

آزمون‌های مرحله‌ای

# فصل ۱

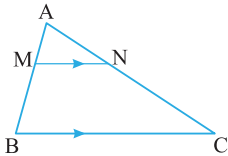
۹

تشابه

## فصل نهم: تشابه

### قضیه‌ی تالس و نتایج آن

با توجه به شکل، اگر  $MN \parallel BC$ ، داریم:

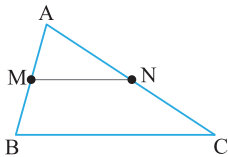


$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \\ \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \end{cases}$$

**توجه** عکس قضیه‌ی تالس نیز درست است.

### قضیه‌ی میان خط در مثلث

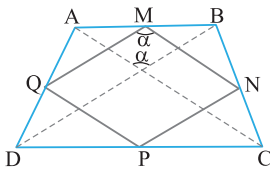
اگر نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AC باشند، به MN میان خط می‌گوییم و داریم:



$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2} BC$$

### کاربرد قضیه‌ی تالس در شکل حاصل از وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی

اگر وسط اضلاع یک چهارضلعی را مطابق شکل به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل (MNPQ) متوازی‌الاضلاع خواهد شد و داریم:



$$S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}, \quad \text{محیط } MNPQ = AC + BD$$

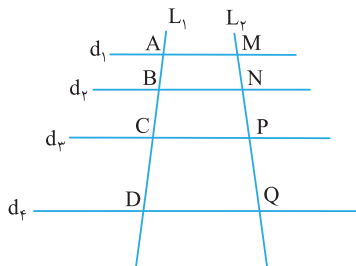
### حالت‌های خاص

(۱) اگر قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمود باشند، چهارضلعی MNPQ مستطیل است و برعکس.

(۲) اگر قطرهای چهارضلعی ABCD با هم برابر باشند، چهارضلعی MNPQ لوزی است و برعکس.

### کاربرد قضیه‌ی تالس در خطوط موازی

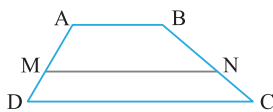
اگر چند خط موازی دو خط مورب را قطع کنند، روی این دو خط مورب پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کنند.



$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ}$$

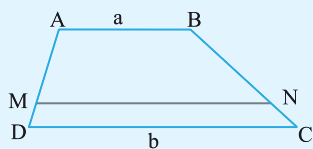
### کاربرد قضیه‌ی تالس در ذوزنقه

در شکل مقابل، اگر پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها باشد، داریم:



$$\begin{aligned} \frac{AM}{MD} &= \frac{BN}{NC} \\ \frac{AM}{AD} &= \frac{BN}{BC} \\ \frac{DM}{AD} &= \frac{CN}{BC} \end{aligned}$$

عکس این مطلب نیز درست می‌باشد.

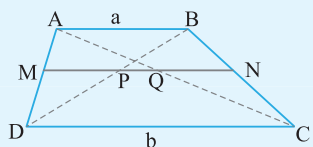


**نکته:** در دوزنقه‌ی ABCD با قاعده‌هایی به طول  $a$  و  $b$  (مطابق شکل) اگر MN موازی قاعده‌ها باشد و بدانیم  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$ ، در این صورت طول MN از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$MN = \frac{na + mb}{m + n}$$

**نکته:** در دوزنقه‌ی ABCD اگر M و N به ترتیب وسط AD و BC باشند، داریم:

$$MN = \frac{a + b}{2}$$



**نکته:** در این حالت، پاره‌خط MN قطرهای دوزنقه را نصف می‌کند. اگر P و Q نقاط برخورد MN با اقطار باشند، خواهیم داشت:

$$PQ = \frac{|b - a|}{2}$$

### چندضلعی‌های متشابه

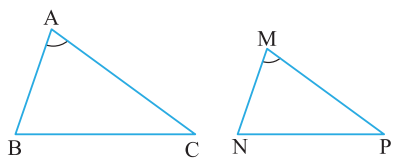
دو چندضلعی را متشابه می‌گوییم، هرگاه:  
الف) زاویه‌های آنها، نظیر به نظیر مساوی باشند.  
ب) ضلع‌های متناظر در آنها متناسب باشند.

**توجه** نسبت اضلاع نظیر در دو چندضلعی متشابه را نسبت تشابه می‌گوییم.

**نکته:** هر دو n ضلعی منظم متشابه‌اند.

### حالت‌های تشابه دو مثلث

۱) حالت (ز-ز): اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.  
۲) حالت (ض-ض-ض): اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر بوده و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

۳) حالت (ض-ض-ض): هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

### پاره‌خط‌های متناسب در دو شکل

اگر دو چندضلعی با نسبت  $k$  با هم متشابه باشند، نسبت همه‌ی پارامترهای خطی متناظر در دو چندضلعی برابر همان نسبت تشابه یعنی  $k$  است.

**نتیجه:** در دو مثلث متشابه، نسبت دو ارتفاع نظیر، دو نیمساز نظیر، دو میانه‌ی نظیر و محیط دو مثلث، با نسبت تشابه برابر است.

**نکته:** نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر مربع نسبت تشابه ( $k^2$ ) است.

شماره صفحات پاسخ تشریحی	زمان پیشنهادی	مبحث آزمون
۱۴۸ و ۱۴۹	۲۰ دقیقه	تشابه

۱- اگر  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{3a+1}{3b+2} = 3m$ ، مقدار  $m$  کدام است؟

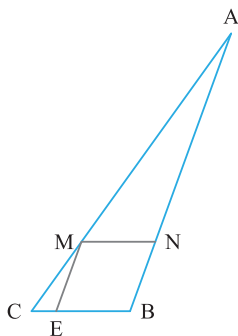
- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۲- در ذوزنقهی ABCD قاعده‌ی بزرگ سه برابر قاعده‌ی کوچک است. طول پاره‌خطی که وسط دو قطر را به هم وصل می‌کند، برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  قاعده‌ی بزرگ (۲)  $\frac{1}{6}$  قاعده‌ی بزرگ (۳)  $\frac{1}{3}$  قاعده‌ی بزرگ (۴)  $\frac{4}{9}$  قاعده‌ی بزرگ

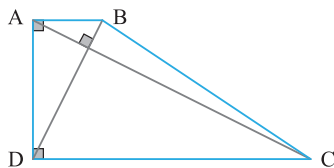
۳- در شکل مقابل اگر  $AB = 3BC = 12$ ، آن‌گاه محیط لوزی MNBE برابر کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۸



۴- در مربع ABCD نقطه‌ی M وسط ضلع AB می‌باشد. اگر مجموع فواصل دو رأس A و C از DM برابر ۶ باشد، طول DM کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)  $\frac{5}{2}$



۵- در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی ABCD دو قطر AC و BD برهم عمودند. اگر  $AD = 2AB = 2$ ، آن‌گاه مساحت این ذوزنقه کدام است؟

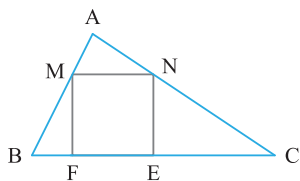
- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶- در متوازی‌الاضلاع ABCD خط گذرا بر B امتداد دو ضلع DA و DC را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. اگر  $DN = \frac{Y}{3} DC$ ، مساحت مثلث MAB چند درصد مساحت مثلث NBC است؟

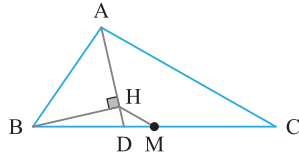
- (۱)  $\frac{37}{5}$  (۲)  $\frac{42}{75}$  (۳)  $\frac{56}{25}$  (۴)  $\frac{62}{5}$

۷- در مثلث ABC مربعی به ضلع ۲ محاط شده است. اگر  $BC = 6$ ، آن‌گاه مساحت مثلث AMN کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱



## محاسبات



۸- در مثلث ABC از رأس B عمود BH را بر نیمساز زاویه A رسم کرده‌ایم. اگر M وسط ضلع BC باشد و  $MH = \frac{1}{3} AB$ ، آن‌گاه نسبت  $\frac{AC}{AB}$  برابر

کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{3}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{5}{3}$

۹- در مثلث ABC داریم  $AB=9$ ،  $AC=7$  و  $\hat{A} = 2\hat{C}$ . اندازه‌ی BC کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲)  $12/5$

(۳) ۱۳

(۴)  $13/5$

۱۰- اندازه‌ی قاعده‌های یک دوزنقه ۶ و ۹ واحد و طول پاره‌خطی که دو نقطه‌ی وسط قاعده‌ها را به هم وصل می‌کند برابر

۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر این دوزنقه از وسط قاعده‌ی کوچک‌تر چقدر است؟

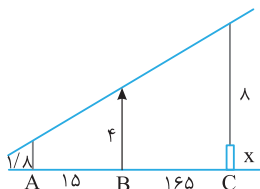
(۱)  $3/6$

(۲)  $4/2$

(۳)  $4/8$

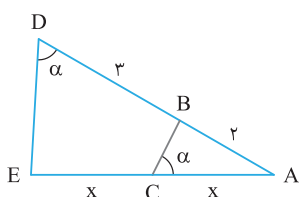
(۴)  $5/4$

شماره صفحات پاسخ تشریحی	زمان پیشنهادی	مبحث آزمون
۱۵۰ و ۱۵۱	۲۰ دقیقه	تشابه



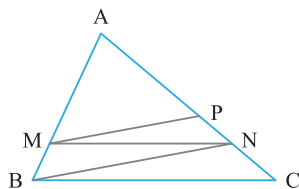
- ۱- در شکل مقابل، دکلی به طول ۸ متر بر بالای برج C نصب شده است. دید چشم ناظر A به ارتفاع ۱/۸ متر از بالاترین نقطه‌ی دکل و بالاترین نقطه‌ی تیرک ۴ متری B در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟

- (۱) ۱۹/۸  
(۲) ۲۰/۲  
(۳) ۲۰/۸  
(۴) ۲۱/۲



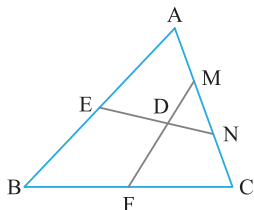
- ۲- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث کوچک‌تر به مساحت چهارضلعی برابر کدام است؟

- (۱) ۱/۵  
(۲)  $\sqrt{5}$   
(۳) ۳/۴  
(۴) ۱/۴



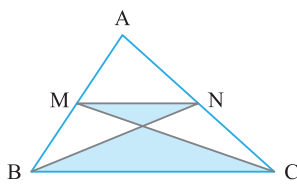
- ۳- در شکل زیر می‌دانیم  $MN \parallel BC$  و  $MP \parallel BN$ . اگر  $AM = 3MB$ ، آن‌گاه حاصل  $\frac{PN}{AC}$  کدام است؟

- (۱) ۴/۱۵  
(۲) ۳/۱۶  
(۳) ۱/۸  
(۴) ۱/۴



- ۴- در شکل مقابل  $AM = MN = NC$ ، نقطه‌ی E وسط ضلع AB و نقطه‌ی F وسط ضلع BC است.  $\frac{DM}{DF}$  برابر کدام است؟

- (۱) ۲/۳  
(۲) ۳/۴  
(۳) ۱/۲  
(۴) ۱/۳

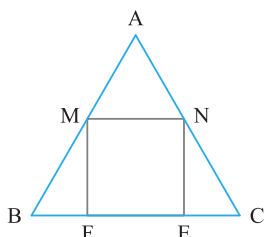


- ۵- در شکل مقابل M و N وسط اضلاع مثلث هستند. مساحت قسمت هاشورزده چه کسری از مساحت مثلث است؟

- (۱) ۱/۳  
(۲) ۳/۸  
(۳) ۵/۱۲  
(۴) ۱/۲

- ۶- در مثلث ABC زاویه‌ی B دو برابر زاویه‌ی C می‌باشد. کدام رابطه بین اضلاع مثلث ABC برقرار است؟

- (۱)  $BC^2 = AC^2 + AB^2$   
(۲)  $AC^2 - AB^2 = AB \times BC$   
(۳)  $AB^2 - AB \times BC = AC^2$   
(۴)  $BC^2 = AC^2 - AB^2$

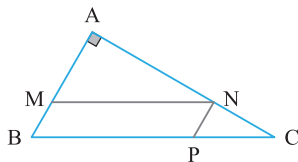


- ۷- مربعی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a محاط شده است. اندازه‌ی ضلع مربع کدام است؟

- (۱)  $\frac{ah_a}{a+h_a}$   
(۲)  $\frac{a^2}{a+h_a}$   
(۳)  $\frac{2ah_a}{a+h_a}$   
(۴)  $\frac{2a^2}{a+h_a}$

## محاسبات

- ۸- در شکل زیر مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه و چهارضلعی  $MNPB$  متوازی‌الاضلاع به محیط  $۲۰$  می‌باشد. اگر  $AM = ۲MB$  و  $BC = ۱۲$ ، آن‌گاه مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

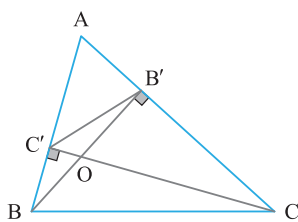


- (۱) ۱۸  
 (۲)  $۱۸\sqrt{۳}$   
 (۳) ۳۶  
 (۴)  $۳۶\sqrt{۳}$

- ۹- در دوزنقه‌ای به قاعده‌های ۴ و ۷ فاصلهی نقطه‌ی تلاقی دو قطر از قاعده‌ی بزرگ‌تر ۳ می‌باشد. مساحت این دوزنقه چه مضربی از ۳۳ می‌باشد؟

- (۱)  $\frac{۱۱}{۱۴}$       (۲)  $\frac{۱۱}{۷}$       (۳)  $\frac{۱}{۷}$       (۴)  $\frac{۱}{۱۴}$

- ۱۰- در مثلث  $ABC$  ارتفاع اضلاع  $AB$  و  $AC$  در  $O$  متقاطع‌اند. اگر  $AB' = ۴$ ،  $AB = ۹$  و  $BC = ۱۲$ ، اندازه‌ی  $B'C'$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{۱۴}{۳}$   
 (۲) ۴  
 (۳)  $\frac{۱۶}{۳}$   
 (۴) ۶