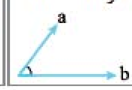
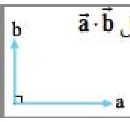
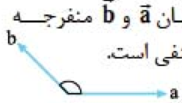
بخش سوم ضرب داخلی

ضرب داخلی دو بردار **a** و **b**، به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ معرفی می‌شود. حاصل آن عددی است که از ضرب اندازه‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در کسینوس زاویه‌ی بین آن‌ها به دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

به ضرب داخلی، ضرب «درونی»، «نرده‌ای»، «عددی»، «اسکالر» یا «نقطه‌ای»، هم می‌گویند. علامت ضرب داخلی، همان علامت $\cos\theta$ است. پس:

اگر زاویه‌ی بین دو بردار **a** و **b** حاده باشد، $\vec{a}\cdot\vec{b}$ عددی مثبت است.  $\vec{a}\cdot\vec{b}>۰$	اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ صفر است.  $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$	اگر زاویه‌ی میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه باشد، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ عددی منفی است.  $\vec{a}\cdot\vec{b}<۰$

پس شرط عمودبودن دو بردار a و b این است که $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ باشد.

در واقع، با داشتن حاصل‌ضرب داخلی و طول دو بردار، می‌توانیم زاویه‌ی بین آن‌ها را حساب کنیم:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

خواص ضرب داخلی

۱ **ضرب داخلی بردار در خودش می‌شود مربع اندازه‌ی آن:**

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^۲}$$

پس:

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=\overrightarrow{e_a}\cdot\overrightarrow{e_a}=۱}$$

۲ **ضرب داخلی، جابه‌جایی دارد یعنی** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

۳ **ضرب داخلی نسبت به جمع و تفریق توزیع می‌شود و قابل فاکتورگیری است:**

$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{c}}$$

۴ **اگر بردارها دارای ضریب عددی باشند، عددها در هم ضرب و بردارها در هم ضرب داخلی می‌شوند:**

$$\boxed{r\vec{a}\cdot s\vec{b}=(rs)\ (\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

۵ **اتحادهای توان دوم، برای ضرب داخلی بردارها برقرارند. فقط باید برای توان ۲ها، علامت اندازه قرار بدهیم و ضرب‌ها را به صورت ضرب داخلی بنویسیم:**

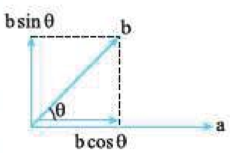
الف) $\boxed{|\vec{a}\pm\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲\pm ۲\vec{a}\cdot\vec{b}}$

ب) $\boxed{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}+۲\vec{a}\cdot\vec{c}+۲\vec{b}\cdot\vec{c}}$ ، ج) $\boxed{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲}$

تذکر مورد (الف) در واقع بیان قضیه‌ی کسینوس‌ها برحسب ضرب داخلی است.

بیان هندسی ضرب داخلی

اگر از فیزیک یادتان باشد، یک بردار را می‌توانیم به دو مؤلفه تجزیه کنیم. مثلاً در شکل روبه‌رو بردار **b** به دو مؤلفه‌ی موازی و عمود بر $\vec{a}$ تجزیه شده است:



حالا دوباره به تعریف $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نگاه کنید: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta$

این $|b|\cos\theta$ همان تصویر **b** روی **a** است. **پس در واقع $\vec{a}\cdot\vec{b}$ یعنی $\vec{a}$ را در تصویر $\vec{b}$ روی امتداد $\vec{a}$، ضرب کنیم.**

مثال **دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۳ و ۴ با هم زاویه‌ی ۶۰° دارند. حاصل $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\overrightarrow{۲a}+\overrightarrow{۳b})$ کدام است؟**

۱) -۳۰ ۲) -۱۸ ۳) -۲۴ ۴) -۳۶

پاسخ **گزینه‌ی «۳»** از پخشی (توزیع‌پذیری) استفاده کنیم:

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\overrightarrow{۲a}+\overrightarrow{۳b})=\underbrace{\vec{a}\cdot\overrightarrow{۲a}}_{۲|\vec{a}|^۲}-\underbrace{\vec{b}\cdot\overrightarrow{۲a}}_{-۲\vec{a}\cdot\vec{b}}+\underbrace{\vec{a}\cdot\overrightarrow{۳b}}_{+۳\vec{a}\cdot\vec{b}}-\underbrace{\vec{b}\cdot\overrightarrow{۳b}}_{-۳|\vec{b}|^۲}=۲|\vec{a}|^۲+\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{|a||b|\cos\theta}-۳|\vec{b}|^۲$$

$$=۲(۳)^۲+۳\times۴\times\cos۶۰^\circ-۳(۴)^۲=۱۸+(۱۲\times\frac{۱}{۲})-۴۸=-۲۴$$

مثال **اگر $|\vec{a}|=۴$، $|\vec{b}|=۵$ و $|\vec{a}+\vec{b}|=۶$، حاصل $|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۳ ۴) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۴۶}$

پاسخ **گزینه‌ی «۴»** از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow ۶^۲=۴^۲+۵^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow ۲\vec{a}\cdot\vec{b}=-۵$$

حالا در فرمول $|\vec{a}-\vec{b}|^۲$ قرار می‌دهیم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}\cdot\vec{b}=۴^۲+۵^۲-(-۵)=۴۶\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴۶}$$

اشاره کسینوس زاویه‌ی بین $\vec{b}$ و $\vec{a}$ می‌شود $\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-\frac{۵}{۲}}{۴\times۵}$ یعنی $-\frac{۱}{۸}$.

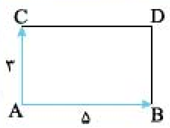
اشاره نتیجه‌ی این مثال را به خاطر می‌سپاریم:

$$\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲}$$

یعنی در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات طول قطرها با مجموع مربعات طول ۴ ضلع برابر است.

در این مسئله می‌توان طبق این فرمول نوشت $۶^۲+|a-b|^۲=۲(۴^۲+۵^۲)$ یعنی $|a-b|=\sqrt{۴۶}$.

مثال در مستطیل روبه‌رو حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ کدام است؟



۱) ۶۵　　۲) ۵۰
۳) ۴۰　　۴) ۲۵

پاسخ گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\text{۰ (چون بر هم عمودند)}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^{۲}=۵^{۲}=۲۵\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}})=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AB}|=۲۵\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=۲۵+۰+۲۵=۵۰$$

(تصویر $\overrightarrow{AD}$ روی $\overrightarrow{AB}$، همان $\overrightarrow{AB}$ است)

مثال اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{i}$ و اندازه‌ی بردارهای a، b و c به ترتیب ۲، ۳ و ۴ باشند، حاصل $\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}$ کدام است؟

۱) -۹　　۲) -۱۴　　۳) $-۹/۵$　　۴) $-۱۴/۵$

پاسخ گزینه‌ی «۲»　این عبارت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ را در اتحاد $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{۲}$ دیدیم. پس داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{۲}=|\vec{i}|^{۲}\Rightarrow \underbrace{|\vec{a}|^{۲}}_{۲^{۲}}+\underbrace{|\vec{b}|^{۲}}_{۳^{۲}}+\underbrace{|\vec{c}|^{۲}}_{۴^{۲}}+۲(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=۱\Rightarrow ۲۹+۲(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=۱\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-۱۴$$

مثال اگر $۴\vec{a}+۳\vec{b}+۲\vec{c}=\vec{O}$ و بردارهای a، b و c یکه باشند، مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۵}{۲۹}$　　۲) $-\frac{۷}{۱۲}$　　۳) $-\frac{۷}{۸}$　　۴) $-\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ گزینه‌ی «۳»　برای این‌که $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ساخته شود باید c را حذف کرد. پس $\vec{c}$ را می‌بریم به طرف راست و به توان ۲ می‌رسانیم.

$$۴\vec{a}+۳\vec{b}=-۲\vec{c}\Rightarrow |۴\vec{a}+۳\vec{b}|^{۲}=|-۲\vec{c}|^{۲}\Rightarrow ۱۶\underbrace{|\vec{a}|^{۲}}_{۱}+۹\underbrace{|\vec{b}|^{۲}}_{۱}+۲۴\vec{a}\cdot\vec{b}=۴\underbrace{|\vec{c}|^{۲}}_{۱}\Rightarrow ۲۴\vec{a}\cdot\vec{b}=-۲۱\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{۲۱}{۲۴}=-\frac{۷}{۸}$$

اشاره این $-\frac{۷}{۸}$ کسینوس زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم هست.

بیان ضرب داخلی بر حسب مؤلفه‌های بردارها، نامساوی کوشی ـ شوارتس

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ را می‌توانیم بر حسب مؤلفه‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم به دست آوریم:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)\\ \vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳}$$

پس این‌طوری شد:

$$\boxed{a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

حالا نامساوی کوشی ـ شوارتس را معرفی می‌کنیم. این نامساوی می‌گوید $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ البته از نظر برداری بدیهی است. (فقط کافی است دقت کنیم که $|\cos\theta|$ کم‌تر یا مساوی ۱ است.) اما وقتی آن را بر حسب مؤلفه‌ها بیان کنیم، به عبارتی بر حسب شش عدد حقیقی می‌رسیم که بدیهی نیست! ببینید:

$$|a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳|\le\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}\,\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲}$$

یا این‌طوری:

$$\boxed{(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲\le(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)}$$

حالا با این نامساوی چه‌کار کنیم؟ ماجرا این است که برای اثبات بعضی روابط یا پیداکردن حداقل و حداکثر برخی عبارت‌ها استفاده می‌شود.

مثلاً برای عبارتی مثل $a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲$ یک حداقل مقدار پیدا می‌شود یا برای $a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$ یک حداکثر معلوم خواهد شد.

مثال‌ها را ببینید:

مثال اگر $۲x+y-۲z=۶$ حداقل مقدار $x^۲+y^۲+۴z^۲$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) $\sqrt{۶}$　　۳) ۲　　۴) ۱۲

پاسخ گزینه‌ی «۱»　در این مسائل (یعنی وقتی یک عبارت به شکل $a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$ و عبارت دیگر به شکل $a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲$ داریم) قرار است از کوشی ـ شوارتس برویم. فقط کافی است دو بردار را معرفی کنیم. بردار اول، جذر مربع‌های کامل است:

$$\begin{array}{c}x^۲+y^۲+۴z^۲\\ \downarrow\;\;\downarrow\;\;\downarrow\\ \vec{a}=(x\,,\,y\,,\,۲z)\end{array}$$

بردار دوم، طوری انتخاب می‌شود که با ضرب داخلی، عبارت $2x+y-2z$ تولید شود: $\vec{b}=(\frac{2x}{x},\frac{y}{y},\frac{-2z}{2z})=(2,1,-1)$

حالا: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |\underbrace{2x+y-2z}_{6}|\le\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\sqrt{4+1+1} \Rightarrow 6\le\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\sqrt{6}$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 36\le(x^2+y^2+4z^2)\times 6 \Rightarrow x^2+y^2+4z^2\ge 6 \Rightarrow Min=6$$

توجه نامساوی کوشی ـ شوارتس، وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که $|\cos\theta|=1$ باشد، یعنی $\theta=0$ یا π و این هم یعنی دو بردار موازی (مضرب هم) باشند. این مثال فوق‌العاده را ببینید:

مثال اگر $x^2+4y^2+9z^2=20$ و مقدار $|4x+6y+3z|$ حداکثر باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

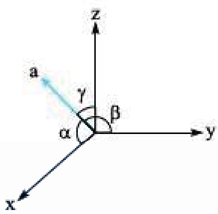
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ **گزینه‌ی «۴»** بردارها را معرفی کنیم: $x^2+4y^2+9z^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \vec{a}=(x,2y,3z) \xrightarrow{4x+6y+3z} \vec{b}=(4,3,1)$

پس طبق نامساوی کوشی ـ شوارتس داریم: $|\underbrace{(x,2y,3z)\cdot(4,3,1)}_{|4x+6y+3z|}|\le\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\sqrt{4^2+3^2+1^2}$

شرط رسیدن به مقدار حداکثر، این است که نامساوی به تساوی تبدیل شود. یعنی: $(x,2y,3z)\parallel(4,3,1) \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{1} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{8}{3}$

زوایای بردار با محورها



اگر تصاویر بردار $\vec{a}$ را داشته باشیم، می‌توانیم زوایای بردار a با محورها را حساب کنیم.

این زوایا با محور x ، y و z به ترتیب α ، β و γ نام دارند. مقدار آن‌ها هم بین ۰ تا ۱۸۰° است.

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}\ ,\ \cos\beta=\frac{a_2}{|a|}\ ,\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|a|}}$$

پس در واقع:

$$\boxed{e_a=\frac{1}{|a|}\vec{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)}$$

این کسینوس‌ها را «کسینوس‌های هادی بردار a» و زاویه‌های α ، β و γ را زوایای هادی می‌نامیم. به یاد دارید که اندازه‌ی بردار یکه برابر ۱ است پس:

$$|\vec{e_a}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1 \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

و اگر این شرط تأمین نشود، α ، β و γ زوایای یک بردار با محورها نیستند.

مثلاً برداری وجود ندارد که با هر سه محور زوایای ۶۰° بسازد چون $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}\ne 1$.

اشاره **در فاصله‌ی ۰ تا π ، هر چه $\cos x$ کم‌تر شود، مقدار زاویه‌ی x زیاد می‌شود. پس می‌توان گفت در میان زاویه‌های هادی، زاویه‌ای بیشتر است که مؤلفه‌ی آن کم‌تر باشد.**

مثلاً در بردار $\vec{a}=(2,1,-3)$ داریم: $a_1>a_2>a_3$. بنابراین $\alpha<\beta<\gamma$ و دقت کنیم که γ منفرجه است چون کسینوسش منفی می‌شود.

توجه شرط دیگری هم برای زوایای هادی داریم: جمع هر دوتا از آن‌ها باید بین ۹۰° و ۲۷۰° باشد یعنی:

$$\boxed{90\le\alpha+\gamma\le 270}\ ,\ \boxed{90\le\beta+\gamma\le 270}\ ,\ \boxed{90\le\alpha+\beta\le 270}$$

پس زوایای ۴۵°، ۳۵° و ۷۵° نمی‌توانند قبول باشند چون جمع اولی و دومی به ۹۰° نمی‌رسد. معمولاً از شرط $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ برای زوایای آشنا و از این شرط مجموع، برای زوایای غریبه (که کسینوس آن‌ها را بلد نیستیم) می‌رویم.

مثال برداری با محورهای مختصات زوایای 75°، 75° و α ساخته است. مقدار $\cos^2\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ گزینه‌ی «۳» قرار بود مجموع مربعات کسینوس‌های هادی ۱ باشد:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ=1 \Rightarrow \cos^2\alpha+\underbrace{2\cos^2 75^\circ-1}_{\text{این }\cos150^\circ\text{است}}=0$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha+(-\frac{\sqrt{3}}{2})=0 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

یادآوری $\cos2x=2\cos^2x-1$

مثال برداری به طول $3\sqrt{3}$ با محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد. طول تصویر آن بر محور y ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) ۶

پاسخ گزینه‌ی «۲» چون با محورها زاویه‌های مساوی ساخته است پس $\alpha=\beta=\gamma$ و در نتیجه $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$، بنابراین $a_1=a_2=a_3$. پس مؤلفه‌های a سه عدد مساوی‌اند و چون زاویه‌ی حاده داریم، کسینوس‌ها مثبت‌اند. **این یعنی $\vec{a}=(x,x,x)$ و x هم مثبت است.** بنابراین:

$$\vec{a}=(x,x,x) \Rightarrow |\vec{a}|=x\sqrt{3}=3\sqrt{3} \Rightarrow x=3 \Rightarrow \vec{a}=(3,3,3) \Rightarrow L_y=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

اشاره وقتی بردار a با سه محور، زوایای حاده‌ی مساوی بسازد داریم:

$$\boxed{\underset{x>0}{\vec{a}=(x,x,x)} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

هم‌چنین **اگر بردار a با سه محور زوایای منفرجه‌ی مساوی بسازد:**

$$\boxed{\underset{x<0}{\vec{a}=(x,x,x)} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\pi-\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

مثال بردار a با محورهای مختصات زوایای 31°، 59° و x می‌سازد. $\sin x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ باید داشته باشیم:

$$\cos^2x+\cos^2 59^\circ+\cos^2 31^\circ=1 \xrightarrow{\text{۵۹° و ۳۱° متممند.}} \cos^2x+\underbrace{\sin^2 31^\circ+\cos^2 31^\circ}_{1}=1 \Rightarrow \cos^2x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x=1$$

نتیجه‌ی این مثال را هم به خاطر بسپارید: اگر جمع دوتا از زوایا 90° یا 270° باشد، زاویه‌ی سوم حتماً قائمه است و بردار در صفحه‌ی آن دو محور قرار دارد.

مثال حاصل $\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma}$ کدام است؟ (α، β و γ زوایای بردار a با محورها هستند.)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -1

پاسخ گزینه‌ی «۳» بد نیست ببینید که:

$$\boxed{\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1} \quad , \quad \boxed{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2}$$

دلیلش را هم می‌بینیم:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)=3-\overbrace{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}^{1}=3-1=2$$

$$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=(2\cos^2\alpha-1)+(2\cos^2\beta-1)+(2\cos^2\gamma-1)=2\underbrace{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}_{1}-3=2-3=-1$$

مثال اگر α، β و γ زوایای بردار u با محورها باشند، حاصل $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma$ حداکثر چه‌قدر است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» برای $\vec{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ و $\vec{b}=(\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma)$، نامساوی کوشی شوارتس بزنیم:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma|\le\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

اما جمع مربعات سینوس‌ها برابر ۲ و جمع مربعات کسینوس‌ها برابر ۱ بود:

$$|\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin2\alpha}+\underbrace{\sin\beta\cos\beta}_{\frac{1}{2}\sin2\beta}+\underbrace{\sin\gamma\cos\gamma}_{\frac{1}{2}\sin2\gamma}|\le\sqrt{1}\sqrt{2} \Rightarrow |\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma|\le2\sqrt{2}$$

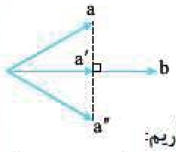
یعنی حداکثر مقدارش $2\sqrt{2}$ است.

اشاره به همین طریق ثابت می‌شود:

$$\boxed{|\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma|\le\sqrt{6}} \quad , \quad \boxed{|\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma|\le\sqrt{3}}$$

تصویر و قرینه

به بردارهای a و b در شکل روبه‌رو دقت کنید:



الف) **تصویر قائم بردار a روی امتداد $\vec{b}$، بردار a' است. همیشه a' برداری موازی $\vec{b}$ خواهد بود** و برای به دست آوردن تصاویر آن داریم:

$$\boxed{a' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}}$$

و اگر فقط طول a' را بخواهیم:

$$\boxed{|\vec{a}'| = |\vec{a}||\cos\theta| = \frac{|a.b|}{|b|}}$$

دقت کنید **همواره $|\vec{a}'| \le |\vec{a}|$ و بردار $\vec{a}-\vec{a}'$ بر $\vec{b}$ عمود است.**

ب) **قرینه‌ی بردار a نسبت به $\vec{b}$، بردار a'' است. طول $\vec{a}''$ همیشه با $|\vec{a}|$ برابر است** و برای به دست آوردن تصاویر آن داریم:

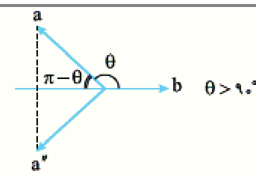
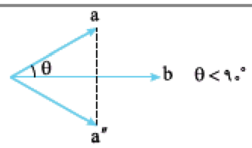
$$\boxed{\vec{a}'' = ۲\overrightarrow{a'} - \vec{a} = ۲\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} - \vec{a}}$$

و تأکید کنیم که: **$\vec{a}+\vec{a}''$ می‌شود $۲\vec{a}'$ که حتماً مضربی از b است. $\vec{a}-\vec{a}''$ حتماً بر $\vec{b}$ عمود است.**

این را هم در نظر داشته باشید:

$$\boxed{|\vec{a}| = |\vec{a}''| \quad , \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}''\cdot\vec{b} = \vec{a}'\cdot\vec{b}}$$

توجه زاویه‌ی بین $\vec{a}''$ و $\vec{a}$ در دو حالت بررسی می‌شود:

	
در این حالت زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{a}''$ دو برابر مکمل زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است، یعنی $۳۶۰° - ۲\theta$ است.	در این حالت زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{a}''$ دو برابر زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

مثال اگر طول بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ به ترتیب ۲، ۳ و ۴ باشند، تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\vec{b}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\vec{b}$ ۳) $\frac{۲}{۳}\vec{b}$ ۴) $\frac{۱}{۶}\vec{b}$

پاسخ **گزینه‌ی «۴»** اول $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را به دست آوریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^{۲} = |\vec{a}|^{۲} + |\vec{b}|^{۲} + ۲\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow ۴^{۲} = ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۲\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow ۲\vec{a}.\vec{b} = ۳ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{۳}{۲}$$

حالا فرمول a' را می‌نویسیم:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} = \frac{\frac{۳}{۲}}{۳^{۲}}\vec{b} = \frac{۱}{۶}\vec{b}$$

مثال تصویر بردار $\vec{a} = ۲i + j + ۳k$ روی برداری که با امتداد محورهای مختصات زوایای منفرجه‌ی مساوی می‌سازد کدام است؟

۱) $(-۱,-۱,-۱)$ ۲) $(۱,۱,۱)$ ۳) $(-۲,-۲,-۲)$ ۴) $(۲,۲,۲)$

پاسخ **گزینه‌ی «۴»** برداری که با محورهای مختصات زوایای منفرجه‌ی مساوی بسازد $\vec{b} = (-۱,-۱,-۱)$ است. **(قرار بود سه مؤلفه‌ی یکسان و منفی داشته باشد)** پس:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^{۲}}\vec{b} = \frac{(-۱,-۱,-۱)\cdot(۲,۱,۳)}{(\sqrt{(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}})^{۲}}(-۱,-۱,-۱) = \frac{-۲-۱-۳}{۳}(-۱,-۱,-۱) = -۲(-۱,-۱,-۱) = (۲,۲,۲)$$

مثال اگر $\vec{a} = (۲,۳,-۱)$، $\vec{b} = (۱,۴,۲)$ و $\vec{c} = i - j$، آن‌گاه تصویر بردار $\vec{a} - ۲\vec{b}$ روی امتداد $\vec{c}+\vec{a}$ دارای چه طولی است؟

۱) $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۴}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\frac{۵}{\sqrt{۱۴}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}$

پاسخ **گزینه‌ی «۳»** اول بردارها را بنویسیم:

$$\vec{u} = \vec{c} + \vec{a} = (۲,۳,-۱) + (۱,-۱,۰) = (۳,۲,-۱) \quad , \quad \vec{v} = \vec{a} - ۲\vec{b} = (۲,۳,-۱) - (۲,۸,۴) = (۰,-۵,-۵)$$

حالا تصویر v روی u را می‌خواهیم:

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^{۲}}\vec{u} = \frac{(۰,-۵,-۵)\cdot(۳,۲,-۱)}{|(۳,۲,-۱)|^{۲}}(۳,۲,-۱) = \frac{۰-۱۰+۵}{۹+۴+۱}(۳,۲,-۱)$$

$$= \frac{-۵}{۱۴}(۳,۲,-۱) \xrightarrow{\text{طول}} |v'| = |-\frac{۵}{۱۴}|\sqrt{۱۴} = \frac{۵}{\sqrt{۱۴}}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۱- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های $|\vec{b}|=3$ و $|\vec{a}|=2$ مفروض‌اند. اگر زاویه‌ی بین این دو بردار 150° باشد، ضرب داخلی این دو بردار کدام است؟

۱) $-3\sqrt{3}$ ۲) $+3\sqrt{3}$ ۳) -3 ۴) 3

۵۲- اگر a یک بردار غیرصفر و $\overrightarrow{e_a}$ بردار یکه‌ی نظیرش باشد، حاصل $\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_a}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $2|a|$ ۳) $|a|$ ۴) $-|a|$

۵۳- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در روابط $|\vec{a}|=4|\vec{b}|=8$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8\sqrt{2}$ صادق‌اند. زاویه‌ی بین بردارهای $\frac{\vec{a}}{4}$ و $(-3\vec{b})$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{3\pi}{4}$

۵۴- اگر $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\vec{O}$ و $|\overrightarrow{v_1}|=|\overrightarrow{v_2}|=2\sqrt{3}$، آن‌گاه ضرب داخلی بردارهای $\overrightarrow{v_1}$ و $\overrightarrow{v_2}$ کدام است؟

۱) 12 ۲) -12 ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $-4\sqrt{3}$

۵۵- اگر $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ باشد، حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $|\vec{a}|^2$ ۳) $-|\vec{a}|^2$ ۴) $|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2$

۵۶- اگر زاویه‌ی بین دو بردار یکه‌ی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 60° باشد، حاصل $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})\cdot(\vec{a}|\vec{b}|+\vec{b}|\vec{a}|)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۵۷- اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° بوده و $|\vec{b}|=3$ و $|\vec{a}|=2$، حاصل عبارت $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})\cdot(\vec{a}|\vec{b}|-\vec{b}|\vec{a}|)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 6 ۳) 18 ۴) 12

۵۸- اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° باشد، زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}|\vec{b}|$ و $\frac{-2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ کدام است؟

۱) 60° ۲) 30° ۳) 90° ۴) 120°

۵۹- اگر x، y و z سه بردار غیرصفر در یک صفحه طوری قرار گیرند که $\vec{x}\perp(\vec{y}-\vec{z})$ و $\vec{y}\perp(\vec{x}-\vec{z})$، کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) $\vec{z}\perp(\vec{x}-\vec{y})$ ۲) $\vec{x}\perp(\vec{y}+\vec{z})$ ۳) $\vec{y}\perp(\vec{x}+\vec{z})$ ۴) $\vec{z}\parallel(\vec{x}-\vec{y})$

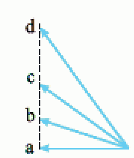
۶۰- اگر $\vec{z}$ و $\vec{x}$ دو بردار با اندازه‌های مساوی بوده و $\vec{y}\perp(\vec{x}+\vec{z})$ و هم‌چنین $\widehat{(\vec{x},\vec{y})}=\theta$ و $\widehat{(\vec{y},\vec{z})}=\theta'$، کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) θ و θ' متمم‌اند. ۲) θ و θ' مکمل‌اند. ۳) $\theta=\theta'$ ۴) $|\theta-\theta'|=45^\circ$

۶۱- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار هم‌اندازه بوده و بردارهای $\vec{a}+2\vec{b}$ و $2\vec{a}+\vec{b}$ بر یکدیگر عمود باشند، کسینوس زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

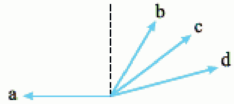
۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $-\frac{4}{5}$

۶۲- با توجه به شکل زیر، حاصل کدام گزینه از لحاظ عددی کم‌تر است؟



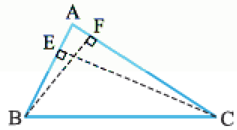
۱) $\vec{a}\cdot\vec{b}$
۲) $\vec{a}\cdot\vec{c}$
۳) $\vec{a}\cdot\vec{d}$
۴) هر سه مقدار یکسان‌اند.

۶۳- با توجه به شکل زیر، حاصل کدام گزینه از لحاظ عددی بیشتر است؟



۱) $\vec{a}\cdot\vec{b}$
۲) $\vec{a}\cdot\vec{c}$
۳) $\vec{a}\cdot\vec{d}$
۴) هر سه مقدار یکسان‌اند.

۶۴- با توجه به شکل زیر، کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

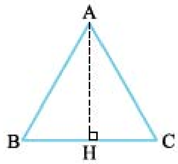


۱) $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$
۲) $\overline{AF}\cdot\overline{AC}$
۳) $\overline{AB}\cdot\overline{AE}$
۴) $\overline{CE}\cdot\overline{BF}$

۶۵- در یک صفحه، نقاط O و A ثابت و نقطه‌ی M متغیر است. اگر $(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{AM}=۱$ باشد، مکان هندسی نقطه‌ی M کدام است؟

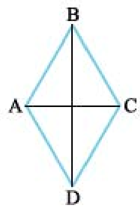
۱) دایره‌ای به مرکز A و شعاع یک
۲) خطی که در نقطه‌ی A بر OA عمود است.
۳) دایره‌ای به مرکز O و شعاع یک
۴) خطی که در نقطه‌ی O بر OA عمود است.

۶۶- در مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو به ضلع ۲، حاصل عبارت $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ کدام است؟



۱) ۹
۲) $\frac{۹}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) ۱۲

۶۷- در لوزی زیر، $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=۴$. حاصل عبارت $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ کدام است؟



۱) صفر
۲) -۸
۳) ۸
۴) -۱۶

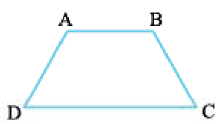
۶۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}$ کدام است؟

۱) $\frac{a^۲}{۲}$ ۲) $-\frac{a^۲}{۲}$ ۳) $\frac{۳a^۲}{۲}$ ۴) $-\frac{۳a^۲}{۲}$

۶۹- در صفحه‌ی مثلث ABC به اضلاع a، b و c، نقطه‌ی O را به دلخواه در نظر می‌گیریم. حاصل $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) abc ۳) $-abc$ ۴) $a+b+c$

۷۰- در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زیر، اگر $AB=AD=a$ و $DC=۲AB$، حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ کدام است؟



۱) $-۲/۵a^۲$
۲) $۲/۵a^۲$
۳) $-۱/۵a^۲$
۴) $۱/۵a^۲$

۷۱- اگر زاویه‌ی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با محور yها به ترتیب ۱۰° و ۳۰° بوده و $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$، زاویه‌ی بردار $\vec{a}+\vec{b}$ با محور yها کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۲۰° ۳) ۲۵° ۴) ۴۰°

۷۲- اگر $|\vec{a}|=۲\sqrt{۶}$، $|\vec{b}|=۵$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$، اندازه‌ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۳- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه و $(\vec{a}+\vec{b})$ بر $(\vec{a}-\vec{b})$ عمود باشد. کدام گزینه قطعاً صحیح است؟

۱) $\vec{a}=\vec{b}$ ۲) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ۳) $\vec{b}=\vec{O}$ ۴) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$

۷۴- اگر بردارهای $\vec{a}=(m,۲,-۱)$ و $|\vec{b}|=\sqrt{۴۱}$ مفروض بوده و دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ و $(\vec{a}-\vec{b})$ بر هم عمود باشند، مقدار مثبت m کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۵- زاویه‌ی بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۶۰° است. حاصل $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۷۶- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در رابطه‌ی $|\vec{e}_a+۲\vec{e}_b|=\sqrt{۶}$ صادق‌اند. حاصل عبارت $\vec{e}_a\cdot(\vec{e}_a+\vec{e}_b)+\vec{e}_b\cdot(\vec{e}_a-۲\vec{e}_b)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۷- اگر برای دو بردار غیرصفر و غیرمساوی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|=|\vec{b}|$، آن‌گاه زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

۷۸- اگر $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۲$ و زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۶۰° باشد، زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $(۲\vec{a}-۳\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۲۰°

۷۹- سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دوبه‌دو با هم زاویه‌ی ۶۰° ساخته و $|\vec{c}|=۳$، $|\vec{b}|=۲$ و $|\vec{a}|=۱$ است. اندازه‌ی بردار $\vec{a}-۲\vec{b}-\vec{c}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۳}$ ۲) $\sqrt{۲۹}$ ۳) $\sqrt{۳۱}$ ۴) $\sqrt{۳۷}$

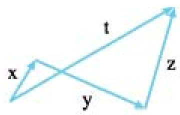
۸۰- اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار یکه با شرط $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$ باشند حاصل $|۲\vec{a}+۴\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۸۱- سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با اندازه‌های ۳، ۴ و ۷ در رابطه‌ی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$ صدق می‌کنند. حاصل عبارت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۷)

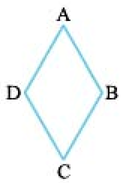
۱) -۳۷ ۲) -۱۹ ۳) ۱۹ ۴) ۳۷

۸۲- در شکل زیر، اندازه‌ی بردارهای $\vec{x}$، $\vec{y}$، $\vec{z}$ و $\vec{t}$ به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ است. حاصل $\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{t}\cdot\vec{z}$ کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) $\frac{۵}{۲}$

۸۳- مطابق شکل، لوزی ABCD به ضلع a و زاویه‌ی $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ مفروض است. طول پیکان $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ کدام است؟



۱) $۳a^۲$
۲) $۳a$
۳) $a\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{a}$

۸۴- سه بردار $\overrightarrow{v_۱}=(۱,-۱,a)$، $\overrightarrow{v_۲}=(۲,b,۱)$ و $\overrightarrow{v_۲}=(c,۳,۲)$ دوبه‌دو بر هم عمودند. مقدار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۳)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۵- اگر $\vec{v}=(۱,۱,۲)$ و $\vec{u}=(۲,۱,\alpha)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^۳$ بوده و اندازه‌ی تفاضل این دو بردار برابر $\sqrt{۲}$ باشد، ماکزیمم مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۸۶- اگر $\vec{x}=(۳,۱,m)$، $\vec{y}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sqrt{۳}\,\mathrm{Min}\{|\vec{x}|,|\vec{y}|\}$، آن‌گاه $|\vec{x}-\vec{y}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷- اگر $\vec{a}=(۲,n,n-۲)$، $\vec{b}=(m,۱,-۱)$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$، حداقل مقدار $|\vec{a}+\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۸۸- اگر $\vec{a}=(۱,۱,۱)$، $\vec{b}=(m^۲,m,-۲)$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۶-\frac{۹}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$، حداقل مقدار $|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۸۹- اگر اندازه‌ی دو بردار $\vec{a}=(m+۱)\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k}$ برابر باشند، زاویه‌ی بین دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ و $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $۲۲/۵^\circ$ ۲) ۳۰° ۳) ۴۵° ۴) ۶۰°

۹۰- سه نقطه‌ی $A(۲,۱,۰)$، $B(۳,-۱,۲)$ و $C(-۱,۱,۳)$ رئوس مثلثی هستند. $\cos\hat{A}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۹۱- اگر $A(۱,۲,۵)$، $B(۳,۱,۷)$ و $C(۴,-۱,۵)$ سه رأس یک مثلث باشند، زاویه‌ی A کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۹۲- اگر نقاط $M(-۹,۲,-۴)$، $N(۰,۱,\alpha)$ و $P(۱,۲,۱)$ رئوس مثلث قائم‌الزاویه‌ای در رأس P باشند، α کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۹۳- اگر $\vec{a}=(x,y,z)$ برداری در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد، حاصل عبارت $(\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{a}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{a}\cdot\vec{k})\vec{k}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\vec{a}|\vec{a}|$ ۳) $|\vec{a}|^۲$ ۴) $\vec{a}$

۹۴- اگر بردارهای $\vec{a}=(۱,\alpha+۱,۲\alpha)$ و $\vec{b}=(۲,۰,-۱)$ مفروض بوده و دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ و $(\vec{a}-\vec{b})$ بر هم عمود باشند، مقادیر α کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) $-۱,۰/۴$ ۲) $-۱,۰/۶$ ۳) $۱,۰/۴$ ۴) $۱,۰/۶$

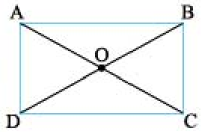
۹۵- زاویه‌ی بین دو قطر متوازی‌الاضلاعی که اضلاعش بردارهای $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ هستند، کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۴۵° ۳) ۹۰° ۴) ۱۲۰°

۹۶- بر روی دو بردار $\vec{a}=۳\vec{i}+۳\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-۲\vec{k}$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۲)

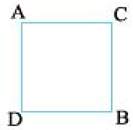
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۷- در مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB=۱۲$ و $BC=۵$، نقطه‌ی O محل برخورد قطرها است. حاصل $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$ کدام است؟



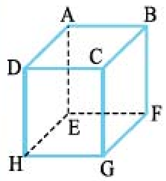
۱) $\frac{۱۶۹}{۲}$
۲) ۹۷
۳) ۶۱
۴) $\frac{۹۷}{۲}$

۹۸- در مربع زیر به قطر ۲، حاصل عبارت $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ کدام است؟



۱) ۸
۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۸\sqrt{۲}$

۹۹- در مکعب زیر، طول هر یال a است. حاصل $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{AG}$ کدام است؟



۱) $a^۲$
۲) صفر
۳) $-a^۲$
۴) $۲a^۲$

۱۰۰- کسینوس زاویه‌ی بین یک قطر و یک یال مکعب کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰۱- با فرض $۲x-y+۲z=۱$، حداقل مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۲۷}$

۱۰۲- با فرض $۹x^۲+۴y^۲+۲۵z^۲=۱$، بازه‌ی تغییرات مقدار عبارت $P=۳x+۴y-۵z$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$
۲) $[-۱,\sqrt{۶}]$
۳) $[-\sqrt{۶},۱]$
۴) $[-\sqrt{۶},\sqrt{۶}]$

۱۰۳- با فرض $x+۲y+۲z=۶$، حداقل مقدار $x^۲+۴y^۲+z^۲$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۱۰۴- با فرض $۲x+y-۲z=۱۸$، اگر $x^۲+y^۲+z^۲$ به مینیمم مقدار خود برسد، حاصل $x+y-z$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۱۰۵- به ازای کدام مقدار k، زاویه‌ی پیکان $\overrightarrow{PQ}$ که در آن $P(۱,\sqrt{۲},۵)$ و $Q(k,۰,۴)$ است، با محور x ها برابر ۳۰° می‌شود؟

۱) ۴
۲) -۴
۳) ۲
۴) ۲، ۰

۱۰۶- بردار $\vec{a}$ با محورهای x و y زاویه‌های ۴۵° و ۶۰° می‌سازد. این بردار با محور z ها چه زاویه‌ای خواهد ساخت؟

۱) ۶۰°
۲) ۳۰°
۳) ۹۰°
۴) ۴۵°

۱۰۷- کدام بردار با جهت مثبت محور x و y به ترتیب زاویه‌ی ۶۰° و ۱۳۵° می‌سازد؟

۱) $(\sqrt{۲},۱,-۱)$
۲) $(۱,-\sqrt{۲},-۱)$
۳) $(۲,-۱,\sqrt{۲})$
۴) $(۱,۱,\sqrt{۲})$

۱۰۸- چند بردار وجود دارد که با محورهای y و z زاویه‌های $\sin^{-۱}\frac{۱}{۳}$ و $\cos^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ بسازد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۱۰۹- زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ با محورهای x و z به ترتیب ۴۵° و $\cos^{-۱}\frac{۱}{۳}$ است. اگر تصویر این بردار روی محور y ها برابر $\sqrt{۱۴}$ باشد، طول بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۱۰- چند بردار مانند $\vec{a}$ وجود دارد که با دوتا از محورهای مختصات زاویه‌های ۱۰° و ۴۰° بسازد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۱۱۱- چند بردار مانند $\vec{a}$ وجود دارد که با دوتا از محورهای مختصات زاویه‌های ۶۰° و $\cos^{-۱}\frac{۱}{۱۰۰}$ بسازد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۱۱۲- اگر بردار $\vec{a}=(m,n-۴,۲n)$ با محورهای z و x زاویه‌های ۲۳° و ۶۷° بسازد، n کدام است؟

۱) صفر
۲) ۴
۳) -۴
۴) نمی‌توان مشخص کرد.

۱۱۳- بردار یکه‌ی $\vec{a}=(m-p, m-2, n+4m)$ موازی محور x هاست. $\text{Max}(mnp)$ کدام است؟

۱) 16 ۲) 48 ۳) -16 ۴) -48

۱۱۴- اگر بردار $\vec{a}=(m+2, n-3, 1)$ بر محور y ها عمود بوده و $|\vec{a}|=\sqrt{10}$، مقدار $n-m$ کدام است؟

۱) $8, 2$ ۲) $5, -1$ ۳) $-5, +1$ ۴) $-8, -2$

۱۱۵- زاویه‌ی بردار $\vec{a}=(1,-3,-4)$ با کدام محور بیشتر است؟

۱) Ox ۲) Oy ۳) Oz ۴) با هر سه محور یکسان است.

۱۱۶- کدام بردار با سه محور مختصات زاویه‌ی مساوی می‌سازد؟

۱) $(-1,-2,-3)$ ۲) $(-1,1,1)$ ۳) $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ ۴) $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$

۱۱۷- تصویر قائم بردار $(0,-3,6)$ روی امتداد بردار $(2,-1,-2)$ کدام است؟

۱) $(2,-1,-2)$ ۲) $(4,-2,-4)$ ۳) $(-2,1,2)$ ۴) $(2,3,-1)$

۱۱۸- اگر $\vec{a'}$ تصویر بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ بوده و $\vec{a'}=k\vec{e_b}$ باشد (k یک عدد حقیقی است)، در این صورت $\vec{a}\cdot\vec{e_b}$ کدام است؟

۱) k ۲) $-k$ ۳) $\frac{1}{k}$ ۴) $-\frac{1}{k}$

۱۱۹- اگر زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α بوده و $\vec{a}\cdot\vec{b}=k$، با فرض این‌که $\vec{a'}$ تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ و همچنین $\vec{b'}$ تصویر $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ در نظر گرفته شود، حاصل $\vec{a'}\cdot\vec{b'}$ کدام است؟

۱) $k\cos^2\alpha$ ۲) $k\cos\alpha$ ۳) $k^2\cos^2\alpha$ ۴) $k\sin^2\alpha$

۱۲۰- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و $\vec{a'}$ تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ و همچنین $\vec{b'}$ تصویر $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ باشد، کدام‌یک از موارد $\vec{a'}\cdot\vec{b}$ یا $\vec{a}\cdot\vec{b'}$ بزرگ‌تر است؟

۱) $\vec{a}\cdot\vec{b'}$ ۲) $\vec{a'}\cdot\vec{b}$

۳) هر دو مساوی‌اند. ۴) به زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بستگی دارد.

۱۲۱- اگر $\vec{a'}$ تصویر بردار $\vec{a}=(0,2,2)$ بر $\vec{b}=(2,-2,0)$ باشد. زاویه‌ی بردار $\vec{a'}$ و بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 60° ۳) 120° ۴) 180°

۱۲۲- اگر زاویه‌ی دو بردار $\vec{a}=(m-1,2,0)$ و $\vec{b}=(2,-8,4)$، برابر زاویه‌ی بین تصویر $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ و خودِ b باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>-8$ ۲) $m>-9$ ۳) $m>8$ ۴) $m>9$

۱۲۳- اندازه‌ی تصویر بردار $\vec{a}=(3,-1,2)$ روی بردار $\vec{b}=(1,-2,2)$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

۱۲۴- نقاط $A(1,1,1)$، $B(3,3,2)$ و $C(0,-1,2)$ رئوس یک مثلث و نقطه‌ی H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد. طول پاره‌خط CH کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) $\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{11}{5}$

۱۲۵- اگر $\vec{a'}$ تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ بوده و $\vec{a}\cdot\vec{a'}=k$، حاصل $|\vec{a'}|$ کدام است؟ $(k>0)$

۱) k ۲) k^2 ۳) $\sqrt{k}$ ۴) $2\sqrt{k}$

۱۲۶- اگر طول تصویر $\vec{a}=(1,-1,2)$ بر بردار $\vec{b}=(m,2,-3)$ صفر باشد، m کدام است؟

۱) 7 ۲) 8 ۳) -8 ۴) 12

۱۲۷- اگر بردار $\vec{a'}$ تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ بوده و $\vec{a'}=(1,m,0)$ و $\vec{a}=(1,1,1)$، در این صورت m کدام می‌تواند باشد؟

۱) 2 ۲) 1 ۳) $-\frac{6}{5}$ ۴) $-\sqrt{3}$

۱۲۸- قرینه‌ی بردار $\vec{a}=(-2,0,1)$ نسبت به امتداد $\vec{b}=(1,2,-1)$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۷)

۱) $(1,-2,0)$ ۲) $(-1,2,0)$ ۳) $(0,2,1)$ ۴) $(0,-2,1)$

۱۲۹- قرینه‌ی بردار $\vec{a}=(4,-1,3)$ نسبت به امتداد برداری که با جهت مثبت محورهای مختصات زاویه‌های مساوی می‌سازد، کدام است؟

۱) $(2,-2,1)$ ۲) $(3,-1,0)$ ۳) $(1,4,-2)$ ۴) $(0,5,1)$

۱۳۰- قرینه‌ی بردار $\vec{a}$ نسبت به امتداد بردار $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ بردار $(1,-2,5)$ است. تصویر بردار $\vec{a}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۹)

۱) $(-1,5,2)$ ۲) $(2,5,-1)$ ۳) $(5,-1,-2)$ ۴) $(5,-2,1)$

۱۳۱- بردارهای $\vec{a}=(1,-1,0)$ و $\vec{b}=(2,-1,2)$ مفروض‌اند. زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ با قرینه‌اش نسبت به راستای $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

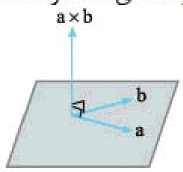
۱۳۲- اگر $\vec{a'}$ و $\vec{a^*}$ به ترتیب بردارهای تصویر و قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ باشند. حاصل $\vec{a}\cdot\vec{a^*}$ کدام است؟

۱) $|a'|^2$ ۲) $|a'|^2-|a|^2$ ۳) $2|a'|^2+|a|^2$ ۴) $2|a'|^2-|a|^2$

بخش چهارم ضرب خارجی

ضرب خارجی دو بردار **a** و **b**، برداری است که بر **a** و **b** و کلاً بر صفحه‌ی بردارهای **a** و **b** عمود می‌شود. جهتش هم با استفاده از قاعده‌ی دست راست به دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a} \quad , \quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \vec{a}\times\vec{b}\perp m\vec{a}+n\vec{b}\ ,\ m,n\in\mathbb{R}}$$



ضرب خارجی را ضرب «برونی» یا «برداری» هم نامیده‌اند.

اگر تصاویر بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را بخواهیم داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

که برای حفظ کردن آن، از دترمینان استفاده می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=(\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{سطر و ستون } i \text{ حذف شده}})i\underset{\text{یادتان نرود! وسطی منفی دارد}}{-}(\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{سطر و ستون } j \text{ حذف شده}})j+(\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{\text{سطر و ستون } k \text{ حذف شده}})k$$

خواص ضرب خارجی

۱ اندازه‌ی بردار ضرب خارجی برابر است با:

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}$$

اگر یادتان باشد $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta$ بود، پس داریم:

$$\boxed{\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}=\tan\theta}$$

و هم‌چنین:

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}$$

۲ **$\vec{a}\times\vec{a}$ بردار صفر است.**

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{a}=\vec{O}}$$

۳ **$\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ قرینه‌ی هم هستند.**

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}$$

۴ **در این‌جا هم پخشی نسبت به جمع و تفریق داریم:**

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}}$$

۵ ضرایب عددی هم مثل قبل کار می‌کنند:

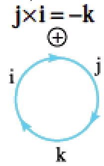
$$\boxed{r\vec{a}\times s\vec{b}=(rs)(\vec{a}\times\vec{b})}$$

۶ در مورد بردارهای یکه‌ی محورهای مختصات داریم:

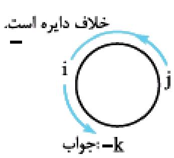
$$i\times i=j\times j=k\times k=\vec{O}$$

$$i\times j=k \;\downarrow\; j\times i=-k \qquad j\times k=i \;\downarrow\; k\times j=-i \qquad k\times i=j \;\downarrow\; i\times k=-j$$

و برای حفظ کردن این‌ها، از دایره‌ی روبه‌رو کمک می‌گیرند:



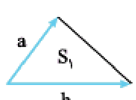
اگر هم‌جهت دایره ضرب کنیم جواب مثبت و در غیر این صورت منفی است. پس مثلاً برای $j\times i$ داریم:



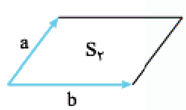
۷ **اگر حاصل‌ضرب خارجی صفر شود دو بردار ناصفر، موازی‌اند:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}$$

۸ اگر با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مثلث یا متوازی‌الاضلاع بسازیم داریم:



$$\boxed{S_1=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|}$$



$$\boxed{S_2=2S_1=|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

۹ در تمرین‌های کتاب درسی ثابت کرده‌اید که اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ باشد آن‌گاه:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

مثال برداری عمود بر $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(2,3,1)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(-2,-3,5)$ ۲) $(-2,3,5)$ ۳) $(2,-3,5)$ ۴) $(2,3,5)$

پاسخ گزینه‌ی «۳» $\vec{a}\times\vec{b}$ و هر مضرب غیرصفر آن، به عنوان برداری عمود بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قابل قبول‌اند:

$$\vec{a}=(1,-1,-1)\quad,\quad\vec{b}=(2,3,1)\Rightarrow a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}k=2i-3j+5k$$

پس $(2,-3,5)$ انتخاب مناسبی است.

مثال دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۶ و ۵ با هم زاویه‌ی ۳۰° دارند. حاصل $|(\vec{a}-\vec{b})\times(۲\vec{a}+\vec{b})|$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ گزینه‌ی «۳»

$$|(\vec{a}-\vec{b})\times(۲\vec{a}+\vec{b})|=\underbrace{\vec{a}\times۲\vec{a}}_{۲\vec{a}\times\vec{a}=\vec{O}}-\vec{b}\times۲\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{O}}=\underbrace{-۲\vec{b}\times\vec{a}}_{+۲\vec{a}\times\vec{b}}+\vec{a}\times\vec{b}=۳\vec{a}\times\vec{b}$$

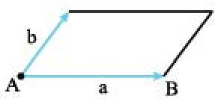
پس داریم:

$$|۳\vec{a}\times\vec{b}|=۳|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۳\times۶\times۵\times\frac{۱}{۲}=۴۵$$

مثال دو سر یک ضلع متوازی‌الاضلاع نقاط $A(۱,-۱,۰)$ و $B(۲,۳,۴)$ و ضلع دیگر آن بردار $\vec{b}=i-j-k$ است. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

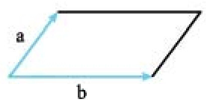
۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ گزینه‌ی «۲» شکل را ببینید:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(۱,۴,۴)\\ \vec{b}=(۱,-۱,-۱)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=(۰,۵,-۵)\Rightarrow S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۰+۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$$

مثال در متوازی‌الاضلاع روبه‌رو اگر $|\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})|=۴$، حاصل $|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|$ کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۸
۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ گزینه‌ی «۲» اول $\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})$ را ببینید:

$$|\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{O}-\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=۴$$

اشاره این یعنی ضرب خارجی قطر و یک ضلع متوازی‌الاضلاع هم مساحت را می‌دهد، پس:

$$|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|=|\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{O}}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-(a\times b)}+\vec{a}\times\vec{b}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{O}}|=۲|\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{۴}|=۸$$

اشاره اما ضرب خارجی دو قطر، دو برابر مساحت متوازی‌الاضلاع شد!

مثال اگر مساحت مثلث بناشده بر دو بردار a و b به طول‌های ۴ و ۳ برابر $۴\sqrt{۲}$ و زاویه‌ی بین دو بردار بیشتر از قائمه باشد، اندازه‌ی بردار $۲a-b$ جذر کدام عدد است؟

۱) ۸۹ ۲) ۵۷ ۳) ۶۵ ۴) ۷۳

پاسخ گزینه‌ی «۱» مساحت مثلث، نصف اندازه‌ی ضرب خارجی است:

$$S=\frac{۱}{۲}|a\times b|\to\frac{۱}{۲}|a||b|\sin\theta=۴\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۴\times۳\times\sin\theta=۴\sqrt{۲}\Rightarrow\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

حالا از رابطه‌ی $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ و با دقت به این‌که $\cos\theta$ منفی است (چرا؟) داریم:

$$(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})^۲+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\cos^۲\theta=۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{\text{منفرجه}}\cos\theta=-\frac{۱}{۳}$$

حالا برویم سراغ $|۲a-b|$:

$$|۲\vec{a}-\vec{b}|^۲=|۲\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|۲\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۴|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\times۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۴\times۴^۲+۳^۲-۴\times۴\times۳\times(-\frac{۱}{۳})=۶۴+۹+۱۶=۸۹$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳۳- کدام گزاره صحیح است؟

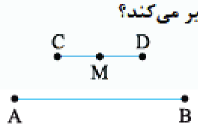
۱) برای هر بردار دلخواه $\vec{a}$ داریم $\vec{a}\times\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

۲) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

۳) برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}$

۴) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

۱۳۴- اگر مطابق شکل $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ بوده و نقطه‌ی M از C به D حرکت کند، طول و جهت بردار ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}$ چگونه تغییر می‌کند؟



۱) طول متغیر، جهت ثابت
۲) طول ثابت، جهت متغیر
۳) طول و جهت هر دو ثابت
۴) طول و جهت هر دو متغیر

۱۳۵- اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ چهار بردار دلخواه باشند، سه بردار $\vec{a}\times\vec{d}$، $\vec{b}\times\vec{d}$ و $\vec{c}\times\vec{d}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ (ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) موازی یک صفحه‌اند. ۲) موازی یکدیگرند.

۳) دوبه‌دو بر هم عمودند. ۴) مجموع آن‌ها بردار صفر است.

۱۳۶- چهار بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ در روابط $\vec{a}\times\vec{d}=\vec{c}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}\times\vec{b}$ صدق می‌کنند. الزاماً دو بردار غیرصفر $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}+\vec{d}$ نسبت به هم، کدام وضع را دارند؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۳)

۱) مساوی ۲) قرینه ۳) عمود ۴) موازی

۱۳۷- بردارهای ناصفر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ در روابط $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ و $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ صادق‌اند. زاویه‌ی بین بردارهای ناصفر $\vec{b}-\vec{c}$ و $\vec{a}-\vec{d}$ کدام است؟

۱) 90° ۲) 0 یا 180° ۳) 45° ۴) 60°

۱۳۸- سه بردار یکه‌ی $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. اگر $\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$ و همچنین بردار $\vec{b}$ با صفحه‌ی شامل $\vec{a}$ و $\vec{c}$ زاویه‌ی 60° بسازد، حاصل $|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۹- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار صادق در رابطه‌ی $|\vec{a}\times\vec{b}|=2$ باشند، اندازه‌ی بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۴۰- اگر اندازه‌ی بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ برابر ۱۰ باشد، حاصل $|\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})|$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۴۱- اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار بوده و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$، حاصل $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\vec{c}\times\vec{b}$ ۲) $\vec{a}\times\vec{c}$ ۳) $\vec{b}\times\vec{a}$ ۴) $\vec{c}\times\vec{a}$

۱۴۲- برای سه بردار یکه‌ی $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با شرط $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$، اندازه‌ی ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $3\vec{a}-2\vec{b}$ کدام است؟

۱) $5\sqrt{3}$ ۲) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ۴) $10\sqrt{3}$

۱۴۳- سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در رابطه‌ی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$ صدق می‌کنند. اگر $|\vec{b}|=|\vec{a}|=2$ و $|\vec{c}|=1$، طول بردار $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{15}$ ۲) $\frac{3\sqrt{15}}{3}$ ۳) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ ۴) $6\sqrt{15}$

۱۴۴- اگر بردارهای یکه‌ی $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دوبه‌دو بر هم عمود باشند، اندازه‌ی بردار $(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۱۴۵- اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $|\vec{a}|=2$، $|\vec{b}|=5$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=8$، حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ کدام است؟

۱) ± 2 ۲) ± 3 ۳) ± 4 ۴) ± 6

۱۴۶- اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{3}$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$، زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۴۷- اگر $|\vec{b}\times(\vec{a}-\vec{b})|=\sqrt{3}$ و $\vec{a}\cdot(\vec{b}-2(\vec{a}\times\vec{b}))=1$ باشد، زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) 30° ۲) 60° ۳) 120° ۴) 90°

۱۴۸- اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه و $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=4$، $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$ و $|\vec{a}|=2$، اندازه‌ی بردار $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۴۹- زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کم‌تر از 90° است. اگر $|\vec{a}|=6$، $|\vec{b}|=5$ و $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=18$ باشد، حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ کدام است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۱۵۰- زاویه‌ی بین دو بردار یکه‌ی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه بوده و $|2\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})|=\sqrt{3}$ است. حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۵۱- اگر $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(-1,-2,4)$، تصویر بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ روی محور yها کدام است؟

۱) 11 ۲) -11 ۳) 5 ۴) -5

۱۵۲- اگر $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(0,4,1)$، مجموع مؤلفه‌های بردار $\vec{b}\times\vec{a}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 3 ۴) 2

۱۵۳- اگر $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$ و $\overrightarrow{v_2}=(2,1,3)$، اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) 9 ۴) 27

۱۵۴- اگر $\vec{a}-2\vec{b}=(1,0,1)$ و $\vec{a}+\vec{b}=(2,1,-1)$، اندازه‌ی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) 3 ۳) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{8}}{3}$

۱۵۵- بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $|\vec{a}||\vec{b}|$ ۳) $|\vec{a}|^2$ ۴) $|\vec{b}|^2$

۱۵۶- بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند. حاصل $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}\times 2\vec{b})$ کدام است؟

۱) $|\vec{a}|$ ۲) $|\vec{a}||\vec{b}|$ ۳) صفر ۴) $2|\vec{a}||\vec{b}|$

۱۵۷- حاصل عبارت $2\vec{j}\cdot(\vec{k}\times\vec{i})+3\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})-\vec{k}\cdot(\vec{j}\times\vec{i})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 6 ۳) 4 ۴) -2

۱۵۸- اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد باشند، حاصل $(\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j}))\times\vec{k}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $\vec{O}$ ۲) $-\vec{k}$ ۳) $\vec{j}$ ۴) $-\vec{i}$

۱۵۹- اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد باشند، حاصل $((\vec{i}\times\vec{j})\times(\vec{j}\times\vec{k}))\times\vec{i}$ کدام است؟

۱) $-\vec{k}$ ۲) $\vec{k}$ ۳) صفر ۴) $2\vec{k}$

۱۶۰- اگر $\vec{a}=(-1,0,1)$ و $\vec{b}=(1,-2,-1)$، زاویه‌ی بردار $\vec{b}\times\vec{a}$ با کدام محور کوچک‌تر است؟

۱) $\vec{x}$ ۲) $\vec{y}$ ۳) $\vec{z}$ ۴) $\vec{x}$ و $\vec{z}$

۱۶۱- سه بردار $\vec{a}=(1,m,4)$، $\vec{b}=(0,2,1)$ و $\vec{c}=(n,-1,2)$ در رابطه‌ی $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ صادق‌اند. mn کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) 12 ۴) -12

۱۶۲- بردار عمود بر بردارهای $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ۲) $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

۳) $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ۴) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

۱۶۳- بردار عمود بر بردارهای $\vec{a}=(1,2,0)$ و $\vec{b}=(0,1,-1)$ با محور yها زاویه‌ی β می‌سازد. $\sin\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ ۳) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ۴) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

۱۶۴- اگر بردار $\vec{a}$ با اندازه‌ی ۲، بر دو بردار $\vec{b}=(1,-1,2)$ و $\vec{c}=(2,0,1)$ عمود باشد، جمع تصاویر این بردار کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{10}{\sqrt{14}}$ ۲) $\frac{12}{\sqrt{14}}$ ۳) $\frac{8}{\sqrt{14}}$ ۴) $\frac{6}{\sqrt{14}}$

۱۶۵- دو بردار $\vec{a}=(1,2,-1)$ و $\vec{b}=(2,4,m)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقادیر m، رابطه‌ی $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ برقرار است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) فقط $m=-2$ ۲) $m=\pm 2$ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر عدد حقیقی m

۱۶۶- اگر $\vec{a}=(2,1,1)$ و $\vec{b}=(2,0,-1)$ دو بردار باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی این دو بردار کدام است؟

۱) $\sqrt{21}$ ۲) $2\sqrt{21}$ ۳) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ۴) $\sqrt{7}$

۱۶۷- اگر $\vec{a}=(1,1,1)$ و $\vec{b}=(2,0,2)$ دو ضلع متوازی‌الاضلاعی باشند، طول ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) 2

۱۶۸- مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(2,m,1)$ ساخته می‌شود برابر $\sqrt{6}$ است. m کدام است؟

۱) ۰,−۴ ۲) ±۴ ۳) ۰,۴ ۴) ۲,۰

۱۶۹- اگر $\vec{a}=(+1,-2,3)$ و $\vec{b}=(2,0,1)$، مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار $(\vec{a}+3\vec{b})$ و $(2\vec{a}+5\vec{b})$ تولید می‌شود، کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{3}$

۱۷۰- اگر $\vec{a}=(1,1,1)$ و $\vec{b}=(2,0,0)$ مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ ساخته می‌شود کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۷۱- بردار $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{k}$ ساخته می‌شود، کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور ۸۶)

۱) $\sqrt{84}$ ۲) $\sqrt{96}$ ۳) $\sqrt{102}$ ۴) $\sqrt{105}$

۱۷۲- بردارهای $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ مفروض‌اند. مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته می‌شود کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۱۷۳- اگر بردارهای $\vec{d}$ و $\vec{c}$ قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $|\vec{c}\times\vec{d}|$ ۲) $\frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{d}|$

۳) $2|\vec{c}\times\vec{d}|$ ۴) $\frac{1}{4}|\vec{c}\times\vec{d}|$

۱۷۴- بردارهای یکه‌ی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویه‌ی 30° می‌سازند. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای $(4\vec{a}+\vec{b})$ و $(\vec{a}-\vec{b})$ قطرهای آن هستند کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۱۷۵- اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{d}$ بردارهای ضلع و قطر یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $|\vec{a}\times\vec{d}|$ ۲) $\frac{1}{4}|\vec{a}\times\vec{d}|$

۳) $\frac{1}{4}|\vec{a}\times\vec{d}|$ ۴) $2|\vec{a}\times\vec{d}|$

۱۷۶- اگر بردارهای $\vec{a}=(1,1,1)$ و $\vec{b}=(2,1,0)$ بردارهای ضلع و قطر یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{7}$

۱۷۷- اگر $\vec{a}=(1,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,1,0)$ باشد، اندازه‌ی بزرگ‌ترین ارتفاع متوازی‌الاضلاع بناشده بر دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ و $(\vec{a}-2\vec{b})$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{6}$ ۲) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $2\sqrt{6}$

۱۷۸- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع و $|\vec{a}|=5$ ، $|\vec{b}|=2$ و $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=8\vec{j}+6\vec{k}$ باشد، اندازه‌ی ارتفاع بزرگ متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۷۹- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۳ و ۴ واحد با هم زاویه‌ی 30° می‌سازند. مساحت مثلثی که روی دو بردار $(\vec{a}-2\vec{b})$ و $(3\vec{a}+2\vec{b})$ ساخته می‌شود کدام است؟ (ریاضی ۸۳)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۱۸۰- دو بردار یکه‌ی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر مساحت مثلث ساخته‌شده روی بردارهای $(\vec{a}+\vec{b})$ و $(2\vec{a}-\vec{b})$ برابر $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

۱۸۱- اگر $|\vec{a}|=3$ ، $|\vec{b}|=2$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{18}{5}$ ، مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{12}{5}$ ۲) $\frac{18}{5}$ ۳) $\frac{24}{5}$ ۴) $\frac{36}{5}$

۱۸۲- اگر $|\vec{a}|=1$ ، $|\vec{b}|=5$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ ، مساحت مثلث ساخته‌شده روی بردارهای $(\vec{a}+\vec{b})$ و $(2\vec{a}-\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰