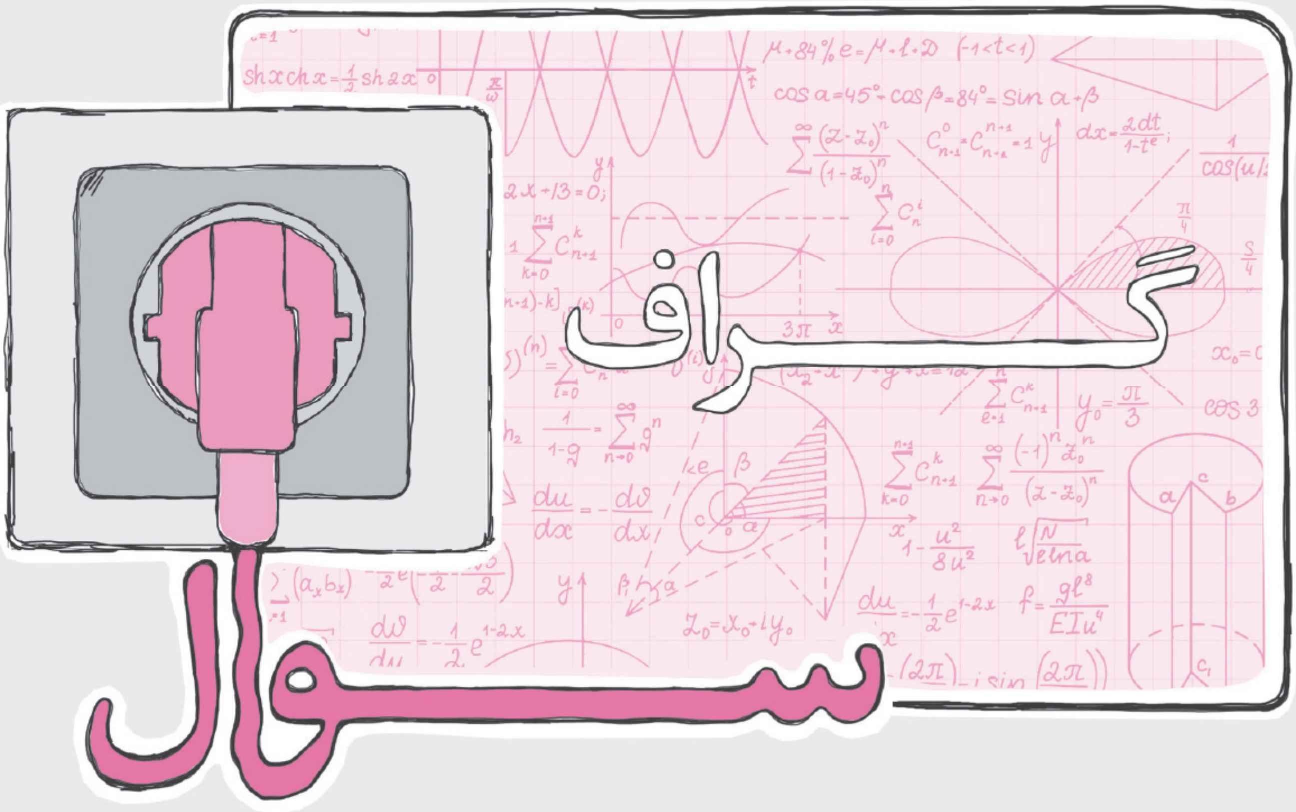
فهرست



آزمون ۳

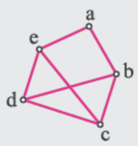
۲۱- در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج عددی .... و تعداد رأس‌های فرد، عددی .... است. *(سراسری ریاضی - ۸۶)*

۱) فرد ـ فرد ۲) فرد ـ زوج ۳) زوج ـ فرد ۴) زوج ـ زوج

۲۲- در کدام‌یک از گراف‌های ساده‌ی زیر فقط درجه‌ی ۲ تا از رأس‌ها ۵ است؟

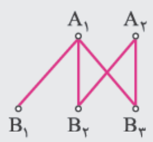
۱) گرافی از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۲۱
۲) گرافی از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۲۰
۳) گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۱۵
۴) گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۱۴

۲۳- با حذف کدام‌یک از یال‌های زیر، گراف زیر تبدیل به یک گراف بازه‌ها می‌شود؟



۱) ab ۲) bc ۳) cd ۴) de

۲۴- سه نفر به اسامی B_1، B_2 و B_3 متقاضی دو شغل A_1 و A_2 هستند، که گراف زیر توانایی آن‌ها را در انجام کارشان نشان می‌دهد. استخدام به چند روش ممکن است؟



۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵- برای تبدیل یک گراف کامل و $2r$ ـ منتظم از مرتبه‌ی p به گراف r ـ منتظم از مرتبه‌ی p باید ۳۹ یال را حذف کنیم. r کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۶- به ازای چند مقدار متمایز برای $a+b+c$، گرافی با درجه رأس‌های ۱ , ۴ , ۵ , ۶ , a , b , c وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷- در گراف ساده از مرتبه‌ی ۶، دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟ *(سراسری ریاضی - ۸۵)*

۱) ۰ , ۲ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵
۲) ۱ , ۲ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵
۳) ۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵
۴) ۱ , ۲ , ۳ , ۳ , ۴ , ۵

۲۸- در گرافی با اندازه‌ی ۱۱، بیشترین درجه‌ی رئوس برابر ۴ است. اگر این گراف، یک رأس از درجه‌ی ۴ و دو رأس از درجه‌ی ۲ داشته باشد، حداکثر چند رأس از درجه‌ی ۳ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹- در گرافی از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۴۰، برای δ چند مقدار متمایز می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۰- در گراف ساده‌ای $q=15$ و $\delta=3$. این گراف حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

آزمون ۴

۳۱- در یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۸ باشد، با افزودن چند یال گراف کامل می‌شود؟ *(سراسری ریاضی - ۹۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲- در گراف کامل K_6 چند مسیر به طول ۴ داریم که شامل رئوس a و b باشد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

۳۳- به یک گراف ۱ منتظم از مرتبه‌ی ۸، حداکثر چند یال می‌توان اضافه کرد تا گراف حاصل، ساده و ناهمبند باقی بماند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۴- فاصله‌ی رأس a با تمام رأس‌ها برابر ۱ است. اگر این گراف دارای ۷ رأس و کم‌ترین تعداد یال ممکن باشد، تعداد مسیرهای به طول ۲ در این گراف کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۳۵- چهار خانه‌ی d , c , b , a را به صورت جداگانه به مراکز آب و برق و گاز وصل می‌کنیم. در گراف به وجود آمده، از خانه‌ی a به خانه‌ی b چند مسیر به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

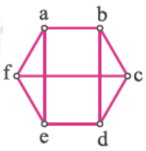
۳۶- حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه‌ی یک گراف همبند، برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۷ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۳۷- یک گراف همیلتنی از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۱۰ که رأسی از درجه‌ی ۴ دارد، دارای چند دور است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۸- در گراف ۳ ـ منتظم مقابل، چند دور با طول ۵ وجود دارد؟ *(سراسری ریاضی خارج - ۸۹)*



۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۳۹- در گرافی $p=22$ و $q=18$، این گراف حداکثر از چند بخش جدا از هم تشکیل شده است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۴۰- رابطه‌ی وجودداشتن مسیر، مجموعه‌ی رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۱۲ را به ۴ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. اگر هر بخش این گراف اویلری باشد، تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

آزمون ۵

۴۱- درختی که رئوسی از درجه‌ی ۵، ۶ و ۷ دارد، حداقل چند رأس با درجه‌ی ۱ دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۴۲- اگر $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف G باشد، اندازه‌ی G کدام است؟ *(سراسری ریاضی - ۹۱)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳- سطر اول ماتریس مجاورت یک درخت مرتبه‌ی ۷، دارای ۵ درایه‌ی ۱ است. این درخت چند رأس درجه‌ی ۱ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴- کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند حاصل‌ضرب درجه‌های رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ باشد؟

۱) صفر ۲) ۹۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۲۸۸

۴۵- در یک گراف همبند بدون دور مجموع مرتبه و اندازه برابر ۱۳ است. ماتریس مجاورت این گراف چند درایه‌ی صفر دارد؟

۱) ۲۶ ۲) ۳۷ ۳) ۴۲ ۴) ۵۰

۴۶- چند نوع گراف از مرتبه‌ی ۶ داریم که در آن $\Delta - \delta = ۲$ و بین هر دو رأس آن، یک و فقط یک مسیر وجود داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- ماتریس مجاورت گرافی از مرتبه‌ی ۶ دارای ۲۸ درایه‌ی یک است. این گراف چند دور به طول ۳ دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۴۸- چند درخت با دنباله‌ی درجه‌های رئوس ۱ ,... ,۱ ,۲ ,۳ ,۴ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۹- بین هر دو رأس از گراف G دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر این گراف شامل ۷ رأس درجه‌ی یک، ۵ رأس درجه‌ی ۲ و k رأس درجه‌ی ۳ باشد، k کدام است؟ *(سراسری ریاضی - ۸۷)*

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۰- اگر A ماتریس مجاورت گراف همبند G و درایه‌های واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس $A^۲$، عددهای ۱ ,۱ ,۱ ,۱ ,۱ ,۲ ,۲ ,۲ ,۳ ,۴ باشند، گراف G چند دور دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون ۳

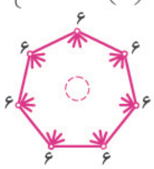
۲۱- گزینه۴ یکی از ویژگی‌های گراف ساده این است که تعداد رأس‌های فرد حتماً عددی زوج بوده و تعداد رأس‌های زوج از نظر زوجیت با مرتبه‌ی گراف یکسان است.

پس در این گراف ساده از مرتبه‌ی $p=16$، تعداد رأس‌های زوج، عددی **زوج** (همانند مرتبه‌ی گراف) و تعداد رأس‌های فرد، عددی **زوج** است.

۲۲- گزینه۲ در گراف کامل مرتبه‌ی p (K_p)، تعداد یال‌ها برابر $q=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$ بوده و تمامی رئوس از درجه‌ی $p-1$ (Full درجه) هستند و چنان‌چه یک یال از K_p حذف کنیم، درجه‌ی ۲ رأس به $p-2$ تغییر می‌کند.

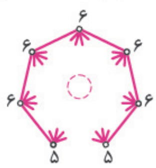
گزینه۱

$$\begin{cases} p=7 \\ q=21=\binom{7}{2} \end{cases}$$



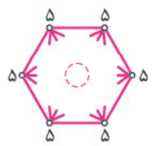
گزینه۲

$$\begin{cases} p=7 \\ q=20=\binom{7}{2}-1 \end{cases}$$



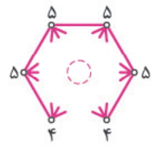
گزینه۳

$$\begin{cases} p=6 \\ q=15=\binom{6}{2} \end{cases}$$



گزینه۴

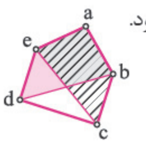
$$\begin{cases} p=6 \\ q=14=\binom{6}{2}-1 \end{cases}$$



۲۳- گزینه۱

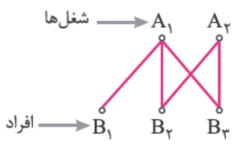
نکته اگر در گراف ساده‌ای، $n\geq 4$ ضلعی فاقد قطر (اصطلاحاً حفره) وجود داشته باشد، آن گراف حتماً بازه‌ای نیست.

مطابق شکل، در نمودار گراف ۲ چهارضلعی فاقد قطر abde و abce وجود دارد که با حذف یکی از یال‌های ab (گزینه۱) و ae، این چهارضلعی‌ها دیگر وجود خارجی نخواهند داشت! و گراف بازه‌ای می‌شود.

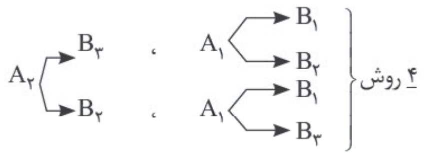


توجه عدم وجود n ضلعی فاقد قطر در یک گراف ساده، دلیلی قطعی برای بازه‌ای‌بودن آن گراف نیست و حتماً باید با یافتن بازه‌های مناسب برای رئوس گراف، این موضوع را بررسی کرد.

۲۴- گزینه۳ توجه داشته باشید که پروسه‌ی استخدام را شرکت انجام می‌دهد و طبیعی است که شغل‌های خود را به افراد مناسب واگذار می‌کند، نه این‌که به هر فرد متقاضی، حتماً شغل واگذار کند!



شرکت، مسلماً استخدام را از شغل بحرانی (که متقاضی کم‌تری دارد) شروع می‌کند. مطابق نمودار درختی زیر، ابتدا شغل $A_۲$ را که متقاضی کم‌تری (نسبت به $A_۱$) دارد به یکی از افراد $B_۳$ یا $B_۲$ واگذار کرده و همین روند را ادامه می‌دهیم.



با توجه به نمودار، ۴ روش برای استخدام در این شرکت وجود دارد.

۲۵- گزینه ۱ می‌دانیم که گراف کامل مرتبه‌ی p همان گراف «$(p-۱)$ منتظم از مرتبه‌ی p» است، پس:

$$\begin{cases} ۲r \text{ منتظم از مرتبه‌ی } p : (\text{گراف اول}) \xrightarrow{\text{گراف کامل}} ۲r = p-۱ \\ \Rightarrow \boxed{p = ۲r+۱} \Rightarrow q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲} = (۲r+۱)r \\ r \text{ منتظم از مرتبه‌ی } p : (\text{گراف دوم}) \rightarrow q' = \frac{pr}{۲} = \frac{(۲r+۱)r}{۲} \end{cases}$$

با توجه به فرض: $q - q' = ۳۹ \rightarrow (۲r+۱)r - \frac{(۲r+۱)r}{۲}$

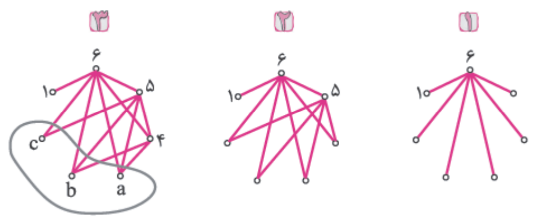
$$= \frac{(۲r+۱)r}{۲} = ۳۹ \Rightarrow (۲r+۱)r = ۷۸$$

معادله‌ی اخیر، یک معادله‌ی درجه دو است که با توجه به $۷۸ = ۱۳ \times ۶$ می‌توان نتیجه گرفت که $r = ۶$.

توجه از آن‌جا که تعداد یال‌های گراف کامل $K_{۱۳}$ برابر $\binom{۱۳}{۲} = ۷۸$ است، می‌توانستیم این‌طور نتیجه‌گیری کنیم که $p = ۲r+۱ = ۱۳$ و لذا $r = ۶$.

۲۶- گزینه ۴ ذهن خودتون رو درگیر روابط پیچیده نکنید، چرا که کلید حل این سؤال در رسم گراف است.

در این گراف مرتبه‌ی ۷، یک رأس درجه‌ی ۶ (Full درجه) داریم، که مطابق شکل زیر، رسم گراف را از آن شروع کرده و به ترتیب به رأس‌های درجه‌ی ۵ و ۴ می‌رسیم:



سه رأس مشخص‌شده، مربوط به درجات a، b و c هستند که مطابق نمودار، مقدار اولیه برای مجموع آن‌ها $a+b+c = ۳+۳+۲ = ۸$ است.

بسته به این‌که بین سه رأس a، b و c می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ یال وجود داشته باشد، سه مقدار دیگر ۱۰، ۱۲ و ۱۴ برای $a+b+c$ نیز به دست می‌آید.

بنابراین ۴ مقدار ۸، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ به‌دست می‌آید.

تمرین: اگر تعداد حالت‌های $\{a, b, c\}$ را می‌خواستیم (که سؤال دشوارتری بود) جواب چی می‌شد؟

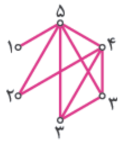
۲۷- گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱ $(۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۰)$: چون رأس درجه‌ی $۵ = p-۱$ (Full درجه) داریم پس نباید رأس درجه‌ی صفر وجود داشته باشد. ✗

گزینه ۲ $(۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۱)$: تعداد رأس‌های درجه‌ی فرد نباید عددی فرد باشد. ✗

گزینه ۳ $(۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۱)$: رأس درجه‌ی $۵ = p-۱$ (Full درجه) به تمامی رئوس وصل است. از طرفی رأس درجه‌ی $۴ = p-۲$ به غیر از یک رأس با تمامی رئوس مجاور خواهد بود و به همین دلیل نباید دو رأس درجه‌ی ۱ داشته باشیم و حداکثر یک رأس درجه‌ی ۱ باید وجود داشته باشد. ✗

گزینه ۴ $(۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱)$:

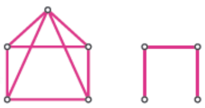


✓

۲۸- گزینه ۲ با توجه به فرض، یک رأس درجه‌ی $۴ = \Delta$ و دو رأس درجه‌ی ۲ وجود دارد و تعداد یال‌ها $q = ۱۱$ است، پس اگر تعداد رئوس درجه‌ی ۳ و ۱ را به ترتیب x و y بگیریم، آن‌گاه:

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۴ + ۲\times۲ + ۳x + y = ۲۲ \Rightarrow ۳x + y = ۱۴$$

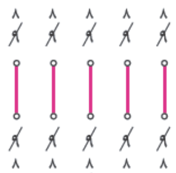
با توجه به معادله‌ی اخیر $x_{max} = ۴$ و $y = ۲$ خواهد بود. نمودار زیر مربوط به گرافی با دنباله‌ی درجات رئوس $۱, ۱, ۲, ۲, \underbrace{۳, ۳, ۳, ۳}_{\text{۴ راس}}, ۴$ است:



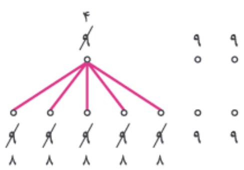
۲۹- گزینه ۱ گراف داده‌شده را با گراف کامل هم‌مرتبه‌ی خودش مقایسه می‌کنیم. اگر از گراف کامل $K_{۱۰}$ که $q = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$ یال دارد، ۵ یال برداریم به گراف فوق می‌رسیم.

می‌دانیم که در $K_{۱۰}$ درجه‌ی تمام رئوس برابر ۹ است که با حذف ۵ یال طبق دو حالت زیر به بیشترین و کم‌ترین مقدار δ می‌رسیم:

حالت اول سعی می‌کنیم ۵ یال را تا حد امکان از رئوس متمایز برداریم که با توجه به نمودار زیر، هر ۱۰ رأس از درجه‌ی ۸ خواهند شد، پس $\max(\delta) = ۸$.



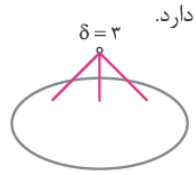
حالت دوم هر ۵ یال را از یک رأس برمی‌داریم که در این صورت $\min(\delta) = ۴$ به دست می‌آید:



با توجه به دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم که δ هر مقدار صحیحی بین $\min(\delta)$ و $\max(\delta)$ را می‌تواند بپذیرد، یعنی یکی از ۵ مقدار ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸.

۳۰- گزینه۳ یک جمله‌ی حکیمانه: با توجه به شرط مسئله یعنی $\delta=۳$، برای یافتن حداقل تعداد رئوس، تا می‌توانی به سمت گراف کامل برو!

ابتدا یک رأس از درجه‌ی $\delta=۳$ رسم می‌کنیم. برای رسم ۱۲ یال باقی‌مانده، چون $\underbrace{q(K_۵)}_{۱۰}<۱۲<\underbrace{q(K_۶)}_{۱۵}$، حداقل نیاز به ۶ رأس دیگر خواهیم داشت، پس این گراف حداقل ۷ رأس دارد.



این قسمت، شامل ۱۲ یال است
که با حداقل ۶ رأس رسم می‌شود.

آزمون ۴

۳۱- گزینه۲

نکته در یک گراف ساده از مرتبه‌ی p:

اولاً $q\le\binom{p}{۲}$ است، زیرا در غیر این صورت، گراف غیرساده خواهد بود!

ثانیاً اگر $q<p-۱$ باشد، قطعاً ناهمبند است؛ به بیان دیگر، اگر $q\ge p-۱$ باشد، نموداری همبند می‌توان برای آن رسم کرد.

$p+q=۸\longrightarrow$

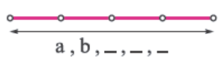
p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
q	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

غیرساده ← → ناهمبند

گراف G

از آن‌جا که گراف کامل مرتبه‌ی ۴ $(K_۴)$، $q=\binom{۴}{۲}=۶$ یال دارد، لذا با افزودن ۲ یال جدید به گراف G، کامل خواهد شد.

۳۲- گزینه۱ مسیر به طول ۴ از ۵ رأس تشکیل می‌شود که طبق صورت سؤال، a و b باید جزء آن‌ها باشند. لذا ۳ رأس دیگر این مسیر را باید از بین ۴ رأس باقی‌مانده‌ی $K_۶$ انتخاب کرد که به $\binom{۴}{۳}$ حالت صورت می‌گیرد.

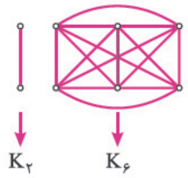


حال باید تعداد جایگشت‌های این ۵ رأس را حساب کرده و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم، زیرا برگشت هر مسیر، مسیر جدید به حساب نمی‌آید.

پس تعداد مسیرهای موردنظر برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}\times\frac{۵!}{۲}=۴\times\frac{۱۲۰}{۲}=۲۴۰$$

۳۳- گزینه۳ گراف ۱ منتظم از مرتبه‌ی ۸ به صورت  است. حداکثر تعداد یال‌های افزودنی به این گراف، برای آن‌که هم‌چنان ناهمبند (و البته ساده) بماند، مربوط به حالتی است که نمودار گراف به صورت اجتماع یک $K_۶$ با یک $K_۲$ باشد، یعنی نمودار زیر:

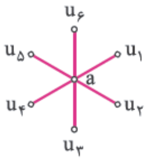


تعداد این یال‌های افزودنی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[\binom{۶}{۲}+\binom{۲}{۲}]-۴=(۱۵+۱)-۴=۱۲$$

۳۴- گزینه۳ طبق تعریف، فاصله‌ی دو رأس u و v از هم، طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است.

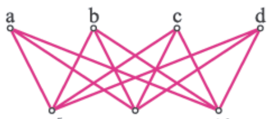
با توجه به صورت سؤال، فاصله‌ی رأس a از تمام رأس‌ها برابر ۱ است و این یعنی رأس a با تمام رأس‌ها مجاور است و در نتیجه نمودار آن به صورت زیر است که کم‌ترین تعداد یال ممکن را دارد:



با توجه به نمودار گراف، در این گراف (به اصطلاح «درخت ستاره‌ای») هر مسیر به طول ۲ به صورت u_i — a — u_j است که در آن u_i و u_j دو رأس متمایز از بین رئوس $u_۱$ تا $u_۶$ است.

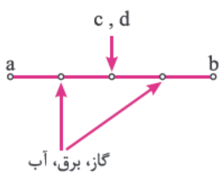
تعداد چنین مسیرهای به طول ۲ برابر است با «تعداد انتخاب‌های دو رأس متمایز از بین ۶ رأس»، یعنی $\binom{۶}{۲}=۱۵$.

۳۵- گزینه۱ با توجه به صورت سؤال، نمودار زیر رسم می‌شود:



در این گراف (به اصطلاح «گراف دوبخشی کامل») تمام رئوس بخش بالا با تمام رئوس بخش پایین، مجاور بوده و در هر بخش (چه بالا، چه پایین)، هر دو رأس غیرمجاور هستند.

مسیر به طول ۴ از a به b را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت که رأس‌های دوم و چهارم را باید از بین ۳ رأس بخش پایین و رأس سوم را از بین ۲ رأس c و d انتخاب کرد، پس تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۳\times۲\times۲=۱۲$



۳۶- گزینه‌ی ۱

نکته در یک گراف ساده‌ی همبند، حدود تعداد یال‌ها به صورت $\overbrace{p-1 \le q \le \binom{p}{2}}^{*}$ است؛ به بیان دیگر اگر اندازه‌ی گرافی در این نامساوی صدق کند، می‌توان برای آن، نموداری همبند رسم کرد.

کافی است اعداد گزینه‌ها را تجزیه کرده و رابطه‌ی (*) را در مورد آن بررسی کنیم.

گزینه‌ی ۱

$$\underset{p}{۴} \times \underset{q}{۶} = ۲۴$$

K_4 ✓

گزینه‌ی ۲

$p \times q = ۲۷$

p	q	
۱	۲۷	×
۲۷	۱	×
۳	۹	×
۹	۹	×

گزینه‌ی ۳

$p \times q = ۲۸$

p	q	
۱	۲۸	×
۲۸	۱	×
۲	۱۴	×
۱۴	۲	×
۴	۷	×
۷	۴	×

گزینه‌ی ۴

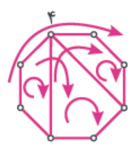
$p \times q = ۳۲$

p	q	
۱	۳۲	×
۳۲	۱	×
۲	۱۶	×
۱۶	۲	×
۴	۸	×
۸	۴	×

۳۷- گزینه‌ی ۴ گراف همیلتنی از مرتبه‌ی ۸، شامل دوری به طول ۸ (شامل تمام رئوس) است که در آن صورت درجه‌ی تمام رأس‌ها حداقل برابر ۲ خواهد بود.

از آن‌جا که این گراف ۱۰ یال دارد و شامل رأسی از درجه‌ی ۴ است، پس مطابق نمودار زیر، هر ۲ یال باقی‌مانده باید به یک رأس متصل باشد:

مطابق شکل، این گراف ۶ دور دارد.

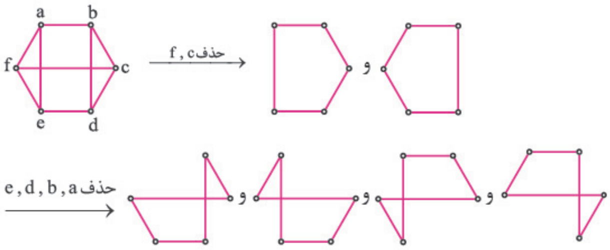


توجه چون در این سؤال، تعداد دورها را خواسته و طول آن‌ها مهم نیست، پس چگونگی اتصال ۲ یال باقی‌مانده به رأس درجه‌ی ۴ تأثیری در جواب ندارد.

۳۸- گزینه‌ی ۴ یک راهکار و توصیه‌ی حکیمانه: تا می‌توانی با مسئله، ساده برخورد کن!

در این سؤال، دور به طول ۵ در گراف مرتبه‌ی ۶، یعنی این که یک رأس و یال‌های متصل به آن را حذف کن و با بقیه‌ی رئوس یک دور به طول ۵ بساز.

در این گراف، مطابق شکل زیر ۶ دور به طول ۵ وجود دارد.



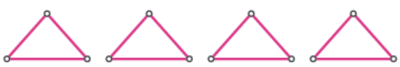
۳۹- گزینه‌ی ۳ یک ایده‌ی خوب: در یک گراف با مرتبه و اندازه‌ی ثابت، برای این‌که بخش‌های جدا از هم بیشتری داشته باشیم، باید تا حد امکان رأس ایزوله‌ی بیشتری داشته باشیم، یعنی یال‌های گراف را با رئوس کم‌تری رسم کنیم.

از آن‌جا که $\binom{۶}{۲} < ۱۸ < \binom{۷}{۲}$، پس $q = ۱۸$ یال را با حداقل ۷ رأس می‌توان رسم کرد که با $۲۲ - ۷ = ۱۵$ رأس ایزوله‌ی باقی‌مانده، در مجموع ۱۶ بخش جدا از هم (حداکثر مقدار ممکن) را تشکیل می‌دهند.

۴۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که کلاس‌های هم‌ارزی در رابطه‌ی «وجود مسیر در گراف»، همان بخش‌های جدا از هم (مؤلفه‌های همبندی) گراف را مشخص می‌کنند. پس با توجه به صورت سؤال، این گراف از ۴ بخش جدا از هم تشکیل شده است.

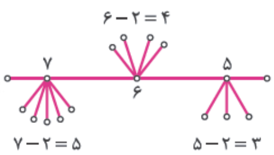
نکته یک گراف اویلری است، اگر و فقط اگر، اولاً همبند بوده، ثانیاً درجه‌ی تمام رئوس آن زوج باشد.

چون هر ۴ بخش گراف فوق، اویلری است، پس هر کدام از بخش‌ها حداقل دارای ۳ رأس و درجه‌ی هر رأس حداقل ۲ است. طبق فرض، این گراف ۱۲ رأس دارد، لذا تنها نمودار زیر را می‌توان برای آن رسم کرد که ۱۲ یال دارد:

 $\longrightarrow q = ۱۲$

آزمون ۵

۴۱- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم سه رأس از درجه‌ی ۵، ۶، ۷، تنها رئوس با درجه‌ی بیشتر از ۱ باشند و نمودار آن را رسم می‌کنیم.



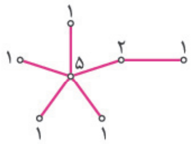
مطابق شکل، تعداد رئوس درجه‌ی ۱ برابر است با:

$$(۵ + ۴ + ۳) + ۲ = ۱۴$$

توجه نمودار این درخت را طوری رسم کردیم که خودت بتونی یک رابطه برای تعداد رئوس درجه‌ی ۱ پیدا کنی.

۴۲- گزینه‌ی ۲ از آن‌جا که تعداد یک‌های ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G، ۲ برابر تعداد یال‌های آن است. پس $2q = ۴$ و در نتیجه $q = ۲$.

۴۳- گزینه ۳ چون تعداد یک‌های هر سطر در ماتریس مجاورت یک گراف ساده برابر است با درجه‌ی رأس متناظر در آن گراف، پس با توجه به صورت سؤال، این درخت مرتبه‌ی ۷، یک رأس از درجه‌ی ۵ دارد. با رسم این رأس درجه‌ی ۵، می‌باید رأس هفتم را به یکی از ۵ رأس مجاور با رأس درجه‌ی ۵ متصل کنیم که نمودار زیر به دست می‌آید:



همان‌طور که می‌بینید، این درخت یک رأس از درجه‌ی $\Delta = 5$، یک رأس از درجه‌ی ۲ و پنج رأس از درجه‌ی $\delta = 1$ دارد.

توجه چون درخت، گرافی همبند و فاقد دور است، فقط همین نمودار قابل رسم است و لاغیر!

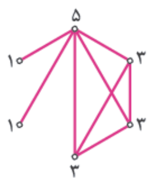
۴۴- گزینه ۲ در یک گراف ساده‌ی مرتبه‌ی ۶، اولاً باید تمامی درجه‌های رئوس کوچک‌ترمساوی ۵ باشند، ثانیاً تعداد رئوس فرد عددی زوج باشد.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه۱ هر ۶ رأس را از درجه‌ی صفر می‌گیریم (یعنی گراف تهی از مرتبه‌ی ۶)، که حاصل‌ضرب درجه‌های رئوس آن برابر صفر می‌شود. ✓

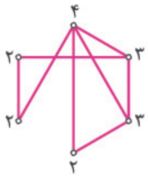
گزینه۲ عدد ۹۰ فقط یک عامل ۲ دارد ($90 = 2 \times 45$)، پس اگر حاصلضرب ۶ عدد برابر ۹۰ باشد، فقط یکی از آن‌ها زوج بوده و ۵ تای دیگر فرد است که در این صورت نمی‌توانند درجات رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ باشند. ✗

گزینه۳ با توجه به تجزیه‌ی $3^3 \times 5 = 135$، کافی است درجه‌های رئوس را ۵ , ۳ , ۳ , ۳ , ۱ , ۱ در نظر بگیریم که نمودار این گراف به صورت زیر است:



✓

گزینه۴ با توجه به تجزیه‌ی $3^2 \times 2^5 = 288$، کافی است درجه‌های رئوس را ۴ , ۳ , ۳ , ۲ , ۲ , ۲ در نظر بگیریم که شکل زیر، نمودار آن است:



✓

۴۵- گزینه ۲ واژه‌ی آشنای «گراف همبند بدون دور» همان درخت است که در آن رابطه‌ی $q = p - 1$ برقرار است.

طبق فرض: $p + q = 13 \xrightarrow{q=p-1} \begin{cases} p = 7 \\ q = 6 \end{cases}$

می‌دانیم ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q دارای p^2 درایه است که تعداد یک‌ها و صفرهای آن به ترتیب $2q$ و $p^2 - 2q$ است، پس تعداد صفرهای ماتریس مجاورت این درخت برابر می‌شود با $7^2 - 2(6) = 37$.

۴۶- گزینه ۳ اولاً یک ویژگی مهم در درخت (که تنها در درخت برقرار است) اینه که «بین هر دو رأس آن، فقط یک مسیر وجود دارد.»، پس گراف فوق، یک درخت است.

ثانیاً در درخت با بیش از یک رأس ($p \geq 2$)، مینیمم درجه‌ی رئوس برابر $\delta = 1$ است.

پس از رابطه‌ی $\Delta - \delta = 2$ نتیجه می‌گیریم که: $\Delta - 1 = 2 \Rightarrow \Delta = 3$

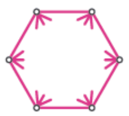
لذا خواسته‌ی سؤال، تعداد درخت‌های مرتبه‌ی ۶ با ماکزیمم درجه‌ی رأس $\Delta = 3$ است که مطابق شکل ۳ نمودار برای آن وجود دارد:

۴۷- گزینه ۱ ماتریس مجاورت این گراف ۲۸ درایه‌ی یک دارد، پس: $2q = 28 \Rightarrow q = 14$

این گراف (با مشخصات $p = 6 , q = 14$) از گراف کامل هم‌مرتبه‌اش (K_6)، یک یال کم‌تر دارد. پس باید تعداد دورهای به طول ۳ در K_6 را حساب کنیم و ببینیم با حذف یک یال از آن، چند دور به طول ۳ حذف می‌شود.

تعداد دورهای به طول ۳ در این گراف به صورت زیر به دست می‌آید:

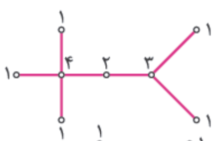
$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{تعداد دورهای به طول ۳ در } K_6} - \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{تعداد دورهای به طول ۳ شامل یال ab}} = 20 - 4 = 16$$



۴۸- گزینه ۲ برای این درخت، دو حالت می‌تواند وجود داشته باشد.

حالت اول رئوس از درجه‌ی ۳ و ۴ مجاور باشند؛ که در این صورت رأس درجه‌ی ۲ یا با رأس درجه‌ی ۳ مجاور است یا با رأس درجه‌ی ۴.

حالت دوم رئوس از درجه‌ی ۳ و ۴ مجاور نباشند.



(۱ درخت)

(۲ درخت)

پس در مجموع ۳ درخت با دنباله درجه‌ی رأس‌های فوق وجود دارد.

۴۹- گزینه۲

نکته تنها در درخت است که بین هر دو رأس آن، دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

در این درخت، رابطه‌ی $q = p - ۱$ برقرار است، پس:

$$\text{درخت:}\begin{cases} k \text{ رأس درجه‌ی ۳} \\ ۵ \text{ رأس درجه‌ی ۲} \Rightarrow \text{مرتبه}: p = k + ۱۲ \text{ و } \text{اندازه}: q = k + ۱۱ \\ ۷ \text{ رأس درجه‌ی ۱} \end{cases}$$

با توجه به رابطه‌ی $\sum \deg v_i = ۲q$ داریم:

$$k \times ۳ + ۵ \times ۲ + ۷ \times ۱ = ۲(k + ۱۱) \Rightarrow ۳k + ۱۷ = ۲k + ۲۲ \Rightarrow k = ۵$$

۵۰- گزینه۱ درایه‌های واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس $A^۲$ (درایه‌های قطری)، همان درجات رئوس متناظر است. پس ۱۰ عدد ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۴، دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های گراف **همبند** G را تشکیل می‌دهند:

از آن‌جا که رسم نمودار گراف G راحت نیست، ابتدا سراغ اندازه‌ی گراف می‌رویم:

$$۲q = \sum \deg v_i = ۴ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ + ۱ + \cdots + ۱ = ۱۸ \Rightarrow q = ۹$$

دقت کنید که اندازه‌ی گراف، یک واحد از مرتبه‌ی آن کم‌تر شد، یعنی $q = p - ۱$ که با توجه به همبندبودن گراف، نتیجه می‌گیریم که این گراف، حتماً باید درخت باشد، یعنی فاقد دور است، پس برای یافتن دورهای آن نیازی به رسم نمودارش نیست.

یک نتیجه‌گیری مهم: اگر در گرافی حداقل دو شرط از سه شرط ۱ $q = p - ۱$، ۲ همبندبودن و ۳ فاقد دور بودن، برقرار بود، آن گراف حتماً درخت بوده و تمام ویژگی‌های درخت در مورد آن برقرار است.