز دسته	۱/۵	۴/۵	۷/۵	۱۰/۵
فراوانی	۹	۳	۴	۴

حال با توجه به جدول‌های I، II و III به معرفی انواع فراوانی می‌پردازیم:

۱- فراوانی مطلق

به تعداد تکرارهای هر داده (در جدول (I)) یا تعداد داده‌های موجود در هر دسته یا طبقه (در جدول (II) یا (III)) فراوانی مطلق آن داده (یا آن طبقه) یا به اختصار **فراوانی** گفته می‌شود و با f_i برای دستهٔ iاُم نشان می‌دهند.

در جدول شمارهٔ (III) فراوانی دادهٔ $x_1 = ۱/۵$ برابر $f_1 = ۹$ است. یا در جدول شمارهٔ (I) فراوانی گروه خونی AB برابر $f_۳ = ۴$ می‌باشد و ... .

تنها چیزی که باید دربارهٔ فراوانی مطلق بدانیم

در یک جدول فراوانی، مجموع فراوانی‌های مطلق برابر تعداد کل داده‌هاست، یعنی: $f_1 + f_2 + \cdots + f_i = n$

۱- دسته‌ها باید به نوعی باشند که مجموع طول آن‌ها از دامنهٔ تغییرات کم‌تر نباشد.

در هر سه جدول (I)، (II) و (III) مجموع فراوانی‌ها برابر ۲۰ یعنی تعداد کل دانش‌آموزان کلاس است.

۲-فراوانی نسبی

اگر فراوانی مطلق هر دسته (داده) را بر فراوانی کل تقسیم کنیم، فراوانی نسبی آن دسته (داده) به دست می‌آید. فراوانی نسبی را با F_i برای دستهٔ iاُم نشان می‌دهند.

$$F_i = \frac{f_i}{n}$$

چیزهایی که باید دربارهٔ فراوانی نسبی بدانیم

① فراوانی نسبی هنگامی به کار می‌رود که می‌خواهیم توزیع فراوانی یک صفت را در دو جامعه با اندازه‌های متفاوت با هم مقایسه کنیم.

اگر بخواهیم گروه خونی یک کلاس ۲۰ نفره را با یک کلاس ۵۰ نفره مقایسه کنیم و فراوانی نسبی گروه خونی AB در کلاس ۲۰ نفره ۰/۲ و در کلاس ۵۰ نفره ۰/۱ به دست آید، نشان می‌دهد که در کلاس ۲۰ نفره فراوانی گروه خونی AB به نسبت کلاس ۵۰ نفره بیشتر است و گروه اول ۰/۲ جامعه و گروه دوم ۰/۱ جامعه را به خود اختصاص داده‌اند.

② فراوانی نسبی هر دسته (طبقه یا داده) همواره بین صفر و یک است و مجموع فراوانی‌های نسبی همواره برابر ۱ است، یعنی اگر داده‌ها در i دسته طبقه‌بندی شده باشند، داریم:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_i = 1$$

در جدول شمارهٔ (III) اگر بخواهیم جدول فراوانی نسبی را رسم کنیم، به صورت زیر است:

(IV)

مرکز دسته	۱/۵	۴/۵	۷/۵	۱۰/۵
فراوانی نسبی	۰/۴۵	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} F_i = 0/45 + 0/15 + 0/2 + 0/2 = 1$$

③ **تبدیل فراوانی نسبی به مطلق:** برای به دست آوردن فراوانی مطلق یک طبقه از روی فراوانی نسبی آن باید فراوانی نسبی را در تعداد کل داده‌ها (n) ضرب کنیم. بنابراین بدون دانستن مجموع فراوانی‌های مطلق (تعداد کل داده‌ها) نمی‌توانیم از روی فراوانی نسبی به مطلق برسیم:

$$f_i = n \times F_i$$

در جدول شمارهٔ (IV) اگر بدانیم تعداد داده‌های آماری ۲۰ است، فراوانی مطلق دستهٔ دوم برابر است با:

$$f_2 = 20 \times 0/15 = 3$$

۳-درصد فراوانی نسبی

اگر فراوانی نسبی که یک عدد کسری است را در ۱۰۰ ضرب کنیم، عددی به دست می‌آید که به آن درصد فراوانی نسبی گفته می‌شود و نماد آن P_i است.

$$P_i = F_i \times 100 = \frac{f_i}{n} \times 100$$

چیزهایی که باید دربارهٔ درصد فراوانی نسبی بدانیم

① هرجا پرسیده شود چند **درصد** داده‌ها فلان ویژگی را دارند، باید **درصد فراوانی نسبی** را پیدا کنیم.

② مجموع درصدهای فراوانی نسبی در هر جدول درصد فراوانی نسبی، همواره برابر ۱۰۰ است.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 100$$

اگر درصد فراوانی نسبی یک طبقه از ۲۰ دادهٔ دسته‌بندی شده برابر ۴۵ باشد، فراوانی نسبی و فراوانی مطلق این دسته را به دست آورید.

$$P_i = 45 \Rightarrow \begin{cases} P_i = F_i \times 100 \Rightarrow 45 = F_i \times 100 \Rightarrow F_i = 0/45 & \text{فراوانی نسبی} \\ P_i = \dfrac{f_i}{n} \times 100 \Rightarrow 45 = \dfrac{f_i}{20} \times 100 \Rightarrow f_i = 9 & \text{فراوانی مطلق} \end{cases}$$

سوال‌ها

تیپ اول: استخراج اطلاعات از روی جدول

۴۳- دانش‌آموزان یک مدرسه را با سال تولد یکسان وزن‌کشی کرده و عدد صحیح وزن آن‌ها را یادداشت کرده‌ایم. چند درصد آن‌ها کم‌تر از ۵۰ وزن دارند؟ *(خارج تجربی ۸۸)*

وزن	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱
تعداد	۸	۹	۱۲	۱۵	۶	۵

۱) ۷۲
۲) ۷۵
۳) ۷۸
۴) ۸۰

۴۴- در یک نمونه‌گیری از حرکت اتومبیل‌ها، F تعداد اتومبیل‌هایی با x سرنشین است. چند درصد اتومبیل‌ها با ۳ یا ۴ سرنشین هستند؟ *(داخل انسانی ۸۹)*

x	۱	۲	۳	۴	۵
F	۹۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۵۰

۱) ۴۵
۲) ۵۴
۳) ۵۸
۴) ۶۰

۴۵- جدول فراوانی زیر مربوط به ارقام تصادفی حاصل از ۸۰ بار پرتاب یک تاس است. درصد فراوانی نسبی اعداد ظاهرشده که مضرب ۳ هستند، کدام است؟ *(داخل انسانی ۷۹)*

رقم تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۱۵	۱۷	۱۴	۱۱	۱۱	۱۲

۱) ۳۱/۵
۲) ۳۲
۳) ۳۲/۵
۴) ۳۳

۴۶- اندازهٔ قد ۱۲۰ دانش‌آموز، در جدول زیر دسته‌بندی شده است. فراوانی دستهٔ چهارم کدام است؟ *(داخل تجربی ۸۳)*

مرکز دسته	۱۵۵	۱۵۸	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۷	۱۷۰
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۱۸	x	۲۰	۱۲

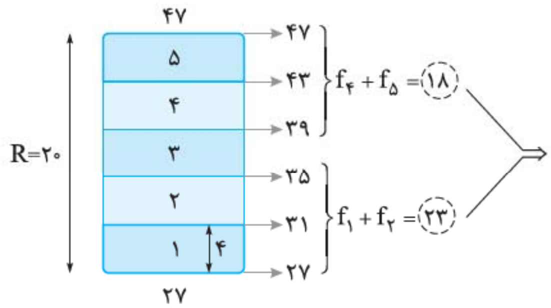
۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۳۰

تیپ دوم: ترکیب دسته‌بندی و فراوانی

در بعضی از تست‌های کنکور که کم هم نبوده‌اند، انواع فراوانی‌ها (مطلق، نسبی و ...) را با دسته‌بندی داده‌ها ترکیب می‌کنند، برای این‌که ببینیم چگونه باید این تیپ مسائل را راحت‌تر حل کنیم، یک نمونه مثال در این زمینه حل می‌کنیم.

در دسته‌بندی ۵۰ دادهٔ آماری بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها ۲۷ و ۴۷ هستند. اگر این داده‌ها در ۵ طبقه دسته‌بندی شده باشند و ۲۳ داده کم‌تر از ۳۵ و ۱۸ داده بزرگ‌تر مساوی ۳۹ باشند، درصد فراوانی نسبی دستهٔ وسط کدام است؟

چون صحبت از دسته‌بندی است، به سراغ ساختمان می‌رویم تا ببینیم چه اطلاعاتی داده شده و چه چیزهایی را می‌توان از روی آن به دست آورد: $R=47-27=20 \Rightarrow c=\frac{20}{5}=4 \Rightarrow$ طول دسته‌ها (ارتفاع طبقات) ۴ است.



$$\left.\begin{matrix} f_4+f_5=18 \\ f_1+f_2=23 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_3=50-23-18=9$$

$\Rightarrow$ درصد فراوانی دستهٔ وسط $=\frac{f_3}{n}\times 100=\frac{9}{50}\times 100=18$

سوال‌ها

۴۷- ۷۵ دادهٔ آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها ۲۷ و ۴۷/۸ است. می‌دانیم ۲۸ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۶ و ۴۰ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۹ می‌باشد، فراوانی مطلق دستهٔ وسط کدام است؟

(داخل ریاضی ۸۴)

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۲

۴۸- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری ۳۱ و ۵۲ می‌باشند. این داده‌ها در ۷ دسته، دسته‌بندی شده‌اند. ۳۷ درصد داده‌ها کم‌تر از ۴۰ و ۴۸ درصد آن‌ها بزرگ‌تر مساوی ۴۳ می‌باشند. اگر فراوانی کل ۸۰ باشد، فراوانی دستهٔ وسط کدام است؟

(داخل تجربی ۸۵)

۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۵

۴) ۱۶

۴۹- داده‌های آماری در ۶ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. ۲۲/۵ درصد این داده‌ها در یک دسته با فاصلهٔ [۵۲,۵۶) قرار دارند، اگر داده‌هایی را که در یک دسته قرار دارند، یکسان فرض کنیم ۳۶ بار مقدار ۵۴ منظور می‌شود. فراوانی کل کدام است؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۸۰ (خارج انسانی ۸۸)

۵۰- در دسته‌بندی ۱۲۰ دادهٔ آماری در ۹ طبقه، دستهٔ اول به صورت ۲۵ – ۲۲ می‌باشد. می‌دانیم ۴۵ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۴ و فراوانی نسبی دستهٔ وسط ۰/۲ است. تعداد داده‌های کم‌تر از ۳۷ کدام است؟

(خارج انسانی ۸۹)

۱) ۶۷

۲) ۷۶

۳) ۷۸

۴) ۸۷

۵۱- هشتاد دادهٔ آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ دادهٔ جدید به این داده‌ها افزوده شود، فراوانی نسبی دستهٔ وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دستهٔ مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$ (داخل ریاضی ۹۰)

۵۲- هفتاد و پنج دادهٔ آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. حدود دستهٔ سوم [۳۷,۴۳) است. اگر ۶۵ درصد داده‌ها کم‌تر از ۴۹ و فراوانی نسبی دستهٔ آخر و دستهٔ ماقبل آن ۰/۱۵ و ۰/۱۲ باشد، فراوانی مطلق دستهٔ [۴۹,۵۵) کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷
۳) ۹ ۴) ۶

۴- فراوانی تجمعی

فراوانی تجمعی هر دسته (طبقه) عبارت است از: مجموع فراوانی مطلق آن دسته و تمام دسته‌های قبلی. فراوانی تجمعی دستهٔ iاُم را با f_{c_i} نشان می‌دهند و در نتیجه: $f_{c_i}=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_i$

مثال۸ جدول زیر مربوط به نمرهٔ چشم دانش‌آموزان یک کلاس است. جدول فراوانی تجمعی این داده‌ها را رسم کنید.

حدود دسته‌ها	۰ – ۳	۳ – ۶	۶ – ۹	۹ – ۱۲
فراوانی	۹	۳	۴	۴

پاسخ۸

حدود دسته‌ها	۰ – ۳	۳ – ۶	۶ – ۹	۹ – ۱۲
فراوانی تجمعی	۹	۱۲	۱۶	۲۰

چیزهایی که باید دربارهٔ فراوانی تجمعی بدانیم

۱) فراوانی تجمعی هر طبقه بزرگ‌تر مساوی طبقهٔ قبلی است و مساوی‌بودن فراوانی تجمعی در دسته‌های i و $i-1$ نشان می‌دهد که فراوانی مطلق طبقهٔ i برابر صفر است.

۲) در میان تمام مقادیر فراوانی‌های تجمعی یک جدول، مقادیر دو فراوانی تجمعی از همه مهم‌ترند:

الف) فراوانی تجمعی طبقهٔ اول همان فراوانی مطلق طبقهٔ اول است. یعنی: $f_{c_1}=f_1$

ب) فراوانی تجمعی طبقهٔ آخر برابر با تعداد کل داده‌هاست، یعنی اگر i دسته داشته باشیم: $f_{c_i}=n$

۳) اگر فراوانی تجمعی طبقهٔ iاُم و طبقهٔ $(i-1)$اُم را از هم کم کنیم، فراوانی مطلق طبقهٔ iاُم به دست می‌آید:

$$f_i=f_{c_i}-f_{c_{i-1}}$$

۴) تبدیل فراوانی تجمعی به مطلق و نسبی: برای تبدیل یک جدول فراوانی تجمعی به فراوانی مطلق یا نسبی و ... کافی است فراوانی تجمعی هر طبقه را از طبقهٔ قبلی کم کنیم تا فراوانی مطلق آن طبقه به دست آید و تبدیل فراوانی مطلق به فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی را نیز که قبلاً گفتیم ... .

مثال۹ با توجه به جدول فراوانی تجمعی زیر، جدول فراوانی مطلق و درصد فراوانی نسبی را رسم کنید.

مرکز دسته	۴/۵	۷/۵	۱۰/۵	۱۳/۵
فراوانی تجمعی	۷	۱۵	۱۸	۲۰

پاسخ۹ فراوانی‌های مطلق طبقات عبارت‌اند از: $f_1 = ۷$ ، $f_2 = ۱۵ - ۷ = ۸$ ، $f_3 = ۱۸ - ۱۵ = ۳$ و $f_4 = ۲۰ - ۱۸ = ۲$

بنابراین:

مرکز دسته	۴/۵	۷/۵	۱۰/۵	۱۳/۵
فراوانی مطلق	۷	۸	۳	۲

حال برای هر کدام از دسته‌ها می‌توانیم درصد فراوانی نسبی را به دست آوریم که طریقهٔ محاسبهٔ آن $\frac{f_i}{n} \times ۱۰۰$ می‌باشد که با توجه به این‌که مجموع فراوانی‌ها $n = ۲۰$ است، رابطه به صورت $۵f_i$ درمی‌آید:

مرکز دسته	۴/۵	۷/۵	۱۰/۵	۱۳/۵
درصد فراوانی نسبی	۳۵	۴۰	۱۵	۱۰

۵-فراوانی تجمعی نسبی

اگر فراوانی تجمعی هر دسته را بر فراوانی کل (یا فراوانی تجمعی دستهٔ آخر) تقسیم کنیم، فراوانی تجمعی نسبی آن دسته به دست می‌آید و با نماد F_{c_i} نشان می‌دهند:

$$F_{c_i} = \frac{f_{c_i}}{n}$$

جدول فراوانی تجمعی نسبی برای مثال ۲ به صورت زیر است:

مرکز دسته	۴/۵	۷/۵	۱۰/۵	۱۳/۵
فراوانی تجمعی نسبی	$\frac{۷}{۲۰}$	$\frac{۱۵}{۲۰}$	$\frac{۱۸}{۲۰}$	۱

چیزهایی که باید دربارهٔ فراوانی تجمعی نسبی بدانیم

۱) فراوانی تجمعی نسبی دستهٔ آخر همواره برابر ۱ است.

۲) فراوانی تجمعی نسبی طبقهٔ اول، همان فراوانی نسبی طبقهٔ اول است، یعنی:

$$F_{c_1} = F_1$$

۳) تبدیل فراوانی تجمعی نسبی به فراوانی نسبی: اگر فراوانی تجمعی نسبی طبقه‌های i و $i-1$ را از هم کم کنیم، فراوانی نسبی طبقهٔ iاُم به دست می‌آید:

$$F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-1}}$$

مثال ۱۰ جدول زیر برای ۲۰ دادهٔ آماری رسم شده است. فراوانی مطلق دستهٔ سوم کدام است؟

حدود دسته	۰ − ۳	۳ − ۶	۶ − ۹	۹ − ۱۲
فراوانی تجمعی نسبی	۰/۲	۰/۶۵	۰/۸۵	۱

پاسخ ۱۰ فراوانی نسبی دستهٔ سوم $F_3 = F_{c_3} - F_{c_2} = 0/85 - 0/65 = 0/2$

$\Rightarrow$ فراوانی مطلق دستهٔ سوم $f_3 = F_3 \times n = 0/2 \times 20 = 4$

۶- درصد فراوانی تجمعی نسبی

همانند درصد فراوانی نسبی در این‌جا نیز برای به دست آوردن درصد فراوانی تجمعی نسبی کافی است فراوانی تجمعی نسبی را در ۱۰۰ ضرب کنیم [به طور کلی هرگاه در علم آمار، درصد شنیدید در ۱۰۰ ضرب کنید].

$$P_{c_i} = F_{c_i} \times 100 = \frac{f_{c_i}}{n} \times 100$$

چیزهایی که باید دربارهٔ درصد فراوانی تجمعی بدانیم

① درصد فراوانی تجمعی نسبی دستهٔ آخر همواره «۱۰۰» است.

② تبدیل درصد فراوانی تجمعی نسبی به درصد فراوانی نسبی: اگر درصد فراوانی تجمعی نسبی طبقه‌های i و $i-1$ را از هم کم کنیم، درصد فراوانی نسبی طبقهٔ i به دست می‌آید:

$$P_i = P_{c_i} - P_{c_{i-1}}$$

③ به طور کلی با کم‌کردن دو چیز تجمعی (دو فراوانی تجمعی، دو فراوانی تجمعی نسبی، دو درصد فراوانی تجمعی نسبی) کلمهٔ **تجمعی** حذف می‌شود و آن چیز بدون پسوند تجمعی به دست می‌آید (البته برای دسته‌ای که شمارهٔ بزرگ‌تر دارد) و به عبارت دیگر در نماد آن اندیس c حذف می‌شود.

$$P_{c_5} - P_{c_4} = P_5 \quad \text{یا} \quad f_{c_8} - f_{c_7} = f_8 \quad \text{یا} \quad F_{c_9} - F_{c_8} = F_9$$

همان‌طور که دیدید کلمهٔ **درصد** فقط می‌تواند به صفت **نسبی** اضافه شود. یعنی هرگاه صحبت از درصد نوعی فراوانی است، باید در انتهای عبارت حتماً کلمهٔ نسبی باشد، مثلاً ما چیزی به نام درصد فراوانی مطلق نداریم.

مثال ۱۱ در جدول فراوانی مقابل درصد فراوانی تجمعی نسبی طبقهٔ سوم را به دست آورید.

x_i	۵	۸	۱۱	۱۴
f_i	۹	۳	۵	۸

پاسخ ۱۱ مجموع کل داده‌ها $n = 9+3+5+8 = 25$ و فراوانی تجمعی طبقهٔ سوم $f_{c_3} = 5+3+9 = 17$ است، بنابراین:

$$P_{c_3} = \frac{f_{c_3}}{n} \times 100 = \frac{17}{25} \times 100 = 68$$

مرور و جمع‌بندی انواع فراوانی‌ها

۱- تکنیک به خاطرسپاری نام‌ها

برای این‌که نام انواع فراوانی‌ها را در خاطر داشته باشید، ۴ نکتهٔ کلیدی را در ذهن داشته باشید:

الف) اگر پسوند **نسبی** یا پیشوند **درصد** به کار برده **نشده** باشد، از f (اف کوچک) استفاده می‌شود.

ب) اگر پسوند **تجمعی** به کار رفته باشد، **اندیس c** باید به کار رود.

پ) اگر پسوند **نسبی** به کار رفته باشد، از F (اِف بزرگ) استفاده می‌شود.

ت) اگر پیشوند **درصد** به کار برده شده باشد، از حرف P استفاده می‌شود.

فراوانی: مطلق $= f_i$ ، تجمعی $= f_{c_i}$

فراوانی: نسبی $= F_i$ ، تجمعی نسبی $= F_{c_i}$

درصد فراوانی: نسبی $= P_i$ ، تجمعی نسبی $= P_{c_i}$

۲- تبدیل تمام انواع فراوانی‌ها به یکدیگر در یک رابطه

$$P_{c_i} \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} F_{c_i} \underset{\div n}{\overset{\times n}{\rightleftarrows}} f_{c_i} \underset{f_1+f_2+\cdots+f_i}{\overset{f_{c_i}-f_{c_{i-1}}}{\rightleftarrows}} f_i \underset{\times n}{\overset{\div n}{\rightleftarrows}} F_i \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} P_i$$

یعنی برای تبدیل فراوانی تجمعی به تجمعی نسبی و درصد تجمعی نسبی همان کارهایی را می‌کنیم که برای مطلق انجام می‌دهیم.

۳- محاسبهٔ همهٔ انواع فراوانی‌ها در یک جدول

س: فرض کنید داده‌های ۵,۹,۱۵,۱ / ۲۵,۱۳,۱۱ / ۵,۲۰,۰ / ۱۶,۱۴,۱۷ را می‌خواهیم در ۴ دسته طبقه‌بندی کنیم و انواع فراوانی را پیدا کنیم.

ج: $R = ۲۰ - ۰/۲۵ = ۱۹/۷۵ \Rightarrow c = \frac{۱۹/۷۵}{۴} \simeq ۴/۹ \Rightarrow c = ۵$

طریقهٔ محاسبه	۱۵ − ۲۰	۱۰ − ۱۵	۵ − ۱۰	۰ − ۵	**حدود دسته**
شمارش	۴	۳	۱	۲	**فراوانی مطلق $= f_i$**
$F_i = \frac{f_i}{n}$	۰/۴	۰/۳	۰/۱	۰/۲	**فراوانی نسبی $= F_i$**
$P_i = \frac{f_i}{n} \times ۱۰۰$	۴۰	۳۰	۱۰	۲۰	**درصد فراوانی نسبی $= P_i$**
$f_{c_i} = f_1 + f_2 + \cdots + f_i$	۱۰	۶	۳	۲	**فراوانی تجمعی $= f_{c_i}$**
$F_{c_i} = \frac{f_{c_i}}{n}$	۱	۰/۶	۰/۳	۰/۲	**فراوانی تجمعی نسبی $= F_{c_i}$**
$P_{c_i} = \frac{f_{c_i}}{n} \times ۱۰۰$	۱۰۰	۶۰	۳۰	۲۰	**درصد فراوانی تجمعی نسبی $= P_{c_i}$**

سوال‌ها

۵۳- اگر فراوانی تجمعی در طبقات دوم و سوم به ترتیب ۱۲ و ۱۷ و فراوانی نسبی طبقهٔ سوم ۰/۱ باشد، تعداد داده‌ها کدام است؟ (داخل ریاضی ۷۹)

۱) ۶۰ ۲) ۵۵ ۳) ۵۰ ۴) ۴۵

۵۴- در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شدهٔ زیر، اگر درصد فراوانی نسبی دستهٔ وسط ۲۴ باشد، فراوانی مطلق دستهٔ چهارم کدام است؟ (داخل ریاضی ۸۵)

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	a	۴۱	۵۰

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۷

۵۵- داده‌های جدول زیر، داده‌های آماری پیوسته است. چند درصد داده‌ها در فاصلهٔ (۱۸/۵,۲۱/۵] قرار دارند؟ (داخل تجربی ۸۸)

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۴۰

۵۶- در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شدهٔ زیر، اگر درصد فراوانی نسبی طبقهٔ وسط ۴۵ باشد، فراوانی نسبی طبقهٔ آخر کدام است؟

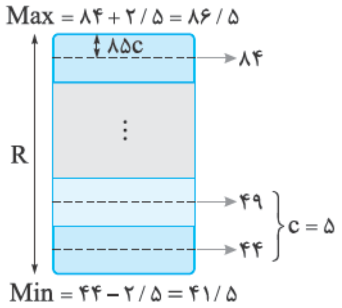
حدود دسته	۷ − ۲	۱۲ − ۷	۱۷ − ۱۲
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳a + ۲

۱) ۰/۳
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۲

۲۷- گزینهٔ «۳» شاید به نظر برسد که درصد یک درس در کنکور هر عددی می‌تواند باشد ولی چون درصد از رابطهٔ $\frac{\text{تعداد غلط ها} - ۳ \times \text{تعداد درستها}}{\text{سه‌برابر تعداد سوالات}}$ به دست می‌آید و با شمارش درست‌ها و غلط‌ها به دست می‌آید و تمامی اعداد بین صفر تا ۱۰۰ را نمی‌دهد، بنابراین متغیر کمّی گسسته است.

فصل ۴: دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی

۲۸- گزینهٔ «۳»



$$R = ۸۶/۵ - ۴۱/۵ = ۴۵ \Rightarrow k = \frac{R}{c} = \frac{۴۵}{۵} = ۹$$

۲۹- گزینهٔ «۴» از روش دستهٔ وسط $x_M = \frac{۹۷ + ۲۲}{۲} = ۵۹/۵$ به دست می‌آید و همچنین داریم:

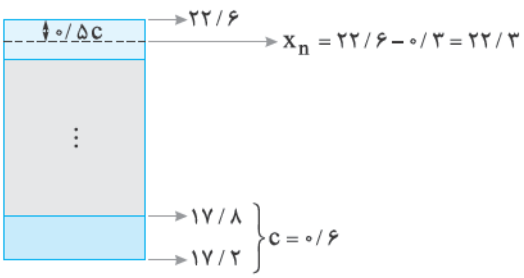
$$R = ۹۷ - ۲۲ = ۷۵ \Rightarrow c = \frac{R}{k} = \frac{۷۵}{۱۵} = ۵ \Rightarrow \text{حدود دستهٔ وسط} = [x_M - \frac{c}{۲}, x_M + \frac{c}{۲}] = [۵۷, ۶۲)$$

۳۰- گزینهٔ «۲» چون صحبت از دستهٔ وسط است، از روش دستهٔ وسط می‌رویم:

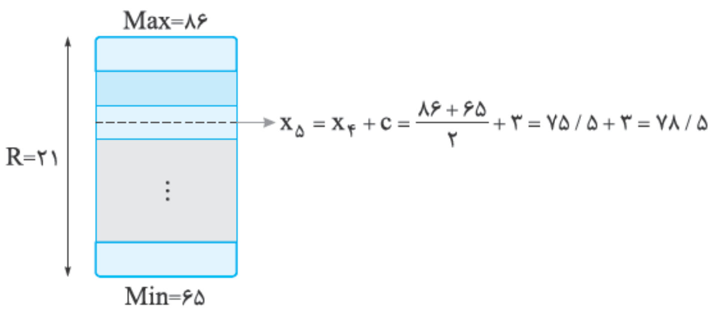
$$\begin{cases} ۳۶ = \frac{Max + Min}{۲} \\ ۲۱ = Max - Min \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Max + Min = ۷۲ \\ Max - Min = ۲۱ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲Max = ۹۳ \Rightarrow Max = ۴۶/۵$$

چون داده‌ها اعداد صحیح هستند، پس در دستهٔ آخر عددی بزرگ‌تر از ۴۶ وجود ندارد. در نتیجه می‌توان Max را همان ۴۶ در نظر گرفت.

۳۱- گزینهٔ «۳»



۳۲- گزینهٔ «۴» داده‌هایی که در یک دسته قرار دارند، اگر یکسان در نظر گرفته شوند، آن مقدار مرکز دسته است پس حالا باید مرکز دستهٔ پنجم را پیدا کنیم و چون $c = \frac{R}{k} = \frac{۲۱}{۷} = ۳$ می‌باشد، کافی است یک طبقه از مرکز دستهٔ وسط بالا برویم تا به مرکز دستهٔ پنجم برسیم:



البته می‌توانستیم به اندازهٔ ۲/۵ طبقه $(۲/۵c)$ از Max پایین بیاییم: $x_۵ = Max - ۲/۵c = ۸۶ - ۳ \times ۲/۵ = ۷۸/۵$

۳۳- گزینهٔ «۴»

$$R = ۷۵ - ۳۹ = ۳۶ \Rightarrow c = \frac{R}{k} = \frac{۳۶}{۹} = ۴ \Rightarrow b_۶ = Min + \underbrace{۶c}_{\text{۶ طبقه از Min بالا می‌رویم}} = ۳۹ + ۲۴ = ۶۳$$

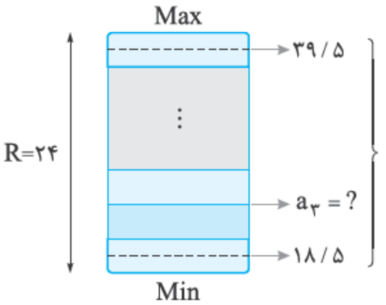
راه‌دوم باز هم می‌توانستیم از روش دستهٔ وسط استفاده کنیم. مرکز دستهٔ وسط (دستهٔ $۵ = \frac{۹+۱}{۲}$) برابر است با:

$$x_M = \frac{۷۵ + ۳۹}{۲} = ۵۷$$

حال کافی است ۱/۵ طبقه از مرکز دستهٔ وسط بالا برویم تا به سقف طبقهٔ ششم برسیم یعنی $b_۶ = ۵۷ + ۱/۵ \times ۴ = ۶۳$ خواهد بود.

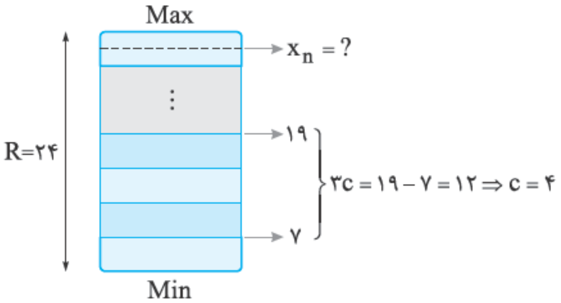
۳۴- گزینهٔ «۱» همهٔ اعداد موجود در یک دسته را می‌توان برابر با مرکز دسته در نظر گرفت.

۳۵- گزینهٔ «۲»



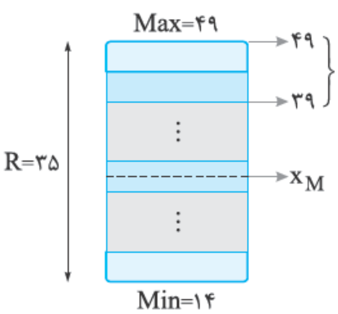
$$R - c = ۲۱ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۱۸/۵ + ۱/۵c = ۱۸/۵ + ۴/۵ = ۲۳$$

۳۶- گزینهٔ «۲»



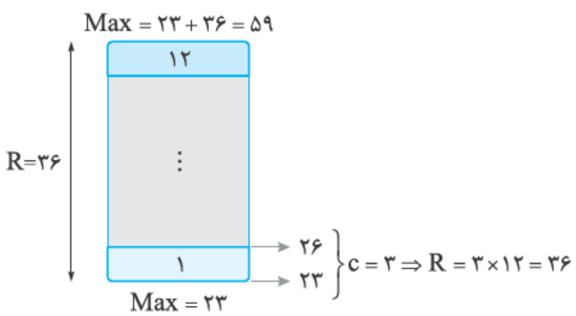
$$\Rightarrow Min = ۷ - ۴ = ۳$$
$$\Rightarrow Max = Min + R = ۲۷$$
$$\Rightarrow x_n = Max - \frac{c}{۲} = ۲۷ - ۲ = ۲۵$$

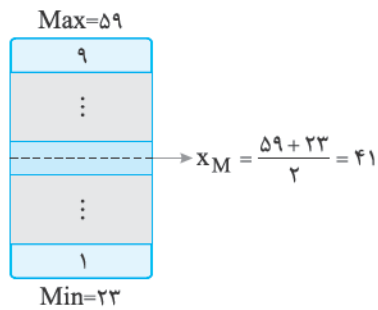
۳۷- گزینهٔ «۴»



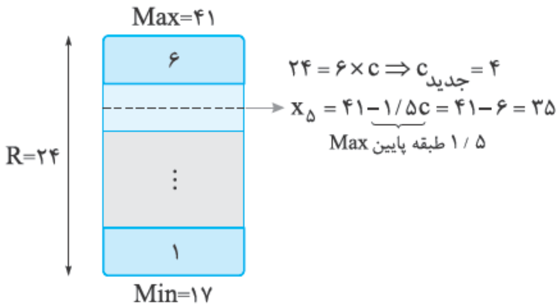
$$۲c = ۱۰ \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow Min = Max - R = ۴۹ - ۳۵ = ۱۴$$
$$\Rightarrow x_M = \frac{۴۹ + ۱۴}{۲} = ۳۱/۵$$
$$\Rightarrow \text{حدود دستهٔ وسط} = [x_M - \frac{c}{۲}, x_M + \frac{c}{۲})$$
$$= [۳۱/۵ - ۲/۵, ۳۱/۵ + ۲/۵) = [۲۹, ۳۴)$$

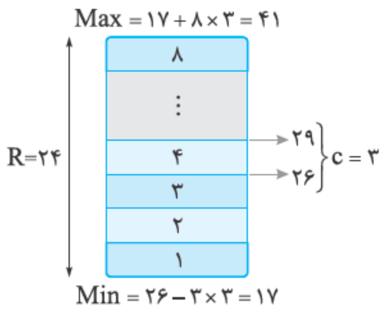
۳۸- گزینهٔ «۲»



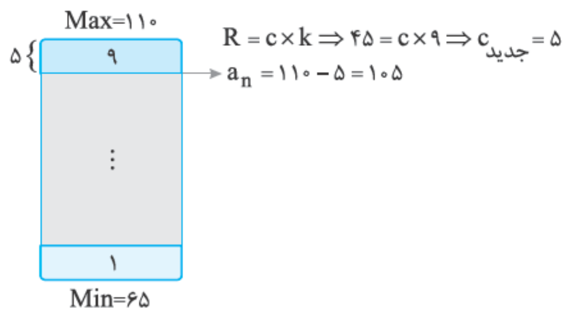


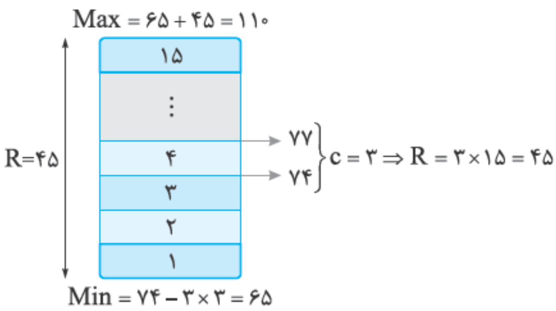
۳۹- گزینهٔ «۳»



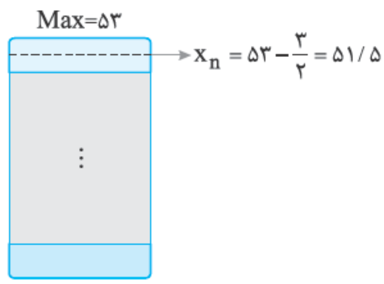


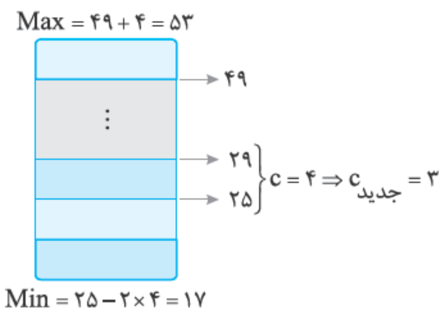
۴۰- گزینهٔ «۴»



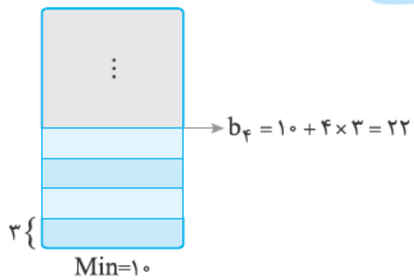


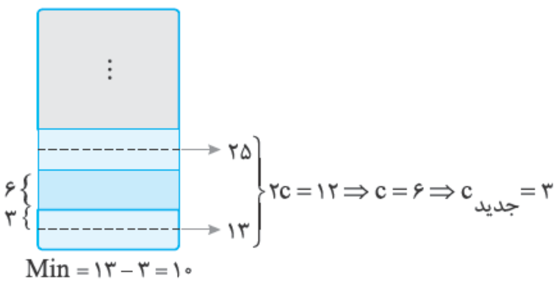
۴۱- گزینهٔ «۲»





۴۲- گزینهٔ «۲»





۴۳- گزینهٔ «۴» کلمهٔ درصد به معنای درصد فراوانی نسبی است، بنابراین:

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times ۱۰۰ = \frac{۸+۹+۱۲+۱۵}{۸+۹+۱۲+۱۵+۶+۵} \times ۱۰۰ = \frac{۴۴}{۵۵} \times ۱۰۰ = \frac{۴}{۵} \times ۱۰۰ = ۸۰$$

۴۴- گزینهٔ «۴»

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times ۱۰۰ = \frac{۲۲۰+۲۶۰}{۹۰+۱۸۰+۲۲۰+۲۶۰+۵۰} \times ۱۰۰ = \frac{۴۸۰}{۸۰۰} \times ۱۰۰ = ۶۰$$

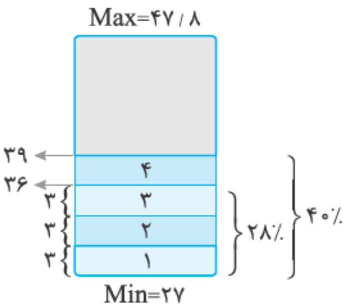
۴۵- گزینهٔ «۳» ۸۰ بار پرتاب یعنی $n=۸۰$ است: $P_i=\frac{f_i}{n}\times ۱۰۰=\frac{۱۴+۱۲}{۸۰}\times ۱۰۰=\frac{۲۶}{۸۰}\times ۱۰۰=۳۲/۵$

۴۶- گزینهٔ «۴» مجموع درصدهای فراوانی نسبی باید ۱۰۰ باشد، بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n}P_i=۱۰۰ \Rightarrow ۱۰+۱۵+۱۸+x+۲۰+۱۲=۱۰۰ \Rightarrow x=۲۵$$

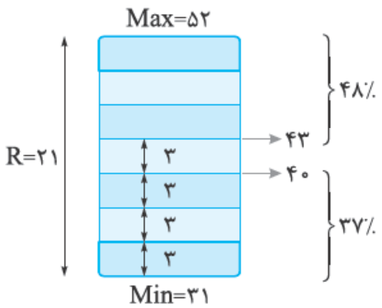
$$P_i=\frac{f_i}{n}\times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۵=\frac{f_i}{۱۲۰}\times ۱۰۰ \Rightarrow f_i=\frac{۲۵\times ۱۲۰}{۱۰۰}=۳۰$$

۴۷- گزینهٔ «۲» $R=۴۷/۸-۲۷=۲۰/۸ \Rightarrow c=\frac{R}{k}=\frac{۲۰/۸}{۷}\approx\frac{۲۱}{۷}=۳$



$$\Rightarrow P_۴=۴۰-۲۸=۱۲ \Rightarrow ۱۲=\frac{f_۴}{۷۵}\times ۱۰۰ \Rightarrow f_۴=۹$$

۴۸- گزینهٔ «۲»



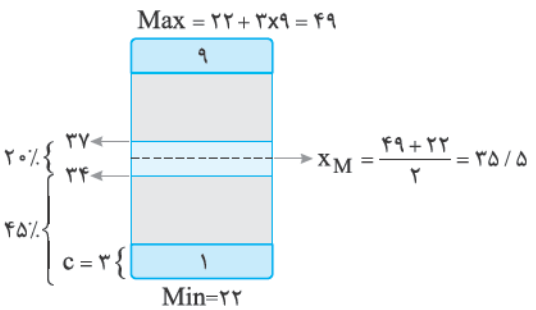
$$\Rightarrow P_۴=۱۰۰-۴۸-۳۷=۱۵$$

$$\Rightarrow ۱۵=\frac{f_۴}{۸۰}\times ۱۰۰ \Rightarrow f_۴=\frac{۱۵\times ۸۰}{۱۰۰}=۱۲$$

۴۹- گزینهٔ «۲» مرکز دستهٔ $[۵۲,۵۶)$ برابر $\frac{۵۲+۵۶}{۲}=۵۴$ است. حال فراوانی این دسته ۳۶ است. بنابراین:

$$P_i=\frac{f_i}{n}\times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۲/۵=\frac{۳۶}{n}\times ۱۰۰ \Rightarrow n=\frac{۳۶۰۰}{۲۲/۵}=۱۶۰$$

۵۰- گزینهٔ «۴» حدود دستهٔ وسط به روش مرکز دستهٔ وسط به صورت $[۳۴,۳۷)$ پیدا می‌شود:

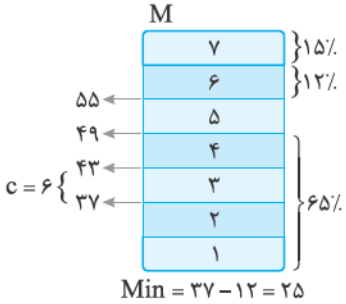


$$\Rightarrow P_i=\frac{f_i}{n}\times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۰+۴۵=\frac{f_i}{۱۲۰}\times ۱۰۰ \Rightarrow f_i=۷۸$$

۵۱- گزینهٔ «۳» تعداد داده‌هایی که به کل داده‌ها اضافه شده ۲۰ است. فرض کنیم از این ۲۰ تا x تا به دستهٔ وسط رسیده باشد، در این صورت اگر فراوانی دستهٔ وسط در حالت اولیه f باشد، اکنون $f+x$ است، با توجه به آن‌که فراوانی نسبی دستهٔ وسط ثابت مانده پس:

$$\frac{f}{۸۰}=\frac{f+x}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{f}{۴}=\frac{f+x}{۵} \Rightarrow \frac{f+x}{f}=\frac{۵}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{x}{f}=\frac{۱}{۴}$$

۵۲- گزینهٔ «۴»



$$\Rightarrow P_{۵} = ۱۰۰ - ۶۵ - ۱۵ - ۱۲ = ۸ \Rightarrow P_{۵} = \frac{f_{۵}}{n} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۸ = \frac{f_{۵}}{۷۵} \times ۱۰۰ \Rightarrow f_{۵} = ۶$$

۵۳- گزینهٔ «۳»

$$f_{۳} = f_{c_{۳}} - f_{c_{۲}} = ۱۷ - ۱۲ = ۵ \ , \ F_{۳} = \frac{f_{۳}}{n} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{۵}{n} \Rightarrow n = ۵۰$$

۵۴- گزینهٔ «۲»

$$f_{۳} = f_{c_{۳}} - f_{c_{۲}} = a - ۱۴ \Rightarrow P_{۳} = \frac{f_{۳}}{n} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۴ = \frac{a - ۱۴}{۵۰} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow a = ۲۶ \Rightarrow f_{۴} = f_{c_{۴}} - f_{c_{۳}} = ۴۱ - a = ۴۱ - ۲۶ = ۱۵$$

۵۵- گزینهٔ «۳» مرکز دستهٔ [۱۸/۵,۲۱/۵) عدد ۲۰ است، بنابراین درصد فراوانی نسبی دستهٔ سوم را می‌خواهد:

$$f_{۳} = f_{c_{۳}} - f_{c_{۲}} = ۲۵ - ۱۳ = ۱۲ \Rightarrow P_{۳} = \frac{f_{۳}}{n} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$$

۵۶- گزینهٔ «۴»

$$P_{۲} = \frac{f_{۲}}{n} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۴۵ = \frac{۱۶ - ۷}{۳a + ۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۳a + ۲ = \frac{۹ \times ۱۰۰}{۴۵} = ۲۰$$

$$\Rightarrow F_{۳} = \frac{f_{۳}}{n} = \frac{(۳a + ۲) - ۱۶}{۳a + ۲} = \frac{۲۰ - ۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۲۰} = ۰/۲$$

فصل ۵: نمودارها و تحلیل داده‌ها

۵۷- گزینهٔ «۴» مرکز دستهٔ [۱۲,۱۶) برابر ۱۴ است، در نتیجه:

$$P_{۴} = \frac{f_{۴}}{n} \times ۱۰۰ = \frac{۷}{۲ + ۳ + ۵ + ۷ + ۸} \times ۱۰۰ = ۲۸$$

۵۸- گزینهٔ «۲» مرکز دستهٔ [۴/۱,۵/۳) برابر ۴/۷ است، بنابراین ابتدا فراوانی نسبی این دسته را پیدا می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} F_i = ۱ \Rightarrow ۰/۱ + ۰/۱۵ + ۰/۲ + x + ۰/۳۵ + ۰/۰۵ = ۱$$

$$\Rightarrow x = ۰/۱۵ \Rightarrow F_{۴} = \frac{f_{۴}}{n} \Rightarrow ۰/۱۵ = \frac{f_{۴}}{۸۰} \Rightarrow f_{۴} = ۱۲$$

۵۹- گزینهٔ «۲» مساحت نمودار مستطیلی برابر $S = c \times n$ است که n مجموع فراوانی‌ها و c طول دسته‌هاست که در این‌جا $c = ۲$ است و مجموع فراوانی‌ها نیز برابر $\sum f_i = ۵ + ۴ + ۲ + ۸ + ۶ = ۲۵$ است. در نتیجه: $S = ۲۵ \times ۲ = ۵۰$ خواهد بود.

۶۰- گزینهٔ «۲»

$$\sum_{i=۱}^{n} f_i = ۷ + ۵ + ۲ + ۶ + ۳ + ۲ = ۲۵ \Rightarrow F_{c_{۴}} = \frac{f_{c_{۴}}}{n} = \frac{۷ + ۵ + ۲ + ۶}{۲۵} = \frac{۲۰}{۲۵} = ۰/۸$$

۶۱- گزینهٔ «۳» همواره سطح زیر نمودار چندبر فراوانی با سطح نمودار مستطیلی برابر است.

۶۲- گزینهٔ «۳»

$$S = S' \Rightarrow \frac{S}{S'} = ۱$$