مجموعه، الگو و دنباله

فصل اول

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب، مسلط هستم
سبز: خوب، تسلط نسبی دارم
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

مجموعه، الگو و دنباله

۱۶۰ تست شناسنامه‌دار، شامل:
۹۲ تست مرتبط و مشابه کتاب درسی
۴۹ تست از آزمون‌های کانون
۱۹ تست از کنکورهای سراسری

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
(۳۲ تست شناسنامه‌دار)
- مجموعه‌های اعداد
- بازه‌ها
- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۲. متمم یک مجموعه
(۳۰ تست شناسنامه‌دار)
- مجموعه‌ی مرجع
- تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۳. الگو و دنباله
(۳۲ تست شناسنامه‌دار)
- الگو
- الگوی خطی
- الگوهای غیر خطی
- دنباله

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۴. دنباله‌های حسابی و هندسی
(۶۶ تست شناسنامه‌دار)
- دنباله‌ی حسابی
- دنباله‌ی هندسی

مؤلف درس، تست‌های تألیفی و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

◆ مجموعه‌های اعداد ◆

در سال‌های گذشته، با مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. به مجموعه‌های زیر توجه کنید:

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی

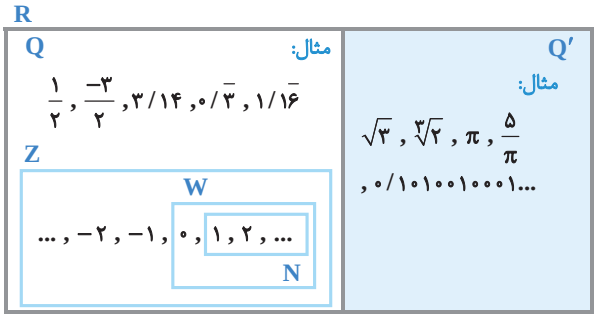
$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: مجموعه‌ی اعداد حسابی

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: مجموعه‌ی اعداد صحیح

$Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, b \neq 0\right\}$: مجموعه‌ی اعداد گویا

Q' : مجموعه‌ی اعداد گنگ — مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی که گویا نیستند

$R = Q \cup Q'$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی



تذکر ◄ در نمودار وِن بالا، این مجموعه‌ها و رابطه‌ی بین آنها مشخص شده‌اند. با توجه به نمودار دیده می‌شود که:

(۱) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ (۲) $W - N = \{0\}$

(۳) $R - Q = Q'$ (۴) $Q \cap Q' = \varnothing$

تذکر ◄ هر عدد اعشاری که تعداد ارقام اعشار آن بی‌شمار باشد و متناوب نباشد، گنگ است. اگر نمایش اعشاری عدد، مختوم یا متناوب باشد، آنگاه گویاست.

$0/333\ldots$ (گویا) $0/220220022000220\ldots$ (گنگ)

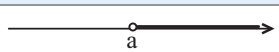
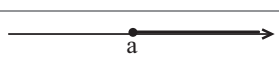
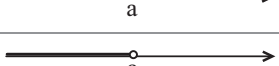
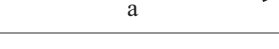
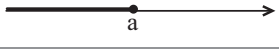
تذکر ◄ مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد را به صورت $O = \{2k-1 | k \in N\}$ و مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج را به صورت $E = \{2k | k \in N\}$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی اعداد حسابی را می‌توانیم به صورت $W = \{k-1 | k \in N\}$ نمایش دهیم.

◆ بازه‌ها ◆

هرگاه a و b دو عدد حقیقی و $a < b$، آنگاه مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b (خود a و b را شامل نمی‌شود) را به‌صورت (a, b) نمایش داده و آن را بازه‌ی باز از a تا b، می‌نامیم. بازه‌هایی که شامل هر دو نقطه‌ی انتهایی هستند، بسته‌اند و با نماد $[a, b]$ نمایش داده می‌شوند. بازه‌هایی که فقط شامل یک نقطه‌ی انتهایی هستند، نیم‌بازند و با نمادهای $[a, b)$ یا $(a, b]$ نمایش داده می‌شوند. به جدول زیر توجه کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم باز
	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم باز

نوع دیگر بازه‌ها، بازه‌هایی با نمایش هندسی نیم‌خط‌هایی روی محور اعداد حقیقی یا خود خط حقیقی هستند. برای نمایش مجموعه‌ی $\{x \in R \mid x > a\}$ از نماد $(a, +\infty)$ استفاده می‌کنیم، توجه کنید که علامت $+\infty$ در انتهای بازه، نشان‌دهنده‌ی یک عدد حقیقی نیست، به همین ترتیب نماد $-\infty$ در ابتدای بازه‌ی $(-\infty, a)$. به جدول زیر توجه کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in R \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in R \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم باز
	$\{x \in R \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز
	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم باز
	R	$(-\infty, +\infty)$	باز

■ **مثال:** همه‌ی عبارت‌های زیر برای بازه‌ی $(-۷ , ۱۱]$ درست هستند.

(۱) $-۷ \notin (-۷ , ۱۱]$ (۲) $۵ \in (-۷ , ۱۱]$ (۳) $۱۱ \in (-۷ , ۱۱]$

(۴) $\{۰ , ۳\} \subset (-۷ , ۱۱]$ (۵) $\{۱۲ , ۵\} \not\subset (-۷ , ۱۱]$ (۶) $(-۷ , ۱۱) \subset (-۷ , ۱۱]$

تذکر ◄ $R - \{a\}$ را می‌توانیم به‌صورت اجتماع دو بازه‌ی $(a , +\infty)$ و $(-\infty , a)$ یعنی به‌صورت $(-\infty , a) \cup (a , +\infty)$ نمایش دهیم.

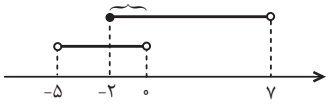
به‌عنوان مثال $R - \{۵\}$ برابر $(-\infty , ۵) \cup (۵ , +\infty)$ است.

تذکر ◄ مجموعه‌ی $R - (a , b]$ به‌صورت $(-\infty , a] \cup (b , +\infty)$ نیز نمایش داده می‌شود.

به‌عنوان مثال $R - (-۱ , ۲]$ برابر $(-\infty , -۱] \cup (۲ , +\infty)$ است.

■ **مثال:** فاصله‌ی $(-۵ , ۰) \cap [-۲ , ۷)$ را با رسم بازه‌های آنها روی محور به‌دست آورید.

حل: نمایش هندسی هر یک از بازه‌ها را روی یک محور رسم می‌کنیم، دیده می‌شود که اشتراک بازه‌ها، بازه‌ی $(-۲ , ۰]$ است.



تذکر ◄ اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، آنگاه $(a , b) \subset [a , b) \subset [a , b]$ است. به طریق مشابه، $(a , b) \subset (a , b] \subset [a , b]$.

◆ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ◆

تعریف: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌ی متناهی می‌نامند، اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامند. در مجموعه‌های نامتناهی، تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است.

■ **مثال:** مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج سه رقمی، مجموعه‌ی اعداد اول بین ۱۰۰ تا $۱۰^{۵۰}$، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۳۶، همگی مجموعه‌هایی متناهی هستند.

■ **مثال:** بازه‌ی $(۱,۲)$، مجموعه‌ای نامتناهی است، زیرا هر قدر وقت صرف کنیم نمی‌توانیم همه‌ی اعضای آن را بشماریم.

■ **مثال:** مجموعه‌ی خطوطی که از نقطه‌ی $(۱ , ۰)$ عبور می‌کنند مجموعه‌ای نامتناهی است، زیرا بی‌شمار خط داریم که از نقطه‌ی $(۱ , ۰)$ عبور می‌کنند.

تذکر ◄ مجموعه‌های N، W، Z، Q، Q' و R همگی نامتناهی هستند.

تذکر ◄ در بحث متناهی بودن یک مجموعه، بزرگی آن مجموعه اهمیت ندارد، نکته‌ی اساسی آن است که اگر وقت به اندازه‌ی کافی داشته باشیم، بتوانیم اعضای مجموعه را بشماریم.

■ **مثال:** مجموعه‌ی موش‌های کره‌ی زمین، یک مجموعه‌ی متناهی است، با اینکه تعداد آنها را نمی‌دانیم؛ پس ندانستن تعداد اعضای یک مجموعه، دلیلی بر نامتناهی بودن آن مجموعه نیست.

تذکر ◄ مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای متناهی در نظر گرفته می‌شود.

تذکر ◄ اگر A و B دو مجموعه‌ی نامتناهی باشند، در مورد نامتناهی بودن مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$ نمی‌توان نظر قطعی داد، یعنی ممکن است متناهی یا نامتناهی باشند.

■ **مثال:** مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت و مجموعه‌ی اعداد حسابی هر دو نامتناهی‌اند ولی اشتراک آنها مجموعه‌ی $\{۰\}$ است که مجموعه‌ای متناهی است.

همچنین داریم: مجموعه‌ای نامتناهی : $R - Q$ و مجموعه‌ای متناهی: $W - N = \{۰\}$ و مجموعه‌ای نامتناهی $= Z - W$

تذکر ◄ اگر مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای نامتناهی است.

اگر مجموعه‌ی A، مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.

■ **مثال:** اگر $B \subset \{x \in R \mid x > ۲\}$ باشد، آنگاه B، مجموعه‌ای نامتناهی است.

■ **مثال:** اگر $A \subset \{x \in Z \mid ۱ < x < ۱۰\}$ باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای متناهی است.

مجموعه‌های اعداد

۱- کدام گزینه‌ی زیر نادرست است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۲- مرتبط با پاراگراف ۲)

(۱) $N \subset Z \subset Q \subset R$ (۲) $(Q \cap N) \subset Z$ (۳) $Z \cap N = N$ (۴) $R - Z = Q$

۲- کدام گزینه‌ی زیر درست است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۲- مرتبط با پاراگراف ۲)

(۱) $Q \subset (R \cap Z)$ (۲) $(Z \cup Q) \subset W$ (۳) $(Q \cap W) \subset Z$ (۴) $(R \cap Q) \subset Q'$

۳- کدام مجموعه‌ی زیر، اعداد صحیح غیر حسابی را نمایش می‌دهد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)

(۱) $W \cap Z$ (۲) $W - Z$ (۳) $Z - W$ (۴) $Q - Z$

۴- کدام مجموعه‌ی زیر، مجموعه‌ی اعداد طبیعی را نمایش نمی‌دهد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱)

(۱) $W - (W - N)$ (۲) $N - Q'$ (۳) $(W \cap Z) - \{۰\}$ (۴) $W \cup N$

۵- کدام مجموعه‌ی زیر، تهی نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱)

۱) $W\cap(Z-N)$ ۲) $N\cap(Z-W)$ ۳) $N\cap(Q-Z)$ ۴) $Z\cap(R-Q)$

بازه‌ها

۶- کدام گزینه‌ی زیر درست نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

۱) $[-۱,۲)\subset[-۱,۲]$ ۲) $(-۱۵,۱]\subset\varnothing$ ۳) $\{-۲,۱\}\subset[-۳,۰)$ ۴) $(۳,۵]\neq[۳,۵]$

۷- کدام گزینه‌ی زیر درست نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

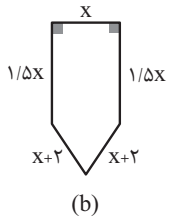
۱) $۰\in(-۳,۰]$ ۲) $\frac{-۵}{۲}\notin\left(\frac{-۵}{۲},۲\right]$ ۳) $۲\notin R-(۲,۳]$ ۴) $۳\in R-(۲,۳)$

۸- اگر عدد حقیقی m متعلق به بازه‌ی $(۵,۱)$ باشد، آنگاه عدد $۲m+۱$ در کدام بازه قرار می‌گیرد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۳ -مرتبط با پاراگراف ۲)

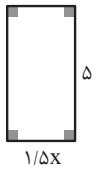
۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۱۱)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۱,۱۱)$

۹- مجموعه مقادیر x، کدام بازه‌ی زیر باشد تا محیط شکل (a) از محیط شکل (b) بیشتر باشد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۳ -مرتبط با پاراگراف ۲)

۱) $(-\infty,۲)$
۲) $(۲,۴)$
۳) $(۰,۲)$
۴) $(۰,۱)$



(b)



(a)

۱۰- خلاصه‌شده‌ی فاصله‌ی $[۲,۴)\cup[۴,۷)$، کدام بازه‌ی زیر است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مشابه تمرین ۳)

۱) $[۲,۷)$ ۲) $[۲,۴]$ ۳) $[۴,۷)$ ۴) $[۲,۷]$

۱۱- نمایش مجموعه‌ی $D=\{x\,|\,x\leq۰\cap x\geq-۱\}$، کدام بازه‌ی زیر است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مشابه تمرین ۳)

۱) $[۰,۱)$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $[-۱,۰]$

۱۲- اگر $A=\{x\,|\,x\in R\,,\,-۲\leq x<۲\}$ و $B=\{x\,|\,x\in R\,,\,x>-۱\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $A\cap B$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟ (آزمون کانون- ۲۶ اردیبهشت ۹۲)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳- اگر نمایش مجموعه‌های A و B به‌صورت بازه‌های $A=[-۱,۲)$ و $B=(-۳,a]$ و مجموعه‌ی $A\cap B$ غیر تهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن برای a، کدام است؟ (آزمون کانون- ۱۰ بهمن ۹۳)

۱) $\{a\,|\,a\geq-۱\}$ ۲) $\{a\,|-۱\leq a<۲\}$ ۳) $\{a\,|\,a<-۳\}$ ۴) $\{a\,|-۲<a<-۱\}$

۱۴- اگر $A=[-۶,۱۲)$ و $B=\{x\,|\,x\in R,۲x\in A\}$ و $C=\{x\,|\,x\in R,۳x\in B\}$، آن‌گاه: (آزمون کانون - ۹۱)

۱) $A\cap B=C$ ۲) $A\cap C=B$ ۳) $B\cap C=B$ ۴) $B\cap C=C$

۱۵- اگر $A=[-۳,۴)$ و $B=\{x\in R\,|(-x)\in A\}$، آنگاه مجموعه‌ی $A-B$ کدام بازه‌ی زیر است؟ (آزمون کانون- ۲۱ آذر ۹۳)

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(-۴,-۳)$ ۳) $(-۳,۳)$ ۴) $(-۴,۴)$

۱۶- در کدام بازه‌ی زیر، نامعادله‌ی $۵x<۷$ برقرار است ولی نامعادله‌ی $۳x-۵\leq۷$ برقرار نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $\left(-\infty,\frac{۷}{۵}\right)$ ۲) $\left(\frac{-۲}{۳},\frac{۷}{۵}\right)$ ۳) $\left(-\infty,\frac{-۲}{۳}\right)$ ۴) $\left(-\infty,\frac{-۲}{۳}\right]$

۱۷- اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=(۰,۳]$، آنگاه کدام مجموعه‌ی زیر، بازه‌ی $(۲,۳]$ است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $A\cup B$ ۲) $B-A$ ۳) $B\cap A$ ۴) $A-B$

۱۸- کدام‌یک از اعداد زیر متعلق به مجموعه‌ی $[۳,۴]-[۲,۵)\cap(-\infty,۳)$ است؟ (آزمون کانون- ۶ آذر ۹۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۹- اگر $A=\{x\,|\,x\in R,۳x-۱\geq\frac{۱}{۲}\}$، $A=\{x\,|\,x\in R,۴x-\frac{۳}{۲}<۵\}$ و $B=\{x\,|\,x\in W,x-۴\leq۰\}$ باشند، حاصل $(A\cap B)-C$ کدام است؟ (آزمون کانون- ۹۲)

۱) $[\frac{۱}{۲},\frac{۱۳}{۸})-\{۱\}$ ۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{۱۳}{۸})$ ۳) $R-\{۱\}$ ۴) $R-\{۰,\pm۱,\pm۲\}$

۲۰- اگر $A=\{x\in R: x>۱\}$ و $B=\{x\in R: x\le ۴\}$، آنگاه مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ برابر کدام گزینه است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $R-(۱,۴]$ ۲) $R-[۱,۴)$ ۳) $R-[۱,۴]$ ۴) $R-(۱,۴)$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۱- کدام مجموعه‌ی زیر متناهی است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)

۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح نابیشتر از ۱−
۲) مجموعه‌ی اعداد اعشاری بین ۰/۴ و ۰/۷
۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح ۱۷ رقمی
۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح مکعب کامل و کوچکتر از ۱۰۰۰

۲۲- کدام مجموعه‌ی زیر متناهی نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)

۱) مجموعه‌ی اعداد اول زوج
۲) مجموعه‌ی گربه‌های کره‌ی زمین
۳) مجموعه‌ی تمام خطوط گذرنده از مبدأ مختصات
۴) مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴

۲۳- کدام مجموعه‌ی زیر نامتناهی نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)

۱) مجموعه‌ی خطوط مماس بر یک دایره
۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین دو عدد گویا
۳) بازه‌ی $(۰,۴)$
۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت که با معکوس خود برابرند.

۲۴- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (N مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.) (آزمون کانون -۷ آذر ۹۳)

۱) $A_۱=\{x\mid x\in N, x^۲>۲۵\}$
۲) $A_۲=\{x\mid$ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ $x\}$
۳) $A_۳=\{x\in N\mid x>۹, x<۱۰۰\}$
۴) $A_۴=\{x\mid$ عدد حقیقی کوچک‌تر از ۱۰۰ $x\}$

۲۵- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (آزمون کانون - ۵ دی ۹۳)

۱) $\{x\in N\mid x^۲<۱۰۰۰\}$ ۲) $\{x\in Q\mid \frac{۱}{۲}<x<۱\}$ ۳) $\{x\in N\mid x>۵۳\}$ ۴) $\{x\in Z\mid -x\in N\}$

۲۶- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای متناهی را نشان می‌دهد؟ (آزمون کانون - ۲۳ آذر ۹۲)

۱) $A=\{x^۲\mid x\in R, x\le ۵\}$
۲) $B=\{۲x\mid x\in N, ۱-x<۳\}$
۳) $C=\{x^۳\mid x\in N, x\le ۱۰\}$
۴) $D=\{۱-x\mid x\in Z, x<۴\}$

۲۷- اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟ (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-(A\cup B)$

۲۸- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $A\cap B$ ۲) $B-A$ ۳) $A-B$ ۴) $(A-B)-A$

۲۹- اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، در این صورت: (آزمون کانون- ۹۰)

۱) $A\cup B$ نامتناهی است. ۲) $A\cap B$ نامتناهی است. ۳) $A-B$ نامتناهی است. ۴) $B-A$ متناهی است.

۳۰- اگر A و B دو مجموعه‌ی نامتناهی باشند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی این دو مجموعه نادرست است؟ (آزمون کانون - ۲۱ آذر ۹۳)

۱) مجموعه‌ی $A\cap B$ ممکن است نامتناهی باشد.
۲) مجموعه‌ی $A\cup B$ لزوماً نامتناهی است.
۳) مجموعه‌ی $A\cap B$ ممکن است متناهی باشد.
۴) مجموعه‌ی $A-B$ لزوماً نامتناهی است.

۳۱- کدام گزینه در حالت کلی درست نیست؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۶)

۱) اگر مجموعه‌ای دارای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه نامتناهی است.
۲) اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.
۳) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.
۴) اگر حداقل یکی از دو مجموعه، نامتناهی باشد، اجتماع آنها مجموعه‌ای نامتناهی است.

۳۲- اگر $A\subset B$ و A، مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $B-A$ چگونه است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴)

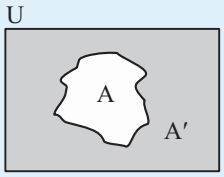
۱) متناهی است.
۲) نامتناهی است.
۳) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.
۴) تهی است.

۲. متمم یک مجموعه

◆ مجموعه‌ی مرجع ◆

مجموعه‌ی مرجع: به‌طور کلی، در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع یا مجموعه‌ی جهانی می‌نامیم و با M یا U نمایش می‌دهیم. به مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اصلی یا عام نیز گفته می‌شود.

متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' (یا A^C) نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل همه‌ی عضوهایی از U است که در A نیستند.



■ مثال: اگر $U=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعه‌ی مرجع و $A=\{a,c,e\}$ باشد، از آنجایی که b و d متعلق به مجموعه‌ی A نیستند، پس $A'=\{b,d\}$.

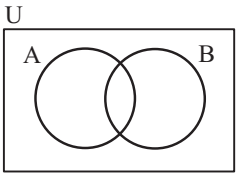
■ مثال: اگر W را به‌عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی یعنی N'، مجموعه‌ی $\{0\}$ است.

تذکر ◄ با توجه به تعریف، $\varnothing'=U$ و $U'=\varnothing$.

تذکر ◄ اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ باشد، آنگاه:

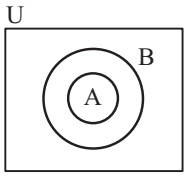
(۱) $U-A=A'$ (۲) $A \cap A'=\varnothing$
(۳) $A-A'=A$ (۴) $A \cup A'=U$

قوانین متمم مجموعه: اگر A و B دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آنگاه قوانین زیر برقرارند:



(۱) $(A')'=A$
(۲) $(A \cap B)'=A' \cup B'$
(۳) $(A \cup B)'=A' \cap B'$
(۴) $A-B=A \cap B'$
(۵) $A \subset (A \cup B)$
(۶) $(A \cap B) \subset A$
(۷) $(A-B) \cap (B-A)=\varnothing$

تذکر ◄ اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه:



(۱) $B' \subset A'$
(۲) $A-B=\varnothing$
(۳) $A \cap B=A$
(۴) $A \cup B=B$

◆ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ◆

۱ دو مجموعه‌ی جدا از هم: اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامند. بنابراین در دو مجموعه‌ی جدا از هم خواهیم داشت:

(۱) $(A \cap B)=\varnothing$
(۲) $A-B=A$
(۳) $B-A=B$
(۴) $A \subset B'$
(۵) $B \subset A'$

تذکر ◄ دو مجموعه‌ی $A-B$ و $B-A$ همواره جدا از هم‌اند.

۲ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه: فرض کنید A و B دو زیرمجموعه‌ی دلخواه متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی U هستند. اگر $n(A)$ و $n(B)$ به‌ترتیب تعداد اعضای مجموعه‌های A و B باشند، آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را با $n(A \cup B)$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

در این فرمول، $n(A \cap B)$ تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه است.

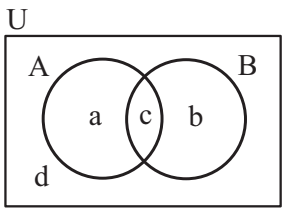
تذکر ◄ اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه $n(A \cap B)=0$ و در نتیجه $n(A \cup B)=n(A)+n(B)$.

■ **مثال:** در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۰ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۵ نفر، هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند. چند نفر در این کلاس، فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند؟

◀ **حل:** اگر مجموعه‌ی A را دانش‌آموزان فوتبالیست و مجموعه‌ی B را دانش‌آموزان والیبالیست در نظر بگیریم، آنگاه:

$$n(A)=۱۵ \text{ و } n(B)=۱۰ \text{ و } n(A\cap B)=۵ \Rightarrow n(A\cup B)=۱۵+۱۰-۵=۲۰ \text{ نفر}$$

تذکر ◀ در مسائل این بخش، با استفاده از نمودار وِن و کامل کردن آن، می‌توان مجهول خواسته شده را یافت. تعداد اعضای مجموعه‌های این نمودار با چهار عدد ثابت a، b، c و d کامل می‌شود. که در آن:



$c=$ تعداد همه‌ی عضوهایی که شامل هر دو مجموعه‌ی A و B هستند.

$a+c=$ تعداد عضوهای مجموعه‌ی A

$b+c=$ تعداد عضوهای مجموعه‌ی B

$a+c+b=$ تعداد عضوهایی که شامل مجموعه‌ی A یا B هستند.

$a=$ تعداد عضوهایی که فقط شامل مجموعه‌ی A هستند.

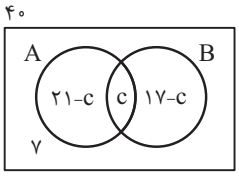
$b=$ تعداد عضوهایی که فقط شامل مجموعه‌ی B هستند.

$d=$ تعداد عضوهایی که شامل مجموعه‌ی A یا B نیستند.

برای رسم نمودار وِن (یافتن اعداد a، b، c و d)، از c شروع می‌کنیم. (اگر c معلوم باشد، آن را قرار می‌دهیم و اگر مجهول باشد، برحسب مجهول c قرار می‌دهیم)، سپس مقادیر a و b و در انتها d را یافته و جدول را کامل می‌کنیم.

■ **مثال:** در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۷ نفر عضو گروه سرود، ۲۱ نفر عضو گروه تئاتر و ۷ نفر عضو هیچ گروهی نیستند. چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس، عضو هر دو گروه هستند؟ چند نفر فقط عضو گروه سرود هستند؟

◀ **حل:** نمودار وِن را رسم می‌کنیم. تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند را c در نظر می‌گیریم که مجهول است، پس مسأله را با c ادامه می‌دهیم؛ بنابراین نمودار به‌صورت مقابل است.



$$۴۰=(۲۱-c)+c+(۱۷-c)+۷$$

$$\Rightarrow ۴۰=۴۵-c \Rightarrow c=۵$$

پس ۵ نفر عضو هر دو گروه هستند. تعداد نفراتی که فقط عضو گروه سرود هستند $۱۷-۵=۱۲$ نفرند.

مجموعه‌ی مرجع

۳۳- اگر Z را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' کدام مجموعه‌ی زیر است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۵)

۱) مجموعه‌ی اعداد حسابی
۲) مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی
۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت
۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت

۳۴- مجموعه‌ی U، مجموعه‌ی مرجع و $A\subset U$، کدام مجموعه با A برابر است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴)

۱) $A'\cup U$ ۲) $(A\cup\varnothing)\cup U$ ۳) $(A\cap\varnothing)\cup A'$ ۴) $(A'\cap\varnothing)\cup A$

۳۵- مجموعه‌های A و B در مجموعه‌ی مرجع U داده شده‌اند. اگر $A\subset B$ باشد، آنگاه:

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $A=B$ ۲) $A\in B$ ۳) $A'\subset B'$ ۴) $B'\subset A'$

۳۶- اگر N مجموعه‌ی مرجع و $A\subset N$ باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۲)

۱) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه A' نامتناهی است.
۲) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه A' متناهی است.
۳) اگر A متناهی باشد، آنگاه A' متناهی است.
۴) اگر A متناهی باشد، آنگاه A' نامتناهی است.

۳۷- اگر $A\subset B$ و U مجموعه‌ی مرجع آن‌ها باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶)

۱) $A'\cup B'=U$ ۲) $A\cup B=U$ ۳) $A'\cup B=U$ ۴) $A\cap B=B$

۳۸- اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، مجموعه‌ی $A'-B$ برابر کدام مجموعه‌ی زیر است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶)

۱) $A-B'$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A'\cap B$ ۴) $B'-A$

۳۹- اگر $U=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$، $A=\{۴,۵\}$ و $B=\{۵,۶\}$، آنگاه مجموعه‌ی $A'\cap B'$ چند عضو دارد؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۶)

۱) ۲ عضو ۲) ۳ عضو ۳) ۱ عضو ۴) تهی است.

۴۰- اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A=\{۴,۵,۶\}$ و $B'=\{۱,۲,۳,۴\}$، آنگاه مجموعه‌ی $A-B$ چند عضو دارد؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۶)

۱) ۱ عضو ۲) ۲ عضو ۳) ۳ عضو ۴) ۴ عضو

۴۱- اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $A=\{n\in N\,|\,n>۷\}$ و $B=\{۵,۶,۸\}$، آنگاه مجموعه‌ی $A'\cup B$، یک مجموعه‌ی ..... است.

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶)

۱) ۶ عضوی ۲) ۷ عضوی ۳) ۸ عضوی ۴) ۹ عضوی

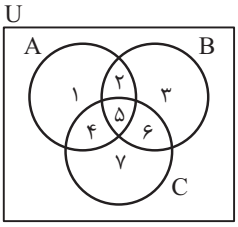
۴۲- اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد، $A'=\{۵,۶,۷,۸\}$ و $B'=\{۷,۸,۹,۱۰\}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $(A\cup B)'$ چندعضوی است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶)

۱) ۲ عضوی ۲) ۵ عضوی ۳) ۷ عضوی ۴) ۸ عضوی

۴۳- در شکل زیر حاصل $(A\cap B')\cup(B\cap C)$ کدام است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶)



۱) $\{۱,۶\}$
۲) $\{۱,۵,۶\}$
۳) $\{۱,۴,۵,۶\}$
۴) $\{۱,۲,۴,۵,۶\}$

۴۴- اگر $A\cap B=\{a,b,c,d\}$ و $A\cap C=\{b,c,e,f\}$، آنگاه $A-(B-C)'$ کدام است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶)

۱) $\{a,c,e,f\}$ ۲) $\{a,d\}$ ۳) $\{e,f\}$ ۴) $\{b,d\}$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۴۵- اگر $E-F=E$ باشد، چه رابطه‌ای بین دو مجموعه‌ی ناتهی E و F، همواره برقرار است؟ (آزمون کانون -۲۲ آذر ۹۲)

۱) $E\subset F$ ۲) $F\subset E$ ۳) $E=F$ ۴) E و F دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند

۴۶- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند و U مجموعه‌ی مرجع آن‌ها باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با تمرین ۱)

۱) $A\subset B'$ ۲) $A\cap B'=A$ ۳) $A\cup B'=B$ ۴) $A\cap B=\varnothing$

۴۷- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم و U مجموعه‌ی مرجع باشد، در صورتی که $n(A)=۴$ و $n(B)=۹$، آنگاه $n(A\cup B)$ کدام است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با تمرین ۲)

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۳۶ ۴) ۹

۴۸- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U و $n(A)=۱۴$ و $n(A')=۱۰$ و $n(B')=۸$ باشند، آنگاه $n(B)$ کدام است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مشابه تمرین ۴)

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۴۹- اگر در یک گروه، ۲۰ نفر چای، ۱۲ نفر قهوه و ۵ نفر هم چای و هم قهوه نوشیده باشند، چند نفر در این گروه، چای یا قهوه یا هر دو را نوشیده‌اند؟ (آزمون کانون- ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۲۷ ۳) ۳۷ ۴) ۲۰

۵۰- در یک کلاس درس، ۱۹ نفر به تاریخ و ۱۴ نفر به جغرافی علاقه‌مندند و ۶ نفر به هر دو درس و ۵ نفر به هیچ‌کدام از این دو درس علاقه‌ای ندارند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵)

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۷ ۴) ۳۸

۵۱- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند و $n(A)=۱۴$، $n(A\cup B)=۲۵$ و $A\cap B\neq\varnothing$، تعداد اعضای مجموعه‌ی $A\cap B$ حداکثر چقدر است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۳)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۵۲- در یک گروه ۴۰ نفره‌ی دانش‌آموزی، ۲۵ نفر زبان انگلیسی، ۳۲ نفر زبان عربی و ۶ نفر هیچ‌کدام از این دو زبان را نمی‌خوانند. چه تعداد از دانش‌آموزان هر دو زبان را می‌خوانند؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰

۵۳- دهکده‌ای ۲۰۰ کشاورز دارد که هر کدام یا گندم می‌کارند یا جو و یا هر دو. در صورتی که ۱۹۰ نفر گندم و ۱۴۰ نفر جو بکارند، چند نفر فقط گندم می‌کارند؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مشابه تمرین ۵)

۱) ۶۰ نفر ۲) ۱۰ نفر ۳) ۱۳۰ نفر ۴) ۱۱۰ نفر

۵۴- اگر $n(A)=۱۸$ و $n(A\cap B)=۱۵$ باشد، مقدار $n(A\cap B')$ کدام است؟ (A و B زیرمجموعه‌ای از U هستند.) (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مشابه تمرین ۴)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۵۵- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند به‌طوری که مجموعه‌ی $B-A$، ۸ عضو و مجموعه‌ی $A\cup B$، ۱۰ عضو داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی A چند عضو دارد؟ (آزمون کانون- ۱۲ مهر ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

۵۶- مجموعه‌ی A، ۱۰ عضوی و مجموعه‌ی B، ۵ عضوی است. اگر مجموعه‌ی $A-(A\cap B)$، ۷ عضوی باشد، مجموعه‌ی $A\cup B$ چند عضو دارد؟ (آزمون کانون- ۹ آبان ۹۳)

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۵۷- اگر A و B، دو مجموعه و $n(A-B)=۱۲$ و $n(B-A)=۱۴$ و $n(A\cup B)=۳۱$ باشند، آنگاه $n(A)$ کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

۵۸- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید کدام است؟ (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

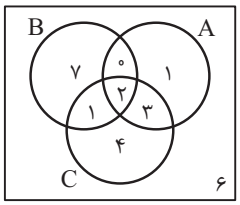
۵۹- مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟ (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۴)

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۶۰- احمد و اکبر دانش‌آموزان یک مدرسه‌اند و هر کدام دوستانی در مدرسه دارند. تعداد دانش‌آموزان مدرسه ۱۴۲ نفر و ۹۴ نفر از آنان نه دوست احمد هستند و نه دوست اکبر. اگر تعداد دوستان مشترک احمد و اکبر ۴ نفر باشند و احمد ۲۳ دوست داشته باشد، اکبر چند دوست دارد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶)

۱) ۱۹ ۲) ۴۸ ۳) ۲۹ ۴) ۲۷

۶۱- یک باشگاه ورزشی دارای سه وسیله‌ی A (دارت)، B (تنیس روی میز) و C (بیلیارد) است. نمودار زیر، تعداد اعضای این باشگاه را نمایش می‌دهد. چند نفر در این باشگاه از تنیس روی میز یا بیلیارد استفاده می‌کنند؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)



۱) ۱۴
۲) ۱۷
۳) ۱۵
۴) ۱۲

۶۲- در یک بررسی آماری در استفاده از گرامافون، نوار کاست و CD از ۹۰ نفر این نتایج به‌دست آمده است: ۱۲ نفر فقط از گرامافون و ۱۵ نفر فقط از نوار کاست و ۲۳ نفر فقط از CD، ۱۴ نفر از گرامافون و نوار کاست، ۱۹ نفر از نوار کاست و CD و ۱۸ نفر از گرامافون و CD و ۷ نفر از هیچ‌کدام استفاده نمی‌کنند. چند نفر از هر سه تا استفاده می‌کنند؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۱

۳. الگو و دنباله

- الگو
- الگوی خطی
- الگوهای غیر خطی

◆ الگو ◆

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده و یا ترکیبی از این دو باشد.

یافتن یک مدل یا الگوی ریاضی برای پدیده‌ها، طرح‌های هندسی یا آزمایش‌های متوالی، نیاز به سازماندهی و تنظیم اطلاعات دارد. استفاده از جدول در پیدا کردن یک مدل ریاضی کمک می‌نماید. در این سازماندهی، شکل‌ها را با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... ، n و ... . مقدار آنها را با $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... ، a_n و ... نمایش می‌دهیم. a_n را جمله‌ی nام یا جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم و به‌وسیله‌ی آن می‌توانیم کلیه‌ی جملات الگو را پیدا کنیم.

راهبرد حل: برای یافتن یک مدل ریاضی برای طرح داده شده، باید رابطه‌ای بین شماره‌ی هر مرحله (اندیس جمله) و مقدار آن (مقدار جمله) بیابیم که این رابطه در تمامی مراحل (شکل‌ها) ثابت است. این رابطه جمله‌ی عمومی الگو است.

■ مثال: جدول زیر، رابطه‌ی بین شماره‌ی هر جمله و مقدار آن را نمایش می‌دهد. جمله‌ی پنجم و جمله‌ی عمومی این الگو را بیابید. آیا جمله‌ای وجود دارد که مقدار آن، ۱۸۱ باشد؟

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	۴	...
مقدار جمله	۴	۷	۱۰	۱۳	...

◀ حل:

$$\underset{\downarrow}{a_۱} \quad \underset{\downarrow}{a_۲} \quad \underset{\downarrow}{a_۳} \quad \underset{\downarrow}{a_۴}$$

$$۴ = ۱\times۳+۱ \qquad ۷ = ۲\times۳+۱ \qquad ۱۰ = ۳\times۳+۱ \qquad ۱۳ = ۴\times۳+۱$$

می‌بینیم که با اضافه شدن عدد ۳ به هر جمله، جمله‌ی بعدی به‌دست می‌آید. پس جمله‌ی پنجم $۱۳+۳=۱۶$ است. برای یافتن جمله‌ی عمومی، با توجه به الگوی بالا داریم:

مقدار هر جمله = ۳ (شماره‌ی جمله) + ۱ $\Rightarrow a_n = ۳n+۱$ (جمله‌ی عمومی)

برای آنکه ببینیم آیا جمله‌ای وجود دارد که مقدار آن ۱۸۱ باشد، کافی است معادله‌ی $a_n = ۱۸۱$ را حل کنیم.

$$۱۸۱ = ۳n+۱ \Rightarrow ۳n = ۱۸۰ \Rightarrow n = ۶۰$$

پس جمله‌ی شصتم این الگو، برابر ۱۸۱ است.

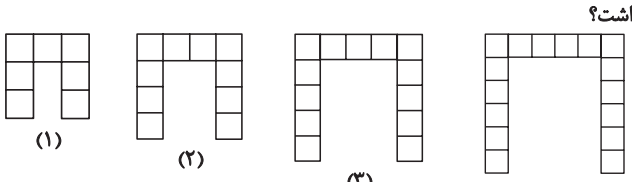
◆ الگوی خطی ◆

اگر جمله‌ی عمومی یک الگو به‌صورت $t_n = an+b$ باشد (a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت)، آن الگو را خطی می‌نامیم. در الگوی خطی، میزان تغییر جملات متوالی برابر ضریب n، یعنی عدد a است. به عبارت دیگر یک الگوی خطی، نقاطی به مختصات $(n\ ,\ t_n)$ بر روی خط $y = ax+b$ هستند. در این حالت، میزان تغییر جملات، به ازای تغییرات n، شیب خط، یعنی عدد a است.

■ مثال: آیا اعداد ... , ۱۷ , ۱۲ , ۷ , ۲، یک الگوی خطی را نمایش می‌دهند؟

◀ حل: اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، مقدار ثابت ۵ است، پس الگوی داده شده خطی است. $۷-۲ = ۱۲-۷ = ۱۷-۱۲ = ۵$

■ مثال: مطابق الگوی زیر، چند مربع در مرحله‌ی پانزدهم خواهیم داشت؟



(۱) (۲) (۳) (۴) و ...

◀ حل: ابتدا داده‌ها را سازماندهی می‌کنیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
مقدار جمله (تعداد مربع‌ها)	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...
اختلاف جملات	۳	۳	۳		

چون اختلاف جملات متوالی، عدد ۳ است، الگو خطی است و در آن $a = ۳$ جمله‌ی اول ۷ است، پس $b = ۴$ و جمله‌ی عمومی به صورت زیر است:

$$t_n = ۳n+۴$$

در مرحله‌ی پانزدهم $t_{۱۵} = ۳\times۱۵+۴ = ۴۹$ است، پس در مرحله‌ی پانزدهم، ۴۹ مربع داریم.

◆ الگوهای غیرخطی ◆

الگوهایی وجود دارند که خطی نیستند، یعنی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آنها، مقدار ثابتی نیست. معروف‌ترین این الگوها، الگوهای مربعی، مثلثی و الگوهای درجه‌ی دوم هستند.

■ **مثال:** در جدول مقابل، مطابق الگوی داده شده، جمله‌ی ششم را بیابید.

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	۴	...
مقدار جمله	۱	۴	۹	۱۶	...

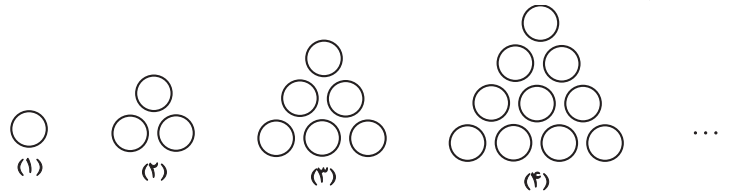
◀ **حل:** با کمی دقت می‌بینیم که مقدار هر جمله، مربع شماره‌ی همان جمله است، یعنی:

الگوی مربعی $a_n = n^2 \Rightarrow$ (مقدار هر جمله) $= (\text{شماره‌ی جمله})^2$

$a_1 \downarrow 1^2 \quad a_2 \downarrow 2^2 \quad a_3 \downarrow 3^2 \quad a_4 \downarrow 4^2 \quad \dots$

بنابراین در جمله‌ی ششم، مقدار جمله، $6^2 = 36$ است.

■ **مثال:** برای الگوی زیر، یک مدل ریاضی ارائه دهید. شکل هفتم از چند دایره تشکیل شده است؟



◀ **حل:** جملات این الگو را به‌صورت زیر تنظیم می‌کنیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد دایره‌ها	۱	$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3+4$	...	$1+2+3+...+n$

$\Rightarrow$

بنابراین:

$$\Rightarrow a_n = 1+2+3+...+n$$

پس در شکل هفتم $a_7 = 1+2+3+4+5+6+7$، بنابراین $a_7 = 28$.

تذکر ◀ هر الگویی که هر جمله‌ی آن، مساوی مجموع شماره‌ی همان جمله و اعداد طبیعی قبل از آن باشد را یک الگوی مثلثی می‌نامیم و جمله‌ی عمومی آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تذکر ◀ هر الگو با مدل ریاضی $t_n = an^2 + bn + c$ را یک الگوی درجه‌ی دوم می‌نامیم. در الگوهای درجه‌ی دوم، اختلاف جملات متوالی، خود یک الگوی خطی را تشکیل می‌دهند.

■ **مثال:** آیا الگوی ... , ۲۰ , ۱۲ , ۶ , ۲ , ۰، یک الگوی درجه‌ی دوم را نمایش می‌دهد؟

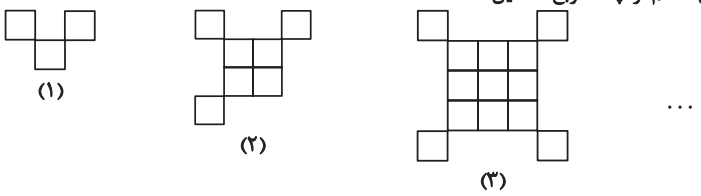
◀ **حل:** چون اختلاف جملات، خود یک الگوی خطی را تشکیل می‌دهند، پس الگوی داده شده، مربوط به یک الگوی درجه‌ی دوم است.

۰ , ۲ , ۶ , ۱۲ , ۲۰ , ...

۲ ۴ ۶ ۸ ...

۲ ۲ ۲

■ **مثال:** برای شکل زیر، یک الگوی ریاضی ارائه دهید. شکل ششم از چند مربع تشکیل شده است؟



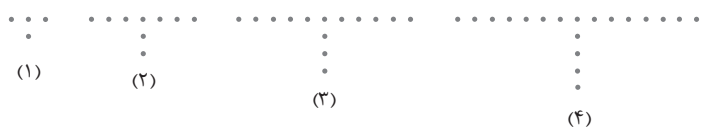
◀ **حل:** با کمی دقت می‌بینیم که تعداد مربع‌ها در وسط، مربع شماره‌ی جمله و در گوشه‌ها، یک واحد از شماره‌ی جمله بیشتر است، لذا:

مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد مربع‌ها	1^2+2	2^2+3	3^2+4	...	n^2+n+1

لذا جمله‌ی عمومی الگو $a_n = n^2+n+1$ است و در شکل ششم $a_6 = 6^2+6+1 = 43$ مربع داریم.

الگوی خطی

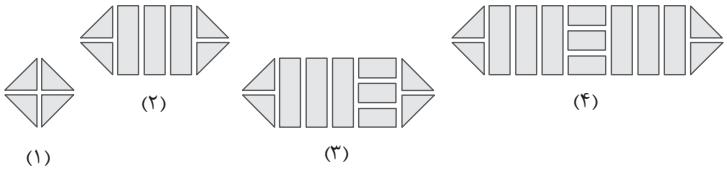
۶۳– در شکل مقابل تعداد نقطه‌ها در طرح هفتم کدام است؟ (کتاب درسی – صفحه‌ی ۱۵ – فعالیت – مشابه تمرین ۱)



۱) ۲۵ ۲) ۲۶

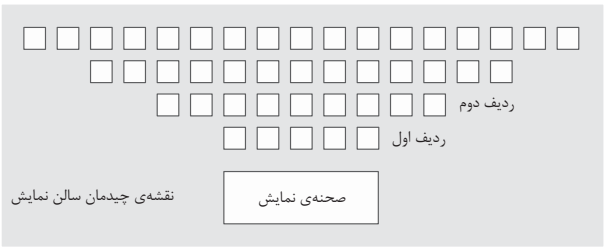
۳) ۳۴ ۴) ۳۷

۶۴- در شکل مقابل، تعداد قطعه‌ها در طرح دهم برابر است با: (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه تمرین ۱)



۱) ۳۱
۲) ۳۷
۳) ۴۱
۴) ۴۷

۶۵- شکل زیر، یک سالن تئاتر را نمایش می‌دهد. با توجه به شکل، در ردیف دهم چند صندلی داریم؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه تمرین ۱)

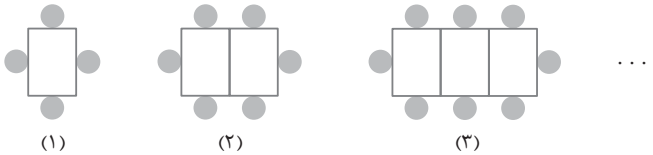


۱) ۲۷
۲) ۳۶
۳) ۴۱
۴) ۵۰

۶۶- شکل زیر، چوب‌کبریت‌های استفاده شده در هر مرحله‌ی طرح را نمایش می‌دهد. در کدام مرحله‌ی طرح، تعداد چوب‌کبریت‌های استفاده شده ۲۴۵ خواهد بود؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه تمرین ۱)

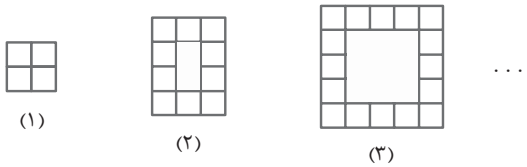
۱) ۳۸
۲) ۴۸
۳) ۳۴
۴) ۴۴

۶۷- در شکل زیر، مدلی از میز و صندلی‌ها رسم شده است، فرمول مناسب برای تعداد صندلی‌ها در هر مرحله کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه تمرین ۱)



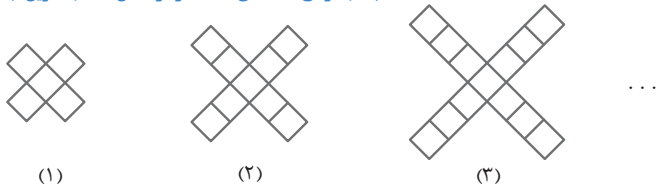
۱) $a_n = n + 3$
۲) $a_n = 2n + 2$
۳) $a_n = 4n^2$
۴) $a_n = 4n + 2$

۶۸- با توجه به شکل زیر، در پایان دور هفتم چند مربع کوچک خواهیم داشت؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)



۱) ۴۰
۲) ۳۶
۳) ۶۴
۴) ۵۰

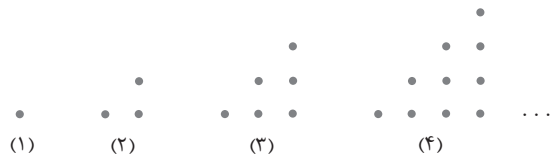
۶۹- برای ساختن حرف x الگوی زیر را داریم. با توجه به این الگو، دهمین شکل، دارای چند مربع است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)



۱) ۳۹
۲) ۴۰
۳) ۴۱
۴) ۴۲

الگوهای غیرخطی

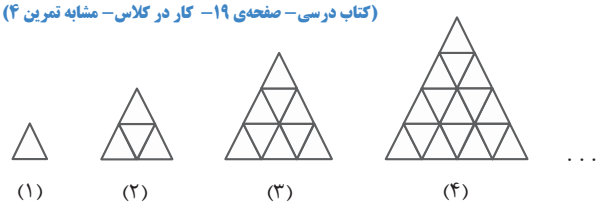
۷۰- در طرح مقابل، تعداد نقطه‌ها در مرحله‌ی هشتم، چند تا است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۴)



۱) ۳۶
۲) ۴۴
۳) ۵۸
۴) ۲۹

۷۱- مطابق شکل مقابل، در طرح هفتم، چند مثلث کوچک داریم؟

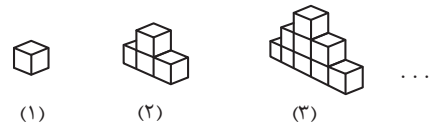
(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۴)



۱) ۲۷
۲) ۳۵
۳) ۴۹
۴) ۳۶

۷۲- با توجه به الگوی مقابل، در طرح ششم چند مکعب داریم؟

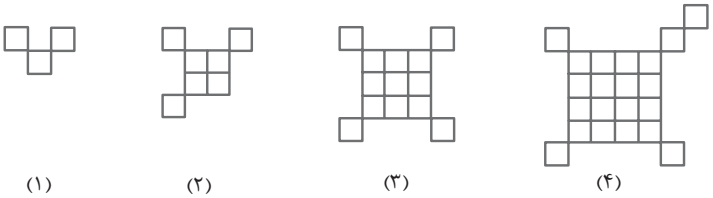
(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۴)



۱) ۲۴
۲) ۳۸
۳) ۳۶
۴) ۲۶

۷۳- در الگوی مقابل، شکل شماره‌ی ۹ چند مربع کوچک دارد؟

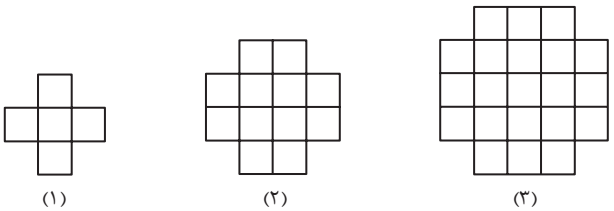
(کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۰- مرتبط با تمرین ۲)



۱) ۹۱
۲) ۸۷
۳) ۸۳
۴) ۷۹

۷۴- در الگوی مقابل، شکل ششم از چند مربع کوچک تشکیل شده است؟

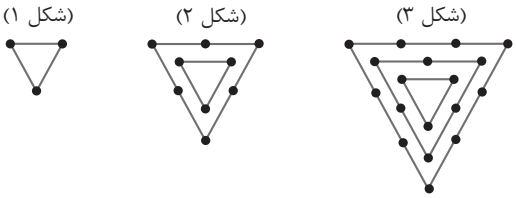
(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۸- مشابه فعالیت تمرین ۴)



۱) ۶۴
۲) ۶۰
۳) ۵۶
۴) ۵۴

۷۵- با توجه به الگوی زیر، شکل ششم از چند نقطه تشکیل شده است؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۴)



۱) ۳۲
۲) ۴۳
۳) ۵۳
۴) ۶۳

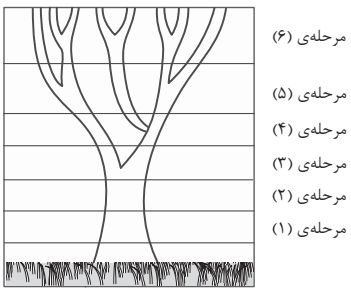
۷۶- درخت نسبت‌های خویشاوندی (شجره‌نامه) برای یک خانواده به صورت زیر است. مرحله‌ی دوازدهم چند نفرند؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۱۰۲۴
۲) ۵۷۶
۳) ۴۰۹۶
۴) ۵۱۲

۷۷- در درخت شکل مقابل، تعداد شاخه‌ها در مراحل مختلف داده شده است، با توجه به آن، در مرحله‌ی هشتم چند شاخه‌ی درخت داریم؟

(کتاب درسی- صفحه‌ی ۲۰- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲)



۱) ۲۱
۲) ۳۴
۳) ۳۵
۴) ۲۲

۳. الگو و دنباله

دنباله

تعریف دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. دنباله‌ها را به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$$

که در آن a_1 جمله‌ی اول، a_2 جمله‌ی دوم و به همین ترتیب a_n جمله‌ی nام یا جمله‌ی عمومی نامیده می‌شود.

تذکر ◄ اگر جملات از الگوی مشخصی پیروی کنند یا جمله‌ی عمومی دنباله در اختیار باشد، می‌توانیم مقدار هر جمله را بیابیم.

■ مثال: جمله‌ی عمومی دو دنباله به‌صورت $a_n = 2n^2 - n$ و $b_n = (-1)^n n$ داده شده است. چهار جمله‌ی اول هر یک از آنها را یافته و هر دنباله را بنویسید.

◄ حل: از آنجایی که $a_n = 2n^2 - n$، پس $a_1 = 2(1)^2 - 1 = 1$ و $a_2 = 2(2)^2 - 2 = 6$ و $a_3 = 2(3)^2 - 3 = 15$ و $a_4 = 2(4)^2 - 4 = 28$،

پس دنباله به صورت مقابل است: $1 , 6 , 15 , 28 , \dots , 2n^2 - n , \dots$

هم‌چنین در دنباله با جمله‌ی عمومی $b_n = (-1)^n n$، داریم $b_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$ ، $b_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ ، $b_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$

و $b_4 = (-1)^4 \times 4 = 4$، پس: $-1 , 2 , -3 , 4 , \dots , (-1)^n n , \dots$

■ مثال: چندمین جمله از یک دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ برابر ۹۶ است؟

◄ حل: باید شماره‌ی جمله‌ای را بیابیم که مقدار آن برابر ۹۶ شود، لذا:

$$96 = 3 \times 2^{n-1} \Rightarrow 32 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^5 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

پس جمله‌ی ششم برابر ۹۶ است.

تذکر ◄ هر دنباله به‌شکل $t_n = an^2 + bn + c$ را یک دنباله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم.

■ مثال: دنباله‌ی $\dots , 12 , 6 , 2 , 0$ یک دنباله‌ی درجه‌ی دوم است. جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

◄ حل: $t_1 = 0$ و $t_2 = 2$ و $t_3 = 6$ و جمله‌ی عمومی را $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$t_1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow 2 = 4a + 2b \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ 9a + 3b = 6 \end{cases}$$
$$t_3 = 6 \Rightarrow 6 = 9a + 3b \Rightarrow$$

با حل دستگاه $a = 1$ و $b = -1$ و در نتیجه جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت $t_n = n^2 - n$ است.

تذکر ◄ با در اختیار داشتن جملات یک دنباله، در اغلب موارد می‌توانیم با یافتن رابطه‌ای بین هر دو جمله‌ی متوالی، جمله‌ی عمومی دنباله و جملات دیگر دنباله را بیابیم.

■ مثال: یک جمله‌ی عمومی برای دنباله‌ی $\dots , -27 , 16 , -9 , 4 , -1$ بیابید.

◄ حل: با کمی دقت می‌بینیم که جملات ردیف فرد همگی منفی و جملات ردیف زوج همگی مثبت‌اند و از نظر قدر مطلقی، مقدار هر جمله برابر مربع شماره‌ی آن جمله‌ی است، پس جمله‌ی عمومی به‌صورت $a_n = (-1)^n n^2$ می‌تواند باشد.

تذکر ◄ در بعضی از موارد، هر جمله با دو جمله‌ی قبل از خود رابطه‌ی معینی دارد.

■ مثال: در دنباله‌ی $\dots , 13 , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1$، جملات هشتم و نهم را بیابید.

◄ حل: با کمی دقت می‌بینیم که از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله برابر مجموع دو جمله‌ی قبل از خود است، پس جمله‌ی هشتم $8 + 13 = 21$ و جمله‌ی نهم $13 + 21 = 34$ است.

۷۸- مجموع جمله‌های اول، سوم و پنجم دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = n^2 + 1$ کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۷۹- مجموع ۴۸ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) -۶ ۴) -۵

۸۰- حاصلضرب شش جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} . \frac{n}{n+1}$ کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲)

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{-1}{7}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{-1}{8}$

۸۱- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = bn^2 + cn$ است. اگر جملات اول و دوم این دنباله به‌ترتیب برابر ۳ و ۸ باشند، جمله‌ی دهم آن کدام است؟ (آزمون کانون-۲۲ آذر ۹۲)

۱) ۴۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۰

۸۲- اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله، به‌صورت $a_n = 2(-2)^{n+1}$ باشد، جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۱۲۸ است؟ (آزمون کانون- ۹ آبان ۹۳)

۱) چهارم ۲) پنجم ۳) هفتم ۴) هشتم

۸۳- چند جمله از دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = 3n - 13$، منفی است؟ (آزمون کانون - ۲۵ آبان ۹۳)

۱) سه جمله ۲) چهار جمله ۳) دو جمله ۴) بی‌شمار

۸۴- در دنباله‌ی $\ldots, 8, 5, 3, 2, 1, 1$، مجموع جملات هشتم و نهم کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس-مشابه تمرین ۳)

۱) ۴۷ ۲) ۵۵ ۳) ۳۴ ۴) ۷۰

۸۵- در دنباله‌ی $\ldots, 5, 1, 4, 1, 3$، مجموع جملات یازدهم و دوازدهم کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس-مشابه تمرین ۳)

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۱۵

۸۶- در دنباله‌ی $\ldots, 35, 22, 12, 5, 1$، جمله‌ی سی‌ام چه عددی است؟ (آزمون کانون- ۲۲ فروردین ۹۲)

۱) ۱۳۳۵ ۲) ۱۳۳۴ ۳) ۱۳۳۶ ۴) ۱۳۳۷

۸۷- اگر $A_n = [1, 1+\frac{1}{n})$، آن‌گاه $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ کدام است؟ (کتاب درسی- ترکیبی بازه و دنباله)

۱) $[1, 2)$ ۲) $[1, \frac{3}{2})$ ۳) $[1, \frac{4}{3})$ ۴) $\varnothing$

۸۸- اگر $A_n = [1, 1+\frac{1}{n})$، آن‌گاه $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ کدام است؟ (کتاب درسی- ترکیبی بازه و دنباله)

۱) $[1, 2)$ ۲) $[1, \frac{3}{2})$ ۳) $[1, \frac{4}{3})$ ۴) $\varnothing$

۸۹- اگر $A_i = [-\frac{i}{2}, \frac{8-i}{3}]$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $A_4 - A_2$ کدام است؟ (آزمون کانون- ۶ آذر ۹۴)

۱) $[-2,-1] \cup [\frac{4}{3}, 2]$ ۲) $[-2,-1) \cup (\frac{4}{3}, 2]$ ۳) $[-2,-1)$ ۴) $[-2,-1]$

۹۰- در دنباله‌ی $\ldots, -6, 5, -4, 3, -2, 1$، با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \times n$، مجموع ۲۰۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹ - کار درکلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) -۱ ۲) -۱۰۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱

۹۱- اگر چند جمله‌ی اول یک دنباله به‌صورت $\ldots, -32, 16, -8, 4, -2$ باشد، جمله‌ی عمومی آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹ - کار درکلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $a_n = (-1)^{n+1}$ ۲) $a_n = (-2)^n$ ۳) $a_n = (-1)^{n+1} 2^n$ ۴) $a_n = (-1)^{n+1} 2^{n+1}$

۹۲- اگر چند جمله‌ی اول یک دنباله به‌صورت $\ldots, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ باشد، جمله‌ی عمومی آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹ - کار درکلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $a_n = \frac{2n-1}{n}$ ۲) $a_n = \frac{2n+1}{n}$ ۳) $a_n = \frac{2n+1}{2n}$ ۴) $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

۹۳- از بین گزینه‌های زیر، کدام جمله‌ی عمومی نمی‌تواند مربوط به جملات نوشته شده از دنباله‌ی داده شده باشد؟ (آزمون کانون- ۱۰ آبان ۹۲)

۱) $\ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 1$ ۲) $\ldots, \frac{-1}{2}+n, \ldots, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

۳) $\ldots, (-3)^n, \ldots, -27, 9, -3, 1$ ۴) $\ldots, 2^n - n^2, \ldots, -1, 0, 1$

۹۴- کدام گزینه، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\ldots, \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, 1, -2$ را نشان می‌دهد؟ (کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹ - کار درکلاس- مرتبط با تمرین ۳)

۱) $(-1)^n \times 2^{1-n}$ ۲) $(-1)^{n+1} \times 2^{2-n}$ ۳) $(-2)^n$ ۴) $(-1)^n \times 2^{2-n}$