فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

در بخش اول کتاب آمار و احتمال که منطق ریاضی نام دارد، مقدماتی را یاد می‌گیریم تا بتوانیم به وسیلهٔ آن‌ها ساختار استدلال‌ها را بررسی کنیم و درستی و نادرستی آن‌ها را تشخیص دهیم.

به جملات زیر که هر کدام یک استدلال منطقی هستند، دقت کنید:

الف اگر دمای آب به 100° برسد، می‌جوشد.

ب آب کتری هنوز نجوشیده است.

⇐ **پ** نتیجه: دمای آب به 100° نرسیده است.

الف قطرهای لوزی برهم عمودند.

ب قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمود نیستند.

⇐ **پ** نتیجه: چهارضلعی ABCD لوزی نیست.

در هر دو استدلال بالا، جمله‌های خبری (الف) و (ب) را «مقدمه‌های استدلال» یا «مفروضات استدلال» و جملهٔ خبری (پ) را «نتیجهٔ استدلال» می‌گوییم. در حالت کلی هر استدلال از دو یا چند جملهٔ خبری به عنوان مفروضات استدلال و یک جملهٔ خبری به عنوان نتیجهٔ استدلال تشکیل می‌شود.

گزاره

هر جملهٔ خبری که بتواند درست یا نادرست باشد را یک گزاره می‌گوییم. البته ممکن است درستی یا نادرستی آن جملهٔ خبری برای ما معلوم نباشد. اما همیشه حواسمان باشد که یک گزاره فقط دارای یک ارزش است و نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

مثلاً جملات زیر هر کدام یک گزاره هستند:

۱ ۱۵ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲ سعدی شاعر است.

۳ اگر $a+b$ زوج باشد، a و b هر دو زوج هستند.

۴ هر عدد زوج بزرگ‌تر از دو را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. (حدس گلدباخ)

گزاره‌های ۱ و ۲ درست هستند. گزارهٔ ۳ نادرست است؛ چون ممکن است a و b فرد باشند و مجموع آن‌ها زوج باشد، مثلاً $8 = 5 + 3$. گزارهٔ چهارم از آن گزاره‌هاست که گفتیم درست‌بودن و غلط‌بودن آن را نمی‌دانیم، البته مطمئن هستیم بالاخره یا درست است یا غلط اما هنوز هیچ بنی‌بشری نتوانسته آن را اثبات کند. هیچ‌کس هم نتوانسته مثال نقضی برای آن بیاورد.

به جملات زیر دقت کنید:

۱ به‌به چه صبح قشنگی! **۲** ای‌کاش بدون خواندن درس هم نمراتم بیست می‌شد! **۳** در را باز کن.

۴ آیا عدد π گنگ است؟ **۵** سعدی شاعر بزرگ ایرانی است.

هیچ‌کدام از جملات بالا گزاره نیستند. جملات ۱ تا ۴ جملاتی عاطفی (بیان‌کنندهٔ احساس یا آرزو)، امری یا پرسشی هستند و جملات خبری محسوب نمی‌شوند؛ پس گزاره نیستند. جملهٔ پنجم جمله‌ای خبری است اما نمی‌توان درست و نادرست‌بودن آن را تشخیص داد. چون «شاعر بزرگ» تعریف نشده و نمی‌دانیم معیار این‌که یک شاعر بزرگ است یا کوچک، چیست؟!

نتیجه به جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (بیان‌کنندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند.

هر گزاره را معمولاً با حروف کوچک p، q، r، s و... نمایش می‌دهیم.

ارزش یک گزاره

درست یا نادرست‌بودن یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم.

ارزش گزارهٔ درست را با «د» یا «T» و ارزش گزارهٔ نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

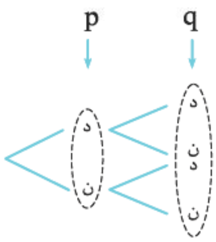
اگر دو گزارهٔ p و q ارزش یکسان داشته باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌گوییم گزاره‌های p و q معادل یا هم‌ارز هستند.

جدول ارزش گزاره‌ها

ارزش هر گزاره مانند p می‌تواند درست یا نادرست باشد. این مطلب را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم:

p
د
ن

اگر بخواهیم حالت‌های مختلف برای درست یا نادرست‌بودن دو گزارهٔ p و q را بنویسیم، با توجه به این‌که برای هر کدام از این گزاره‌ها ۲ حالت «د» یا «ن» را داریم؛ پس طبق اصل ضرب برای ارزش ۲ گزارهٔ p و q در کنار هم، ۴ = ۲ حالت × ۲ حالت (q و p) حالت مختلف وجود دارد. این ۴ حالت را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نمایش می‌دهیم:



p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

هم‌چنین برای ارزش ۳ گزاره طبق اصل ضرب $۲^۳ = ۸$ حالت مختلف وجود دارد.

ارزش r، ارزش q، ارزش p:
۸ = ۲ حالت × ۲ حالت × ۲ حالت

جدول ارزش گزاره‌ها برای ۳ گزاره به شکل روبه‌رو است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

به همین ترتیب جدول ارزش گزاره‌ها برای n گزاره طبق اصل ضرب ۲^n حالت مختلف دارد.

گزارهٔ p_n، گزارهٔ $p_۳$، گزارهٔ $p_۲$، گزارهٔ $p_۱$:
۲^n = ۲حالت × ... × ۲حالت × ۲حالت × ۲حالت

سؤال‌های امتحانی

۱- نتیجهٔ استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱) الف) اگر در شمال باران ببارد، هوای تهران خنک می‌شود.
ب) هوای تهران گرم است.
نتیجه: ....

۲) الف) اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع آن بر عدد ۲۴ برابر با یک است.
ب) ۳۷ عددی اول است.
نتیجه: ....

۲- از بین جملات زیر، گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

۱) مجموع هر دو عدد اول، زوج است.

۲) آیا درخت بلند است؟

۳) ۲۶۳۵۹۲۱۴۳۱ عددی اول است.

۴) نقره فلزی گران‌بها است.

۵) $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$

۶) در پرتاب یک تاس احتمال این‌که تاس مضرب ۳ بیاید برابر است با $\frac{۱}{۳}$. (کتاب درسی)

۷) آه، چه هوای سردی!

۸) آیا $۱۲ = ۲ + ۳ + ۷$ است؟

۹) به امید کامیابی شما. (کتاب درسی)

۱۰) هر معادلهٔ درجهٔ ۲ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی است. (کتاب درسی)

۱۱) $\{۱\} \in \{۱,۲,۳,۴\}$ (کتاب درسی)

۱۲) حافظ، پزشک ایرانی است.

۱۳) عدد $۸ + ۵^۹$ عددی اول است. (کتاب درسی)

۱۴) آمار مجموعه‌ای از اعداد و ارقام و اطلاعات است. (کتاب درسی)

۱۵) $\varnothing \not\subset \mathbb{R}$ (کتاب درسی)

۱۶) در پرتاب ۲ تاس احتمال این‌که هر دو تاس مضرب ۳ بیایند، برابر است با $\frac{۱}{۳}$.

۱۷) کاش می‌شد مردم دانه‌های دلشان پیدا بود.

۱۸) استقلال یک تیم بزرگ و حرفه‌ای است.

۱۹) امروز هوا ابری است؛ بهتر است چتر برداری.

۲۰) علی دانش‌آموز بسیار خوبی است.

۲۱) بنشین، مرو، مگو که شب از نیم رفته است.

۲۲) $\sqrt{-۱} \notin \mathbb{Z}$

۲۳) $۴۶^{۲۴} + ۵۹$ مضرب ۱۵ است.

۲۴) چه باران شدیدی!

۲۵) $۲^{۲۱} + ۱$ عددی اول است. (کتاب درسی)

۳- آیا جملات زیر گزاره هستند؟

۱) ۱۰۰اُمین رقم بعد از ممیز در عدد π، عدد ۵ است. (کتاب درسی)

۲) هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع ۳ عدد اول نوشت. (حدس قوی گلدباخ) (کتاب درسی)

گزاره‌نما

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

۱) x عددی اول است.

۲) $۲x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$

۳) دو برابر یک عدد طبیعی به علاوهٔ ۳ برابر عدد طبیعی دیگر از ۱۰ کم‌تر است. $(۲x + ۳y < ۱۰)$.

همان‌طور که می‌بینید درستی یا نادرستی جملات بالا را نمی‌توانیم مشخص کنیم و درستی یا نادرستی آن‌ها بستگی به مقادیری دارد که به جای متغیرهای آن‌ها یعنی x و y قرار داده می‌شود. مثلاً اگر در جملهٔ اول به جای x عدد ۵ بگذاریم، یک گزارهٔ درست به دست می‌آید؛ اما اگر به جای x عدد ۶ را قرار دهیم، یک گزارهٔ نادرست خواهیم داشت.

هر جملهٔ خبری (مانند جملات بالا) که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیر مختلف به جای متغیرهای آن به یک گزاره (درست یا نادرست) تبدیل شود را گزاره‌نما می‌گوییم. گزاره‌نماها را براساس این‌که چند متغیر در آن‌ها به کار رفته است، گزاره‌نماهای یک‌متغیره، ۲متغیره، ۳متغیره و... می‌نامیم.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

به مجموعهٔ مقادیری که می‌توانیم به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار دهیم تا گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست یا غلط تبدیل شود، «دامنهٔ متغیر گزاره‌نما» می‌گوییم و آن را با D نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌جواب گزاره‌نما

به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود، «مجموعه‌جواب گزاره‌نما» می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم $(S \subseteq D)$.

مثال گزاره‌نمای $x^۳ - x^۲ - ۴x + ۴ = ۰$ با قراردادن هر عدد حقیقی به جای x به یک گزارهٔ درست یا غلط تبدیل می‌شود، پس دامنهٔ متغیر این گزاره‌نما مجموعه‌اعداد حقیقی است. $(D = \mathbb{R})$ حالا برای این‌که مجموعه‌جواب این گزاره‌نما را به دست آوریم، باید معادله را حل کنیم:

$$x^۳ - x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲(x-۱) - ۴(x-۱) = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x^۲-۴) = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۲)(x+۲) = ۰ \Rightarrow (x=۱) \text{ یا } (x=۲) \text{ یا } (x=-۲)$$

بنابراین گزاره‌نما به ازای $x \in \{۱, ۲, -۲\}$ به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود؛ پس مجموعه‌جواب گزاره‌نما $S = \{۱, ۲, -۲\}$ است.

سؤال‌های امتحانی

۴- دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه‌جواب هر یک را مشخص کنید.

۱) x مضرب ۷ است. $(D = \mathbb{Z})$ *(کتاب درسی)*

۲) x سه واحد از مضارب ۷ بیشتر است. $(D = \mathbb{Z})$ *(کتاب درسی)*

۳) $\dfrac{۱}{۲+x} \in \mathbb{N}$ $(D = \mathbb{Z})$

۴) $\dfrac{۶x+۱}{۲x-۵} \in \mathbb{Z}$ $(D = \mathbb{Z})$

۵) a مربع کامل است. $(D = \mathbb{Z})$

۶) a فرد است. $(D = \mathbb{R})$

۷) $۲x^۲ + x - ۱ = ۰$ $(D = \mathbb{R})$

۸) $۲x^۲ + x - ۱ = ۰$ $(D = \mathbb{Z})$

۹) $۳^x = ۰$ $(D = \mathbb{R})$

۱۰) $\dfrac{۱}{x^۲} \leq \dfrac{۱}{x^۳}$ $(D = \mathbb{R})$

۱۱) $\sqrt{x-۱} = \dfrac{۲}{x-۱}$ $(D = \mathbb{R})$

۱۲) $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۶$ $(D = \mathbb{N})$

۱۳) $\dfrac{۱}{x} > \dfrac{۱}{۵}$ $(D = \mathbb{R})$

۱۴) $\sqrt{x^۲} - x < ۰$ $(D = \mathbb{Z})$

۱۵) $\dfrac{x}{x+۱} \leq ۱$ $(D = \mathbb{R})$

۱۶) $\dfrac{۳x+۵}{x^۲-۱} \in \mathbb{N}$ $(D = \mathbb{Z})$

۱۷) $\dfrac{x^۲-۱۶}{x-۴} = x+۴$ $(D = \mathbb{Z})$

۱۸) $\dfrac{x-۱}{x+۱} \geq \dfrac{۱}{x-۱}$ $(D = \mathbb{Z})$

۱۹) تاس را پرتاب می‌کنیم و $p(\{x\}) = \dfrac{۱}{۶}$. $(D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\})$ *(کتاب درسی)*

۵- دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آن‌که پیشامد A رخ دهد، برابر با $\frac{1}{2}$ است.» چند عضو دارد؟ چندتا از این اعضا گزاره‌نما را به یک گزارهٔ با ارزش درست تبدیل می‌کنند؟ *(کتاب درسی)*

۶- دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر a را عدد تاس اول و b را عدد تاس دوم در نظر بگیریم، دامنهٔ متغیر و مجموعه‌جواب گزاره‌نماهای زیر چند عضو دارد؟

۱) $a+b$ زوج است.
۲) $a<b$ است.
۳) a و b دو عدد متوالی‌اند.
۴) معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-ax+b=0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۷- اگر $A=\{3,4,5,\ldots,10\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ باشد و X عضوی از مجموعهٔ توانی $A\cup B$ باشد، (مجموعهٔ توانی $A\cup B$ مجموعهٔ شامل همهٔ زیرمجموعه‌های $A\cup B$ می‌باشد.) آن‌گاه:

۱) مجموعه‌جواب گزاره‌نمای $A\cap B\subseteq X\subseteq A\cup B$ کدام است؟
۲) چند عضو از مجموعه‌جواب‌های گزاره‌نما ۵عضوی هستند؟

۸- دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که پیشامد A رخ دهد برابر است با $\frac{5}{12}$». را تعیین کرده و تعداد اعضای آن را مشخص کنید. به ازای چند عضو از دامنهٔ متغیر گزاره‌نما، این گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود؟

ترکیب گزاره‌ها

اگر دو یا چند گزاره را با استفاده از «رابطه‌های گزاره‌ای» مثل «یا»، «و»، «اگر... آن‌گاه...»، «اگر و فقط اگر» و... به هم وصل کنیم، یک گزارهٔ مرکب ساخته می‌شود. مثلاً گزاره‌های: ۱ «مجید درس نمی‌خواند» و «حسین شاگرد اول است.» و ۲ «۵ عددی زوج است» یا «۵ عددی اول است»، با ترکیب ۲ گزاره به وسیلهٔ رابطه‌های «و» و «یا» ساخته شده‌اند.

ارزش گزاره‌های مرکب به ۱ ارزش گزاره‌های اولیه و ۲ نوع «ادات ربط» به کار رفته در آن‌ها، بستگی دارد. در ادامه، روش‌های ساختن گزاره‌های مرکب و تعیین ارزش آن‌ها را یاد می‌گیریم.

نقیض یک گزاره $(\sim p)$

نقیض گزارهٔ p را به صورت « $\sim p$ » نوشته و آن را به صورت «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش گزارهٔ « $\sim p$ » مخالف ارزش گزارهٔ p است. به علامت « $\sim$ » ناقض گفته می‌شود.

جدول ارزش گزارهٔ $\sim p$ به صورت مقابل است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

بنابراین اگر p درست باشد، $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد، $\sim p$ درست است.

مثال و پاسخ

مثال نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

p: باران می‌بارد.
q: عدد π گنگ است.
r: $x\geq 3$

پاسخ

$\sim p$: چنین نیست که باران ببارد ≡ باران نمی‌بارد.
$\sim q$: چنین نیست که عدد π گنگ باشد ≡ π گنگ نیست.
$\sim r$: چنین نیست که $x\geq 3$ باشد ≡ $x\ngeq 3$ ≡ $x<3$

ترکیب فصلی دو گزاره $(p\vee q)$

عبارت «p یا q» که آن را به صورت « $p\vee q$ » می‌نویسیم را ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q می‌گوییم. رابط منطقی «یا» که به صورت « $\vee$ » نوشته می‌شود را «فاصل» می‌گوییم.

مثال
p: علی معلم است.
q: علی مغازه دارد.
$p\vee q$: علی معلم است یا علی مغازه دارد.

اگر «علی معلم باشد»، یا «مغازه داشته باشد» یا «هم معلم باشد و هم مغازه داشته باشد»، عبارت $p \vee q$ درست است و ارزش گزارهٔ $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که علی معلم نباشد و مغازه هم نداشته باشد. یعنی هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

نتیجه بنابراین ارزش گزارهٔ مرکب $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند. جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

تذکر ممکن است چند گزاره به وسیلهٔ ترکیب فصلی به هم وصل شوند، در این صورت گزارهٔ $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ زمانی درست است که لااقل یکی از گزاره‌ها درست باشد. این گزاره تنها زمانی نادرست است که همهٔ گزاره‌ها نادرست باشند.

ترکیب عطفی دو گزاره $(p \wedge q)$

ترکیب «p و q» که آن را به صورت « $p \wedge q$ » نمایش می‌دهیم را ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q می‌گوییم. رابط منطقی «و» که به صورت « $\wedge$ » نوشته می‌شود را «عاطف» می‌گوییم.

مثال

p: ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد.

q: علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد.

$p \wedge q$: ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد و علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد.

تنها زمانی که ایران به جام جهانی صعود کند و علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شود، عبارت $p \wedge q$ درست است و اگر یکی از این گزاره‌ها یا هر دوی آن‌ها نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

نتیجه ارزش گزاره یعنی مرکب « $p \wedge q$ » تنها زمانی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند. جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

تذکر ترکیب عطفی n گزاره یعنی $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ تنها زمانی درست است که همهٔ گزاره‌ها درست باشند و اگر تنها یکی از آن‌ها نادرست باشد این عبارت نادرست خواهد بود.

هم‌ارزی‌های مهم در ترکیب فصلی و عطفی

الف قوانین و هم‌ارزی‌های منطقی زیر را که به راحتی با جدول ارزش گزاره‌ها قابل اثبات هستند را حتماً حفظ کنید.

۱ (قوانین جابه‌جایی) $\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$

۲ (قوانین شرکت‌پذیری) $\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$

۳ (قوانین توزیع‌پذیری یا پخشی) $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

۴ (قوانین جذب یا هم‌پوشانی) $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$

۵ (قوانین شبه جذب) $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$

۶ (قوانین دمورگان) $\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$

ب اگر ارزش گزارهٔ درست را با T و ارزش گزارهٔ نادرست را با F نمایش دهیم، هم‌ارزی‌های زیر که تقریباً بدیهی هستند را نیز به خاطر بسپارید.

۱ $\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$

۲ $\begin{cases} p \wedge F \equiv F \\ p \vee F \equiv p \end{cases}$

۳ $\begin{cases} p \wedge T \equiv p \\ p \vee T \equiv T \end{cases}$

۴ $\begin{cases} p \wedge \sim p \equiv F \\ p \vee \sim p \equiv T \end{cases}$

۵ $\sim (\sim p) \equiv p$

مثال و پاسخ

مثال **خواص زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.**

۱) دمورگان $\begin{cases} \sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q \\ \sim(p\vee q)\equiv \sim p\wedge \sim q \end{cases}$

۲) توزیع‌پذیری $\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \end{cases}$

پاسخ **۱ اثبات قانون دمورگان:** ابتدا ارزش گزاره‌های p و q را می‌نویسیم و سپس ارزش گزاره‌هایی که مورد نیاز است را در جدول به دست می‌آوریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p\vee\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

← ستون‌های مربوط به $\sim(p\wedge q)$ و $\sim p\vee\sim q$ با هم برابر شده‌اند. پس: $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$.

← ستون‌های مربوط به $\sim(p\vee q)$ و $\sim p\wedge\sim q$ با هم برابر شده‌اند پس: $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$.

۲ اثبات قانون توزیع‌پذیری: چون با سه گزارهٔ p، q و r سر و کار داریم، پس طبق اصل ضرب ۸ حالت برای درستی یا نادرستی این سه گزاره وجود دارد:

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

چون دو ستون آخر یکسان شده‌اند، پس: $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

رابطهٔ دوم در توزیع‌پذیری هم به همین ترتیب اثبات می‌شود.

سؤال‌های امتحانی

۹- هم‌ارزی‌ها و قوانین مطرح‌شده در صفحهٔ قبل را به وسیلهٔ جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

۱۰- مقادیر x، y و z را بیابید به طوری که داشته باشیم:

۱) $(2y+z)^2+(x-y)^2+\sqrt{2x+6}=0$

۲) $(2y+x)(x+1)(y-1)=0$

ترکیب شرطی گزاره‌ها

گزارهٔ «اگر هوا بارانی باشد، آن‌گاه آسمان ابری است.» را در نظر بگیرید. گزاره‌هایی به این شکل را «گزاره‌های شرطی» می‌گوییم.

در حالت کلی اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت $p\Rightarrow q$ می‌نویسیم.

در این ترکیب شرطی گزارهٔ p را «فرض یا مقدم» و q را «حکم یا تالی» می‌گوییم.

مثال گزارهٔ شرطی زیر را در نظر بگیرید:

$p\Rightarrow q$: $\underbrace{\text{هوا بارانی است}}_{\text{فرض یا مقدم}} \Rightarrow \underbrace{\text{آسمان ابری است}}_{\text{حکم یا تالی}}$»

گزارهٔ شرطی بالا تنها زمانی نادرست است که «هوا بارانی باشد» اما «آسمان ابری نباشد.»

مثال گزارهٔ شرطی «اگر حسن خوب درس بخواند، آن‌گاه نمرهٔ خوبی می‌گیرد.» را در نظر بگیرید.
این گزارهٔ شرطی نیز تنها زمانی نادرست است که حسن خوب درس بخواند اما نمرهٔ خوبی نگیرد.

نتیجه گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست اما q نادرست باشد.

جدول ارزش گزارهٔ مرکب $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید، اگر ارزش p (مقدم) نادرست باشد، بدون توجه به این‌که q (تالی) درست یا نادرست است، ارزش $p \Rightarrow q$ همواره درست است. در این حالت می‌گویند ارزش گزارهٔ شرطی « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

مثال ارزش گزارهٔ «اگر ۴ عددی فرد باشد، آن‌گاه ۹ مربع کامل نیست.» با توجه به این‌که مقدم یعنی گزارهٔ «۴ عددی فرد است.» نادرست است، به انتفای مقدم درست می‌باشد.

قضیهٔ شرطی

اگر در یک گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ بتوان با فرض درستی p، درستی q را نتیجه گرفت، گزارهٔ شرطی به یک «قضیهٔ شرطی» تبدیل می‌شود.
مثلاً گزارهٔ شرطی «اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند» یک قضیهٔ شرطی است. گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

الف اگر p آن‌گاه q **ب** p شرط کافی برای q است. **پ** q شرط لازم برای p است.

عکس گزارهٔ شرطی

گزارهٔ شرطی « $q \Rightarrow p$ » را عکس گزارهٔ شرطی « $p \Rightarrow q$ » می‌گوییم.
ارزش این دو گزاره ربطی به هم ندارند و هر کدام می‌توانند درست یا نادرست باشند.

مثال عکس گزارهٔ شرطی « $x^2 - ۴ = ۰ \Rightarrow x - ۲ = ۰$ » گزارهٔ شرطی « $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^2 - ۴ = ۰$ » است.
ارزش گزارهٔ « $x^2 - ۴ = ۰ \Rightarrow x - ۲ = ۰$ » درست است اما ارزش گزارهٔ شرطی « $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^2 - ۴ = ۰$ » نادرست است؛ زیرا مثال نقض دارد. مثلاً اگر $x = -۲$ باشد، $x^2 - ۴ = (-۲)^2 - ۴ = ۰$ است، اما $x - ۲ = (-۲) - ۲ = -۴ \neq ۰$ می‌باشد.

عکس نقیض گزارهٔ شرطی

گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ می‌گوییم. هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود، هم‌ارز است.

قانون عکس نقیض : $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

مثال و پاسخ

مثال عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

۱) اگر در کوهستان باران ببارد، آن‌گاه در آن گیاه می‌روید.

۲) $x^2 > ۴ \Rightarrow x > ۲ \vee x < -۲$

پاسخ **۱** برای نوشتن عکس نقیض یک گزارهٔ شرطی باید جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض کنیم. عکس نقیض گزارهٔ (۱) به شکل زیر است:

(اگر در کوهستان باران ببارد) $\Rightarrow$ (در کوهستان گیاه می‌روید) $\equiv \sim$ (اگر در کوهستان گیاه بروید) $\Rightarrow \sim$ (در کوهستان باران می‌بارد)

$\equiv$ اگر در کوهستان گیاه نروییده باشد $\Rightarrow$ در کوهستان باران نباریده است

*عکس نقیض ۱: اگر در کوهستان گیاه نروید، آن‌گاه در کوهستان باران نباریده است.

۲
$$(x^2 > ۴ \Rightarrow x > ۲ \vee x < -۲) \equiv (\sim(x > ۲ \vee x < -۲) \Rightarrow \sim(x^2 > ۴))$$
$$\equiv (x \leq ۲ \wedge x \geq -۲ \Rightarrow x^2 \leq ۴)$$
$$\equiv (-۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow x^2 \leq ۴)$$

عبارت آخر عکس نقیض عبارت اولیه است و با آن هم‌ارز است.

تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی

برای تبدیل گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به ترکیب فصلی می‌توان آن را به صورت $\sim p \vee q$ نوشت: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

مثال و پاسخ

مثال هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

پاسخ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

چون ستون‌های مربوط به گزاره‌های $p \Rightarrow q$، $\sim p \vee q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هر سه یکسان هستند، پس این سه گزاره هم‌ارزند.

قانون ادخال فاصل و حذف عاطف

اگر گزارهٔ p درست باشد، گزارهٔ $p \vee q$ حتماً درست است. زیرا برای درست‌بودن $p \vee q$ درست‌بودن یکی از گزاره‌های p یا q کافی است. به این قانون، «قانون ادخال فاصل» می‌گوییم. قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

اگر $p \wedge q$ گزاره‌ای درست باشد، حتماً گزاره‌های p و q هر دو درست هستند. پس اگر ترکیب عطفی $p \wedge q$ درست بود، با حذف گزارهٔ q، گزارهٔ باقی‌مانده یعنی p، هم‌چنان درست است. این قانون را «قانون حذف عاطف» می‌گوییم. قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

سؤال‌های امتحانی

۱۱- قوانین حذف عاطف و ادخال فاصل را به وسیلهٔ جدول ارزش گزاره‌ها اثبات کنید.

۱) قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$
۲) قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

۱۲- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۱) $x \geq -6 \vee x < 5$

۲) $\varnothing \in \{0,1,2,3\}$

۳) لوزی متوازی‌الاضلاع است و قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند.

۴) ۲۹ عددی زوج است.

۵) من سخت‌کوشانه درس خواهم خواند و در امتحان قبول خواهم شد.

۶) $\{\{1\}\} \subseteq \{1,\{1,\{1\}\}\}$

۱۳- عکس نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۱) $x \geq 2 \Rightarrow x^2 > 4$

۲) اگر حسن در تمرینات شرکت کند، برای تیم فوتبال مدرسه انتخاب می‌شود.

۳) اگر خورشید در آسمان نباشد، در نتیجه شب است.

۱۴- وقتی می‌گوییم «ارزش یک گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم درست است» به چه معنی است؟

ترکیب دوشرطی

ترکیب دوشرطی دو گزارهٔ p و q را با نماد «$\Leftrightarrow$» نمایش می‌دهیم و به صورت $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌کنیم و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

۱) «p دوشرطی q»
۲) «اگر p آن‌گاه q و برعکس»
۳) «p شرط لازم و کافی برای q است.»
۴) «p اگر و فقط اگر q»

جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها ارزش $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند یعنی p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.
در واقع $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هم $p \Rightarrow q$ و هم $q \Rightarrow p$ درست باشند.

مثال و پاسخ

مثال **گزاره‌های زیر را به صورت شرطی بنویسید و در صورت امکان آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.**

۱) $\left.\begin{matrix} a = b : p \\ a^2 = b^2 : q \end{matrix}\right\}$

۲) $\left.\begin{matrix} b = 0 \vee a = 0 : p \\ ab = 0 : q \end{matrix}\right\}$

پاسخ ۱) عبارت شرطی «$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$» درست است؛ اما عکس آن یعنی «$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$» نادرست است؛ زیرا $1^2 = (-1)^2$ است، اما $1 = -1$ نیست، پس عبارت داده‌شده دوشرطی نیست و ترکیب شرطی داده‌شده را به صورت‌های زیر می‌توانیم بخوانیم:

$(a = b \Rightarrow a^2 = b^2)$ $\Leftrightarrow$ (شرط کافی برای $a^2 = b^2$ است $a = b$) $\Leftrightarrow$ (شرط لازم برای $a = b$ است $a^2 = b^2$)

۲) اگر $ab = 0$ باشد، a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر هستند و برعکس اگر a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر باشند، حتماً $ab = 0$ خواهد بود، پس این گزاره‌ها با هم یک ترکیب دوشرطی درست می‌سازند، پس داریم: $(p \Leftrightarrow q) \equiv (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$

این ترکیب دوشرطی را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) شرط لازم و کافی برای آن‌که $ab = 0$ باشد، این است که $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.
۲) شرط لازم و کافی برای آن‌که $a = 0$ یا $b = 0$ باشد، این است که $ab = 0$ باشد.
۳) $ab = 0$ است، اگر و تنها اگر $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.
۴) $a = 0$ یا $b = 0$ است، اگر و تنها اگر $ab = 0$ باشد.
۵) اگر $ab = 0$ باشد، $a = 0$ یا $b = 0$ است و برعکس.

نقیض گزاره‌های شرطی و دوشرطی

(این قسمت برای مطالعهٔ علاقه‌مندان به علم و دانش است و به درد امتحان نهایی نمی‌خورد.)

نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$	(نوشتن ترکیب شرطی به صورت فصلی)
$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$	(دمورگان)
$\equiv p \wedge \sim q$	$(\sim(\sim p) \equiv p)$

نتیجه نقیض گزارهٔ شرطی « $p \Rightarrow q$ » به صورت « $p \wedge \sim q$ » است:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

نقیض گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود: (این اثبات در امتحانات نهایی مورد سؤال نخواهد بود.)

(تعریف) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$ (دمورگان) $\equiv \sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)$

(نقیض گزارهٔ شرطی) $\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ (توزیع‌پذیری) $\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$

(شبه جذب) $\equiv [p \vee q] \wedge [\sim q \vee \sim p]$ (تبدیل فصلی به شرطی) $\equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$

(تعریف دوشرطی) $\equiv \sim p \Leftrightarrow q$

نتیجه نقیض گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

مثال **الف** نقیض گزارهٔ شرطی $\underbrace{a = 0 \vee b = 0}_{q} \Rightarrow \underbrace{ab = 0}_{p}$ می‌شود $\underbrace{(ab = 0)}_{p} \wedge \underbrace{(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)}_{\sim q}$

ب نقیض گزارهٔ دوشرطی $\underbrace{a = 0 \vee b = 0}_{q} \Leftrightarrow \underbrace{ab = 0}_{p}$ را می‌شود به صورت‌های زیر نوشت:

۱) $\underbrace{ab \neq 0}_{\sim p} \Leftrightarrow \underbrace{a = 0 \vee b = 0}_{q}$

۲) $\underbrace{ab = 0}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{a \neq 0 \wedge b \neq 0}_{\sim q}$

۳) $(\underbrace{ab = 0}_{p} \wedge (\underbrace{a \neq 0 \wedge b \neq 0}_{\sim q})) \vee ((\underbrace{a = 0 \vee b = 0}_{q}) \wedge \underbrace{ab \neq 0}_{\sim p})$

سؤال‌های امتحانی

۱۵- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $p \Rightarrow p \equiv T$

۲) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

۳) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ *(کتاب درسی)*

۴) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$ *(کتاب درسی)*

۵) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ *(کتاب درسی)*

۶) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

۱۶- ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

۱) شرط لازم و کافی برای این‌که دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند، این است که دو زاویهٔ مجاور اضلاع با هم برابر باشند.

۲) شرط لازم و کافی برای این‌که احتمال پیشامدی صفر باشد، این است که پیشامد تهی باشد. *(کتاب درسی)*

۳) شرط لازم و کافی برای این‌که نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، این است که فاصلهٔ نقطه از دو سر پاره‌خط یکی باشد. *(کتاب درسی)*

۴) $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$

۵) $x > 3 \Leftrightarrow 20 - 6x < 2$

۶) $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

۷) $(x + 3y + 16)^2 + \sqrt{x - y} + |z + x^2| = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{4}z$

۸) $3x^2 + 20x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \vee x = \frac{1}{3}$

۹) $\begin{cases} \text{(الف)}\ a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b \wedge a \geq -b \\ \text{(ب)}\ a^2 \geq b^2 \Rightarrow a \geq b \wedge a \leq -b \end{cases}$

۱۰) $a^2 + b^2 + \sqrt{d - c} = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = d = 0$

۱۷- در هر یک از موارد زیر به جای $\square$ چه تعداد از علامت‌های «$\vee$» یا «$\wedge$» یا «$\Rightarrow$» یا «$\Leftrightarrow$» را می‌توان قرار داد تا یک هم‌ارزی درست داشته باشیم؟ (T درست و F نادرست است.)

۱) $(\frac{۲}{۵}\neq\frac{۸}{۲۰})\ \square\ (۱\in\{۲,۳,۴\})\equiv T$

۲) $(-۲>۳)\ \square\ (x^۲+۱\neq ۰)\equiv T$

۳) $(a\in\{b\}\Leftrightarrow a=b)\ \square$ (دو قطر متوازی‌الاضلاع با هم برابرند.) $\equiv F$

۴) $(x<-۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x}\leq -۲)\ \square$ (۲ اول نیست اگر و فقط اگر ۲ مربع کامل باشد.) $\equiv F$

۵) $[(x-۱)(x+۱)=۰\ \Rightarrow\ (x=۱)\wedge(x=-۱)]\ \square\ [((x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۰)\ \Rightarrow\ ((x-۱)=۰\wedge(y+۲)=۰)]\equiv F$

۱۸- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر $a^۲$ عددی فرد باشد، آن‌گاه a نیز عددی فرد است. (کتاب درسی)

۱۹- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر $a^۲$ مضرب ۳ باشد، a نیز مضرب ۳ است.

۲۰- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح n ثابت کنید اگر $n^۳$ زوج باشد، آن‌گاه n نیز زوج است.

۲۱- جدول ارزش گزاره‌های زیر را کامل کنید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$	$\sim p\Rightarrow q$	$\sim p\Leftrightarrow q$
	مجموع هر ۲ عدد اول بزرگ‌تر از ۲ همواره زوج است.								F
$ab<۰\ \Rightarrow\ a>۰\vee b>۰$				F					
-۷ عددی اول است					T				
	$\underset{\text{زوج}}{(a+b)}\ \Leftrightarrow\ \underset{\text{فرد}}{(a)}\wedge\underset{\text{فرد}}{(b)}$							F	

۲۲- نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

۱) اگر p عددی اول باشد، $p=۶k\pm۱$ است.

۲) اگر خوب درس بخوانید، در نتیجه نمرهٔ بالایی می‌گیرید و پدر و مادرتان از شما راضی خواهند شد.

۳) اگر $A\subseteq S$ باشد، آن‌گاه $۰\leq P(A)\leq ۱$ است.

۴) اگر عددی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ۳ و بر ۲ بخش‌پذیر است.

۵) اگر عددی بر ۶ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه بر ۳ یا بر ۲ بخش‌پذیر نیست.

۲۳- گزاره‌های زیر را به صورت یک ترکیب شرطی یا دوشرطی درست بنویسید و آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

۱) p: چهارضلعی ABCD مستطیل است. q: زوایای $A\hat{B}C$ و $C\hat{D}A$ قائمه‌اند.

۲) p: $a\times b$ زوج است. q: a و b زوج هستند.

۳) p: a زوج است. q: $a+۱$ فرد است.

۴) p: $xz>yz$ ، q: $x>y$ و $z>۰$ (x ، y و z صحیح‌اند)

۵) p: a و b گنگ و مثبت هستند. q: ab گنگ است.

۶) p: ABCD مربع است. q: دو قطر ABCD عمود و برابرند.

۷) p: a و b گنگ هستند. q: a^b گنگ است.

۸) p: چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است. q: هر ۲ زاویهٔ روبه‌رو برابرند.

۹) p: عدد طبیعی n توانی طبیعی از ۳ است. q: عدد طبیعی n مضربی از ۳ است.

۱۰) p: $R\Rightarrow S\equiv T$ ، q: $R\Leftrightarrow S\equiv T$

۱۱) p: $\frac{x+۳}{x-۳}>۱$ ، q: $(x^۲-۹)(x^۲+x-۶)>۰$

۱۲) p: $\frac{x+۳}{x^۲+۳}<۱$ ، q: $x^۲>x$

۱۳) p: n عدد طبیعی است. q: $\sqrt{n^۲+۱}$ گنگ است.

۲۴- جدول ارزش گزاره‌های زیر را با توجه به اطلاعات داده‌شده تکمیل کنید. (اطلاعات هر سطر فقط مربوط به همان سطر است و جدول‌ها از هم مجزا هستند.)

جدول ۱:

p	q	r	$(p\wedge r)\Rightarrow q$	$\sim p\wedge((\sim p\vee\sim r)\Leftrightarrow q)$	$(p\vee q)\Rightarrow\sim r$	$[r\wedge(p\vee q)]\Rightarrow q$
	F		T			
		F		T		
				F		F

جدول ۲:

p	q	r	$\sim p\wedge q$	$q\Rightarrow(p\vee r)$	$q\Rightarrow(\sim p\Rightarrow\sim r)$	$[p\vee(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(\sim r\Leftrightarrow p)$	$(\sim r\Rightarrow\sim q)\Rightarrow\sim p$
			T		F		
						T	F

۲۵- الف) آیا از این‌که $p\wedge q\equiv p\wedge r$ می‌توان نتیجه گرفت $q\equiv r$؟

ب) آیا از این‌که $p\vee q\equiv p\vee r$ می‌توان نتیجه گرفت $q\equiv r$؟

پ) آیا از این‌که $p\Rightarrow r$ درست و $q\Rightarrow r$ نادرست هستند، می‌توان نتیجه گرفت $(p\vee q)\Rightarrow r$ نادرست است؟

ت) آیا اگر $(q\Rightarrow p)\equiv(p\Rightarrow q)$ می‌توان نتیجه گرفت $p\equiv q$؟

۲۶- x را چنان تعیین کنید که هم‌ارزی زیر همواره برقرار باشد:

$$(x\wedge\sim p)\vee(\sim x\wedge p)\vee(x\wedge p)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee q\vee x)$$

۲۷- اگر ارزش گزارهٔ $[\sim q\Leftrightarrow(p\wedge S)]\wedge[\sim(q\Rightarrow(p\Rightarrow r))]$ درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $s\Leftrightarrow(p\wedge\sim r)$

۲) $[\sim q\Rightarrow(p\Leftrightarrow\sim q)]\Rightarrow r$

۳) $(r\Rightarrow p)\wedge(q\Rightarrow s)$

۴) $S\Rightarrow[(k\Leftrightarrow s)\vee\sim k]$

۵) $\sim[\sim k\vee(s\Leftrightarrow k)]\Rightarrow\sim s$

۲۸- اگر بدانیم ارزش گزارهٔ $\sim q\Rightarrow\sim p$ نادرست است، ارزش گزاره‌های الف) $(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow\sim p$ و ب) $(p\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow(q\vee p))$ را تعیین کنید.

۲۹- اگر ارزش گزارهٔ $\sim p\Rightarrow(q\vee r)$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ $(q\vee\sim r)\Leftrightarrow(p\wedge(q\Rightarrow r))$ را تعیین کنید.

۳۰- بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $p\wedge(q\Rightarrow\sim r)\Rightarrow p\equiv T$

۲) $p\Leftrightarrow q\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۳) $\sim p\Rightarrow[q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv T$

۴) $[p\Rightarrow(r\Rightarrow\sim p)]\wedge(r\wedge p)\equiv F$

۵) $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$

۶) $p\Rightarrow(\sim p\Leftrightarrow\sim q)\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$

۷) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

۸) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

۹) $[\sim p\wedge(p\Rightarrow q)]\Leftrightarrow\sim p\equiv T$

۱۰) $\sim[(p\Rightarrow q)\wedge(\sim p\Rightarrow q)]\Leftrightarrow\sim q\equiv T$

۱۱) $[(p\vee q)\Rightarrow\sim p]\wedge[(p\vee q)\Rightarrow r]\equiv\sim p\wedge(q\Rightarrow r)$

۱۲) $r\Rightarrow[p\Rightarrow(q\Rightarrow s)]\equiv(p\wedge q)\Rightarrow(r\Rightarrow s)$

سورها

بعضی وقت‌ها می‌خواهیم یک خاصیت را به همهٔ اعضای یک مجموعه نسبت بدهیم؛ مثلاً می‌گوییم:

الف «همهٔ» بچه‌های درسخوان موفق هستند.

ب «همهٔ» اعداد زوج، مضرب ۲ هستند.

پ «هر» مربع، مستطیل است.

ت مربع «هر» عدد فرد به شکل $8k+1$ است.

ث «به ازای جمیع مقادیر» x حقیقی، $x^2+x+1\geq 0$ است.

در همهٔ این موارد از الفاظ «هر»، «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» استفاده کرده‌ایم. این الفاظ را «**سور عمومی یا کلی**» می‌گوییم. برای نشان‌دادن سور عمومی به زبان ریاضی از نماد « $\forall$ » استفاده می‌کنیم.

مثلاً جملات قسمت‌های (ب)، (ت) و (ث) را به شکل‌های زیر به زبان ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

ب $\forall x\in E: x=2k$ (E مجموعه‌اعداد زوج است.)

ت $\forall x\in O: x^2=8k+1$ (O مجموعه‌اعداد فرد است.)

ث $\forall x\in \mathbb{R}: x^2+x+1\geq 0$

اما گاهی وقت‌ها خاصیتی که می‌خواهیم بیان کنیم، برای همهٔ مقادیری که عضو دامنهٔ متغیر هستند، درست نیست، بلکه برای بعضی از آن‌ها یا حتی تنها برای یکی از آن‌ها درست است. مثلاً گزاره‌های زیر را ببینید:

الف «وجود دارد» عدد اولی که زوج باشد.

ب «بعضی» از لوزی‌ها مربع هستند.

پ به ازای بعضی مقادیر حقیقی x، $x^2-5x+6=0$ است.

می‌بینیم که برای بیان این گزاره‌ها از الفاظی مثل «وجود دارد»، «بعضی» و «به ازای بعضی مقادیر» استفاده می‌کنیم. این الفاظ را «سور وجودی» می‌گوییم و آن‌ها را با نماد ریاضی « $\exists$ » نشان می‌دهیم. مثلاً جملات بالا را با زبان ریاضی به صورت زیر می‌نویسیم:

الف $\exists x\in P: x=2k$ (P مجموعه‌اعداد اول است)

ب $\exists x\in$ {لوزی‌ها} : $x=$ مربع

پ $\exists x\in \mathbb{R}: x^2-5x+6=0$

تذکر سورهای عمومی یا وجودی با قرارگرفتن قبل از گزاره‌نماها، گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند. مثلاً وقتی می‌گوییم « $2x$ عددی زوج است.» یک گزاره‌نما داریم، اما وقتی می‌گوییم «به ازای هر عدد صحیح x، $2x$ عددی زوج است.» گزاره‌نما به یک گزاره تبدیل شده است.

نتیجه اگر بخواهیم بگوییم گزاره‌نمای $p(x)$ به ازای همهٔ عضوهای مجموعهٔ D (دامنهٔ متغیر گزاره‌نما) درست است، از سور عمومی $\forall$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: $\forall x\in D: p(x) \Rightarrow$ «هر x عضو D خاصیت $p(x)$ را دارد.»

و اگر بخواهیم بگوییم این گزاره‌نما به ازای بعضی یا لااقل یکی از مقادیر مجموعهٔ D برقرار است، از سور وجودی استفاده می‌کنیم:

$\exists x\in D: p(x) \Rightarrow$ «وجود دارد x عضو D که خاصیت $p(x)$ را دارد.»

بدیهی است که گزارهٔ $\forall x\in D: p(x)$ زمانی درست است که همهٔ عضوهای D خاصیت $p(x)$ را داشته باشند و اگر حداقل یک عضو از D در $p(x)$ صدق نکند، یک گزارهٔ نادرست خواهیم داشت. پس تنها یک مثال نقض می‌تواند نادرستی گزارهٔ دارای سور عمومی را اثبات کند.

اما برای اثبات درستی گزارهٔ $\exists x\in D: p(x)$ باید یک عضو از D پیدا کنیم که در $p(x)$ صدق کند. وجود همین یک عضو برای اثبات درستی این گزاره کافی است و تنها وقتی مجموعه‌جواب گزاره‌نما تهی باشد و هیچ عضو از D در $p(x)$ صدق نکند، گزارهٔ دارای سور وجودی نادرست خواهد شد.

مثال و پاسخ

مثال ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

۱) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^۲ - ۲۵}{x - ۵} = x + ۵$ ‏ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{۱}{x} \geq ۲$ ‏ ۳) $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{۱}{x^۲} < \frac{۱}{x^۳}$

۴) $\exists x \in \{۱,۲,۳\} : \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} \in \{۴,۵,۶\}$ ‏ ۵) $\forall n \in \mathbb{N} : ۲^{۲^n} + ۱ \in P$ (مجموعه‌اعداد اول است P) *(کتاب درسی)*

پاسخ ۱ نادرست، به ازای $x = ۵$ عبارت به شکل $\frac{۵^۲ - ۲۵}{۵ - ۵} = \frac{۰}{۰} = ۵ + ۵$ در می‌آید که نادرست است. همین یک مثال نقض (که تنها مثال نقض این تساوی هم هست) برای نادرستی گزارهٔ دارای سور عمومی کافی است.

۲ درست است، رابطهٔ داده‌شده در $\mathbb{R}^+$ هیچ مثال نقضی ندارد و به راحتی قابل اثبات است:

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲ + ۱}{x} \geq ۲ \xleftrightarrow[\text{در x ضرب می‌کنیم}]{x>۰} x^۲ + ۱ \geq ۲x \Leftrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (x - ۱)^۲ \geq ۰$$ بدیهی

۳ چون سور وجودی داریم، اگر تنها یک مقدار حقیقی x پیدا کنیم که عبارت $\frac{۱}{x^۲} < \frac{۱}{x^۳}$ درست شود، ارزش گزارهٔ داده‌شده درست خواهد بود. به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ عبارت داده‌شده درست است.

$$x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \left(\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^۲} < \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^۳} \Leftrightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} < \frac{۱}{\frac{۱}{۸}} \Leftrightarrow ۴ < ۸\right)$$

توجه مجموعه‌جواب گزارهٔ داده‌شده $۰ < x < ۱$ می‌باشد.

۴ نادرست است، به ازای هیچ‌یک از مقادیر $x \in \{۱,۲,۳\}$ عبارت $\frac{x^۲ - ۱}{x + ۱}$ عضو مجموعهٔ $\{۴,۵,۶\}$ نمی‌شود. پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما در دامنهٔ متغیر داده‌شده، تهی است و گزارهٔ داده‌شده نادرست است:

$$x = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \frac{۱^۲ - ۱}{۱ + ۱} = ۰$$

$$x = ۲ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \frac{۲^۲ - ۱}{۲ + ۱} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

$$x = ۳ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \frac{۳^۲ - ۱}{۳ + ۱} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

۵ نادرست است، به ازای $n = ۵$ عدد $۲^{۲^n} + ۱ = ۲^{۲^۵} + ۱ = ۲^{۳۲} + ۱$ عددی مرکب است. همین مثال نقض برای این‌که بگوییم گزارهٔ دارای سور عمومی نادرست است، کافی است.

تذکر

۱ این قسمت (۵) تمرین کتاب درسی است و ما نمی‌دانیم این آقا یا خانوم طراح چرا تو ذهنش فکر کرده ما باید $۲^{۳۲} + ۱$ رو حساب کنیم و بعدش هم تجزیه‌اش بکنیم!!!

۲ بچه‌ها یادتون باشه که در حالت کلی هنوز فرمولی برای اعداد اول کشف نشده (البته تا حالا که من اینو می‌نویسم)، یعنی هیچ فرمولی نداریم که به ازای همهٔ مقادیر طبیعی عدد اول تولید کند.

نقیض سورها

نقیض سور عمومی

نقیض گزارهٔ «۲ عددی اول است» می‌شود «۲ عددی اول نیست». گزارهٔ اول درست و گزارهٔ دوم نادرست است. گزاره‌هایی که دارای سور هستند را نمی‌توان با منفی‌کردن فعل نقیض کرد. مثلاً نقیض گزارهٔ «p: همهٔ دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ دارند.» گزارهٔ «q: همهٔ دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ ندارند.» نیست. چون هر دو این گزاره‌ها دارای ارزش نادرست هستند و نمی‌توانند نقیض همدیگر باشند.

توجه کنید که تنها در صورتی که دانش‌آموز یا دانش‌آموزانی وجود داشته باشند که معدلشان بالای ۱۸ نباشد، گزارهٔ p نقض می‌شود، پس می‌توانیم $\sim p$ را به صورت زیر بنویسیم:

[p ≡ (همهٔ دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ دارند.)] ⇒ [~ p ≡ (بعضی از دانش‌آموزان هستند که معدل بالای ۱۸ ندارند.)]

نتیجه نقیض گزاره‌های دارای سور عمومی را می‌توانیم به شکل روبه‌رو بنویسیم: $\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

نقیض سور وجودی

نقیض گزارهٔ «بعضی اعداد طبیعی مربع کامل هستند.» را می‌توان به صورت «هر عدد طبیعی که در نظر بگیریم، مربع کامل نیست.» بنویسیم.

نتیجه در حالت کلی نقیض گزارهٔ دارای سور وجودی به شکل روبه‌رو است: $\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

مثال و پاسخ

مثال ارزش هر گزاره را تعیین و نقیض آن را بنویسید.

۱) $\exists x \in \mathbb{Z}; ۱۲ \le x^۲ \le ۲۴$

۲) $\forall x \in \mathbb{N}; \dfrac{x^۲ + ۵x}{۱۰} \ge x + ۵$

پاسخ ۱) درست است، زیرا به ازای $x = ۴$ مقدار $x^۲$ در فاصلهٔ ۱۲ تا ۲۴ قرار دارد: $۱۲ \le x^۲ = ۱۶ \le ۲۴$

نقیض گزاره را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$۱۲ \le x^۲ \le ۲۴ \equiv x^۲ \ge ۱۲ \wedge x^۲ \le ۲۴$$

$$\sim(\exists x \in \mathbb{Z}; ۱۲ \le x^۲ \le ۲۴) \equiv \sim(\exists x \in \mathbb{Z}; x^۲ \ge ۱۲ \wedge x^۲ \le ۲۴)$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}; \sim(x^۲ \ge ۱۲ \wedge x^۲ \le ۲۴)$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}; x^۲ < ۱۲ \vee x^۲ > ۲۴$$

تذکر اگر $a \ge ۰$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} x^۲ \ge a^۲ \Leftrightarrow x \ge a \vee x \le -a \Leftrightarrow |x| \ge a \\ x^۲ \le a^۲ \Leftrightarrow x \le a \wedge x \ge -a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow |x| \le a \end{cases}$$

۲) نادرست است، برای اثبات نادرستی باید یک عدد طبیعی x پیدا کنیم که در نابرابری داده‌شده صدق نکند. نابرابری داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^۲ + ۵x}{۱۰} \ge x + ۵ \Rightarrow x^۲ + ۵x \ge ۱۰x + ۵۰ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۵۰ \ge ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱۰)(x + ۵) \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۱۰ \vee x \le -۵$$

بنابراین به ازای اعداد طبیعی بین ۵- و ۱۰ که همان اعداد طبیعی ۱ تا ۹ است، نابرابری برقرار نیست. نقیض گزاره به شکل زیر است:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x^۲ + ۵x}{۱۰} \ge x + ۵) \equiv \exists x \in \mathbb{N}; \sim(\frac{x^۲ + ۵x}{۱۰} \ge x + ۵)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}; \frac{x^۲ + ۵x}{۱۰} < x + ۵$$

سؤال‌های امتحانی

۳۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + ۵| \le ۲\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

۱) $\forall x \in A; x + ۱۰ \ge ۳$

۲) $\exists x \in A; (x + ۶)^۴ = ۱$

۳) $\forall x \in A; |x + ۴| \in \mathbb{N}$

۴) $\forall x \in A; x + ۹ \in \mathbb{N}$

۵) $\forall x \in A; (x + ۵)^۲ \le ۵$

۶) $\exists x \in A; x^۳ + ۲x^۲ - ۷x + ۴ = ۰$

۷) $\exists x \in A; \dfrac{x + ۲}{۵} = ۰$

۸) $\exists x, y \in A; (x + ۶)^۲ + (y + ۱۰)^۲ = ۲۰$

۹) $\exists y \in \mathbb{Z}: \forall x \in A; -(x + y) \in A$

۳۲- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید.

۱) $\forall x \in (-\infty, ۰) ; x - \frac{۱}{x} \le -۲$ (کتاب درسی)

۲) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = x + ۱$ (کتاب درسی)

۳) $\exists x \in \mathbb{R} ; \frac{۱}{x} > \frac{۱}{۲}$

۴) $\exists n \in P ; n^۲ + n + ۴۱ \notin \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ مجموعه‌اعداد اول است)

۵) $\forall x \in \mathbb{N} ; ۲^x + ۳ \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ مجموعه‌اعداد اول است)

۶) $\exists x \in \mathbb{N} ; \frac{x^۲ + x - ۱}{۲x + ۱} \in \mathbb{Z}$

۷) $\exists x \in \mathbb{R} ; x^۲ + ۴x + ۱ \in \{-۴, -۵, -۶, -۷\}$

۸) $\forall x \in \mathbb{N} ; ((x-۱)^۲ \ge ۱) \vee (\frac{۱}{x^۳} \le \frac{۱}{x^۴})$

۹) $\exists x, y \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} ; ۲x + ۳y = ۹$

۱۰) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} ; (x-۱)(y+۱) = ۰$

۱۱) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} ; x + y = ۰$

۳۳- گزاره‌های زیر را با نماد $\forall$ و $\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید و نقیض آن را بنویسید.

۱) هر عدد طبیعی، زوج یا فرد است. (کتاب درسی)

۲) همهٔ اعداد اول، فرد هستند. (کتاب درسی)

۳) مجموع هر عدد حقیقی و ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. (کتاب درسی)

۴) مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوسش، کم‌تر یا مساوی ۲- است.

۵) به ازای همهٔ اعداد حسابی داریم: $x^۲ > x$ یا $x^۲ = x$.

۶) عدد صحیح و مثبتی مانند x وجود دارد که $۱ - ۲x > ۵$ یا $x^۲ \ge ۴$.

۷) عدد صحیح و مثبتی مانند x وجود دارد که $x^۲ = -x$ و $۲۰ \le x^۲ \le ۷۰$.

۳۴- در جاهای خالی از میان سورهای $\forall$ یا $\exists$، آن را که مناسب‌تر است قرار دهید تا گزارهٔ داده‌شده درست باشد.

۱) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۱} = ۱$

۲) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ + ۱} = ۱$

۳) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ - ۱۶}{x + ۴} = ۰$

۴) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R} ; \frac{x + ۴}{x - ۲} = ۲$

۵) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R}^+ ; \frac{x + ۵}{x + ۵} = ۱$

۶) $\dots\dots\dots a \in \mathbb{R}^- ; a^۲ > a$

۷) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R} ; (\sqrt{x^۲ + ۱} - x)(\sqrt{x^۲ + ۱} + x) = ۱$

۸) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{R} ; \tan x . \cot x = ۱$

۹) $\dots\dots\dots x, y, z \in \mathbb{R} ; (۲x - y)^۲ + (y + z)^۲ + (x - ۱)^۲ = ۰$

۱۰) $\dots\dots\dots x \in \mathbb{Z} ; \tan x . \cot x = ۱$

۳۵- عکس، نقیض و عکس نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید. ارزش گزارهٔ اولیه و عکس آن را نیز تعیین کنید. آیا این گزاره‌ها می‌توانند یک قضیهٔ دوشرطی باشند؟

۱) $\forall a, b \in \mathbb{R} ; a^۲ < b^۲ \Rightarrow a < b$

۲) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} ; c > ۰ \wedge a < b \Rightarrow ac < bc$

۳) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^۲ \ge ۲۵ \Rightarrow x \ge ۵ \vee x \le -۵$

۴) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^۲ \le ۲۵ \Rightarrow x \le ۵ \vee x \ge -۵$

۳۶- اگر B زیرمجموعه‌ای از {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷} باشد، برای این‌که ارزش گزارهٔ زیر درست شود، B چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

$$\exists x \in \{1,2,3\}\,;\ \frac{x^2-1}{x+1} \in B$$

۳۷- نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

۱) عدد زوجی وجود دارد که اول نیست.

۲) پرنده‌ای یافت می‌شود که نمی‌پرد.

۳) توانا بود هر که دانا بود.

۴) بعضی آفریقایی‌ها، سیاه‌پوست نیستند.

۵) همهٔ آدم‌ها بدون عینک می‌بینند.

۶) هر که چهره برافروخت دلبری داند.

۷) هر که آمد، عمارتی نو ساخت.

۸) انسان‌هایی هستند که با همهٔ انسان‌ها دوست هستند.

۹) جانوری وجود دارد که از هر انسانی قوی‌تر است.

۱۰) بعضی مردم همهٔ کتاب‌ها را می‌خوانند.

۱۱) هر دانش‌آموز، هر کتاب کمک‌آموزشی را می‌خواند.

۱۲) در کشور، مدرسه‌ای وجود دارد که در آن کلاسی وجود دارد که در آن کلاس، دانش‌آموزی وجود دارد که تمام تکالیف خود را انجام داده است.

۳۸- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

۱) $(\forall a,b \in \mathbb{R}\,;\ ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0) \wedge (\forall a,b \in \mathbb{R}\,;\ a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0 \wedge b=0)$

۲) $(\forall x \in \mathbb{Z}\,;\ x^2-1=0 \Rightarrow x-1=0) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Z}\,;\ \dfrac{2y^2+y-1}{y-2}=0)$

۳) $(\forall x,y \in \mathbb{Z}\,;\ x>y \Rightarrow x^2>y^2) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Q}\,;\ x+\dfrac{1}{x}=-2)$

۴) $(\exists x \in \mathbb{Z}\,;\ \sqrt{-x} \in \mathbb{N}) \vee (\forall x \in \mathbb{R}\,;\ x>3$ یا $x<-3)$

۵) $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ x \geq 2 \Rightarrow x<10 \vee x \geq 4$

۶) $(\exists x \in \mathbb{R}\,;\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^-\,;\ \sqrt[3]{x^4}=-x\sqrt[3]{x})$

۷) $(\forall x \in P\,;\ x+1 \notin \mathbb{P}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \dfrac{n^3-n}{6} \in \mathbb{W})$ ($\mathbb{P}$ مجموعه‌اعداد اول و $\mathbb{W}$ مجموعه‌اعداد حسابی است.)

۸) $\forall x \in \mathbb{Z}^-\,;\ \exists y \in \mathbb{N}\,;\ (x+y-1)^2=0$

۹) $\forall a,b \in \mathbb{R}\,;\ \exists c \in \mathbb{R}\,;\ [a<b \Rightarrow a<c<b]$

۱۰) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{W}\,;\ (x^2-y)(x+1)=0$

۱۱) $\exists y \in \mathbb{W}\,;\ \forall x \in \mathbb{Z}\,;\ (x^2-y)(x+1)=0$

۳۹- عکس نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۱) توانا بود هر که دانا بود.

۲) برادر که در بند خویش است نه برادر و نه خویش است.

۳) اگر شب‌ها همه قدر بودی، شب قدر بی‌قدر بودی.

۴) هر که نان از عمل خویش خورد، منت حاتم طایی نبرد.

۵) خانه‌ای را که دو کدبانو است، خاک تا زانو است.

۶) صحبت گل خوش بود، گر نباشد ریش خار.

۲ مجموعه، زیرمجموعه

مجموعه به هر دسته از اشیای کاملاً مشخص یک مجموعه می‌گوییم. مثلاً مجموعه‌اعداد زوج ۲رقمی به صورت $A=\{۱۰,۱۲,۱۴,...,۹۸\}$ می‌باشد. اگر x عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $x\in A$ و اگر x عضوی از مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $x\notin A$.

مثلاً در مجموعهٔ بالا $۱۸\in A$ و $۲۱\notin A$.

چند مجموعهٔ معروف

$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$: مجموعه‌اعداد حسابی

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$: مجموعه‌اعداد طبیعی

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\}$: مجموعه‌اعداد گویا

$\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$: مجموعه‌اعداد صحیح

$\mathbb{Q}'=$ (مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد) $=\{...,-\sqrt{۲},\sqrt{۲},\pi,...\}$: مجموعه‌اعداد گنگ

$\mathbb{E}=\{...,-۴,-۲,۰,۲,۴,۶,...\}$: مجموعه‌اعداد زوج

$\mathbb{R}=\{x\mid x\in\mathbb{Q}$ یا $x\in\mathbb{Q}'\}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$: مجموعه‌اعداد حقیقی

$\mathbb{P}=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$: مجموعه‌اعداد اول

$\mathbb{O}=\{...,-۳,-۱,۱,۳,۵,۷,...\}$: مجموعه‌اعداد فرد

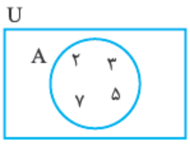
روش‌های نمایش مجموعه‌ها

۱ **نمایش تفصیلی:** در این روش یک مجموعه را با نام‌بردن اعضای آن مشخص می‌کنیم. مثلاً مجموعه اعداد اول یک‌رقمی را به صورت $A=\{۲,۳,۵,۷\}$ نمایش می‌دهیم.

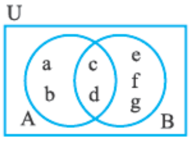
۲ **نمایش با نماد ریاضی:** در این روش خاصیت مشترکی که اعضای مجموعه دارند را به صورت $P(x)$ نمایش می‌دهیم و مجموعه را به صورت $A=\{x\in U\mid P(x)\}$ یا $A=\{x\mid P(x),x\in U\}$ می‌نویسیم. (U مجموعهٔ مرجع می‌باشد.) مثلاً مجموعه‌اعداد اول یک‌رقمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$A=\{x\in\mathbb{P}\mid x<۱۰\}$ یا $A=\{x\mid x<۱۰,x\in\mathbb{P}\}$ ($\mathbb{P}$ مجموعه اعداد اول است.)

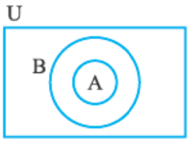
۳ **نمایش هندسی (نمایش با نمودار ون):** در این روش اعضای مجموعه را درون یک خم بسته نشان می‌دهند. مثلاً نمایش هندسی مجموعه‌اعداد اول کم‌تر از ۱۰ به صورت



و نمایش هندسی مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f,g\}$ به صورت



و نمایش هندسی $A\subseteq B$ و $A\neq B$ به صورت



می‌باشد.

مجموعهٔ تهی مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و آن را به صورت $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم.

مثال و پاسخ

مثال کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

۱) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid ۲x^۲+x-۱\leq ۰\}$

۲) $B=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۳+۲m=۳m^۲\}$

پاسخ ۱ ابتدا باید عبارت $P(x)=۲x^۲+x-۱$ را تعیین علامت کنیم:

$۲x^۲+x-۱\leq ۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x+۱)\leq ۰$

x		-۱		$\frac{۱}{۲}$	
$P(x)$	+	۰	−	۰	+

بنابراین $-۱\leq x\leq \frac{۱}{۲}$ می‌باشد که هیچ عدد طبیعی در این بازه وجود ندارد، پس $A=\varnothing$ است.

۲ $m^۳+۲m=۳m^۲ \Rightarrow m^۳-۳m^۲+۲m=۰ \Rightarrow m(m^۲-۳m+۲)=۰$

$\Rightarrow m(m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow m=۰$ یا ۱ یا ۲ $\Rightarrow B=\{۰,۱,۲\}\neq\varnothing$

بنابراین B مجموعه‌ای تهی نیست.

عدد اصلی یک مجموعه تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی را «عدد اصلی» آن مجموعه می‌گوییم و آن را به صورت $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: تغییر ترتیب و یا تکرار عضوهای مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً مجموعه‌های زیر با هم برابر بوده و عدد اصلی همهٔ آن‌ها برابر با ۳ است.

$$A = \{۱,۲,۳\} = \{۲,۱,۳\} = \{۱,۱,۳,۲,۲,۳,۳,۱,۱\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

سؤال‌های امتحانی

۴۰- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی (با استفاده از گزاره‌نما) بنویسید.

۱) $A = \{-۱,۰,۱,۸,۲۷,\dots\}$

۲) $B = \{۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\dots\}$

۳) $C = \{۲-\sqrt{۵}, ۲+\sqrt{۵}\}$

۴) $D = \{۱,۶,۱۱,۱۶,۲۱,\dots\}$

۵) $E = \{-۲,۵,-۱۰,۱۷,-۲۶,۳۷\}$

۶) $F = \{\frac{۳}{۱\times۲}, \frac{-۴}{۲\times۳}, \frac{۵}{۳\times۴}, \dots, \frac{۹}{۷\times۸}, \frac{-۱۰}{۸\times۹}\}$

۴۱- عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

۱) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < ۳\}$

۲) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۳x^۲ - ۵x - ۲ = ۰\}$

۳) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ + x + ۱ \leq ۰\}$

۴) $D = \{\{a\},\{\{a,b\},a\},a,b,\{a,b\}\}$

۵) $E = \{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\varnothing\},\{\varnothing\},\varnothing,\{\varnothing,\{\}\},\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing,\{\}\}\}\}$

۶) $F = \{m \in \mathbb{W} \mid m^۳ \leq ۱۶m\}$

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- ۱) نتیجه: در شمال باران نمی‌بارد.

۲) نتیجه: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۳۷^۲$ بر ۲۴ برابر با یک است.

۲- ۱) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است. مثلاً $۷ = ۵ + ۲$ عددی فرد است.

۲) گزاره نیست، جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند.

۳) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است.

نکته باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ با باقی‌ماندهٔ مجموع ارقامش در تقسیم بر عدد ۳ برابر است، پس اگر مجموع ارقام عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین با توجه به این‌که مجموع ارقام عدد ۲۶۳۵۹۲۱۴۳۱ عدد ۳۶ است، پس این عدد بر ۳ بخش‌پذیر است و نمی‌تواند یک عدد اول باشد، پس مرکب است و گزارهٔ داده‌شده نادرست است.

۴) گزاره نیست، چون معیار گران‌بهابودن یک شی مشخص نشده و معلوم نیست اگر قیمت یک شی از چه عددی بالاتر باشد، گران‌بها محسوب می‌شود، پس نمی‌توانیم درستی یا نادرستی این جمله را تعیین کنیم و این جمله گزاره محسوب نمی‌شود.

۵) گزاره نیست، این جمله به ازای $x = ۲$ و $x = ۳$ درست و به ازای بقیهٔ مقادیر x نادرست است. پس این جمله یک گزاره نیست چون یک گزاره جمله‌ای خبری است که همواره درست یا همواره نادرست باشد و نمی‌تواند گاهی درست و گاهی نادرست باشد.

۶) گزاره است، ارزش این گزاره درست است:

$$\left.\begin{array}{l} S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \\ A=\{۳,۶\} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۷) گزاره نیست، زیرا جملات عاطفی گزاره نیستند.

۸) گزاره نیست، زیرا جملات پرسشی گزاره نیستند.

۹) گزاره نیست، زیرا جملات عاطفی گزاره نیستند.

۱۰) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است، چون معادلات درجه۲، صفر، یک یا دو ریشه دارند.

۱۱) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است.

۱۲) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است.

۱۳) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است، زیرا عبارت $۵^۹ + ۸$ به صورت زیر به ضرب ۲ عدد بزرگ‌تر از یک تجزیه می‌شود:

$$۵^۹+۸=(۵^۳)^۳+۲^۳=۱۲۵^۳+۲^۳=(۱۲۵+۲)(۱۲۵^۲-۱۲۵\times ۲+۲^۲)$$

۱۴) گزاره است، ارزش گزاره درست است.

۱۵) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است، چون مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای از جمله اعداد حقیقی است.

۱۶) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overset{\text{مضرب۳}}{۲}\times\overset{\text{مضرب۳}}{۲}}{۶\times ۶}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

$$n(S)=۶\times ۶=۳۶$$

۱۷) گزاره نیست، جمله‌های عاطفی گزاره نیستند.

۱۸) گزاره نیست، چون تعریف بزرگ‌بودن و حرفه‌ای‌بودن معلوم نیست و هر سیستمی می‌تواند ادعای بزرگ‌بودن و حرفه‌ای‌بودن کند!!!

۱۹) گزاره نیست، زیرا جملات امری گزاره نیستند.

۲۰) گزاره نیست، زیرا بسیار خوب‌بودن تعریف نشده و معلوم نیست چه دانش‌آموزی بسیار خوب است!!

۲۱) گزاره نیست، جمله امری است پس گزاره نیست.

۲۲) گزاره است، ارزش گزاره درست است.

۲۳) گزاره است، ارزش گزاره درست است، زیرا عبارت داده‌شده به شکل زیر تجزیه شده و در آخر مضرب ۱۵ خواهد شد.

$$۴۶^{۲۴}+۵۹=(۴۶^{۲۴}-۱)+۶۰=(۴۶^{۱۲}-۱)(۴۶^{۱۲}+۱)+۶۰=(۴۶^۶-۱)(۴۶^۶+۱)(۴۶^{۱۲}+۱)+۶۰$$

$$(۴۶^۳-۱)(۴۶^۳+۱)(۴۶^۶+۱)(۴۶^{۱۲}+۱)+۶۰=\underbrace{(۴۶-۱)}_{۴۵}\underbrace{(۴۶^۲+۴۶+۱)(۴۶^۳+۱)(۴۶^۶+۱)(۴۶^{۱۲}+۱)}_{k}+۶۰$$

$$=۴۵k+۶۰=۱۵(\underbrace{۳k+۴}_{k'})=۱۵k'$$

۲۴) گزاره نیست، زیرا «شدیدبودن باران» تعریف نشده است.

۲۵) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است، زیرا عبارت داده‌شده به حاصل‌ضرب ۲ عدد بزرگ‌تر از یک به شکل زیر تجزیه شده و نمی‌تواند عددی اول باشد: $۲^{۲۱}+۱=(۲^{۷})^{۳}+۱=۱۲۸^{۳}+۱=(۱۲۸+۱)(۱۲۸^{۲}-۱۲۸+۱)$

۳- ۱) گزاره است.

۲) گزاره است. این گزاره یکی دیگر از حدس‌های گلدباخ است که هنوز اثباتی برای آن پیدا نشده است اما به هر حال می‌توان گفت که این جملهٔ خبری دارای تنها یک ارزش است یعنی یا درست است یا غلط.

۴- ۱) x مضرب ۷ است $\Rightarrow x=۷k \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=\{۷k \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۲۱,-۱۴,-۷,۰,۷,۱۴,۲۱,\dots\}$

۲) x، ۳ واحد از مضارب ۷ بیشتر است $\Rightarrow x=۷k+۳ \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=\{۷k+۳ \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۱۸,-۱۱,-۴,۳,۱۰,۱۷,۲۴,\dots\}$

۳) عبارت $\frac{۱}{۲+x}$ باید عدد طبیعی باشد، پس $x+۲$ باید مقسوم‌علیه عدد یک باشد:

$\frac{۱}{۲+x}\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{۱}{۲+x}\in\mathbb{N} \Rightarrow ۲+x=۱ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow$ مجموعه جواب: $S=\{-۱\}$

۴) $$\frac{۶x+۱}{۲x-۵}=\frac{(۶x-۱۵)+۱۶}{۲x-۵}=\frac{۳(۲x-۵)+۱۶}{۲x-۵}=۳+\frac{۱۶}{۲x-۵}\in\mathbb{Z}$$

پس $۲x-۵$ مقسوم‌علیه عدد ۱۶ باید باشد: $۲x-۵\in\{\pm۱,\pm۲,\pm۴,\pm۸,\pm۱۶\}\Rightarrow ۲x\in\{-۱۱,-۳,۱,۳,۴,۶,۷,۹,۱۳,۲۱\}$

$\Rightarrow x\in\{\frac{-۱۱}{۲},\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲},۲,۳,\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲},\frac{۱۳}{۲},\frac{۲۱}{۲}\}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{۲,۳\} \Rightarrow$ مجموعه جواب: $S=\{۲,۳\}$

۵) a مربع کامل است $\Rightarrow a=k^{۲}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow S=\{k^{۲}\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,(-۳)^{۲},(-۲)^{۲},(-۱)^{۲},۰^{۲},۱^{۲},۲^{۲},۳^{۲},\dots\}$

$=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\dots\}$

۶) a فرد $a=۲k+۱ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} S=\{\dots,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,\dots\}$

۷) $۲x^{۲}+x-۱=۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ یا $x=-۱ \xrightarrow{D=\mathbb{R}} S=\{-۱,\frac{۱}{۲}\}$

۸) $۲x^{۲}+x-۱=۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ یا $x=-۱ \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=\{-۱\}$

با توجه به این‌که دامنهٔ متغیر گزاره نما مجموعه‌اعداد صحیح است $x=\frac{۱}{۲}$ جزو مجموعه‌جواب نمی‌باشد.

۹) هیچ مقدار حقیقی برای x نمی‌توانیم پیدا کنیم که $۳^{x}=۰$ شود، بنابراین مجموعه‌جواب تهی است. $(S=\varnothing)$

۱۰) $\frac{۱}{x^{۲}}\le\frac{۱}{x^{۳}} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۳}}\le۰ \Rightarrow \frac{x-۱}{x^{۳}}\le۰ \Rightarrow ۰<x\le۱$

بنابراین مجموعه‌جواب $S=(۰,۱]$ می‌باشد.

۱۱) $\sqrt{x-۱}=\frac{۲}{x-۱}>۰ \Rightarrow x-۱>۰ \Rightarrow x>۱$

$\sqrt{x-۱}=\frac{۲}{x-۱} \Rightarrow (x-۱)\sqrt{x-۱}=۲ \Rightarrow (\sqrt{x-۱})^{۳}=۲ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=\sqrt[۳]{۲}$

$\Rightarrow x-۱=\sqrt[۳]{۴} \Rightarrow x=۱+\sqrt[۳]{۴} \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=\{۱+\sqrt[۳]{۴}\}$

۱۲) با توجه به طبیعی‌بودن اعداد x، y و z هیچ‌یک از این مقادیر نمی‌توانند از ۲ بزرگ‌تر باشند، بنابراین حالت‌های مختلف برای (x,y,z) به شکل زیر است:
$S=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۱,۱)\}$

۱۳) $\frac{۱}{x}>\frac{۱}{۵} \xrightarrow[\text{طرفین وسطین می‌کنیم.}]{\text{x باید مثبت باشد.}} x<۵ \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=(۰,۵)$

۱۴)

$\sqrt{x^{۲}}-x<۰ \Rightarrow \sqrt{x^{۲}}<x \Rightarrow |x|<x$

$\xrightarrow{x\ge۰} x<x$ غ ق ق

$\xrightarrow{x<۰} -x<x \Rightarrow ۲x>۰ \Rightarrow x>۰$ غ ق ق

بنابراین مجموعه‌جواب تهی است.

۱۵) $\frac{x}{x+۱}\le۱ \Rightarrow \frac{x}{x+۱}-۱\le۰ \Rightarrow \frac{x-(x+۱)}{x+۱}\le۰ \Rightarrow \frac{-۱}{x+۱}\le۰ \Rightarrow \frac{۱}{x+۱}\ge۰ \Rightarrow x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱$

مجموعه‌جواب: $S=(-۱,+\infty)$

۱۶) $\frac{۳x+۵}{x^{۲}-۱}\in\mathbb{N}$ است، پس $۳x+۵$ بر $x^{۲}-۱$ بخش‌پذیر است، پس $۳x+۵$ بر $x-۱$ و $x+۱$ باید بخش‌پذیر باشد:

اولاً: $\frac{۳x+۵}{x-۱}=\frac{(۳x-۳)+۸}{x-۱}=\frac{۳(x-۱)+۸}{(x-۱)}=۳+\frac{۸}{x-۱}\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{۸}{x-۱}\in\mathbb{N}\cup\{-۱,-۲\} \Rightarrow x-۱\in\{-۸,-۴,۱,۲,۴,۸\} \Rightarrow x\in\{-۷,-۳,۲,۳,۵,۹\}$

ثانیاً: $\frac{۳x+۵}{x+۱}=\frac{۳x+۳+۲}{x+۱}=\frac{۳(x+۱)+۲}{(x+۱)}=۳+\frac{۲}{x+۱}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{۲}{x+۱}\in\mathbb{N}\cup\{-۲,-۱\}\Rightarrow x+۱\in\{-۱,-۲,۱,۲\}\Rightarrow x\in\{-۲,-۳,۰,۱\}$

$\{-۷,-۳,۲,۳,۵,۹\}\cap\{-۲,-۳,۰,۱\}=\{-۳\}$

به ازای $x=-۳$ عبارت $۳x+۵$ بر $x-۱$ و $x+۱$ بخش‌پذیر است اما بر ضرب آن‌ها یعنی $x^۲-۱$ بخش‌پذیر نیست، پس مجموعه‌جواب تهی است.

۱۷) اگر x هر عدد صحیح غیر از ۴ باشد، رابطه درست خواهد بود: مجموعه‌جواب: $S=\mathbb{Z}-\{۴\}$

۱۸) $\frac{x-۱}{x+۱}\geq\frac{۱}{x-۱}\Rightarrow\frac{x-۱}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}\geq۰\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲-(x+۱)}{x^۲-۱}\geq۰$

$\Rightarrow\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۱}\geq۰\Rightarrow\frac{x(x-۳)}{(x-۱)(x+۱)}\geq۰$

x		-۱		۰		۱		۳	
$f(x)$	+	تعریف نشده	−	۰	+	تعریف نشده	−	۰	+

$\Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=(-\infty,-۱)\cup[۰,۱)\cup[۳,+\infty)$

۱۹) احتمال وقوع هر پیشامد یک‌عضوی از فضای نمونهٔ $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ برابر با $\frac{۱}{۶}$ است، پس x می‌تواند هر عضو از مجموعهٔ D در نظر گرفته شود. مجموعهٔ جواب: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۵- به جای پیشامد A می‌توان تمام زیرمجموعه‌های فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس یعنی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را قرار داد، بنابراین هر یک از $۲^۶$ زیرمجموعهٔ S را می‌توان به جای A قرار داد. اگر A مجموعه‌ای ۳عضوی باشد، $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ خواهد بود، پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما شامل زیرمجموعه‌های ۳عضوی A است که تعداد آن‌ها برابر است با $\binom{۶}{۳}=۲۰$ زیرمجموعه.

۶- دامنهٔ متغیر شامل تمام ۳۶ زوج مرتبی است که از پرتاب ۲ تاس حاصل می‌شوند. $(\overset{\text{عدد تاس اول}}{\boxed{\text{۶حالت}}}\times\underset{\text{عدد تاس دوم}}{\boxed{\text{۶حالت}}})=$ ۳۶ حالت

دامنهٔ متغیر $D=\{(x,y)\mid x\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\},y\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\}$

۱) وقتی $a+b$ زوج است که a و b هر دو فرد یا a و b هر دو زوج باشند. $(\overset{\text{a فرد}}{\boxed{\text{۳حالت}}}\times\overset{\text{b فرد}}{\boxed{\text{۳حالت}}})+(\overset{\text{a زوج}}{\boxed{\text{۳حالت}}}\times\overset{\text{b زوج}}{\boxed{\text{۳حالت}}})=۱۸$

بنابراین مجموعه‌جواب این گزاره‌نما ۱۸ زوج مرتب را شامل می‌شود.

۲) (a,b) کلاً ۳۶ حالت دارد که در ۶تای آن‌ها a و b مساوی‌اند. در ۳۰تای بقیه در نیمی از حالت‌ها $a<b$ است، پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما شامل $\frac{۳۶-۶}{۲}=۱۵$ زوج مرتب است.

۳) مجموعه‌جواب شامل زوج‌های زیر است که تعداد آن‌ها ۱۰تاست.

$S=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$

۴) $x^۲-ax+b=۰\xrightarrow{\text{دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.}}\Delta>۰\Rightarrow a^۲-۴b>۰\Rightarrow a^۲>۴b$

مقادیر مختلف a و b که در رابطهٔ بالا صدق می‌کنند، به صورت زیر هستند:

a	۱	۲	۳	۴	۵	۶
b	هیچ مقدار b	هیچ مقدار b	۱, ۲	۱, ۲, ۳	۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶	۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶

بنابراین مجموعه‌جواب این گزاره‌نما ۱۷ زوج مرتب را شامل می‌شود.

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

$A\cap B=\{۳,۴,۵\}$

$A\cap B\subseteq X\subseteq A\cup B\Rightarrow\{۳,۴,۵\}\subseteq X\subseteq\{۱,۲,۳,۴,۵,...,۱۰\}$

۷- ۱) مجموعهٔ X اعداد ۳، ۴ و ۵ را حتماً دارد و هر یک از ۷ عدد باقی‌مانده هر کدام ۲ حالت برای حضور در مجموعهٔ X دارند. (یا در X هستند یا نیستند) پس تعداد مجموعه‌های X می‌شود $۲^۷$ حالت.

۲) همان‌طور که گفتیم مجموعهٔ X حتماً شامل اعداد ۳، ۴ و ۵ می‌باشد، بنابراین برای این‌که X مجموعه‌ای ۵عضوی باشد، لازم است تنها ۲ عضو از ۷ عدد باقی مانده را در خود داشته باشد. انتخاب این ۲ عضو به $\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۲!۵!}=۲۱$ طریق امکان‌پذیر است، پس انتخاب مجموعهٔ X، ۲۱ حالت مختلف دارد.

۸- دامنهٔ متغیر، تمام پیشامدهای ممکن در پرتاب دو تاس است که همان زیرمجموعه‌های فضای نمونهٔ پرتاب ۲ تاس یعنی زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ۳۶ عضوی $\{۱,۲,۳,\dots,۶\}\times\{۱,۲,۳,\dots,۶\}$ می‌باشد که شامل $۲^{۳۶}$ مجموعه است.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(A)}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow n(A)=۳۶\times\frac{۵}{۱۲}=۱۵$$

بنابراین اگر A یک زیرمجموعهٔ ۱۵عضوی از فضای نمونهٔ ۳۶عضوی باشد، گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود. تعداد پیشامدهای ۱۵عضوی از فضای نمونه برابر است با: $\binom{۳۶}{۱۵}$.

۹- اثبات قوانین جابه‌جایی:

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$	$p\vee q$	$q\vee p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F

با توجه به این‌که ستون $p\wedge q$ و ستون $q\wedge p$ یکسان است، پس $p\wedge q\equiv q\wedge p$.

با توجه به این‌که ستون $p\vee q$ و ستون $q\vee p$ یکسان است، پس $p\vee q\equiv q\vee p$.

اثبات قوانین شرکت‌پذیری:

p	q	r	$p\wedge q$	$q\wedge r$	$(p\wedge q)\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

با توجه به این‌که ستون $(p\wedge q)\wedge r$ و ستون $p\wedge(q\wedge r)$ یکسان هستند، پس $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$.

تذکر هم‌ارزی $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$ نیز به همین شکل اثبات می‌شود.

- قانون توزیع‌پذیری در متن درس اثبات شد.

اثبات قوانین جذب:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\vee(p\wedge q)$	$p\wedge(p\vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F

با توجه به یکسان‌بودن ستون p و $p\vee(p\wedge q)$ این دو عبارت هم‌ارزند: $p\vee(p\wedge q)\equiv p$.

با توجه به یکسان‌بودن ستون p و $p\wedge(p\vee q)$ این دو عبارت هم‌ارزند: $p\wedge(p\vee q)\equiv p$.

اثبات قانون شبه‌جذب:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim p$	$\sim p\wedge q$	$p\vee(\sim p\wedge q)$	$\sim p\vee q$	$p\wedge(\sim p\vee q)$
T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F	F	T	F

با توجه به یکسان‌بودن ستون مربوط به دو عبارت $p\wedge(\sim p\vee q)$ و $p\wedge q$، این دو عبارت هم‌ارزند.

با توجه به یکسان‌بودن ستون مربوط به دو عبارت $p\vee(\sim p\wedge q)$ و $p\vee q$، این دو عبارت هم‌ارزند.

قانون دمورگان در متن درس اثبات شده است.

p	q	$\sim p$	$p\wedge p$	$p\vee p$	$p\wedge F$	$p\vee F$	$p\wedge T$	$p\vee T$	$p\wedge\sim p$	$p\vee\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	T	F	T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F	F	F	T	F	T	F

با توجه به جدول بالا هم‌ارزی‌های $\begin{cases}p\wedge p\equiv p\\ p\vee p\equiv p\end{cases}$ ، $\begin{cases}p\wedge F\equiv F\\ p\vee F\equiv p\end{cases}$ ، $\begin{cases}p\wedge T\equiv p\\ p\vee T\equiv T\end{cases}$ ، $\begin{cases}p\wedge\sim p\equiv F\\ p\vee\sim p\equiv T\end{cases}$ و $\sim(\sim p)\equiv p$ اثبات می‌شود.

-۱۰

۱) هر سه عبارت $(۲y+z)^۲$، $(x-y)^۲$ و $\sqrt{۲x+۶}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، پس وقتی مجموع آن‌ها برابر صفر است که هر ۳ برابر صفر باشند. $(۲y+z)^۲+(x-y)^۲+\sqrt{۲x+۶}=۰\Rightarrow (۲y+z=۰)\wedge(x-y=۰)\wedge(\sqrt{۲x+۶}=۰)$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲y+z=۰\\ x=y\\ ۲x+۶=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+۶=۰\Rightarrow x=-۳\\ x=y\Rightarrow y=-۳\\ ۲y+z=۰\Rightarrow ۲(-۳)+z=۰\Rightarrow z=۶\end{cases}\Rightarrow(x=-۳\wedge y=-۳\wedge z=۶)$$

۲) $(۲y+x)(x+۱)(y-۱)=۰\Rightarrow ۲y+x=۰\vee x+۱=۰\vee y-۱=۰\Rightarrow(x=-۱)\vee(y=۱)\vee(x=-۲y)$

بنابراین اگر حداقل یکی از روابط $x=-۱$، $y=۱$ یا $x=-۲y$ برقرار باشد، تساوی برقرار خواهد بود.

-۱۱

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$p\vee q$	$p\Rightarrow(p\vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

با توجه به این‌که ستون آخر در هر دو جدول بالا همواره ارزش درست دارد، پس داریم:

۱) $p\Rightarrow(p\vee q)\equiv T$

۲) $(p\wedge q)\Rightarrow p\equiv T$

-۱۲ ۱) نقیض $p\vee q$ به صورت $\sim(p\vee q)$ یا $\sim p\wedge\sim q$ می‌باشد، پس داریم:

$\sim(x\geq -۶\vee x<۵)\equiv\sim(x\geq-۶)\wedge\sim(x<۵)\equiv(x<-۶)\wedge(x\geq ۵)$

۲) $\sim(\varnothing\in\{۰,۱,۲,۳\})\equiv\varnothing\notin\{۰,۱,۲,۳\}$

۳) نقیض گزارهٔ داده‌شده به صورت عبارت «لوزی متوازی‌الاضلاع باشد و قطرهایش همدیگر را نصف کنند.» است که با توجه به این‌که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ می‌باشد، آن را به صورت «لوزی متوازی‌الاضلاع نیست یا قطرهایش منصف هم نیستند.» می‌نویسیم.

۴) ۲۹ عددی زوج نیست.

۵) نقیض $p\wedge q$ به صورت $\sim p\vee\sim q$ می‌باشد، پس داریم: «من سخت‌کوشانه درس نخواهم خواند یا در امتحان قبول نخواهم شد.»

۶) $\{\{۱\}\}\not\subseteq\{۱,\{۱,\{۱\}\}\}$

-۱۳ عکس نقیض گزارهٔ $p\Rightarrow q$ به صورت $\sim q\Rightarrow\sim p$ می‌باشد، پس داریم:

۱) عکس نقیض گزارهٔ $x^۲>۴\Rightarrow x\geq ۲$ به صورت روبه‌رو است: $[\sim(x^۲>۴)\Rightarrow\sim(x\geq ۲)]\equiv[x^۲\leq ۴\Rightarrow x<۲]$

۲) گزارهٔ شرطی: اگر حسن در تمرینات شرکت کند آن‌گاه برای تیم فوتبال مدرسه انتخاب می‌شود.

عکس نقیض: اگر حسن در تیم فوتبال مدرسه انتخاب نشده آن‌گاه (پس) در تمرینات شرکت نکرده است.

۳) خورشید در آسمان است $\Rightarrow$ شب نیست : عکس نقیض — شب است $\Rightarrow$ خورشید در آسمان نیست : گزارهٔ شرطی

عکس نقیض: شب نیست پس خورشید در آسمان است.

-۱۴ در گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش $p\Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. به طور خلاصه یعنی گزارهٔ «$F\Rightarrow\boxed{q}$» همواره درست است.

۱۵- ۱)

p	p	$p \Rightarrow p$
T	T	T
F	F	T

۲) با توجه به ستون مربوط به $p \Rightarrow p$ نتیجه می‌گیریم: $p \Rightarrow p \equiv T$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

با توجه به مشابه‌بودن ارزش دو ستون آخر داریم: $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

۳)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

با توجه به مشابه‌بودن ارزش دو ستون آخر داریم: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۴)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	F

با توجه به مشابه‌بودن ارزش سه ستون آخر داریم: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

۵)

p	q	r	$p \wedge q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

با توجه به یکسان‌بودن ارزش‌ها در دو ستون آخر داریم: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

۶)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T

با توجه به یکسان‌بودن ارزش دو ستون آخر داریم: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$

۱۶- ۱) درست　　۲) درست　　۳) درست　　۴) نادرست

۵)
$$x>۳ \xrightarrow{\times(-۶)} -۶x<-۱۸ \xrightarrow{+۲۰} ۲۰-۶x<۲۰-۱۸ \Rightarrow ۲۰-۶x<۲$$
$$۲۰-۶x<۲ \Rightarrow ۲۰-۲<۶x \Rightarrow ۶x>۱۸ \Rightarrow x>۳$$

بنابراین رابطهٔ دوشرطی صحیح است.

۶)
$$x^۳-۱=۰ \Rightarrow (x-۱)(\underbrace{x^۲+x+۱}_{\Delta<۰})=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow x^۲-۱=۰$$

بنابراین گزارهٔ $x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۳-۱=۰$ درست است اما عکس آن $x^۳-۱=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۰$ نادرست و مثال نقض آن $x=-۱$ است،
بنابراین ارزش قضیهٔ دوشرطی نادرست است.

۷)
$$(x+۳y+۱۶)^۲+\sqrt{x-y}+|z-x^۲|=۰$$

مجموع ۳ عبارت نامنفی صفر شده پس هر سه، صفرند:

$$\begin{cases}(x+۳y+۱۶)^۲=۰\\ \sqrt{x-y}=۰\\ |z+x^۲|=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+۳y+۱۶=۰\\ x=y\\ z=-x^۲ \Rightarrow z=-(-۴)^۲=-۱۶\end{cases} \Rightarrow x+۳x+۱۶=۰ \Rightarrow ۴x=-۱۶ \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow x=y=-۴$$

در نتیجه $x=y=-۴$ و $z=-۱۶$ است. پس $x=y=\frac{۱}{۴}z$ است.
بنابراین گزارهٔ شرطی داده‌شده صحیح است.

۸)
$$۳x^۲+۲۰x-۷=۰ \Rightarrow (۳x-۱)(x+۷)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \vee x=-۷$$

بنابراین گزارهٔ داده‌شده نادرست است، زیرا $x=-۷$ مثال نقض آن است.

۹) الف)
$$a^۲\le b^۲ \Rightarrow a\le b \wedge a\ge -b$$

$a=۱$ و $b=-۲$ مثال نقض این گزارهٔ شرطی است.

$$\underbrace{۱^۲\le(-۲)^۲}_{T} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{۱\le -۲}_{F}\wedge\underbrace{۱\ge-(-۲)}_{F}}_{F}\equiv(T \Rightarrow F)\equiv F$$

تذکر اگر b عددی مثبت باشد، رابطهٔ بالا درست خواهد بود.

ب)
$$a^۲\ge b^۲ \Rightarrow a\ge b\wedge a\le -b$$
$$\underbrace{۲^۲\ge۱^۲}_{T} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{۲\ge۱}_{T}\wedge\underbrace{۲\le-۱}_{F}}_{F}\equiv T \Rightarrow F\equiv F$$

با توجه به مثال نقض مطرح‌شده ارزش گزارهٔ فوق نادرست است.

تذکر اگر $b>۰$ باشد، رابطهٔ درست مشابه رابطهٔ فوق به شکل زیر است:

$$a^۲\ge b^۲ \Rightarrow a\ge b\vee a\le -b$$

۱۰)
$$a^۲+b^۲+\sqrt{d-c}=۰ \Rightarrow a^۲=۰\wedge b^۲=۰\wedge\sqrt{d-c}=۰ \Rightarrow a=۰\wedge b=۰\wedge d=c$$

لزومی ندارد $c=d=۰$ باشد و تنها تساوی c و d کافیست، پس گزارهٔ شرطی داده‌شده نادرست است.

۱۷-

۱) $(\frac{۲}{۵}\ne\frac{۸}{۲۰})\ \square\ (۱\in\{۲,۳,۴\})\equiv F\ \square\ F\equiv T$

به جای $\square$ می‌توان «$\Rightarrow$» و «$\Leftrightarrow$» را قرار داد.

۲) $(-۲>۳)\ \square\ (x^۲+۱\ne۰)\equiv F\ \square\ T\equiv T$

به جای $\square$ می‌توان «$\vee$» و «$\Rightarrow$» را قرار داد.

۳) $(a\in\{b\}\Leftrightarrow a=b)\ \square$ (دو قطر متوازی‌الاضلاع با هم برابرند.) $\equiv T\ \square\ F\equiv F$

به جای $\square$ می‌توان «$\wedge$»، «$\Rightarrow$» یا «$\Leftrightarrow$» را قرار داد.

۴) $(x<-۲ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}\le-۲)\ \square$ $\underbrace{\text{(۲ اول نیست اگر و فقط اگر ۲ مربع کامل باشد.)}}_{F\Leftrightarrow F\equiv T}$ $\equiv T\ \square\ T\equiv F$

به جای $\square$ هیچ‌کدام از موارد «$\vee$»، «$\wedge$»، «$\Rightarrow$» و «$\Leftrightarrow$» را نمی‌توان گذاشت.

۵) $((x-۱)(x+۱)=۰ \Rightarrow (x=۱)\wedge(x=-۱))\ \square\ ((x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۰) \Rightarrow ((x-۱)=۰\vee(y+۲)=۰)\equiv F\ \square\ T\equiv F$

به جای $\square$ می‌توان «$\wedge$» یا «$\Leftrightarrow$» را قرار داد.

۱۸- به جای اثبات این حکم عکس نقیض آن را اثبات می‌کنیم. (در این مثال اثبات عکس نقیض ساده‌تر است.)

$(a^2\ \text{عددی فرد است} \Rightarrow a\ \text{عددی فرد است}) \equiv (a\ \text{عددی زوج است} \Rightarrow a^2\ \text{عددی زوج است})$

اگر a عددی زوج باشد $a = 2k$ است، پس خواهیم داشت:

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

۱۹- به جای اثبات حکم مسئله عکس نقیض آن را اثبات می‌کنیم:

$(a^2\ \text{مضرب ۳ است} \Rightarrow a\ \text{مضرب ۳ است}) \equiv (a\ \text{مضرب ۳ نباشد} \Rightarrow a^2\ \text{مضرب ۳ نیست})$

$$a\ \text{مضرب ۳ نباشد} \Rightarrow a = 3k \pm 1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(\underbrace{3k^2 \pm 2k}_{k'}) + 1 = 3k' + 1 \neq 3k$$

بنابراین a^2 مضرب ۳ نیست، پس عبارت عکس نقیض اثبات شد.

۲۰- به جای اثبات حکم مسئله عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم چون اثبات عکس نقیض این حکم آسان‌تر است.

$(n^3\ \text{زوج باشد} \Rightarrow n\ \text{زوج است}) \equiv (n\ \text{فرد باشد} \Rightarrow n^3\ \text{فرد است})$

$$n\ \text{فرد است} \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^3 = \underbrace{8k^3 + 12k^2 + 6k} + 1 = 2(\underbrace{4k^3 + 6k^2 + 3k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1 = \text{عدد فرد}$$

بنابراین با فرض فردبودن n ثابت کردیم n^3 نیز فرد است، پس عبارت عکس نقیض ثابت شد.

۲۱-

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
T	ارزش گزاره ≡ T	F	F	T	T	T	T	T	F
ارزش گزاره ≡ T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
ارزش گزاره ≡ F	T	T	F	F	T	T	F	T	T
F	ارزش گزاره ≡ F	T	T	F	F	T	T	F	F

۲۲-

نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ است. $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

۱) p عددی اول است و $p \neq 6k \pm 1$ است.

۲) شما خوب درس می‌خوانید و (اما) (نمرهٔ بالایی نمی‌گیرید یا پدر و مادرتان از شما راضی نمی‌شوند.)

۳) $A \subseteq S$ است و $P(A) > 1$ یا $P(A) < 0$ است.

۴) گزارهٔ $p \Rightarrow q$ با $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، پس نقیض آن به صورت روبه‌رو است: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$

بنابراین داریم:

~(عددی بر ۶ بخش‌پذیر باشد ⇒ (بر ۲ بخش‌پذیر است ∧ بر ۳ بخش‌پذیر است))

(عددی بر ۶ بخش‌پذیر است) ∧ ~(بر ۲ بخش‌پذیر است ∧ بر ۳ بخش‌پذیر است)

(عددی بر ۶ بخش‌پذیر است) ∧ (بر ۲ بخش‌پذیر نیست ∨ بر ۳ بخش‌پذیر نیست)

گزارهٔ نقیض: عددی داریم که بر ۶ بخش‌پذیر است و (اما) بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۵) با توجه به آن‌چه در گزارهٔ قبل گفتیم نقیض گزارهٔ داده‌شده به صورت زیر خواهد بود:

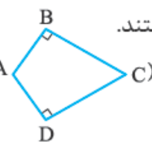
«عددی داریم که بر ۶ بخش‌پذیر نیست و (اما) بر ۳ و ۲ بخش‌پذیر است.»

۲۳-

$p \Rightarrow q$:p۱ «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است.»

$p \Leftrightarrow q$:p و q شرط لازم و کافی برای هم هستند.

۱) $p \Rightarrow q$ درست و $q \Rightarrow p$ نادرست است. بنابراین داریم:



- مستطیل‌بودن ABCD شرط کافی برای این است که زوایای ABC و CDA قائمه باشند.
- قائمه‌بودن زوایای ABC و CDA شرط لازم برای مستطیل‌بودن ABCD است.

۲) $a\times b=$ زوج $\Rightarrow$ a زوج $\vee$ b زوج

اگر $a\times b$ زوج باشد، حداقل یکی از اعداد a یا b زوج هستند و لزومی ندارد a و b هر دو زوج باشند اما اگر a و b هر دو زوج باشند، $a\times b$ حتماً زوج است، بنابراین تنها $p \Rightarrow q$ صحیح است. $a\times b$ زوج است. $\Leftarrow$ a و b زوج باشند.

- زوج‌بودن a و b شرط کافی برای زوج‌بودن $a\times b$ است.
- زوج‌بودن $a\times b$ شرط لازم برای زوج‌بودن a و b است.

۳) $p \Leftrightarrow q$ صحیح است، پس زوج‌بودن a شرط لازم و کافی برای فردبودن $a+1$ است.

۴) $p \Rightarrow q$ نادرست است. $\overset{x}{(-5}\times\overset{z}{(-1)}>\overset{y}{(-2)}\overset{z}{(-1)} \Rightarrow -1>0 \wedge -5>-2)$

$q \Rightarrow p$ درست است، پس q شرط کافی برای p و p شرط لازم برای q است.

۵) اگر $a=\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{8}$ باشد، $ab=\sqrt{16}=4$ گنگ نیست پس $p \Rightarrow q$ نادرست است.

اگر $a=\sqrt{2}$ و $b=2$ باشد $ab=2\sqrt{2}$ گنگ است اما a و b هر دو گنگ نیستند پس $q \Rightarrow p$ نیز نادرست است، پس p و q برای هم نه شرط لازم و نه شرط کافی هستند.

۶) $p \Rightarrow q$ درست و $q \Rightarrow p$ نادرست است، پس مربع‌بودن ABCD شرط کافی برای عمود و برابر بودن دو قطر ABCD است و عمود و برابر بودن دو قطر ABCD شرط لازم برای مربع‌بودن ABCD است.

۷) اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ نباشد این عدد مثال نقضی برای «$p \Rightarrow q$» است، اما اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد، عدد $2=\sqrt{2}^{2}=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ مثال نقض «$p \Rightarrow q$» خواهد بود، پس $p \Rightarrow q$ مثال نقض دارد و نادرست است.

عدد $\sqrt{2}=(\sqrt[4]{2})^{2}$ نیز مثال نقض $q \Rightarrow p$ است، پس $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو نادرست هستند و p و q شرط لازم یا شرط کافی برای یکدیگر نیستند.

۸) $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو صحیح‌اند پس چهارضلعی‌بودن متوازی‌الاضلاع شرط لازم و کافی برای این است که هر دو زاویهٔ روبه‌رو برابر باشند.

۹) اگر $n=3^{k}$ و $k\in\mathbb{N}$ باشد، این عدد حتماً مضرب ۳ است اما اگر n مضرب ۳ باشد، مثل ۶، ۱۲، ۱۸ و ... لزومی ندارد توانی از ۳ باشد پس $p \Rightarrow q$ درست و $q \Rightarrow p$ نادرست است، پس این‌که n توانی از ۳ باشد شرط کافی برای این است که n مضربی از ۳ باشد و این‌که n مضربی از ۳ باشد، شرط لازم برای این است که n توانی از ۳ باشد.

۱۰) اگر $R\equiv F$ و $S\equiv T$ باشد، $(R \Rightarrow S)\equiv T$ است. اما $(R \Leftrightarrow S)\equiv F$ خواهد بود، پس $p \Rightarrow q$ نادرست است اما اگر $(R \Leftrightarrow S)\equiv T$ باشد R و S هم‌ارزش هستند و از آن‌جا که $T \Rightarrow T$ و $F \Rightarrow F$ هر دو درست‌اند، پس $(R \Rightarrow S)\equiv T$ خواهد بود پس $q \Rightarrow p$ درست است پس «p شرط لازم برای q و q شرط کافی برای p است».

۱۱) $p:\dfrac{x+3}{x-3}>1 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-3}-1>0 \Rightarrow \dfrac{6}{x-3}>0 \Rightarrow x>3$

$q:(x^2-9)(x^2+x-6)>0 \Rightarrow (x-3)(x+3)^2(x-2)>0 \Rightarrow x>3$ یا $x<2$

$\underbrace{(x>3)}_{p} \Rightarrow \underbrace{(x>3 \text{ یا } x<2)}_{q}$ صحیح است اما عکس آن صحیح نیست. پس p شرط کافی برای q و q شرط لازم برای p است.

۱۲) $p:\dfrac{x+3}{x^2+3}<1 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x^2+3}-1<0 \Rightarrow \dfrac{x+3-(x^2+3)}{x^2+3}<0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+x}{x^2+3}<0 \Rightarrow \dfrac{x^2-x}{x^2+3}>0 \Rightarrow x(x-1)>0 \Rightarrow x<0 \vee x>1$

$q:x^2>x \Rightarrow x(x-1)>0 \Rightarrow x>1$ یا $x<0$

$p:(x<0 \vee x>1)$ و $q(x>1 \text{ یا } x<0)$ است، پس این دو شرط لازم یا کافی برای هم هستند چون $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست است.

۱۳) فاصلهٔ هر دو عدد مربع کامل طبیعی و متوالی از ۱ بیشتر است، پس با اضافه‌کردن عدد یک به عدد مربع کامل n^2 حاصل مربع کامل نشده و $\sqrt{n^2+1}$ به ازای nهای طبیعی حتماً گنگ است اما $n=-1$ مثال نقضی برای $q \Rightarrow p$ است، پس $p \Rightarrow q$ درست و $q \Rightarrow p$ نادرست است پس طبیعی‌بودن n شرط کافی برای گنگ‌بودن $\sqrt{n^2+1}$ است و گنگ‌بودن $\sqrt{n^2+1}$ شرط لازم برای طبیعی‌بودن n است.

۲۴- جدول ۱:

p	q	r	$p\wedge r \Rightarrow q$	$\sim p\wedge((\sim p\vee \sim r)\Leftrightarrow q)$	$p\vee q \Rightarrow \sim r$	$[r\wedge(p\vee q)] \Rightarrow q$
F	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F

p	q	r	$\sim p\wedge q$	$q\Rightarrow(p\vee r)$	$q\Rightarrow(\sim p\Rightarrow \sim r)$	$[p\vee(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(\sim r\Leftrightarrow p)$	$(\sim r\Rightarrow \sim q)\Rightarrow \sim p$
F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	F

۲۵-

الف) خیر ـ اگر $p\equiv F$ و $q\equiv F$ و $r\equiv T$ باشد، آن‌گاه $p\wedge q\equiv p\wedge r$ است، اما q هم‌ارز r نیست ($q\not\equiv r$).

ب) خیر ـ اگر $p\equiv T$ و $q\equiv F$ و $r\equiv T$ باشد، $p\vee q\equiv p\vee r\equiv T$ است، اما $q\not\equiv r$.

پ) بله ـ $r \Rightarrow q$ نادرست است، پس $q\equiv T$ و $r\equiv F$ است. حالا چون $r \Rightarrow p$ درست است، پس باید $p\equiv F$ باشد وگرنه با توجه به نادرست‌بودن r، $r \Rightarrow p$ نادرست می‌شود، بنابراین داریم: $p\equiv F, q\equiv T, r\equiv F:[(p\vee q) \Rightarrow r]\equiv[(F\vee T) \Rightarrow F]\equiv(T \Rightarrow F)\equiv F$

ت) بله ـ می‌توان. اگر p و q هم‌ارزش نباشند یکی از گزاره‌های $q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow q$ درست و دیگری نادرست خواهد بود و آن‌ها نمی‌توانند هم‌ارز باشند. ($T \Rightarrow F$ درست و $F \Rightarrow T$ نادرست است.) پس p و q باید هم‌ارزش باشند. $[(F \Rightarrow F)\equiv(T \Rightarrow T)\equiv T]$

۲۶-

$$(x\wedge \sim p)\vee \underbrace{(\sim x\wedge p)\vee(x\wedge p)}_{\underbrace{\underbrace{(\sim x\vee x)}_{T}\wedge p}_{p}}\equiv \underbrace{(p\vee q)\wedge(p\vee q\vee x)}_{p\vee\underbrace{(q\wedge(q\vee x))}_{\text{جذب}\downarrow\ q}}$$

$$(x\wedge \sim p)\vee p\equiv p\vee q \Rightarrow (x\vee p)\wedge\underbrace{(\sim p\vee p)}_{T}\equiv p\vee q \Rightarrow x\vee p\equiv p\vee q \Rightarrow p\vee x\equiv p\vee q \Rightarrow x\equiv q$$

باید x هم‌ارز با q باشد.

۲۷-

$$[\sim q\Leftrightarrow(p\wedge s)]\wedge[\sim(q \Rightarrow (p \Rightarrow r))]\equiv T$$

ارزش ۲ گزاره‌ای که با «$\wedge$» به هم وصل شده‌اند باید درست باشد:

$(\sim q\Leftrightarrow(p\wedge s)\equiv T) \Rightarrow$ ($\sim q$ با $p\wedge s$ هم‌ارزش هستند.)

$$[\sim(q \Rightarrow (p \Rightarrow r))\equiv T] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\equiv F] \Rightarrow [q\equiv T,(p \Rightarrow r)\equiv F] \Rightarrow \begin{cases} q\equiv T\\ p\equiv T\\ r\equiv F\end{cases}$$

$\sim q\equiv F$ پس $p\wedge s\equiv F$ و چون $p\equiv T$ است، پس $s\equiv F$ باید باشد، بنابراین داریم: $p\equiv T$، $q\equiv T$، $r\equiv F$ و $s\equiv F$ است.

۱) $s\Leftrightarrow(p\wedge \sim r)\equiv F\Leftrightarrow(T\wedge T)\equiv F\Leftrightarrow T\equiv F$

۲) $[\sim q \Rightarrow (p\Leftrightarrow \sim q)] \Rightarrow r\equiv \underbrace{[F \Rightarrow \underbrace{(T\Leftrightarrow F)}_{F}]}_{T} \Rightarrow F\equiv T \Rightarrow F\equiv F$

۳) $(r \Rightarrow p)\wedge(q \Rightarrow s)\equiv(F \Rightarrow T)\wedge(T \Rightarrow F)\equiv T\wedge F\equiv F$

۴) $S \Rightarrow [(k\Leftrightarrow s)\vee \sim k]\equiv F \Rightarrow [(k\Leftrightarrow F)\vee \sim k]\xrightarrow[\text{درست است}]{\text{به انتفای مقدم}}\equiv T$

۵) $\sim[\sim k\vee(s\Leftrightarrow k)] \Rightarrow \sim s\equiv\sim[\sim k\vee(F\Leftrightarrow k)] \Rightarrow T$

$\xrightarrow{\text{عکس نقیض}} F \Rightarrow [\sim k\vee(F\Leftrightarrow k)]\equiv T$ (به انتفای مقدم درست است.)

۲۸- ارزش گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ با عکس نقیض آن $q \Rightarrow p$ هم‌ارز است. $p \Rightarrow q\equiv F$ است، پس $p\equiv T$ و $q\equiv F$ است.

الف) $(p\wedge \sim q)\Leftrightarrow\sim p\equiv(T\wedge T)\Leftrightarrow F\equiv T\Leftrightarrow F\equiv F$

ب) $(p \Rightarrow q)\vee(q \Rightarrow (q\vee p))\equiv(T \Rightarrow F)\vee(F \Rightarrow \underbrace{(F\vee T)}_{T})\equiv F\vee T\equiv T$

۲۹-
$$(\sim p \Rightarrow (q\vee r)\equiv F) \Rightarrow (\sim p\equiv T\,,\, q\vee r\equiv F) \Rightarrow (p\equiv F\wedge q\equiv F\wedge r\equiv F)$$
$$(q\vee \sim r)\Leftrightarrow (p\wedge(q\Rightarrow r))\equiv(\underbrace{F\vee T}_{T})\Leftrightarrow \underbrace{(F\wedge(\underbrace{F\Rightarrow F}_{T}))}_{F}\equiv T\Leftrightarrow F\equiv F$$

۳۰- تعدادی از قسمت‌ها را ثابت کرده‌ایم و اثبات بقیه را به عهدهٔ شما می‌گذاریم:

۱) $(p\wedge(q\Rightarrow\sim r))\Rightarrow p\equiv\sim(p\wedge(q\Rightarrow\sim r))\vee p$

$\equiv\sim p\vee(\sim(q\Rightarrow\sim r))\vee p\equiv\underbrace{(p\vee\sim p)}_{T}\vee(\sim(q\Rightarrow\sim r))\equiv T\vee(\sim(q\Rightarrow\sim r))\equiv T$

۲) $p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)\wedge(\sim p\Rightarrow\sim q)\equiv(\sim p\Rightarrow\sim q)\wedge(\sim q\Rightarrow\sim p)$

$\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۳) $\sim p\Rightarrow[q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv p\vee[q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv p\vee[\sim q\vee(p\Rightarrow r)]\equiv p\vee[\sim q\vee(\sim p\vee r)]$

$\equiv p\vee(\sim q)\vee\sim p\vee r\equiv\underbrace{p\vee\sim p}_{T}\vee\sim q\vee r\equiv T\vee\sim q\vee r\equiv T$

۴) $[p\Rightarrow(r\Rightarrow\sim p)]\wedge(r\wedge p)\equiv[\sim p\vee(\sim r\vee\sim p)]\wedge(r\wedge p)\equiv\underbrace{(\sim p\vee\sim r)\wedge r}_{r\wedge\sim p}\wedge p\equiv(r\wedge\sim p)\wedge p$

$\equiv r\wedge(\sim p\wedge p)\equiv r\wedge F\equiv F$

۵) $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv(\sim p\vee q)\Rightarrow(\sim p\vee r)\equiv(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\vee r)\equiv\underbrace{\sim p\vee(p\wedge\sim q)}_{\sim p\vee\sim q}\vee r$

$\equiv\sim p\vee\sim q\vee r\equiv\sim p\vee(\sim q\vee r)\equiv\sim p\vee(q\Rightarrow r)\equiv p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$

۳۱-
$A=\{x\in\mathbb{Z}\,\big|\,|x+5|\le 2\}$

$|x+5|\le 2\Rightarrow -2\le x+5\le 2\Rightarrow -7\le x\le -3\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-7,-6,-5,-4,-3\}$

$\Rightarrow A=\{-7,-6,-5,-4,-3\}$

بنابراین دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر، مجموعهٔ $A=\{-7,-6,-5,-4,-3\}$ است.

۱) درست است، زیرا به ازای همهٔ عضوهای دامنهٔ متغیر گزاره‌نما $x+10\ge 3$ می‌باشد:

$x\in A\Rightarrow x\in\{-7,-6,-5,-4,-3\}\Rightarrow x+10\in\{3,4,5,6,7\}\Rightarrow x+10\ge 3$

۲) اگر حداقل یک مقدار $x\in A$ پیدا کنیم که $(x+6)^4=1$ باشد، گزارهٔ داده‌شده درست خواهد بود:

$(x+6)^4=1\Rightarrow x+6=\pm1\Rightarrow(x=-5)\vee(x=-7)$

بنابراین مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده‌شده مجموعهٔ $\{-5,-7\}$ بوده و ناتهی است، پس گزارهٔ داده‌شده درست است.

۳) نادرست است، زیرا $x=-4$ گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند: $|x+4|=|-4+4|=0\notin\mathbb{N}$

۴) درست است، زیرا به ازای هر عضو x از دامنهٔ متغیر گزاره‌نما $x+9\in\mathbb{N}$ است:

$x\in A\Rightarrow x\in\{-7,-6,-5,-4,-3\}\Rightarrow x+9\in\{2,3,4,5,6\}\Rightarrow x+9\in\mathbb{N}$

۵) درست است، زیرا به ازای هر عضو از دامنهٔ متغیر گزاره‌نما $(x+5)^2\le 5$ است:

$x\in A\Rightarrow -7\le x\le -3\Rightarrow -2\le x+5\le 2\Rightarrow 0\le(x+5)^2\le 4$

۶) درست است، زیرا مجموعه‌جواب گزاره‌نما $\{-4\}$ است و عبارت داده‌شده به ازای $x=-4$ صفر می‌شود.

$x^3+2x^2-7x+4=0\Rightarrow(x^3-1)+2x^2-7x+5=0$

$\Rightarrow(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(2x-5)=0\Rightarrow(x-1)(x^2+3x-4)=0$

$\Rightarrow(x-1)(x-1)(x+4)=0\Rightarrow(x-1)^2(x+4)=0\Rightarrow(x=1)\vee(x=-4)$

۷) نادرست است، زیرا گزاره‌نما به ازای هیچ عضوی از دامنهٔ متغیر به یک گزارهٔ درست تبدیل نمی‌شود و مجموعه‌جواب گزاره‌نما تهی است.

$\frac{x+2}{5}=0\Rightarrow x=-2\notin A$

۸) درست است، زیرا به ازای $x=-4$ و $y=-6$ که هر دو اعضای دامنهٔ متغیر A هستند، گزارهٔ داده‌شده به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود، پس مجموعه‌جواب گزاره‌نما ناتهی است.

$$\begin{cases}2^2+4^2=20\\(x+6)^2+(y+10)^2=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+6=2\\y+10=4\end{cases}\Rightarrow (x=-4)\wedge(y=-6)$$

۹) درست است، اگر بتوانیم مقدار صحیح y را به گونه‌ای بیابیم که به ازای هر x عضو A، $-(x+y)\in A$ شود، گزارهٔ داده‌شده درست خواهد بود:

$$-(x+y)\in A \Rightarrow -(x+y)\in\{-7,-6,-5,-4,-3\} \Rightarrow -7\le -(x+y)\le -3$$

$$\Rightarrow 7\ge x+y\ge 3 \Rightarrow 7-x\ge y\ge 3-x \Rightarrow 3-x\le y\le 7-x$$ (رابطهٔ ۱)

$$x\in A\Rightarrow\left.\begin{cases}x=-3\xrightarrow{(1)}6\le y\le 10\\x=-4\xrightarrow{(1)}7\le y\le 11\\x=-5\xrightarrow{(1)}8\le y\le 12\\x=-6\xrightarrow{(1)}9\le y\le 13\\x=-7\xrightarrow{(1)}10\le y\le 14\end{cases}\right\}\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}}$$

تنها yای که می‌توان برای همهٔ مقادیر $x\in A$ در نظر گرفت تا گزاره‌نمای $-(x+y)\in A$ درست شود $y=10$ است.

بنابراین اگر $y=10$ انتخاب شود به ازای $\forall x\in A$ عبارت $-(x+y)=-(x+10)\in A$ خواهد بود، پس گزارهٔ داده‌شده صحیح است.

۳۲- ۱) گزارهٔ داده‌شده نادرست است، زیرا $x=-1$ مثال نقضی برای آن است.

$$x-\frac{1}{x}=(-1)-\frac{1}{(-1)}=-1+1=0\not\le -2$$

تذکر

$$\sim(\exists x\in D;p(x))\equiv\forall x\in D;\sim p(x)\,,\sim(\forall x\in D;p(x))\equiv\exists x\in D;\sim p(x)$$

$$\sim(\forall x\in(-\infty,0);x-\frac{1}{x}\le -2)\equiv\exists x\in(-\infty,0);\sim(x-\frac{1}{x}\le -2)\equiv\exists x\in(-\infty,0);x-\frac{1}{x}>-2$$

۲) نادرست است، زیرا $x=1$ مثال نقض آن است.

$$\frac{1^2-1}{1-1}\ne 1+1$$

$$\sim(\forall x\in\mathbb{R};\frac{x^2-1}{x-1}=x+1)\equiv\exists x\in\mathbb{R};\sim(\frac{x^2-1}{x-1}=x+1)\equiv\exists x\in\mathbb{R};\frac{x^2-1}{x-1}\ne x+1$$

۳) درست است، زیرا $x=\frac{1}{2}$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه‌جواب آن ناتهی است.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2>\frac{1}{2}$$

$$\sim(\exists x\in\mathbb{R};\frac{1}{x}>\frac{1}{2})\equiv\forall x\in\mathbb{R};\sim(\frac{1}{x}>\frac{1}{2})\equiv\forall x\in\mathbb{R};\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$$

۴) درست است، به ازای $n=41$ عبارت n^2+n+41 بر ۴۱ بخش‌پذیر خواهد بود، پس نمی‌تواند اول باشد:

$$n^2+n+41=41^2+41+41=41(41+1+1)=41\times 43\notin\mathbb{P}$$

بنابراین مجموعه‌جواب گزاره‌نما تهی نیست، پس گزاره‌نما درست است.

$$\sim(\exists n\in\mathbb{P};n^2+n+41\notin\mathbb{P})\equiv\forall n\in\mathbb{P};\sim(n^2+n+41\notin\mathbb{P})\equiv\forall n\in\mathbb{P};n^2+n+41\in\mathbb{P}$$

۵) نادرست است، مثال نقض آن $x=5$ است:

$$2^5+3=35\notin\mathbb{P}$$

$$\sim(\forall x\in\mathbb{N};2^x+3\in\mathbb{P})\equiv\exists x\in\mathbb{N};\sim(2^x+3\in\mathbb{P})\equiv\exists x\in\mathbb{N};2^x+3\notin\mathbb{P}$$

۶) درست است، به ازای $x=2$ گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود، پس مجموعه‌جواب گزاره‌نما ناتهی است.

$$x=2\Rightarrow\frac{2^2+2-1}{2\times 2+1}=\frac{5}{5}=1\in\mathbb{Z}$$

$$\sim(\exists x\in\mathbb{N};\frac{x^2+x+1}{2x+1}\in\mathbb{Z})=\forall x\in\mathbb{N};\frac{x^2+x+1}{2x+1}\notin\mathbb{Z}$$

۷) نادرست است، مجموعه‌جواب این گزاره‌نما تهی است و به ازای هیچ مقدار حقیقی x عبارت x^2+4x+1 عضو مجموعهٔ داده‌شده نخواهد بود:

$$x^2+4x+1=(x+2)^2-3$$

$$(x+2)^2\ge 0\Rightarrow (x+2)^2-3\ge -3\Rightarrow (x+2)^2-3\notin\{-4,-5,-6,-7\}$$

$$\sim(\exists x\in\mathbb{R};x^2+4x+1\in\{-4,-5,-6,-7\})\equiv\forall x\in\mathbb{R};x^2+4x+1\notin\{-4,-5,-6,-7\}$$

۸) گزاره‌نمای $(x-۱)^۲ \geq ۱$ به ازای $x=۱$ نادرست و به ازای بقیهٔ مقادیر $x \in \mathbb{N}$ درست است، اما گزارهٔ $\frac{۱}{x^۴} \leq \frac{۱}{x^۳}$ به ازای $x=۱$ درست و به ازای بقیهٔ مقادیر $x \in \mathbb{N}$ نادرست است، پس به ازای هر $x \in \mathbb{N}$ یکی از گزاره‌های $(x-۱)^۲ \geq ۱$ و $\frac{۱}{x^۴} \leq \frac{۱}{x^۳}$ درست و دیگری نادرست است، پس ترکیب فصلی آن‌ها همواره درست خواهد بود، بنابراین ارزش گزارهٔ داده‌شده درست است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{N}; ((x-۱)^۲ \geq ۱) \vee (\frac{۱}{x^۳} \leq \frac{۱}{x^۴})) \equiv \exists x \in \mathbb{N}; \sim (((x-۱)^۲ \geq ۱) \vee (\frac{۱}{x^۳} \leq \frac{۱}{x^۴}))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}; ((x-۱)^۲ < ۱) \wedge (\frac{۱}{x^۳} > \frac{۱}{x^۴})$$

۹) درست است، چون $x=۳$ و $y=۱$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه‌جواب آن ناتهی است.

$$\sim (\exists x , y \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}; ۲x+۳y=۹) \equiv \forall x , y \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}; ۲x+۳y \neq ۹$$

۱۰) درست است، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر $y=-۱$ در نظر گرفته شود، حاصل عبارت داده‌شده برابر صفر $((x-۱)(y+۱)=(x-۱)(-۱+۱)=۰)$ خواهد بود.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; (x-۱)(y+۱)=۰) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \sim (\exists y \in \mathbb{R}; (x-۱)(y+۱)=۰)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}; \sim ((x-۱)(y+۱)=۰) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}; (x-۱)(y+۱) \neq ۰$$

۱۱) نادرست است، اگر $x=۱$ باشد، (یا x هر عدد طبیعی باشد)، هیچ y طبیعی نمی‌توان یافت که $x+y=۰$ باشد، پس به ازای بعضی مقادیر x هیچ y طبیعی نمی‌توان یافت که گزاره‌نما به گزارهٔ درست تبدیل شود.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{Z}; \exists y \in \mathbb{N}; x+y=۰) \equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \sim (\exists y \in \mathbb{N}; x+y=۰) \equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \forall y \in \mathbb{N}; \sim (x+y=۰)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \forall y \in \mathbb{N}; x+y \neq ۰$$

-۳۳

۱) $\forall n \in \mathbb{N}; n=۲k \vee n=۲k+۱$

$\forall n \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{E} \vee n \in \mathbb{O}$ ($\mathbb{E}$ مجموعه‌اعداد زوج و $\mathbb{O}$ مجموعه‌اعداد فرد است.)

گزاره درست است، چون باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، ۰ یا یک است، پس این اعداد یا زوج و یا فردند.

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{E} \vee n \in \mathbb{O}) \equiv \exists n \in \mathbb{N}; n \notin \mathbb{E} \wedge n \notin \mathbb{O}$$

۲) $\forall n \in \mathbb{P}; n \in \mathbb{O}$ ($\mathbb{P}$ مجموعه‌اعداد اول و $\mathbb{O}$ مجموعه‌اعداد فرد است.)

ارزش گزاره نادرست است و مثال نقض آن $n=۲$ است که تنها عدد اول زوج است.

$$\sim (\forall n \in \mathbb{P}; n \in \mathbb{O}) \equiv \exists n \in \mathbb{P}; n \notin \mathbb{O}$$

۳) $\forall x \in \mathbb{R}-\{۰\}; x+\frac{۱}{x} \geq ۲$

ارزش گزاره نادرست است. $x=-۱$ مثال نقض این گزاره‌نما است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}-\{۰\}; x+\frac{۱}{x} \geq ۲) \equiv \exists x \in \mathbb{R}-\{۰\}; x+\frac{۱}{x} < ۲$$

۴) $\forall x \in \mathbb{R}^-; x+\frac{۱}{x} \leq -۲$

ارزش این گزاره درست است، زیرا مجموعه‌جواب آن با دامنهٔ متغیر گزاره‌نما یعنی $\mathbb{R}^-$ برابر است و به ازای هر $x \in \mathbb{R}^-$ این رابطه صحیح است.

$$x+\frac{۱}{x} \leq -۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲+۱}{x} \leq -۲ \xleftrightarrow[\times x]{x<۰} x^۲+۱ \geq -۲x \Leftrightarrow x^۲+۱+۲x \geq ۰ \Leftrightarrow (x+۱)^۲ \geq ۰ \text{ (بدیهی است)}$$

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}^-; x+\frac{۱}{x} \leq -۲) \equiv \exists x \in \mathbb{R}^-; x+\frac{۱}{x} > -۲$$

۵) $\forall x \in \mathbb{W}; (x^۲ > x) \vee (x^۲ = x)$ ($\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ مجموعه‌اعداد حسابی است.)

(به‌جز صفر و یک به ازای بقیهٔ اعداد حسابی $x^۲ > x$ است.) $x^۲ > x \Rightarrow x^۲-x>۰ \Rightarrow x(x-۱)>۰ \Rightarrow x>۱$ یا $x<۰ \Rightarrow$

$$x^۲ = x \Rightarrow x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰ \vee x=۱$$

به ازای $x=0$ و $x=1$ گزارهٔ $x^2=x$ و به ازای xهای حسابی غیر از ۰ و ۱ گزارهٔ $x^2>x$ درست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره به ازای هر $x\in\mathbb{W}$ صحیح است.
$\sim(\forall x\in\mathbb{W};(x^2>x)\vee(x^2=x))\equiv\exists x\in\mathbb{W};(x^2\leq x)\wedge(x^2\neq x)$

۶) $\exists x\in\mathbb{N};(1-2x>5)\vee(x^2\geq 4)$

$1-2x>5 \Rightarrow 2x<-4 \Rightarrow x<-2 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}}$ هیچ مقدار x طبیعی وجود ندارد

$x^2\geq 4 \Rightarrow x\geq 2$ یا $x\leq -2 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{2,3,4,\dots\}$

به ازای همهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، گزارهٔ $1-2x>5$ گزاره‌ای نادرست است اما به ازای xهای بزرگ‌تر یا مساوی ۲ گزارهٔ $x^2\geq 4$ درست است. پس ترکیب فصلی آن‌ها به ازای $x\geq 2$ درست است، بنابراین مجموعه‌جواب این گزاره‌نما ناتهی است، پس ارزش گزاره‌نما درست است.

$\sim(\exists x\in\mathbb{N};(1-2x>5)\vee(x^2\geq 4))$

$\equiv\forall x\in\mathbb{N};\sim(((1-2x)>5)\vee(x^2\geq 4))\equiv\forall x\in\mathbb{N};(1-2x\leq 5)\wedge(x^2<4)$

۷) $\exists x\in\mathbb{N};(x^2=-x)\wedge(20\leq x^2\leq 70)$

باید x طبیعی پیدا کنیم که هر ۲ گزارهٔ داده‌شده درست باشند.

$x^2=-x \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0\vee x=-1$

گزارهٔ دوم به ازای $x=0$ و $x=-1$ نادرست است، پس هیچ x طبیعی نمی‌توان یافت که به ازای آن هر دو گزاره درست باشند، پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما تهی است پس ارزش گزاره نادرست است.
$\sim(\exists x\in\mathbb{N};(x^2=-x)\wedge(20\leq x^2\leq 70))$

$\equiv\forall x\in\mathbb{N};\sim((x^2=-x)\wedge(x^2\geq 20\wedge x^2\leq 70))\equiv\forall x\in\mathbb{N};(x^2\neq -x)\vee(x^2<20)\vee(x^2>70)$

-۳۴

بدیهی است که اگر سور $\forall$ یک گزاره‌نما را به یک گزارهٔ درست تبدیل کند، سور $\exists$ نیز آن گزاره‌نما را به گزارهٔ درست تبدیل خواهد کرد. در این حالت سور $\forall$ را به عنوان سور مناسب‌تر در نظر می‌گیریم:

۱) $\exists$ ۲) $\forall$ ۳) $\exists$ ۴) $\exists$ ۵) $\forall$ ۶) $\forall$ ۷) $\forall$ ۸) $\exists$ ۹) $\exists$ ۱۰) $\exists$

-۳۵

عکس گزارهٔ شرطی «$p\Rightarrow q$» به صورت «$q\Rightarrow p$» و عکس نقیض آن به صورت «$\sim q\Rightarrow\sim p$» می‌باشد.

اگر $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$ هر دو درست باشند، قضیه دوشرطی خواهد بود و آن را به صورت $p\Leftrightarrow q$ می‌نویسیم.

۱) گزارهٔ شرطی $(p\Rightarrow q)$: $\forall a,b\in\mathbb{R};a^2<b^2\Rightarrow a<b$

ارزش آن نادرست است. $1^2<(-2)^2$ است اما $1<-2$ نیست. $(1^2<(-2)^2 \not\Rightarrow 1<-2)$

عکس گزارهٔ شرطی $(q\Rightarrow p)$: $\forall a,b\in\mathbb{R};a<b\Rightarrow a^2<b^2$

ارزش آن نادرست است. $-2<1$ اما $(-2)^2<1^2$ نیست. $((-2)^2<1^2 \not\Leftarrow -2<1)$

عکس نقیض گزارهٔ شرطی $(\sim q\Rightarrow\sim p)$: $\sim(a<b)\Rightarrow\sim(a^2<b^2)\equiv a\geq b\Rightarrow a^2\geq b^2$

ارزش آن نادرست است. $1>-2$ است اما $1^2>(-2)^2$ نیست. $(1^2>(-2)^2 \not\Leftarrow 1>-2)$ این قضیه دوشرطی نیست.

۲) گزارهٔ شرطی $(p\Rightarrow q)$: $\forall a,b,c\in\mathbb{R};c>0\wedge a<b\Rightarrow ac<bc$

ارزش گزارهٔ شرطی درست است.

عکس گزارهٔ شرطی $(q\Rightarrow p)$: $\forall a,b,c\in\mathbb{R};ac<bc\Rightarrow c>0\wedge a<b$

ارزش این گزاره نادرست است. مثال نقض: $2(-5)<3(-5)$ است اما $3<2$ نیست و $c=-5$ هم بزرگ‌تر از صفر نیست.

عکس نقیض گزارهٔ شرطی $(\sim q\Rightarrow\sim p)$: $\forall a,b,c\in\mathbb{R},ac\geq bc\Rightarrow c\leq 0\vee a\geq b$

ارزش این گزاره نیز درست است و هم‌ارز گزارهٔ اولیه می‌باشد.

برای این گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ درست اما $q\Rightarrow p$ نادرست بود پس قضیه، دوشرطی نیست.

۳) گزارهٔ شرطی $(p\Rightarrow q)$: $\forall x\in\mathbb{R};x^2\geq 25\Rightarrow x\geq 5\vee x\leq -5$

ارزش این گزاره درست است.

$(q \Rightarrow p)$ عکس گزارهٔ شرطی: $\forall x \in \mathbb{R}\,; x \geq ۵ \vee x \leq -۵ \Rightarrow x^۲ \geq ۲۵$

ارزش این گزاره نیز درست است.

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکس نقیض گزارهٔ شرطی: $\forall x \in \mathbb{R}\,; \sim(x \geq ۵ \vee x \leq -۵) \Rightarrow \sim(x^۲ \geq ۲۵)$

$\forall x \in \mathbb{R}; (x < ۵ \wedge x > -۵) \Rightarrow x^۲ < ۲۵$

ارزش این گزاره نیز درست است.

گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ درست هستند، پس قضیه، ۲شرطی است.

۴) $(p \Rightarrow q)$ گزارهٔ شرطی: $\forall x \in \mathbb{R}\,; x^۲ \leq ۲۵ \Rightarrow x \leq ۵ \vee x \geq -۵$

ارزش این گزاره درست است. (البته اگر گزارهٔ شرطی $x^۲ \leq ۲۵ \Rightarrow x \leq ۵ \wedge x \geq -۵$ باشد، کامل‌تر است.)

$(q \Rightarrow p)$ عکس گزارهٔ شرطی: $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq ۵ \vee x \geq -۵ \Rightarrow x^۲ \leq ۲۵$

این گزاره نادرست است. مثال نقض می‌تواند $x = ۱۰$ باشد که $۱۰ \geq -۵$ است اما $۱۰^۲ \leq ۲۵$ نیست.

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکس نقیض گزارهٔ شرطی: $\forall x \in \mathbb{R}; \sim(x \leq ۵ \vee x \geq -۵) \Rightarrow \sim(x^۲ \leq ۲۵)$

$\forall x \in \mathbb{R}; x > ۵ \wedge x < -۵ \Rightarrow x^۲ > ۲۵$

در گزارهٔ شرطی اخیر، مقدم نادرست است چون هیچ مقدار x وجود ندارد که $x > ۵$ و $x < -۵$ باشد؛ پس این گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم درست است.

$q \Rightarrow p$ درست و $p \Rightarrow q$ نادرست است پس گزارهٔ شرطی، دوشرطی نیست.

۳۶- مقادیر $x \in \{۱, ۲, ۳\}$ را در گزاره‌نما جای‌گذاری می‌کنیم:

$x = ۳ \Rightarrow \frac{۳^۲ - ۱}{۳ + ۱} = \frac{۸}{۴} = ۲$ $\qquad x = ۲ \Rightarrow \frac{۲^۲ - ۱}{۲ + ۱} = \frac{۳}{۳} = ۱$ $\qquad x = ۱ \Rightarrow \frac{۱^۲ - ۱}{۱ + ۱} = ۰$

باید مجموعهٔ B را طوری انتخاب کنیم که حداقل شامل یکی از اعداد ۱ یا ۲ باشد تا مجموعه‌جواب گزاره‌نما تهی نبوده و ارزش گزارهٔ داده‌شده درست شود. برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌هایی مانند B که شامل حداقل یکی از اعداد ۱ یا ۲ باشد، باید کل زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ را منهای زیرمجموعه‌هایی که ۱ و ۲ را ندارند کنیم:

تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۱ یا ۲ = (کل زیرمجموعه‌ها) − (زیرمجموعه‌های فاقد ۱ و ۲) $= ۲^۷ - ۲^۵ = ۱۲۸ - ۳۲ = ۹۶$

بنابراین برای مجموعهٔ B، ۹۶ حالت مختلف دارد.

۳۷- ۱) $\sim (\exists$(عدد زوج) ; (عدد زوج) ; (اول نیست)$) \equiv \forall$(عدد زوج) ; (اول است)

گزارهٔ نقیض: هر عدد زوجی اول است.

۲) $\sim (\exists$(پرنده‌ای) ; (پرنده‌ای) ; (نمی‌پرد)$) \equiv \forall$(پرنده‌ای) ; (می‌پرد)

گزارهٔ نقیض: هر پرنده‌ای می‌پرد.

۳) $\sim (\forall$(دانایی) ; (دانایی) ; (توانا است)$) \equiv \exists$(دانایی) ; (توانا نیست)

نقیض گزاره: شخص دانایی می‌توان یافت (وجود دارد) که توانا نباشد.

۴) $\sim (\exists$(آفریقایی);(آفریقایی);(سیاه پوست نیست)$) \equiv \forall$(آفریقایی) ; (سیاه پوست است)

نقیض گزاره: هر آفریقایی سیاه‌پوست است.

۵) $\sim (\forall$(آدم) ; (آدم) ; (بدون عینک می‌بینند)$) \equiv \exists$(آدم) ; (بدون عینک نمی‌بینند)

نقیض گزاره: آدم‌هایی وجود دارند که بدون عینک نمی‌بینند.

۶) $\sim (\forall$(شخصی که چهره برافروخت) ; (دلبری داند)$) \equiv \exists$(کسانی که چهره برافروخته‌اند) ; (دلبری نمی‌دانند)

نقیض گزاره: بعضی از اشخاص هستند که چهره برافروخته‌اند و دلبری نمی‌دانند.

۷) $\sim (\forall$(کسی که آمد) ; (عمارتی نو ساخت)$) \equiv \exists$(کسی‌که‌آمد) ; (عمارت نو نساخت)

نقیض گزاره: وجود دارند کسانی که آمدند و عمارتی نو نساختند.

۸) $\sim (\exists$(انسان‌هایی) ; $\forall$(انسان دیگری) ; (با هم دوستاند)$) \equiv \forall$(انسان) ; $\sim (\forall$(انسان دیگری) ; (با هم دوستاند))

$\equiv \forall$(انسان) ; $\exists$(انسان دیگری) ; (با هم دوست نیستند)

نقیض گزاره: هر انسانی در نظر بگیریم انسان دیگری می‌توان یافت که این دو با هم دوست نباشند.

۹) ~ (∃(جانوری) ; ∀(انسان) ; (جانور از انسان قوی‌تر است))

∀(جانوری) ; ~ (∀(انسان) ; (جانور از انسان قوی‌تر است))　　∀(جانوری) ; ∃(انسان) ; (جانور از انسان قوی‌تر نیست)

نقیض گزاره: برای هر جانوری، انسانی می‌توان یافت که جانور از انسان انتخاب‌شده قوی‌تر نباشد.

۱۰) ~ (∃(مردم) ; ∀(کتاب) ; (آن مردم کتاب را خوانده‌اند))

∀(مردم) ; ~ (∀(کتاب) ; (آن مردم کتاب را خوانده‌اند))　　∀(مردم) ; ∃(کتاب) ; (آن مردم آن کتاب را نخوانده‌اند)

نقیض گزاره: به ازای هر کدام از مردم کتابی می‌توانیم پیدا کنیم که او آن کتاب را نخوانده است.

۱۱) ~ (∀(دانش آموز) ; ∀(کتاب کمک‌آموزشی) ; (دانش‌آموز آن را خوانده است))

≡ ∃(دانش آموز) ; ~ (∀(کتاب کمک‌آموزشی) ; (دانش آموز آن را خوانده است))

≡ ∃(دانش آموز) ; ∃(کتاب کمک‌آموزشی) ; (دانش آموز آن را نخوانده است)

نقیض گزاره: دانش‌آموزی می‌توان یافت که بعضی از کتاب‌های کمک‌آموزشی را نخوانده است.

۱۲) ~ (∃(مدرسه‌ای) ; ∃(کلاسی) ; ∃(دانش آموزی) ; ∀(تکلیف) ; (انجام داده است))

∀(مدرسه‌ای) ; ∀(کلاسی) ; ∀(دانش آموزی) ; ∃(تکلیفی) ; (انجام نداده است)

نقیض گزاره: اگر در کشور از هر مدرسه‌ای هر کلاسی را می‌خواهیم انتخاب کنیم و از آن کلاس هر دانش‌آموزی را که می‌خواهیم مورد بررسی قرار دهیم، خواهیم دید که او بعضی تکالیفش را انجام نداده است.

۳۸- ۱) $\underbrace{(\forall a,b\in\mathbb{R}\,; ab=۰ \Rightarrow a=۰\vee b=۰)}_{p}\wedge\underbrace{(\forall a,b\in\mathbb{R}\,; a^۲+b^۲=۰ \Rightarrow a=۰\wedge b=۰)}_{q}$

گزارهٔ p درست و گزارهٔ q هم درست است پس ارزش گزارهٔ $p\wedge q$ نیز به صورت $T\wedge T$ بوده و درست خواهد بود.

۲) $\underbrace{(\forall x\in\mathbb{Z}\,; x^۲-۱=۰ \Rightarrow x-۱=۰)}_{p} \Rightarrow \underbrace{(\exists y\in\mathbb{Z}\,; \frac{۲y^۲+y-۱}{y-۲}=۰)}_{q}$

گزارهٔ p نادرست است، زیرا $x=-۱$ مثال نقضی برای گزارهٔ شرطی داده‌شده است. گزارهٔ q درست است، زیرا $y=-۱$ گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

بنابراین گزارهٔ شرطی فوق از نظر ارزش گزاره‌ها به شکل $F \Rightarrow T$ بوده و به انتفای مقدم درست است.

۳) $\underbrace{(\forall x,y\in\mathbb{Z}\,; x>y \Rightarrow x^۲>y^۲)}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{(\exists x\in\mathbb{Q}\,; x+\frac{۱}{x}=-۲)}_{q}$

گزارهٔ p نادرست است، زیرا $۲>-۵ \Rightarrow ۲^۲>(-۵)^۲$ نادرست است. گزارهٔ q گزاره‌ای درست است، زیرا $x=-۱$ در گزاره‌نما صدق می‌کند و مجموعه جواب گزاره‌نما ناتهی است. پس گزارهٔ دوشرطی بالا از نظر ارزش گزاره‌ها به شکل $F \Leftrightarrow T$ بوده و نادرست است.

۴) $\underbrace{(\exists x\in\mathbb{Z}\,; \sqrt{-x}\in\mathbb{N})}_{p}\vee\underbrace{(\forall x\in\mathbb{R}\,; x>۳ \text{ یا } x<-۳)}_{q}$

ارزش p درست است $(x=-۱)$ و ارزش q نادرست است $(x=۰)$، پس گزارهٔ داده‌شده به صورت $p\vee q\equiv T\vee F\equiv T$ بوده و درست است.

۵) $\forall x\in\mathbb{R}\,; x\ge ۲ \Rightarrow \underbrace{x<۱۰}_{p}\vee\underbrace{x\ge ۴}_{q}$

ارزش گزاره درست است، زیرا وقتی $x\ge ۲$ است، x یا در بازهٔ $۲\le x<۴$ قرار دارد یا $x\ge ۴$ است.

اگر $x\ge ۴$ باشد، گزارهٔ q و اگر $۲\le x<۴$ باشد، گزارهٔ p درست است. چون به هرحال $x<۱۰$ می‌باشد؛ پس اگر $x\ge ۲$ باشد، گزارهٔ $p\vee q$ درست است.

۶) $\underbrace{(\exists x\in\mathbb{R}\,; \frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\in\mathbb{Z})}\Rightarrow\underbrace{(\forall x\in\mathbb{R}^-\,; \sqrt[۳]{x^۴}=-x\sqrt[۳]{x})}$

ارزش گزاره درست است.$(x=\sqrt{۲})$　　ارزش گزاره نادرست است. مثال نقض: $x=-۸$

$$\begin{cases}\sqrt[۳]{(-۸)^۴}=\sqrt[۳]{۸^۴}=(\sqrt[۳]{۸})^۴=۲^۴=۱۶\\ -(-۸)\sqrt[۳]{-۸}=۸(-۲)=-۱۶\end{cases}$$

گزارهٔ داده‌شده از نظر ارزش گزاره‌ها به صورت $(T \Rightarrow F)$ است، پس نادرست است.

۷) گزاره‌نمای «$\forall x \in \mathbb{P}; x+1 \notin \mathbb{P}$» نادرست است، زیرا گزاره‌نمای آن، مثال نقض $x=2$ را دارد. اما با توجه به این‌که $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$ است، این عبارت بر ۶ بخش‌پذیر است، پس گزارهٔ $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{n^3-n}{6} \in \mathbb{W}$ گزاره‌ای درست است.

پس چون گزاره‌های دو سمت «$\Leftrightarrow$» ارزش یکسان ندارند ارزش این گزارهٔ مرکب، نادرست است.

(**تذکر** ضرب هر n عدد متوالی بر n و همچنین بر $n!$ بخش‌پذیر است.)

۸) $\forall x \in \mathbb{Z}^-; \exists y \in \mathbb{N}; (x+y-1)^2=0$

$$(x+y-1)^2=0 \Rightarrow x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}^-} y\in\mathbb{N}$$

پس به ازای هر x صحیح و منفی مقدار $y=1-x$ که مقداری طبیعی است وجود دارد که $(x+y-1)^2=0$ باشد؛ بنابراین ارزش گزارهٔ داده‌شده صحیح است.

۹) $\forall a,b \in \mathbb{R}; \exists c \in \mathbb{R}; [a<b \Rightarrow a<c<b]$

این گزاره درست است، زیرا به ازای هر a و b که $a<b$ باشد $c=\frac{a+b}{2}$ میانگین دو عدد a و b بین a و b قرار دارد، پس به ازای هر a و b مجموعه جواب c ناتهی است.

۱۰) ارزش گزاره درست است. $\forall x \in \mathbb{Z}; \exists y \in \mathbb{W}; (x^2-y)(x+1)=0$

به ازای هر $x\in\mathbb{Z}$ اگر y را برابر با مقدار x^2 در نظر بگیریم (که x^2 عددی حسابی است.) آن‌گاه عبارت $x^2-y=0$ و در نتیجه $(x^2-y)(x+1)=0$ خواهد بود. پس به ازای هر x مقدار y حسابی به دست آوردیم تا گزاره‌نما به گزارهٔ درست تبدیل شود. پس گزارهٔ سوری داده‌شده درست است.

۱۱) ارزش گزاره نادرست است.

هیچ y ثابتی در اعداد حسابی نمی‌توان یافت که به ازای هر x صحیح عبارت $(x^2-y)(x+1)$ را برابر صفر کند. پس گزارهٔ داده‌شده نادرست است.

۳۹- ۱) عکس نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است.

گزارهٔ شرطی: (اگر کسی دانا بود) $\Rightarrow$ (توانا است)

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: (اگر کسی توانا نباشد) $\Rightarrow$ (دانا نیست)

عکس نقیض: کسی که توانا نباشد دانا نیست.

۲) گزارهٔ شرطی: (اگر برادر در بند خویش باشد) $\Rightarrow$ ((برادر نیست) $\wedge$ (خویش نیست))

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: $\sim$((برادر نیست) $\wedge$ (خویش نیست)) $\Rightarrow$ $\sim$(برادر در بند خویش است)

(برادر است) $\vee$ (خویش است) $\Rightarrow$ (در بند خویش نیست)

عکس نقیض: کسی که برادر است یا خویش است در بند خویش نیست.

۳) گزارهٔ شرطی: (همهٔ شب‌ها شب قدر بود) $\Rightarrow$ (شب قدر، بی‌قدر بود)

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: $\sim$(شب قدر، بی‌قدر بود) $\Rightarrow$ $\sim$(همهٔ شب‌ها شب قدر بود)

شب قدر، بی‌قدر نباشد $\Rightarrow$ همهٔ شب‌ها شب قدر نیست

عکس نقیض: شب قدر بی‌قدر نیست پس همهٔ شب‌ها شب قدر نیست.

۴) گزارهٔ شرطی: (نان از عمل خویش بخوریم) $\Rightarrow$ (منت حاتم طایی نبریم)

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: (منت حاتم طایی می‌بریم) $\Rightarrow$ (نان از عمل خویش نمی‌خوریم)

عکس نقیض: هر کس منت حاتم طایی می‌برد، نان از عمل خویش نمی‌خورد.

۵) گزارهٔ شرطی: (خانه‌ای ۲ کدبانو داشته باشد) $\Rightarrow$ (خاک تا زانو است)

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: $\sim$(خاک تا زانو است) $\Rightarrow$ $\sim$(خانه ۲ کدبانو دارد)

خاک تا زانو نیست $\Rightarrow$ خانه ۲ کدبانو ندارد

عکس نقیض: خانه‌ای که در آن خاک تا زانو نیست ۲ کدبانو ندارد.

۶) گزارهٔ شرطی: (ریش و زخم خار وجود نداشته باشد) $\Rightarrow$ (صحبت و همنشینی با گل خوش است)

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: (صحبت و همنشینی با گل خوش نباشد) $\Rightarrow$ (ریش و زخم خار وجود دارد)

عکس نقیض: اگر صحبت و همنشینی گل خوش نباشد، معلوم است که ریش خار وجود دارد.

-۴۰ $۱)\ A=\{x^{۳}\mid x\in\mathbb{Z},x\geq -۱\}$

$۲)\ B=\{n^{۲}-۱\mid n\in\mathbb{N}\}$ یا $B=\{x\mid x=n^{۲}-۱,n\in\mathbb{N}\}$

نکته معادلهٔ درجه‌دومی که جمع ریشه‌های آن S و ضرب ریشه‌هایش P باشد به صورت $x^{۲}-Sx+P=۰$ است.

۳) ابتدا معادلهٔ درجه‌دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش $۲+\sqrt{۵}$ و $۲-\sqrt{۵}$ باشد:

جمع ریشه‌ها $=S=(۲+\sqrt{۵})+(۲-\sqrt{۵})=۴$

ضرب ریشه‌ها $=P=(۲+\sqrt{۵})(۲-\sqrt{۵})=۴-۵=-۱$

معادلهٔ درجه‌دوم با ریشه‌های $۲-\sqrt{۵}$ و $۲+\sqrt{۵}$: $x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-۴x-۱=۰$

بنابراین مجموعهٔ C را می‌توان به شکل مقابل نوشت: $C=\{x\in\mathbb{R}\mid x^{۲}-۴x-۱=۰\}$

۴) ($\mathbb{W}$ مجموعه‌اعداد حسابی است.) $D=\{۵k+۱\mid k\in\mathbb{W}\}$

$۵)\ E=\{x\mid x=(-۱)^{n}(n^{۲}+۱),n\in\mathbb{N},n\leq ۶\}$

$۶)\ F=\{x\mid x=(-۱)^{n+۱}\dfrac{n+۲}{n(n+۱)},n\in\mathbb{N},۱\leq n\leq ۸\}$

-۴۱ $۱)\ |x|<۳ \Rightarrow (-۳<x<۳,x\in\mathbb{Z}) \Rightarrow A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\} \Rightarrow |A|=۵$

$۲)\ ۳x^{۲}-۵x-۲=۰ \Rightarrow (۳x+۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=-\dfrac{۱}{۳}$ یا $x=۲$

چون تنها اعداد صحیح می‌توانند عضو B باشند پس $x=-\dfrac{۱}{۳}$ غیرقابل‌قبول است. بنابراین داریم: $B=\{۲\} \Rightarrow n(B)=۱$

۳) عبارت $x^{۲}+x+۱$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=-۳<۰$ و ضریب $x^{۲}$ مثبت است. بنابراین مجموعهٔ داده‌شده تهی و عدد اصلی آن صفر است.

$C=\varnothing \Rightarrow |C|=۰$

۴) مجموعهٔ D دارای ۵ عضو متمایز به شکل روبه‌رو است:

$$D=\{\underbrace{\{a\}}_{۱},\underbrace{\{\{a,b\},a\}}_{۲},\underbrace{a}_{۳},\underbrace{b}_{۴},\underbrace{\{a,b\}}_{۵}\} \Rightarrow |D|=۵$$

۵) با حذف اعضای تکراری مجموعهٔ E، تنها سه عضو متمایز باقی می‌مانند.

$$E=\{\underbrace{\{\}}_{\varnothing},\underbrace{\{\{\}\}}_{\{\varnothing\}},\underbrace{\{\{\},\varnothing\}}_{\{\varnothing\}},\{\varnothing\},\varnothing,\underbrace{\{\varnothing,\{\}\}}_{\{\varnothing\}},\{\varnothing\},\{\varnothing,\underbrace{\{\varnothing,\{\}\}}_{\{\varnothing\}}\}\}$$

$$E=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} \Rightarrow |E|=۳$$

$۶)\ m^{۳}\leq ۱۶m \Rightarrow m^{۳}-۱۶m\leq ۰ \Rightarrow m(m^{۲}-۱۶)\leq ۰ \Rightarrow m(m-۴)(m+۴)\leq ۰$

m	$-\infty$		-۴		۰		۴		$+\infty$
$m^{۳}-۱۶m$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow m\leq -۴$ یا $۰\leq m\leq ۴$

با توجه به شرط $m\in\mathbb{W}$، فقط اعداد حسابی در بازهٔ به دست آمده جواب هستند، بنابراین:

$F=\{m\in\mathbb{W}\mid m\leq -۴$ یا $۰\leq m\leq ۴\}=\{۰,۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(F)=۵$