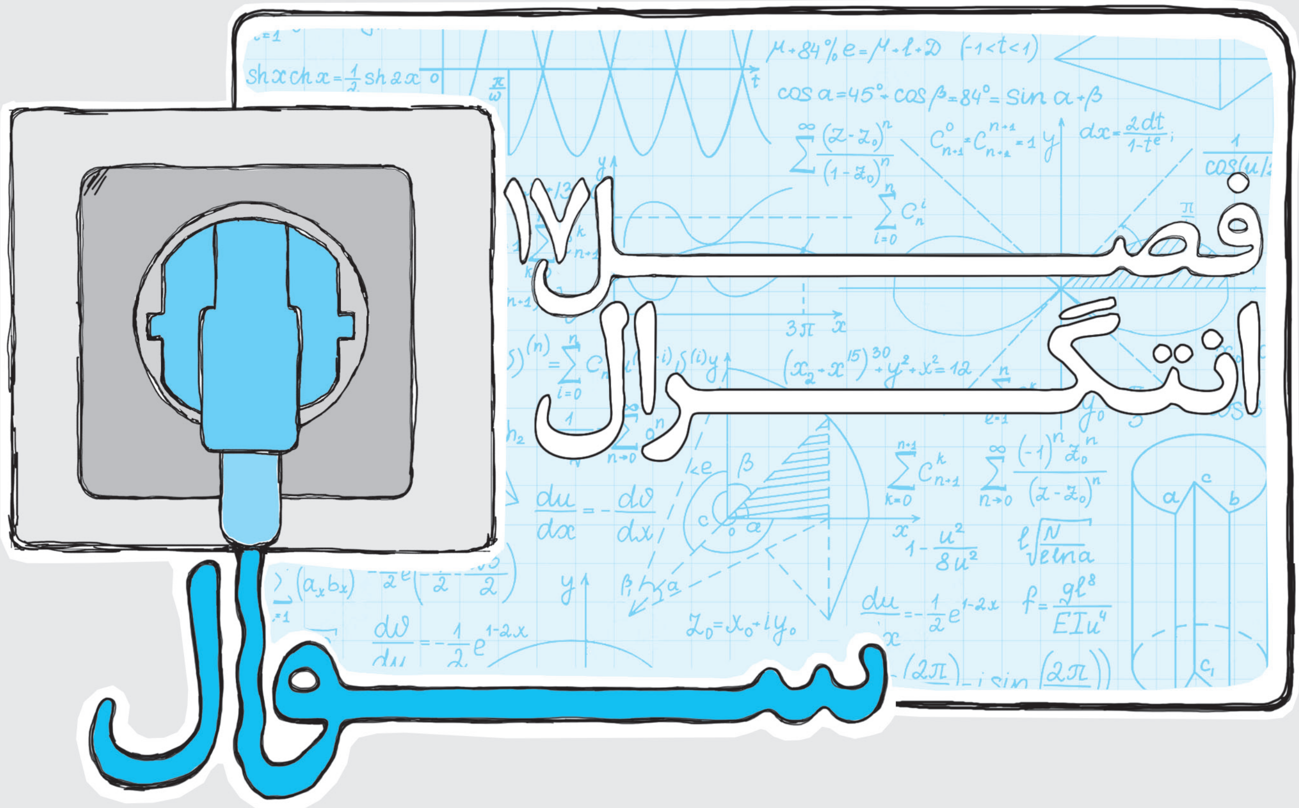


آزمون ۲۳

۴۴۱- اگر $A=\sum_{i=1}^{25}\frac{2}{i^2+2i+1}$ باشد، حاصل $\sum_{i=3}^{26}\frac{1}{2i^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{A}{4}-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{A}{4}-\frac{1}{4}$ ۳) $A-\frac{1}{8}$ ۴) $A-\frac{1}{4}$

۴۴۲- مجموع بالای تابع $f(x)=4x-x^2$ در بازهٔ $[1,3]$ برای $n=4$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۷/۷۵

۴۴۳- اگر $f(x)=\int_1^{\tan x}\frac{2t}{1+t^2}dt$ باشد، مقدار $f^{(3)}(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ ۲) $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $16\sqrt{3}$

۴۴۴- خط مماس بر منحنی $f(x)=\int_{2x}^{2}\frac{t}{t^2+2}dt$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، خط $3y+2=0$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۴۴۵- اگر U_n مجموع بالا برای تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ در بازهٔ $[-2,2]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) ۱ ۴) ۲

۴۴۶- حاصل $\int_4^{30}[\sqrt[3]{x}-1]dx$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۴۴۷- حاصل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 5x\sin x\,dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۴۴۸- حاصل $\int_1^4\sqrt{(x+\frac{4}{x})^2-16}\,dx$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) $11/5-8\text{Ln}2$ ۳) ۸/۵ ۴) $4\text{Ln}2+0/5$

۴۴۹- حاصل $\int_0^1 \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $-\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $-\frac{\pi^2}{8}$

۴۵۰- اگر $f(x)=\sqrt{1-x^4}$ باشد، حاصل $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f'(x)+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{5\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۵۱- حاصل $\int_0^4 \frac{x^2+1}{x+2}[\frac{x}{2}]dx$ کدام است؟

۱) $10-5\text{Ln}\frac{3}{2}$ ۲) $5\text{Ln}\frac{3}{2}-2$ ۳) $2+5\text{Ln}\frac{3}{2}$ ۴) $10+5\text{Ln}\frac{3}{2}$

۴۵۲- منحنی یکی از توابع اولیهٔ $f(x)=4x-1$ بر خطی به معادلهٔ $y-7x+9=0$ مماس است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این منحنی کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴۵۳- اگر $\int \frac{dx}{9x^2+25}=a\tan^{-1}bx+C$ باشد، حاصل $|a+b|$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{14}{15}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۵۴- مقدار متوسط تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ در بازهٔ $[0,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi-\text{Ln}4}{4}$ ۲) $\frac{\pi-\text{Ln}2}{4}$ ۳) $\frac{\pi-\text{Ln}2}{2}$ ۴) $\frac{\pi-\text{Ln}4}{2}$

۴۵۵- حاصل $\int_1^3 x(2-x)^5dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $-\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۴۵۶- حاصل $\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x+1}dx$ کدام است؟

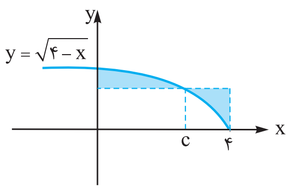
۱) $4\text{Ln}2-1$ ۲) $2\text{Ln}2-1$ ۳) $4\text{Ln}2-2$ ۴) $2\text{Ln}2+2$

۴۵۷- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=x^2-4$ و خط به معادلهٔ $y=5$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

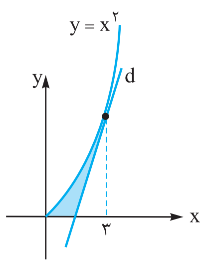
۴۵۸- مساحت ناحیهٔ محصور بین منحنی $y=(\tan x+\cot x)^2$، خطوط $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{3}$ و محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$



۴۵۹- با توجه به نمودار مقابل، اگر مساحت دو ناحیهٔ رنگی برابر باشد، c کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{20}{9}$ ۴) $\frac{17}{9}$



۴۶۰- در شکل زیر، خط d خط مماس بر تابع $f(x)=x^2$ در $x=3$ است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲/۷۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۲۵

۴۴۱-گزینه۱ سیگمای اول را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A=\sum_{i=1}^{25}\frac{2}{(i+1)^2}\Rightarrow \frac{A}{2}=\sum_{i=1}^{25}\frac{1}{(i+1)^2}$$

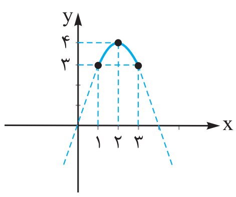
$$\Rightarrow \frac{A}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{26^2}$$

حالا سیگمای دوم را سعی می‌کنیم برحسب A بنویسیم:

$$\sum_{i=3}^{26}\frac{1}{2i^2}=\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{26}\frac{1}{i^2}=\frac{1}{2}\underbrace{(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{26^2})}_{\frac{A}{2}-\frac{1}{2^2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{A}{2}-\frac{1}{4})=\frac{A}{4}-\frac{1}{8}$$

۴۴۲- گزینه۴ تابع $f(x)=-x^2+4x$ را در بازهٔ $[1,3]$ رسم می‌کنیم:



بازهٔ $[1,3]$ را به $n=4$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و در هر قسمت، ماکسیمم تابع را انتخاب می‌کنیم: $\Delta x=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

بازه‌ها	$[1,\frac{3}{2}]$	$[\frac{3}{2},2]$	$[2,\frac{5}{2}]$	$[\frac{5}{2},3]$
ماکسیمم در هر بازه	$f(\frac{3}{2})$	$f(2)$	$f(2)$	$f(\frac{5}{2})$

پس مجموع بالا برابر است با:

$$U_4(f)=\Delta x.\sum_{i=1}^{4}f(u_i)=\frac{1}{2}(f(\frac{3}{2})+f(2)+f(2)+f(\frac{5}{2}))$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{15}{4}+4+4+\frac{15}{4})=\frac{1}{2}(\frac{31}{2})=\frac{31}{4}=7/75$$

۴۴۳- گزینه۴

نکته $(\int_v^u f(t)dt)'=u'.f(u)-v'.f(v)$

با استفاده از نکتهٔ بالا، $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=(\int_1^{\tan x}\frac{2t}{1+t^2}dt)'=(\tan x)'(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x})-0$$

$$=(\cancel{1+\tan^2}x)\frac{2\tan x}{\cancel{1+\tan^2}x}=2\tan x$$

حالا f'' و $f^{(3)}$ را هم حساب می‌کنیم:

$$f''(x)=(2\tan x)'=2(1+\tan^2 x)$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x)=2(2\tan x)(1+\tan^2 x)$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(\frac{\pi}{3})=2(2\sqrt{3})(1+(\sqrt{3})^2)=16\sqrt{3}$$

۴۴۴- گزینه ۱ اول f' را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\left(\int_{2x}^{2}\frac{t}{t^2+2}dt\right)'=0-(2x)'\frac{2x}{(2x)^2+2}=\frac{-4x}{4x^2+2}$$

شیب خط مماس بر f در نقطهٔ $x=1$ برابر با $f'(1)$ است:

$$f'(1)=\frac{-4(1)}{4(1)^2+2}=-\frac{2}{3}$$

حالا باید عرض نقطه‌ای به طول ۱ روی f را به دست آوریم:

$$y=f(1)=\int_{2}^{2}\frac{t}{t^2+2}dt=0$$

پس مختصات نقطهٔ موردنظر به صورت $A(1,0)$ است.

یادآوری $\int_a^a f(x)dx=0$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(1,0)$ با شیب $m=-\frac{2}{3}$ را می‌نویسیم:

$$y-0=-\frac{2}{3}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

خط فوق را با خط $3y+2=0$ قطع می‌دهیم:

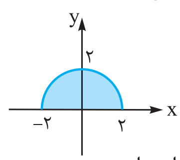
$$\begin{cases}y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\\ y=-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\Rightarrow -\frac{2}{3}x=-\frac{4}{3}\Rightarrow x=2$$

۴۴۵- گزینه ۲ تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ در تمام بازهٔ $[-2,2]$ پیوسته و کران‌دار است، پس انتگرال‌پذیر است.

می‌دانیم اگر تابعی انتگرال‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$ یا $\lim\limits_{n\to\infty}L_n$ با مقدار انتگرال آن در آن بازه برابر است. پس در این‌جا هم حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$ روی بازهٔ $[-2,2]$ با انتگرال زیر برابر است:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$$

می‌دانیم تابع $y=\sqrt{4-x^2}$ یک نیم‌دایره به شعاع ۲ و مرکز مبدأ است:

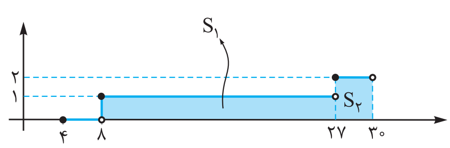


حاصل انتگرال خواسته‌شده برابر با مساحت نیم‌دایره است:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\pi(2)^2}{2}=2\pi$$

۴۴۶- گزینه ۲ تابع $f(x)=[\sqrt[3]{x}-1]$ را به صورت تابعی چندضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=[\sqrt[3]{x}]-1=\begin{cases}1-1 & 4\le x<8\\ 2-1 & 8\le x<27\\ 3-1 & 27\le x\le 30\end{cases}=\begin{cases}0 & 4\le x<8\\ 1 & 8\le x<27\\ 2 & 27\le x\le 30\end{cases}$$



حاصل انتگرال داده‌شده با مجموع مساحت S_1 و S_2 برابر است:

$$\int_{4}^{30}[\sqrt[3]{x}-1]dx=S_1+S_2=(27-8)(1)+(30-27)(2)=19+6=25$$

۴۴۷- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد ضرب به جمع زیر، عبارت داخل انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\sin 5x\sin x=-\frac{1}{2}[\cos 6x-\cos 4x]$$

عبارت به دست آمده را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 5x\sin x dx=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 6x-\cos 4x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 4x}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sin 2\pi}{6}-\frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{4}\right)-\left(\frac{\sin\pi}{6}-\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{4}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(0+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(0-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

۴۴۸- گزینه ۱ عبارت داخل رادیکال را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sqrt{\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-16}=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}+8-16}=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}-8}$$

$$=\sqrt{\left(x-\frac{4}{x}\right)^2}=\left|x-\frac{4}{x}\right|$$

عبارت داخل قدرمطلق را در بازهٔ $[1,4]$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$\left|x-\frac{4}{x}\right|=\begin{cases}-x+\frac{4}{x} & 1\le x<2\\ x-\frac{4}{x} & 2\le x\le 4\end{cases}$$

پس سادهٔ‌شدهٔ انتگرال برابر است با:

$$\int_1^4\left|x-\frac{4}{x}\right|dx=\int_1^2\left(-x+\frac{4}{x}\right)dx+\int_2^4\left(x-\frac{4}{x}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+4\mathrm{Ln}|x|\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^2}{2}-4\mathrm{Ln}|x|\right)\Big|_2^4$$

$$=\left((-2+4\mathrm{Ln}2)-\left(-\frac{1}{2}+4\underbrace{\mathrm{Ln}1}_{0}\right)\right)+\left((8-4\mathrm{Ln}4)-(2-4\mathrm{Ln}2)\right)$$

$$=-2+4\mathrm{Ln}2+\frac{1}{2}+8-4\underbrace{\mathrm{Ln}4}_{2\mathrm{Ln}2}-2+4\mathrm{Ln}2=4.5$$

۴۴۹- گزینه ۳ با فرض $\cos^{-1}x=u$ داریم:

$$u=\cos^{-1}x\Rightarrow u'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

پس عبارت داخل انتگرال برابر است با:

$$\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}=\cos^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=u.(-u')=-uu'$$

مشتق عبارت $-\frac{1}{2}u^2$ برابر با $-uu'$ است، پس تابع اولیه $\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ برابر با $-\frac{1}{2}(\cos^{-1}x)^2$ است:

$$\int_0^1\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}(\cos^{-1}x)^2\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\left((\cos^{-1}1)^2-(\cos^{-1}0)^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}$$

۴۵۰- گزینه۱ حاصل انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{f'(x)+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

تابع $f(x)=\sqrt{1-x^4}$ تابعی زوج است، پس تابع f' فرد است. از طرفی می‌دانیم اگر g تابعی فرد باشد، آن‌گاه $\int_{-a}^{a}g(x)dx=0$. تابع $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ از تقسیم یک تابع فرد بر یک تابع زوج به دست آمده است، پس تابعی فرد است و در نتیجه:

$$\int_{-\frac12}^{\frac12}\underbrace{\frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{تابع فرد}}dx=0$$

کافی است حاصل انتگرال دوم را به دست آوریم:

$$\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x\Big|_{-\frac12}^{\frac12}=\sin^{-1}(\frac12)-\sin^{-1}(-\frac12)$$

$$=\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}$$

۴۵۱- گزینه۳ بازهٔ $[0,4]$ را به دو بازهٔ $[0,2)$ و $[2,4]$ تقسیم می‌کنیم و در این دو بازه به جای $[\frac{x}{2}]$، عدد قرار می‌دهیم:

$$[\frac{x}{2}]=\begin{cases}0 & 0\le x<2\\ 1 & 2\le x<4\end{cases}$$

دقت $[\frac{x}{2}]$ در نقطهٔ $x=4$ برابر ۲ می‌شود، ولی در انتگرال‌گیری تک‌نقطه‌ها مهم نیستند!

انتگرال را به دو بازه تفکیک می‌کنیم:

$$\int_0^4\frac{x^2+1}{x+2}[\frac{x}{2}]dx=\underbrace{\int_0^2\frac{x^2+1}{x+2}(0)\,dx}_{0}+\int_2^4\frac{x^2+1}{x+2}(1)dx$$

$$=\int_2^4\frac{x^2+1}{x+2}dx=\int_2^4\frac{x^2-4+5}{x+2}dx=\int_2^4\frac{x^2-4}{x+2}dx+\int_2^4\frac{5}{x+2}dx$$

$$=\int_2^4(x-2)dx+5\int_2^4\frac{1}{x+2}dx=(\frac{x^2}{2}-2x)\Big|_2^4+5\text{Ln}|x+2|\Big|_2^4$$

$$=((8-8)-(2-4))+5(\text{Ln}6-\text{Ln}4)=2+5\text{Ln}\frac{6}{4}=2+5\text{Ln}\frac{3}{2}$$

۴۵۲- گزینه۴ اول فرم کلی تمام توابع اولیهٔ تابع $f(x)=4x-1$ را می‌نویسیم:

$$\text{توابع اولیهٔ } f:\ F(x)=\int f(x)dx=\int(4x-1)dx=2x^2-x+C$$

چون قرار است خط $y=7x-9$ بر تابع $F(x)=2x^2-x+C$ مماس شود، پس معادلهٔ تقاطع آن‌ها باید ریشهٔ مضاعف بدهد:

$$F(x)=y\Rightarrow 2x^2-x+C=7x-9\Rightarrow 2x^2-8x+9+C=0$$

$$\Delta=0\Rightarrow 64-4(2)(9+C)=0\Rightarrow 64-8(9+C)=0$$

$$\xrightarrow{\div 8}8-9-C=0\Rightarrow C=-1$$

پس تابع اولیهٔ موردنظر برابر است با: $F(x)=2x^2-x-1$

حاصل‌ضرب ریشه‌های تابع درجه‌دوم فوق برابر است با: $-\frac{1}{2}$.

۴۵۳- گزینه۴ در مخرج $\frac{1}{9x^2+25}$ از عدد ۲۵ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{1}{25+9x^2}=\frac{1}{25}\times\frac{1}{1+(\frac{3}{5}x)^2}$$

می‌دانیم مشتق $\tan^{-1}u$ برابر با $\frac{u'}{1+u^2}$ است، پس کافی است در عبارت $\frac{1}{1+(\frac{3}{5}x)^2}$، مشتق $u=\frac{3}{5}x$ را در صورت کسر بسازیم:

$$\frac{1}{25}\times\frac{1}{1+(\frac{3}{5}x)^2}=\frac{1}{25}\times\underbrace{\frac{\frac{3}{5}}{1+(\frac{3}{5}x)^2}}_{(\tan^{-1}(\frac{3}{5}x))'}\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\times\frac{1}{25}\times(\tan^{-1}\frac{3}{5}x)'$$

$$=\frac{1}{15}(\tan^{-1}(\frac{3}{5}x))'$$

پس تابع اولیهٔ $\frac{1}{9x^2+25}$ برابر با $\frac{1}{15}\tan^{-1}(\frac{3}{5}x)$ است:

$$\int\frac{dx}{9x^2+25}=\frac{1}{15}\tan^{-1}(\frac{3}{5}x)+C\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{15}\\ b=\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$|a+b|=|\frac{1}{15}+\frac{3}{5}|=|\frac{10}{15}|=\frac{2}{3}$$

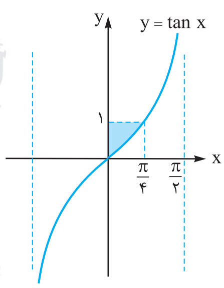
دقت $a=-\frac{1}{15}$ و $b=-\frac{3}{5}$ هم قابل‌قبول هستند.

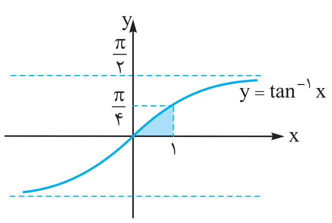
نکته اگر $a,b>0$ باشند، آن‌گاه:

$$\int\frac{1}{a^2x^2+b^2}dx=\frac{1}{ab}\tan^{-1}(\frac{a}{b}x)+C$$

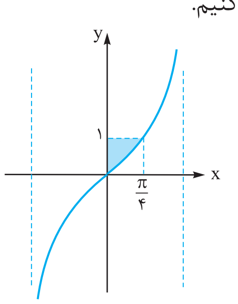
$$\int\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}dx=\frac{1}{a}\sin^{-1}(\frac{a}{b}x)+C$$

۴۵۴- گزینه۱ نمودار دو تابع $y=\tan^{-1}x$ و $y=\tan x$ را در زیر می‌بینید:





حاصل $\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$ را در نمودار $\tan^{-1}x$ رنگ کرده‌ایم. مشابه این مساحت را در نمودار $y=\tan x$ رنگ می‌کنیم.



پس جای $\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$ می‌توانیم مساحت قسمت رنگی در نمودار $y=\tan x$ را حساب کنیم.

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مستطیل}} - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \tan x\,dx = (۱\times\frac{\pi}{۴}) - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \tan x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{۴} - (-\ln|\cos x|\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}) = \frac{\pi}{۴} + (\ln\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \underbrace{\ln ۱}_{۰}) = \frac{\pi}{۴} + \ln ۲^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{\pi}{۴} - \frac{\ln ۲}{۲}$$

حالا مقدار متوسط f را روی بازهٔ $[۰,۱]$ به دست می‌آوریم:

$$F = \frac{۱}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{۱}{۱-۰}\int_{۰}^{۱} \tan^{-۱} x\,dx = ۱\times(\frac{\pi}{۴} - \frac{\ln ۲}{۲})$$

$$= \frac{\pi - ۲\ln ۲}{۴} = \frac{\pi - \ln ۴}{۴}$$

۴۵۵- گزینه ۲

$$\int_{۱}^{۳} x(۲-x)^{۵} dx = -\int_{۱}^{۳} x(x-۲)^{۵} dx = -\int_{۱}^{۳} (x-۲+۲)(x-۲)^{۵} dx$$

$$= -\int_{۱}^{۳}((x-۲)^{۶} + ۲(x-۲)^{۵})dx = -\int_{۱}^{۳}(x-۲)^{۶}dx - ۲\int_{۱}^{۳}(x-۲)^{۵}dx$$

$$= (-\frac{(x-۲)^{۷}}{۷}\Big|_{۱}^{۳}) - (۲\frac{(x-۲)^{۶}}{۶}\Big|_{۱}^{۳}) = -(\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}) - ۲(\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۶}) = -\frac{۲}{۷}$$

۴۵۶- گزینه ۳ در تقسیم $\frac{A}{B}$، اگر خارج‌قسمت برابر Q و باقی‌مانده برابر R باشد، آن‌گاه تساوی روبه‌رو را داریم: $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$

در این‌جا هم کسر $\frac{(x-۱)^{۲}}{x+۱}$ را با همین روش تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^{۲}-۲x+۱ & x+۱ \\ \hline -x^{۲}-x & x-۳ \\ \hline \quad -۳x+۱ & \\ \quad ۳x+۳ & \\ \hline \qquad ۴ & \end{array} \quad \Rightarrow \frac{x^{۲}-۲x+۱}{x+۱} = x-۳+\frac{۴}{x+۱}$$

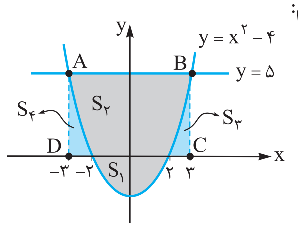
حالا با جای‌گذاری عبارت به دست آمده، راحت‌تر تابع اولیهٔ کسر داده‌شده را حساب می‌کنیم و حاصل انتگرال را به دست می‌آوریم:

$$\int_{۱}^{۳}\frac{(x-۱)^{۲}}{x+۱}dx = \int_{۱}^{۳}(x-۳+\frac{۴}{x+۱})dx = (\frac{x^{۲}}{۲}-۳x+۴\ln|x+۱|)\Big|_{۱}^{۳}$$

$$= (\frac{۹}{۲}-۹+۴\ln ۴) - (\frac{۱}{۲}-۳+۴\ln ۲) = -۲+۴\ln ۴-۴\ln ۲$$

$$= -۲+۴(\ln ۴-\ln ۲) = -۲+۴\ln ۲$$

۴۵۷- گزینه ۴ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم و طول محل تقاطعشان را حساب می‌کنیم:



مساحت قسمت طوسی همان $S_{۱}+S_{۲}$ است: $S_{۱} = |\int_{-۲}^{۲}(x^{۲}-۴)dx|$

$$S_{۲} = S_{ABCD} - (S_{۳}+S_{۴})$$

اول $S_{۱}$ و $S_{۳}$ را حساب می‌کنیم:

$$S_{۱} = \int_{-۲}^{۲}(x^{۲}-۴)dx = (\frac{x^{۳}}{۳}-۴x)\Big|_{-۲}^{۲} = (\frac{۸}{۳}-۸)-(-\frac{۸}{۳}+۸) = -\frac{۳۲}{۳}$$

$$\Rightarrow S_{۱} = |-\frac{۳۲}{۳}| = \frac{۳۲}{۳}$$

$$S_{۳} = \int_{۲}^{۳}(x^{۲}-۴)dx = (\frac{x^{۳}}{۳}-۴x)\Big|_{۲}^{۳} = (۹-۱۲)-(\frac{۸}{۳}-۸) = \frac{۷}{۳}$$

چون $S_{۳}$ و $S_{۴}$ برابرند، پس: $S_{۳} = S_{۴} = \frac{۷}{۳}$. حالا $S_{۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$S_{۲} = S_{ABCD} - (S_{۳}+S_{۴}) \Rightarrow S_{۲} = (۵\times۶) - (\frac{۷}{۳}+\frac{۷}{۳})$$

$$= ۳۰ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۷۶}{۳}$$

مساحت قسمت طوسی در نهایت برابر است با:

$$S = S_{۱}+S_{۲} = \frac{۳۲}{۳}+\frac{۷۶}{۳} = \frac{۱۰۸}{۳} = ۳۶$$

۴۵۸- گزینه ۳ تابع $f(x) = (\tan x+\cot x)^{۲}$ تابعی همواره مثبت است، یعنی نمودار آن بالای محور xها قرار دارد، پس مساحت سطح محصور بین خطوط $x = \frac{\pi}{۶}$، $x = \frac{\pi}{۳}$، محور xها و منحنی $f(x)$ برابر با $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}} f(x)dx$ است.

ابتدا تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$\int f(x)dx = \int(\tan x+\cot x)^{۲}dx = \int(\tan^{۲}x+\cot^{۲}x+۲)dx$$

$$= \int(۱+\tan^{۲}x+۱+\cot^{۲}x)\,dx = \int(۱+\tan^{۲}x)dx + \int(۱+\cot^{۲}x)dx$$

$$= \tan x - \cot x$$

انتگرال خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}(\tan x+\cot x)^{۲}dx = (\tan x-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$= (\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) - (\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳} - \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۴۵۹- گزینه ۳ چون مساحت دو ناحیهٔ رنگی با هم برابر است، پس $f(c)$ برابر با مقدار میانگین تابع $f(x) = \sqrt{۴-x}$ در بازهٔ $[۰,۴]$ است:

$$\bar{f} = \frac{۱}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx \Rightarrow f(c) = \frac{۱}{۴-۰}\int_{۰}^{۴}\sqrt{۴-x}\,dx$$

$$= \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۴}(۴-x)^{\frac{۱}{۲}}dx = -\frac{۱}{۴}\,\frac{(۴-x)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۴} = -\frac{۱}{۶}(۴-x)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۴}$$

$$= -\frac{۱}{۶}(۰-۴^{\frac{۳}{۲}}) = -\frac{۱}{۶}(-۸) = \frac{۴}{۳}$$

برای محاسبهٔ c باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$f(c) = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sqrt{۴-c} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۴-c = \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow c = \frac{۲۰}{۹}$$

۴۶۰- گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ خط مماس بر تابع $f(x) = x^{۲}$ را در نقطهٔ $A(۳,۹)$ می‌نویسیم:

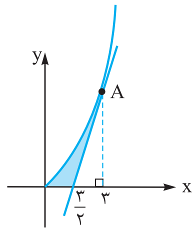
$$f'(x) = ۲x \Rightarrow f'(۳) = ۶ \Rightarrow m_{d} = ۶$$

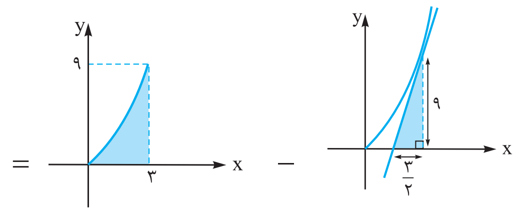
معادلهٔ d: $y-۹ = ۶(x-۳) \Rightarrow y = ۶x-۹$

محل تقاطع این خط با محور xها را به دست می‌آوریم:

$$y = ۶x-۹ \xrightarrow{y=۰} ۰ = ۶x-۹ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

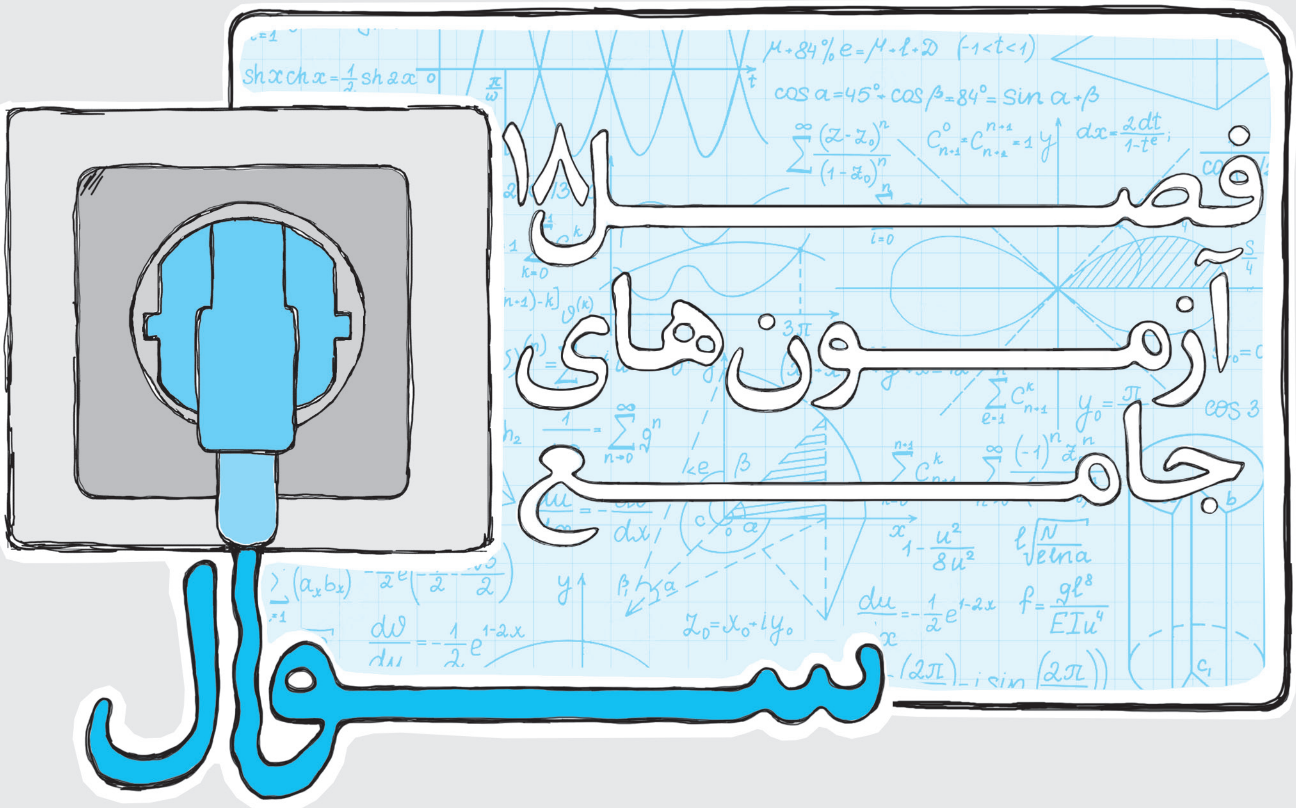
برای محاسبهٔ مساحت قسمت رنگی باید حاصل انتگرال تابع $f(x)=x^{۲}$ در بازهٔ $[۰,۳]$ را منهای مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ به وجود آمده کنیم:





$$S_{\text{رنگی}}=\int_{۰}^{۳}x^{۲}dx-S_{\text{مثلث}}=\frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۳}-\left(\frac{۹\times\frac{۳}{۲}}{۲}\right)$$

$$=(۹-۰)-\frac{۲۷}{۴}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$



آزمون ۲۵ (جامع ریاضی پایه)

۴۸۱- حاصل عبارت $A = (\sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}})\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^{-1}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۴۸۲- اگر مجموع پنجاه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر با ۴۵۰ باشد، مجموع بیست جملهٔ متوالی دنباله با شروع از جملهٔ شانزدهم کدام است؟

۱) ۱۶۰   ۲) ۱۸۰   ۳) ۲۰۰   ۴) ۲۱۰

۴۸۳- تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن قرینهٔ مجموع جملات با ردیف زوج باشد، نسبت جملهٔ سوم به ششم آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) ۸   ۴) ۸−

۴۸۴- اگر $27^{2-3a} = 81$ باشد، لگاریتم عدد $27a + 2$ در مبنای کدام عدد برابر با $0/6$ است؟

۱) ۳۲   ۲) ۶۴   ۳) ۸۱   ۴) ۲۴۳

۴۸۵- اگر تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(ax+b)$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱− و نیمساز ربع سوم را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{1}{2}$ قطع کند، مقدار $f(\frac{5}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۴۸۶- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر با $3x - 1$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $xf(x)$ بر $x^2 - 2x$ کدام است؟

۱) $5x$ ۲) $-5x$ ۳) $7x$ ۴) $-7x$

۴۸۷- حاصل عبارت $\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{14}}{(1+t^3+t^6+t^9+t^{12})(1+t+t^2)^2}$ به ازای $t = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ کدام است؟

۱) $0/2$ ۲) $0/4$ ۳) $0/6$ ۴) $0/8$

۴۸۸- بسط $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{25}$ چند جملهٔ گنگ دارد؟

۱) ۲۱   ۲) ۲۲   ۳) ۲۳   ۴) ۲۰

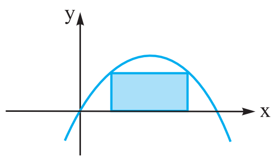
۴۸۹- می‌خواهیم کف سالنی به ابعاد $۱۲۰۰\,cm \times ۶۶۰\,cm$ را با موزاییک‌های مربعی‌شکل یکسان، به طور کامل بپوشانیم. اگر n تعداد موزاییک‌ها و m ضلع موزاییک‌ها باشد، در حالتی که n کم‌ترین مقدار ممکن است، حاصل $n+m$ کدام است؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۸۰

۴۹۰- اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x=۱$ از ۲ برابر ریشه‌های معادلهٔ $kx^۲+۲x+۳=۰$ یک واحد بیشتر باشد، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۴۹۱- بیشترین محیط مستطیلی که بین سهمی $f(x)=-x^۲+۶x$ و محور xها مطابق شکل قرار دارد، کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۴۹۲- ۵ کیلوگرم از یک محلول با غلظت ۳۰ درصد را با ۷ کیلوگرم از همان محلول با غلظت ۷۰ درصد مخلوط می‌کنیم. چند کیلوگرم آب باید به این محلول اضافه کنیم تا غلظت آن به ۵۰ درصد برسد؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۱

۴۹۳- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x+۱)(۲x+۵)=\sqrt{-(x+۳)(۲x+۱)}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۷

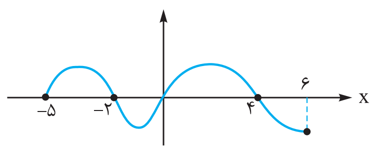
۴۹۴- معادلهٔ $x^۲-\sqrt{a-x}=۴$ دارای دو جواب حقیقی است. محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a\le ۲$ ۲) $-۲\le a\le ۲$ ۳) $a\ge ۲$ ۳) $\varnothing$

۴۹۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\sqrt{۳}-۱)^{x-۳}<(۴-۲\sqrt{۳})^{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۳) $(\frac{۳}{۲},۲)$ ۴) $(۲,\frac{۵}{۲})$

۴۹۶- اگر نمودار تابع $y=f(۱-x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-x^۲}{f(x+۱)}}$ کدام است؟



۱) $(-۴,۱)\cup(۲,۵)-\{۰\}$

۲) $(-۴,۱)\cup(۲,۵)$

۳) $[-۶,-۴)\cup[۱,۲)\cup\{۰\}$

۴) $[-۶,-۴)\cup[۱,۲)$

۴۹۷- اگر $f(x-۱)=x^۲-۲$ و $f(۲g(x))=۴x^۲-۲۰x+۲۳$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x-۲$ ۲) $۲-x$ ۳) $x+۳$ ۴) $-x-۳$

۴۹۸- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد و $f(x-۱)+g(x+۲)=x^۲+۲^x$ باشد، مقدار $g(-۶)$ کدام است؟ $(D_f=D_g=\mathbb{R})$

۱) ۳۶/۲۵ ۲) $-۳۶/۲۵$ ۳) ۲۷/۷۵ ۴) $-۲۷/۷۵$

۴۹۹- اگر $f(x)=x-\sqrt{x^۲+۴}$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۳}{۲}(x-\frac{۱}{x})$ ۲) $\frac{۳}{۲}(x+\frac{۱}{x})$ ۳) $-\frac{۳}{۲}(x-\frac{۱}{x})$ ۴) $-\frac{۳}{۲}(x+\frac{۱}{x})$

۵۰۰- معادلهٔ $[x+۲]+[x+[-x]]=۲x+۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۰۱- حاصل عبارت $(۱+\sin ۱۴۰^\circ)(\tan ۴۰^\circ+\tan ۲۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\tan ۲۵^\circ$ ۲) $\cot ۲۵^\circ$ ۳) $۲\tan ۲۵^\circ$ ۴) $۲\cot ۲۵^\circ$

۵۰۲- با فرض آن‌که $\tan ۲۰^\circ \simeq \frac{۳}{۸}$ باشد، حاصل $\cot ۱۵۵^\circ$ کدام است؟

۱) $-۲/۸$ ۲) $-۲/۶$ ۳) $-۲/۴$ ۴) $-۲/۲$

۵۰۳- مساحت مثلثی با اضلاع ۶ و ۱۰ برابر با $15\sqrt{3}$ است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۳   ۳) ۱۴   ۴) ۱۵

۵۰۴- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\cot 2x = \tan 2x + 2\tan x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۵۰۵- مقدار x از معادلهٔ $\cos^{-1}x - 2\tan^{-1}\frac{1}{3} = 0$ کدام است؟

۱) ۰/۴   ۲) ۰/۶   ۳) ۰/۸   ۴) ۰/۹

۴۸۱- گزینه۱ ابتدا عبارت داخل پرانتز را با به توان ۲ رساندن ساده می‌کنیم:

$$B=\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}-\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} B^۲=(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}-\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}})^۲$$

$$\Rightarrow B^۲=۴+\sqrt{۱۵}+۴-\sqrt{۱۵}-۲\sqrt{(۴+\sqrt{۱۵})(۴-\sqrt{۱۵})}$$

$$\Rightarrow B^۲=۸-۲\sqrt{۱۶-۱۵}=۶ \Rightarrow B=\sqrt{۶}$$

$۳\sqrt{۳}$ را می‌توانیم به صورت $۳^۱\times ۳^{\frac{۱}{۲}}=۳^{\frac{۳}{۲}}$ بنویسیم. حالا رادیکال آخر را هم ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{(۳\sqrt{۳})^{-۱}}=\sqrt[۳]{(۳^{\frac{۳}{۲}})^{-۱}}=\sqrt[۳]{۳^{-\frac{۳}{۲}}}=۳^{-\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۳}}=۳^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس A برابر است با: $A=\sqrt{۶}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۱۸}}{۳}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۳}=\sqrt{۲}$

۴۸۲- گزینه۲ مجموع ۵۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۴۵۰ است، پس: $S_{۵۰}=\frac{۵۰}{۲}(a_۱+a_{۵۰})$

$$\Rightarrow ۴۵۰=۲۵(a_۱+a_{۵۰}) \Rightarrow a_۱+a_{۵۰}=\frac{۴۵۰}{۲۵}=۱۸$$

مجموع جملات شانزدهم تا سی و پنجم این دنباله را می‌خواهیم که تعدادشان ۲۰ جمله است: $a_{۱۶}, a_{۱۷}, a_{۱۸}, \dots, a_{۳۵}$

$$S'=\frac{۲۰}{۲}(a_{۱۶}+a_{۳۵})=۱۰(a_{۱۶}+a_{۳۵})$$

نکته در دنبالهٔ حسابی رابطهٔ زیر را داریم:

$$n+m=p+q \Rightarrow a_n+a_m=a_p+a_q$$

طبق نکتهٔ بالا در این‌جا $a_۱+a_{۵۰}=a_{۱۶}+a_{۳۵}$ است، پس:

$$S'=۱۰(a_{۱۶}+a_{۳۵})=۱۰(a_۱+a_{۵۰})=۱۰(۱۸)=۱۸۰$$

۴۸۳- گزینه۴ مجموع تمام جملات (n جمله) دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q برابر است با: $\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}$

در دنبالهٔ هندسی $a_۱, a_۱q, a_۱q^۲, \dots, a_۱q^{n-۱}$ اگر جملات با ردیف زوج را بخواهیم به دنبالهٔ هندسی $a_۱q, a_۱q^۳, a_۱q^۵, \dots, a_۱q^{n-۱}$ می‌رسیم که تعداد آن‌ها $\frac{n}{۲}$، جملهٔ اولشان $a_۱q$ و قدرنسبتشان $q^۲$ است، پس مجموعشان برابر است با:

$$\frac{(a_۱q)((q^۲)^{\frac{n}{۲}}-۱)}{q^۲-۱}=\frac{a_۱q(q^n-۱)}{q^۲-۱}$$

از آن‌جایی که مجموع تمام جملات، قرینهٔ مجموع جملات ردیف زوج است، داریم:

$$\frac{\cancel{a_۱}\cancel{(q^n-۱)}}{q-۱}=-\frac{\cancel{a_۱}q\cancel{(q^n-۱)}}{q^۲-۱} \Rightarrow \frac{۱}{q-۱}=\frac{-q}{q^۲-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cancel{q-۱}}=\frac{-q}{\cancel{(q-۱)}(q+۱)} \Rightarrow ۱=\frac{-q}{q+۱} \Rightarrow q=-\frac{۱}{۲}$$

نسبت جملهٔ سوم به ششم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_۳}{a_۶}=\frac{a_۱q^۲}{a_۱q^۵}=\frac{۱}{q^۳}=\frac{۱}{(-\frac{۱}{۲})^۳}=-۸$$

۴۸۴- گزینه۱ اول معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$۲۷^{۲-۳a}=۸۱ \Rightarrow ۳^{۳(۲-۳a)}=۳^۴ \Rightarrow ۶-۹a=۴ \Rightarrow a=\frac{۲}{۹}$$

$a=\frac{۲}{۹}$ را در $۲۷a+۲$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲۷a+۲=۲۷(\frac{۲}{۹})+۲=۶+۲=۸$$

لگاریتم عدد ۸ در مبنای عددی (فرض می‌کنیم x) برابر با ۰/۶ شده است: $\log_x ۸=۰/۶$

مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\log_x ۸=۰/۶ \xrightarrow{\text{تعریف}} x^{۰/۶}=۸ \Rightarrow x^{\frac{۳}{۵}}=۲^۳ \Rightarrow x^{\frac{۱}{۵}}=۲$$

$$\Rightarrow x=۲^۵=۳۲$$

۴۸۵- گزینه۴ تابع f محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع می‌کند، پس $f(-۱)=۰$.

همچنین نیمساز ربع سوم را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۱}{۲}$ قطع می‌کند، پس $f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}$.

دو رابطهٔ بالا را با جای‌گذاری در $f(x)=\log_{\frac{۱}{۴}}(ax+b)$ حل می‌کنیم:

$$f(-۱)=۰ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۴}}(-a+b)=۰ \Rightarrow -a+b=۱$$

$$f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۴}}(-\frac{a}{۲}+b)=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{a}{۲}+b=(\frac{۱}{۴})^{-\frac{۱}{۲}}=۲$$

از حل دو معادلهٔ بالا داریم: $a=۲$ و $b=۳$، پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=\log_{\frac{۱}{۴}}(۲x+۳)$ است و $f(\frac{۵}{۲})$ برابر است با:

$$f(\frac{۵}{۲})=\log_{\frac{۱}{۴}}(۲\times\frac{۵}{۲}+۳)=\log_{\frac{۱}{۴}}۸=\log_{۲^{-۲}}۲^۳=-\frac{۳}{۲}$$

۴۸۶- گزینه۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۴$ برابر $۳x-۱$ است، پس اتحاد تقسیم به شکل زیر است:

$$f(x)=(x^۲-۴)Q(x)+۳x-۱$$

پس $xf(x)$ برابر است با: $xf(x)=x(x^۲-۴)Q(x)+۳x^۲-x$

$$=\underbrace{x(x-۲)}_{(x^۲-۲x)}(x+۲)Q(x)+۳x^۲-x$$

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ $xf(x)$ بر $x^۲-۲x$، کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳x^۲-x$ را بر $x^۲-۲x$ حساب کنیم، زیرا قسمت $\underbrace{x(x-۲)}_{(x^۲-۲x)}(x+۲)Q(x)$ بر $x^۲-۲x$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۲-x & x^۲-۲x \\ \hline -۳x^۲+۶x & ۳ \\ \hline ۵x & \end{array}$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $xf(x)$ بر $x^۲-۲x$ برابر $۵x$ است.

۴۸۷- گزینه۲ عبارت $۱+t+t^۲+\dots+t^{۱۴}$ اگر در $۱-t$ ضرب شود برابر با $۱-t^{۱۵}$ می‌شود، پس: $۱+t+t^۲+\dots+t^{۱۴}=\frac{۱-t^{۱۵}}{۱-t}$

عبارت $۱+t^۳+t^۶+t^۹+t^{۱۲}$ هم اگر در $۱-t^۳$ ضرب شود برابر با $۱-t^{۱۵}$ می‌شود، پس: $۱+t^۳+t^۶+t^۹+t^{۱۲}=\frac{۱-t^{۱۵}}{۱-t^۳}$

عبارت داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{۱+t+t^۲+\dots+t^{۱۴}}{(۱+t^۳+t^۶+t^۹+t^{۱۲})(۱+t+t^۲)^۲}=\frac{\frac{\cancel{۱-t^{۱۵}}}{۱-t}}{\frac{\cancel{۱-t^{۱۵}}}{۱-t^۳}(۱+t+t^۲)^۲}$$

$$=\frac{۱-t^۳}{(۱-t)(۱+t+t^۲)^۲}=\frac{(۱-t)(۱+t+t^۲)}{(۱-t)(۱+t+t^۲)^۲}=\frac{۱}{۱+t+t^۲}$$

مخرج کسر را به شکل $(t+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}$ می‌نویسیم و $t=\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱}{(t+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{(\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۷}{۴}+\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۴۸۸- گزینه۲ **نکته** جملهٔ $(k+۱)$اُم بسط $(a+b)^n$ برابر با $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ است.

طبق نکتهٔ بالا، فرم کلی جملات بسط $(۲^{\frac{۱}{۲}}+۳^{\frac{۱}{۳}})^{۲۵}$ به صورت زیر است:

$$\binom{۲۵}{k}(۲^{\frac{۱}{۲}})^{۲۵-k}(۳^{\frac{۱}{۳}})^k=\binom{۲۵}{k}\times ۲^{\frac{۲۵-k}{۲}}\times ۳^{\frac{k}{۳}}$$

برای آن‌که عدد $\binom{۲۵}{k}\times ۲^{\frac{۲۵-k}{۲}}\times ۳^{\frac{k}{۳}}$ عددی گویا باشد، باید توان‌های اعداد ۲ و ۳، عددی حسابی باشند، پس باید $\frac{۲۵-k}{۲}$ و $\frac{k}{۳}$ اعدادی حسابی باشند و $۰\le k\le ۲۵$ است. فقط به ازای $k=\{۳,۹,۱۵,۲۱\}$ هر دو عبارت $\frac{۲۵-k}{۲}$ و $\frac{k}{۳}$ اعدادی حسابی می‌شوند، پس این بسط دارای ۴ جملهٔ گویا است.

بسط $(\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳})^{۲۵}$ در کل دارای ۲۶ جمله است که ۴ تای آن‌ها گویا هستند، پس ۲۲ جملهٔ گنگ دارد.

۴۸۹- گزینه۴ طول ضلع موزاییک‌ها باید عددی باشد که دو عدد ۱۲۰۰ و ۶۶۰ بر آن بخش‌پذیر باشند. این عدد (m) شامل تمام مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد ۱۲۰۰ و ۶۶۰ می‌شود ولی اگر بخواهیم کم‌ترین تعداد موزاییک استفاده شود، باید خود ب.م.م انتخاب شود: $m=(۱۲۰۰,۶۶۰)=(۲۰\times۶۰,۱۱\times۶۰)=۶۰$

پس طول ضلع موزاییک‌ها ۶۰ cm است. برای محاسبهٔ تعداد موزاییک استفاده‌شده، باید مساحت سالن را به مساحت هر موزاییک تقسیم کنیم:

$$n=\frac{\text{مساحت سالن}}{\text{مساحت هر موزاییک}}=\frac{۱۲۰۰\times۶۶۰}{۶۰\times۶۰}=۲۰\times۱۱=۲۲۰$$

$$m+n=۶۰+۲۲۰=۲۸۰$$

۴۹۰- گزینه۴ ◄ ریشه‌های معادلهٔ $kx^۲+۲x+۳=۰$ را α و β می‌گیریم، پس $\alpha+\beta=-\frac{۲}{k}$ و $\alpha\beta=\frac{۳}{k}$.

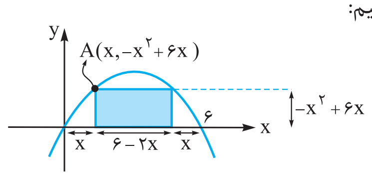
◄ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۱=۰$ از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ بالا یک واحد بیشتر است، پس ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۱=۰$ را $۲\alpha+۱$ و $۲\beta+۱$ می‌گیریم و داریم:

$$(۲\alpha+۱)+(۲\beta+۱)=۳\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)+۲=۳\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$$

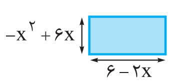
از دو معادلهٔ $\alpha+\beta=-\frac{۲}{k}$ و $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌گیریم که:

$$-\frac{۲}{k}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k=-۴$$

۴۹۱- گزینه۳ سهمی $f(x)=-x^۲+۶x$ محور xها را در نقاطی به طول $x=۶$ و $x=۰$ قطع می‌کند. چون نقطهٔ A روی سهمی است، پس مختصات آن را می‌توانیم به صورت $A(x,-x^۲+۶x)$ بنویسیم:



پس طول و عرض مستطیل رنگی بر حسب x برابر هستند با:



محیط این مستطیل را می‌نویسیم:

$$\text{محیط}=۲(-x^۲+۶x+۶-۲x)=-۲x^۲+۸x+۱۲$$

می‌خواهیم ماکسیمم تابع $g(x)=-۲x^۲+۸x+۱۲$ را به دست آوریم:

$$\max(g)=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{۶۴-۴(-۲)(۱۲)}{۴(-۲)}=\frac{۱۶۰}{۸}=۲۰$$

۴۹۲- گزینه۳ ◄ ۵ کیلوگرم محلول با غلظت ۳۰ درصد داریم. مقدار مادهٔ حل‌شونده را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت}=\frac{\text{مقدار مادهٔ حل‌شونده}}{\text{کل محلول}}\Rightarrow \frac{۳۰}{۱۰۰}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x=۱/۵$$

پس ۵ کیلوگرم محلول اول شامل ۱/۵ کیلوگرم مادهٔ حل‌شونده و ۳/۵ کیلوگرم آب است.

◄ ۷کیلوگرم محلول با غلظت ۷۰ درصد داریم. مقدار مادهٔ حل‌شوندهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت}=\frac{\text{مقدار مادهٔ حل‌شونده}}{\text{کل محلول}}\Rightarrow \frac{۷۰}{۱۰۰}=\frac{y}{۷}\Rightarrow y=۴/۹$$

پس ۷ کیلوگرم محلول دوم شامل ۴/۹ کیلوگرم مادهٔ حل‌شونده و ۲/۱ کیلوگرم آب است.

◄ پس روی هم رفته $۱/۵+۴/۹=۶/۴$ کیلوگرم مادهٔ حل‌شونده داریم و وزن کل دو محلول روی هم $۵+۷=۱۲$ کیلوگرم است.

الان z کیلوگرم آب به محلول اضافه می‌کنیم. وزن مادهٔ حل‌شونده همان ۶/۴ کیلوگرم می‌ماند ولی وزن کل محلول $۱۲+z$ کیلوگرم می‌شود. چون قرار است غلظت این محلول ۵۰ درصد شود، پس:

$$\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۶/۴}{۱۲+z}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۶/۴}{۱۲+z}\Rightarrow ۱۲+z=۱۲/۸\Rightarrow z=۰/۸$$

پس با افزودن ۰/۸ کیلوگرم آب به محلول نهایی، غلظت آن را به ۵۰ درصد می‌رسانیم.

۴۹۳- گزینه۲ در معادلهٔ داده‌شده، پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم: $۲x^۲+۷x+۵=\sqrt{-(۲x^۲+۷x+۳)}$

با تغییر متغیر $۲x^۲+۷x+۳=A$، معادلهٔ جدید را حل می‌کنیم:

$$\underbrace{۲x^۲+۷x+۵}_{A+۲}=\sqrt{-(\underbrace{۲x^۲+۷x+۳}_{A})}\Rightarrow A+۲=\sqrt{-A}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۲+۴A+۴=-A$$

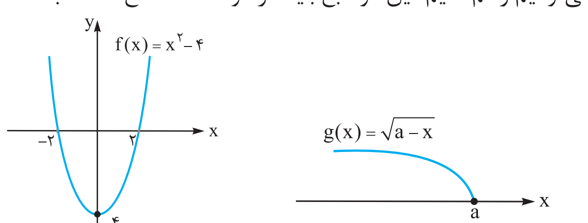
$$\Rightarrow A^۲+۵A+۴=۰\Rightarrow (A+۴)(A+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}A=-۱ & ✓\\ A=-۴ & ✗\end{cases}$$

فقط $A=-۱$ در معادلهٔ $A+۲=\sqrt{-A}$ صدق می‌کند. حالا $A=-۱$ را در $A=۲x^۲+۷x+۳$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲x^۲+۷x+۳=-۱\Rightarrow ۲x^۲+۷x+۴=۰$$

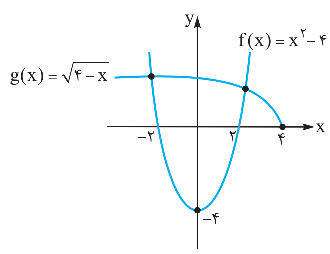
حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $\frac{c}{a}$ است، پس: $x_۱x_۲=\frac{۴}{۲}=۲$

۴۹۴- گزینه۳ معادله را به شکل $x^۲-۴=\sqrt{a-x}$ می‌نویسیم. نمودار هر دو تابع $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{a-x}$ را می‌توانیم رسم کنیم. این دو تابع باید در دو نقطه تقاطع داشته باشند.



محور y را رسم نکردیم، چون علامت a را نمی‌دانیم!

برای این‌که دو نمودار بالا، یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، کافی است $a\ge ۲$ باشد، تا f را در ۲ نقطه قطع کند. مثلاً برای $a=۴$ نمودارهای f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا دو نقطه برخوردشان دیده شود.



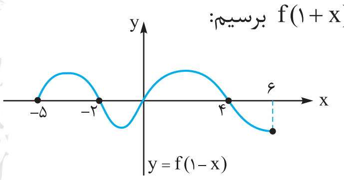
۴۹۵- گزینه۲ $۴-۲\sqrt{۳}$ همان $(\sqrt{۳}-۱)^۲$ است، پس:

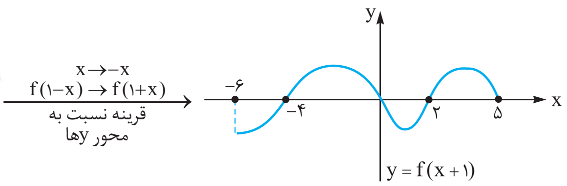
$$(\sqrt{۳}-۱)^{x-۳}<(۴-۲\sqrt{۳})^{x^۲-۲x}\Rightarrow(\sqrt{۳}-۱)^{x-۳}<(\sqrt{۳}-۱)^{۲x^۲-۴x}$$

پایه‌های دو طرف نامعادلهٔ بالا با هم برابرند. چون پایه عددی بین صفر و یک است $(\sqrt{۳}-۱\simeq ۰/۷۳)$، پس با حذف پایه‌ها جهت نامساوی تغییر می‌کند: $x-۳>۲x^۲-۴x\Rightarrow ۲x^۲-۵x+۳<۰$

$$\Rightarrow (x-۱)(۲x-۳)<۰\Rightarrow ۱<x<\frac{۳}{۲}$$

۴۹۶- گزینه۴ در ضابطهٔ $y=f(۱-x)$ اگر جای xها، $-x$ قرار دهیم به ضابطهٔ $y=f(۱+x)$ می‌رسیم، پس برای رسم $f(۱+x)$ از روی $f(۱-x)$ کافی است، نمودار $f(۱-x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم تا به $f(۱+x)$ برسیم:





برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع g، کافی است نامعادلهٔ $\frac{x-x^۲}{f(x+۱)}\ge ۰$ را با کمک نمودار $y=f(x+۱)$ و تعیین علامت حل کنیم:

دقت کنید دامنهٔ تابع $\frac{x-x^۲}{f(x+۱)}$، اشتراک دامنهٔ صورت و مخرج کسر است که به صورت $\mathbb{R}\cap[-۶,۵]=[-۶,۵]$ است.

		−۶ تا −۴	−۴ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا ۲	۲ تا ۵
$x-x^۲$		−	−	+	−	−
$f(x+۱)$		−	+	−	−	+
$\frac{x-x^۲}{f(x+۱)}$		+	−	−	+	−

بازه‌هایی که عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر است برابر است با: $D_g=[-۶,-۴)\cup[۱,۲)$

۴۹۷- گزینه۲ اول از رابطهٔ $f(x-۱)=x^۲-۲$، ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می‌آوریم. $x-۱$ را برابر با t قرار می‌دهیم:

$$t=x-۱\Rightarrow x=t+۱$$

$x=t+۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x-۱)=x^۲-۲\xrightarrow{x=t+۱} f(t)=(t+۱)^۲-۲=t^۲+۲t-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲+۲x-۱$$

از روی $f(x)=x^۲+۲x-۱$، ضابطهٔ $f(۲g(x))$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=x^۲+۲x-۱\Rightarrow f(۲g(x))=(۲g(x))^۲+۲(۲g(x))-۱$$

$$=۴g^۲(x)+۴g(x)-۱$$

حالا عبارت بالا را با $f(۲g(x))$ داده‌شده در صورت سؤال برابر قرار می‌دهیم: $۴g^۲(x)+۴g(x)-۱=۴x^۲-۲۰x+۲۳$

$$\Rightarrow ۴g^۲(x)+۴g(x)=۴x^۲-۲۰x+۲۴$$

$$\xrightarrow{\div 4} g^2(x)+g(x)=x^2-5x+6$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{4}} g^2(x)+g(x)+\frac{1}{4}=x^2-5x+\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x)+\frac{1}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2 \Rightarrow |g(x)+\frac{1}{2}|=|x-\frac{5}{2}|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2} \Rightarrow g(x)=x-3 \\ g(x)+\frac{1}{2}=-x+\frac{5}{2} \Rightarrow g(x)=-x+2 \end{cases}$$

در بین گزینه‌ها فقط $g(x)=2-x$ وجود دارد.

۴۹۸- گزینه ۴ در معادلهٔ داده‌شده، $x=-2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x-1)+g(x+2)=x^2+2^x$$

$$\xrightarrow{x=-2} f(-3)+g(0)=(-2)^2+2^{-2}$$

$$\Rightarrow f(-3)+\underbrace{g(0)}_{0}=\frac{17}{4} \xrightarrow[g(0)=0]{\text{g فرد است پس}} f(-3)=\frac{17}{4}$$

f زوج است و $f(-3)=\frac{17}{4}$، پس $f(3)=\frac{17}{4}$.

در معادلهٔ اولیه، $x=4$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x-1)+g(x+2)=x^2+2^x \xrightarrow{x=4} \underbrace{f(3)}_{\frac{17}{4}}+g(6)=4^2+2^4$$

$$\Rightarrow g(6)=32-\frac{17}{4}=32-4/25 \Rightarrow g(6)=27/75$$

g فرد است و $g(6)=27/75$، پس $g(-6)=-27/75$.

۴۹۹- گزینه ۴ ابتدا سعی می‌کنیم در رابطهٔ $y=x-\sqrt{x^2+4}$، x را برحسب y بنویسیم: $y=x-\sqrt{x^2+4} \Rightarrow \sqrt{x^2+4}=x-y$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{x^2}+4=\cancel{x^2}+y^2-2xy \Rightarrow 2xy=y^2-4$$

$$\Rightarrow x=\frac{y^2-4}{2y}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم تا ضابطهٔ f^{-1} به دست آید:

$$y=\frac{x^2-4}{2x} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2-4}{2x}$$

ضابطهٔ $f^{-1}(\frac{1}{x})$ را هم به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{(\frac{1}{x})^2-4}{2(\frac{1}{x})}=\frac{\frac{1}{x^2}-4}{\frac{2}{x}}=\frac{\frac{1-4x^2}{x^2}}{\frac{2}{x}}=\frac{1-4x^2}{2x}$$

و در نهایت خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{x^2-4}{2x}+\frac{1-4x^2}{2x}=\frac{-3x^2-3}{2x}=-\frac{3}{2}(x+\frac{1}{x})$$

۵۰۰- گزینه ۳ می‌دانیم اگر $n\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم $[x+n]=[x]+n$، پس چون $[-x]\in\mathbb{Z}$، می‌توانیم بنویسیم:

$$[x+[-x]]=[x]+[-x]$$

همچنین $[x+2]$ هم با $[x]+2$ برابر است. پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$[x]+2+[x]+[-x]=2x+1 \Rightarrow [x]+[x]+[-x]=2x-1$$

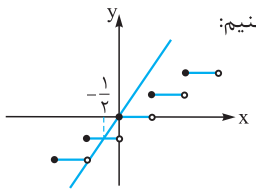
از طرفی می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$، پس معادلهٔ بالا را در دو حالت $x\in\mathbb{Z}$ و $x\notin\mathbb{Z}$ حل می‌کنیم:

▸ $x\in\mathbb{Z}: \quad [x]+\underbrace{[x]+[-x]}_{0}=2x-1 \Rightarrow [x]=2x-1$

$$\xrightarrow{[x]=x} x=2x-1 \Rightarrow x=1 \quad ✓$$

▸ $x\notin\mathbb{Z}: \quad [x]+\underbrace{[x]+[-x]}_{-1}=2x-1 \Rightarrow [x]=2x$

معادلهٔ $[x]=2x$ را با روش هندسی حل می‌کنیم. نمودار دو تابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=2x$ را رسم می‌کنیم:



این دو تابع در دو نقطه به طول‌های $x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ یکدیگر را قطع می‌کنند که چون شرط این حالت $x\notin\mathbb{Z}$ بود، فقط جواب $x=-\frac{1}{2}$ در این حالت قابل‌قبول است. پس معادله دارای دو جواب $x=1$ و $x=-\frac{1}{2}$ است.

۵۰۱- گزینه ۲ چون برای $1+\cos\alpha$ اتحاد داریم $(1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2})$، عبارت $1+\sin 140^\circ$ را به صورت $1+\cos 50^\circ$ می‌نویسیم:

$$1+\cos 50^\circ=2\cos^2 25^\circ$$

عبارت داخل پرانتز دوم را هم با کسری‌نوشتن تانژانت و مخرج مشترک‌گیری ساده می‌کنیم:

$$\tan 40^\circ+\tan 25^\circ=\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$$

$$=\frac{\sin 40^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ\cos 25^\circ}=\frac{\sin(40^\circ+25^\circ)}{\cos 40^\circ\cos 25^\circ}$$

$$=\frac{\sin 65^\circ}{\cos 40^\circ\cos 25^\circ} \xrightarrow[\text{(متممند)}]{\sin 65^\circ=\cos 25^\circ} =\frac{1}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{\sin 50^\circ}$$

پس سادهٔ عبارت داده‌شده به شکل زیر درمی‌آید:

$$2\cos^2 25^\circ\times\frac{1}{\sin 50^\circ}=\frac{2\cos^2 25^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{2\cos^2 25^\circ}{2\sin 25^\circ\cos 25^\circ}$$

$$=\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}=\cot 25^\circ$$

۵۰۲- گزینه ۴ مقدار $\cot 155^\circ$ با $-\cot 25^\circ$ برابر است.
(دو زاویه که مکمل‌اند، کتانژانت‌هایشان قرینهٔ هم است.)

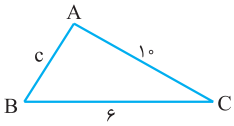
برای محاسبهٔ $\cot 25^\circ$، ابتدا $\tan 25^\circ$ را حساب می‌کنیم و سپس آن را معکوس می‌کنیم:

$$\tan 25^\circ=\tan(45^\circ-20^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 20^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 20^\circ}=\frac{1-\frac{3}{8}}{1+(1)(\frac{3}{8})}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{11}{8}}=\frac{5}{11}$$

پس $-\cot 25^\circ$ برابر با $-\frac{11}{5}$ است که برابر با $-2/2$ است.

۵۰۳- گزینه ۳ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$، سینوس زاویهٔ C را به دست می‌آوریم:



$$۱۵\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}(۶)(۱۰)\sin\hat{C}\ \Rightarrow\ \sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون $۰<\hat{C}<۱۸۰^\circ$ است، پس $\cos\hat{C}$ می‌تواند $\frac{۱}{۲}$ یا $-\frac{۱}{۲}$ باشد. در هر دو حالت با استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها، اندازهٔ ضلع روبه‌رو به زاویهٔ C را به دست می‌آوریم:

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{C}\ \Rightarrow\ c^۲=۶^۲+۱۰^۲-۲(۶)(۱۰)\cos\hat{C}$$

$$\Rightarrow\ c^۲=۱۳۶-۱۲۰\cos\hat{C}$$

حالت اول: $\cos\hat{C}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow c^۲=۱۳۶-۱۲۰(\frac{۱}{۲})=۷۶\Rightarrow c=\sqrt{۷۶}$ ✗

حالت دوم: $\cos\hat{C}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow c^۲=۱۳۶-۱۲۰(-\frac{۱}{۲})=۱۹۶\Rightarrow c=۱۴$ ✓

حالت اول چون $c=\sqrt{۷۶}$ از ضلع $b=۱۰$ کوچک‌تر است، رد می‌شود و فقط $c=۱۴$ قابل‌قبول است.

۵۰۴- گزینه ۲ معادله‌را به‌شکل $\cot ۲x-\tan ۲x=۲\tan x$ می‌نویسیم. با استفاده از اتحاد $\cot A-\tan A=۲\cot ۲A$، سمت چپ تساوی را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\underbrace{\cot ۲x-\tan ۲x}_{۲\cot ۴x}=۲\tan x\Rightarrow ۲\cot ۴x=۲\tan x\Rightarrow \cot ۴x=\tan x$$

جای $\tan x$، کتانژانت متمم آن را قرار می‌دهیم:

$$\cot ۴x=\cot(\frac{\pi}{۲}-x)\ \Rightarrow\ ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\ \Rightarrow\ ۵x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$$

به ازای $k=۰,۱,۲,۳,۴$، مقدار x بین ۰ تا π قرار می‌گیرد:

$$x=\frac{\pi}{۱۰},\frac{۳\pi}{۱۰},\frac{۵\pi}{۱۰},\frac{۷\pi}{۱۰},\frac{۹\pi}{۱۰}$$

از بین جواب‌های به دست آمده برای x، عدد $\frac{۵\pi}{۱۰}$ یا همان $\frac{\pi}{۲}$ قابل‌قبول نیست، زیرا در دامنهٔ tanx نیست، پس این معادله ۴ جواب در این بازه دارد.

۵۰۵- گزینه ۳ معادله را به شکل $\cos^{-۱}x=۲\tan^{-۱}\frac{۱}{۳}$ می‌نویسیم.

$\tan^{-۱}\frac{۱}{۳}$ یعنی کمانی بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ که تانژانت آن برابر $\frac{۱}{۳}$ است:

$$\tan^{-۱}\frac{۱}{۳}=\alpha\ \xrightarrow{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}}\ \tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

پس $\cos^{-۱}x=۲\alpha$ و در نتیجه $\cos ۲\alpha=x$ است. (دقت کنید که $۰<۲\alpha<\pi$ است و مشکلی پیش نمی‌آید.)

در معادلهٔ $\cos ۲\alpha=x$، عبارت $\cos ۲\alpha$ را برحسب $\tan\alpha$ می‌نویسیم و $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱-(\frac{۱}{۳})^۲}{۱+(\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{\frac{۸}{۹}}{\frac{۱۰}{۹}}=۰/۸$$