درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

توابع گویا

تعریف تابع گویا تابعی است که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ نوشت به طوری که $p(x)$ و $g(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $g(x)\neq ۰$ (یعنی $g(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد).

مثلاً توابع $y=\frac{x-۲}{x+۱}$ و $y=\frac{\sqrt{۳}}{x+۵}$ و $y=۵x^۲$ نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

دامنه توابع گویا

دامنه تابع گویا با ضابطهٔ $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ برابر مجموعه اعداد حقیقی است، به جز ریشه‌های مخرج کسر. به بیان دیگر:

$D_f=\mathbb{R}-\{x\mid g(x)=۰\}$

مثال دامنهٔ هر یک از توابع گویای زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۳x}$ ب) $g(x)=\sqrt{۲}x$ ج) $h(x)=\dfrac{\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{x}}{۲-\frac{۱}{x-۲}}$

پاسخ الف) باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $x=۳$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۳\}=(-\infty,۰)\cup(۰,۳)\cup(۳,+\infty)$

ب) اگر تابع $g(x)=\sqrt{۲}x$ را به صورت $g(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۱}$ بنویسیم، می‌بینیم مخرج کسر هیچ‌وقت صفر نمی‌شود $۱\neq۰$، پس دامنه تابع کل مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی $D_g=\mathbb{R}$.

ج) در این تابع باید $x\neq۲$ باشد (به دلیل وجود $\frac{۱}{x-۲}$) و نیز $x\neq۰$ باشد (به دلیل وجود $\frac{۱}{x}$) همچنین باید $۲-\frac{۱}{x-۲}\neq۰$ یعنی:

$۲\neq\frac{۱}{x-۲}\Rightarrow ۲x-۴\neq۱\Rightarrow ۲x\neq۵\Rightarrow x\neq\frac{۵}{۲}$

پس دامنه این تابع برابر است با:

$D_h=\mathbb{R}-\{۰,۲,\frac{۵}{۲}\}$

نکته در توابع گویا صورت و مخرج کسر با هم ساده می‌شوند. ولی قبل از تعیین دامنه تابع مجاز به ساده کردن صورت و مخرج نیستیم، چون ممکن است مقادیری که تابع را تعریف نشده می‌کنند از بین بروند.

مثلاً در تابع گویای $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۲x}$ اگر ابتدا تابع را ساده کنیم و سپس دامنه را بیابیم، داریم:

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{x\cancel{(x-۲)}}=\frac{x+۲}{x}\xrightarrow[x=۰]{\text{ریشه مخرج}}D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

دامنه به دست آمده غلط است، چون $x=۲$ مخرج تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۲x}$ را صفر می‌کند و تابع به ازای این مقدار تعریف نشده است. وقتی تابع را ساده کردیم، این مقدار از بین رفت. پس دامنه اصلی تابع به صورت زیر است:

$x^۲-۲x=۰\to x(x-۲)=۰\to x=۰,x=۲\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

مثال دامنه توابع گویای زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{(۳x+۱)}{(۳x+۱)(x-۲)}$ ب) $g(x)=\frac{|x-۱|}{|x-۱|}$

پاسخ **الف** باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$$(۳x+۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱=۰ \to x=-\frac{۱}{۳} \\ \text{یا} \\ x-۲=۰ \to x=۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۳},۲\}$$

ب همانند قسمت (الف) ریشه مخرج را به دست می‌آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم:

$$|x-۱|=۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

مثال اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x+۳}{x^۲+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-۲\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

پاسخ با توجه به دامنه داده شده، ریشهٔ مخرج کسر فقط باید ۲- باشد. چون مخرج یک عبارت درجه ۲ است، در صورتی فقط یک ریشه دارد که آن ریشه مضاعف باشد، پس ۲- در واقع ریشهٔ مضاعف مخرج است. یعنی مخرج را می‌توان به صورت $(x+۲)^۲$ نوشت. پس:

$$x^۲+ax+b=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴ \Rightarrow a=۴\,,\, b=۴ \Rightarrow a+b=۸$$

مثال اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{۵x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت دامنه تابع $g(x)=f(x+۱)$ کدام است؟

پاسخ چون دامنه تابع گویای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس مخرج کسر فاقد ریشه است. با تشکیل تابع $f(x+۱)$ داریم:

$$g(x)=f(x+۱)=\frac{۵(x+۱)^۲+۳(x+۱)}{a(x+۱)^۲+b(x+۱)+c}$$

می‌توان گفت مخرج این تابع نیز ریشه ندارد، چون اگر مخرج تابع $g(x)$ ریشه‌ای مانند $x_۱$ داشته باشد، آن‌گاه $a(x_۱+۱)^۲+b(x_۱+۱)+c=۰$ و این بدین معنی است که $(x_۱+۱)$ ریشهٔ مخرج کسر $f(x)$ است که متناقض با فرض اولیه است.
پس مخرج تابع $g(x)$ نیز فاقد ریشه بوده و دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{۲x-۴}$ را رسم کنید.

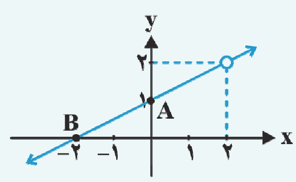
پاسخ ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم و سپس تابع را ساده کرده و نمودار را رسم می‌کنیم به صورت زیر:

$$۲x-۴=۰ \to x=۲ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{۲x-۴}=\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{۲\cancel{(x-۲)}}=\frac{۱}{۲}(x+۲)$$

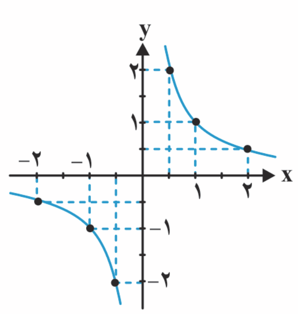
در واقع تابع داده شده یک تابع خطی است با دامنه $\mathbb{R}-\{۲\}$ که به راحتی می‌توان با تعیین دو نقطه دلخواه از آن نمودارش را رسم کرد.

$$f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲) \to \begin{cases} x=۰ \to y=۱ \Rightarrow A\begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix} \\ , \\ x=-۲ \to y=۰ \Rightarrow B\begin{vmatrix} -۲ \\ ۰ \end{vmatrix} \end{cases}$$



نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ با دامنه و برد $\mathbb{R}-\{۰\}$ به صورت مقابل است:

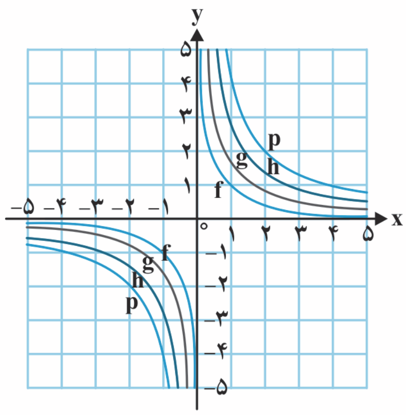


چند ویژگی نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$

- دامنه تابع $D=\mathbb{R}-\{۰\}$ و برد تابع $R=\mathbb{R}-\{۰\}$ است.
- نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند، چون به ازای هیچ مقدار x تابع $y=\frac{۱}{x}$ برابر صفر نمی‌شود.
- نمودار تابع محور yها را قطع نمی‌کند، چون $x=۰$ عضو دامنه نیست تا به ازای آن نمودار با محور yها برخورد کند.

نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{k}{x}$ $(k\in\mathbb{Z})$

نمودار توابع $g(x)=\frac{۲}{x}$ و $h(x)=\frac{۳}{x}$ و $p(x)=\frac{۴}{x}$ و... همانند تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ است با این تفاوت که هر چه صورت کسر بزرگ‌تر می‌شود، انحنای منحنی کم‌تر می‌شود. مطابق شکل مقابل:

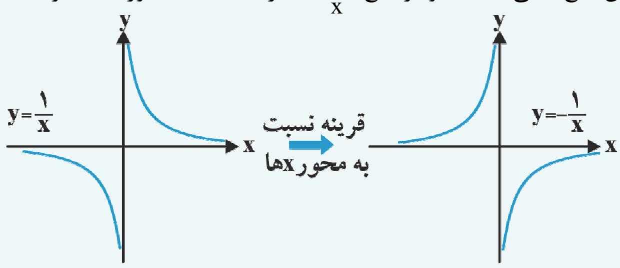


مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=-\frac{۱}{x}$

ب) $g(x)=\frac{۱+۲x}{x}$

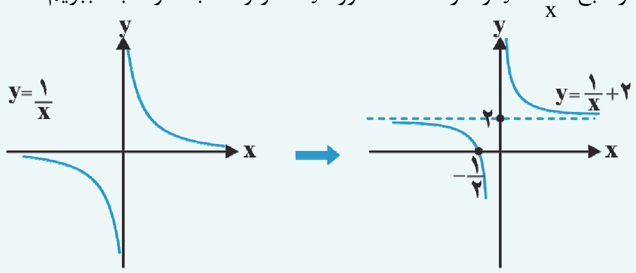
پاسخ الف) برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، به صورت زیر:



ب) ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{۱+۲x}{x}=\frac{۱}{x}+\frac{۲x}{x}=\frac{۱}{x}+۲$$

برای رسم این تابع کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در امتداد محور yها دو واحد به طرف بالا ببریم:



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. تابع $f(x)=\frac{۲}{x+۲}$ با برد $\{-۱,۱,۲\}$ دارای چه دامنه‌ای است؟

۱) $\{-۴,۰,-۱\}$ ۲) $\{۱,۳,۴\}$ ۳) $\{۲,\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\{-۳,-۱,۰\}$

۲. اگر $f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳}$ باشد، مقدار $f(۲-\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۳. **مهم** اگر $f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x+۴}$، آن‌گاه حاصل $f(-۲)+f(-۱)+f(۰)+f(۱)+f(۲)$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۸ ۳) -۶ ۴) -۴

۴. تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ مفروض است. اگر $f(a)+f(b)=۰$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $a=-b$ ۲) $ab=۱$ ۳) $ab=-۱$ ۴) $a=\sqrt{b}$

۵. در یک رودخانه، هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی با ضابطهٔ $p(x)=\frac{۷۰۰x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود (برحسب میلیون تومان). با ۳۰۰ میلیون تومان، چند درصد از رودخانه پاک‌سازی می‌شود؟ (کتاب درسی)

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۷۰ ۴) ۹۰

۶. میزان رطوبت یک شهر، t ساعت پس از باران برابر با $f(t)=\frac{۰/۲۴t}{t^۲+۲}$ است. در چه زمانی پس از باران، میزان رطوبت بیش از ۰/۰۸ است؟ (کتاب درسی)

۱) در ساعت اول ۲) در دو ساعت اول ۳) در ساعت دوم ۴) در دو ساعت دوم

۷. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۵-x}{۲x+۱}(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\frac{-۱}{۲}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۵\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{۵}{۲}\}$

۸. مهم تابع $f(x)=\frac{۱}{۳x^۲-mx+۱۲}$ به ازای چه مقادیری از m همواره تعریف شده است؟

۱) $|m|<۶$ ۲) $|m|<۱۲$ ۳) $|m|<۳$ ۴) $|m|<۱۶$

۹. دشوار اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲-۳x+a}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۰. برد تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ برابر با کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-(-۲,۲)$ ۴) $[-۲,۲]$

۱۱. مهم برد تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۱۲. مهم اگر نمودار تابع $y=\frac{۲}{x}$ را به اندازهٔ ۲ واحد به بالا و ۳ واحد به راست انتقال دهیم، ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=\frac{x-۴}{۲x-۳}$ ۲) $y=\frac{۲x-۴}{x-۳}$ ۳) $y=\frac{x+۴}{۲x-۳}$ ۴) $y=\frac{۲x+۴}{x+۳}$

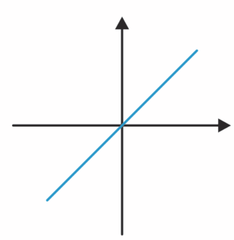
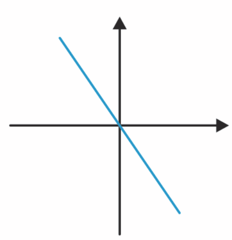
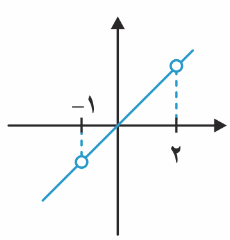
۱۳. مهم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را ۴ واحد به بالا و ۳ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محورها را در کدام نقاط قطع می‌کند؟

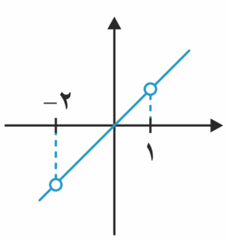
۱) $(\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,\frac{۱۳}{۳})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,-\frac{۱۳}{۳})$ ۳) $(-\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,\frac{۱۳}{۳})$ ۴) $(-\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,-\frac{۱۳}{۳})$

۱۴. مهم فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{۳x-۵}{x-۲}$. کدام گزینه در مورد نمودار g درست است؟

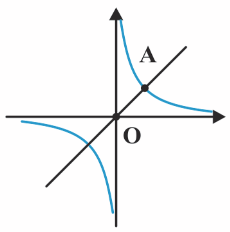
۱) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا است.
۲) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا است.
۳) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین است.
۴) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین است.

۱۵. نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۳-x^۲-۲x}{x^۲-x-۲}$ شبیه کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 

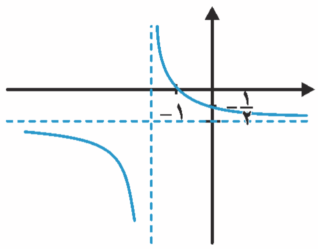
۴) 

۱۶. نمودارهای $y=\frac{k}{x}$ و $y=x$ همدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند. اگر $OA=۲\sqrt{۲}$، آن‌گاه k کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷. دشوار نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را به اندازهٔ a واحد به پائین و b واحد به چپ منتقل کرده‌ایم. حاصل ab کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

تساوی دو تابع

شرط این که دو تابع f و g با هم مساوی باشند این است که:

اولاً دامنه دو تابع برابر باشند. $(D_f=D_g)$

ثانیاً برای هر $x\in D_f=D_g$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$. یعنی روی دامنهٔ یکسان، ضابطهٔ دو تابع نیز با هم برابر باشند.

مثلاً دو تابع $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}$ با هم مساویند. زیرا:

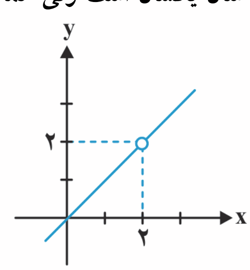
اولاً:
$$\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R} \\ D_g=\mathbb{R}\to (\text{مخرج فاقد ریشه است}) \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=D_g$$

ثانیاً:
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^۲-۱ \\ g(x)=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}=\frac{(x^۲-۱)\cancel{(x^۲+۱)}}{\cancel{x^۲+۱}}=x^۲-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

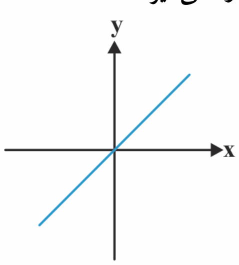
مفهوم تساوی دو تابع از روی نمودارشان

اگر دو تابع با هم مساوی باشند باید نمودارشان دقیقاً روی هم قرار گیرند. مثلاً دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^۲-۲x}{x-۲}$ با وجود این که ضابطه‌شان یکسان است ولی همان‌طور که در شکل‌های زیر می‌بینیم نمودارشان دقیقاً روی هم قرار نمی‌گیرد.

$g(x)=\frac{x^۲-۲x}{x-۲}=\frac{x\cancel{(x-۲)}}{\cancel{x-۲}}=x$



$f(x)=x$



در نمودار تابع g یک نقطهٔ توخالی به ازای $x=۲$ داریم. چون دامنه این تابع $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.
پس در واقع این دو تابع با هم مساوی نیستند.

مثال در هر حالت تعیین کنید آیا توابع f و g مساویند یا خیر؟

الف) $f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}\ ,\ g(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶}$

ب) $f(x)=x^۲-۲x+۴\ ,\ g(x)=\begin{cases}\frac{x^۳+۸}{x+۲} & ; \quad x\neq -۲ \\ ۱۲ & ; \quad x=-۲\end{cases}$

پاسخ **الف** ابتدا دامنه هر یک از توابع را به دست می‌آوریم:

$D_f: x-۳=۰ \to x=۳ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

$D_g: x^۲-۵x+۶=۰ \to (x-۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۳\ ,\ x=۲ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۲,۳\}$

چون $D_f \neq D_g$ است، پس دو تابع مساوی نیستند. در این‌جا دیگر نیازی نیست بررسی کنیم که آیا ضابطهٔ دو تابع برابر است یا خیر.

ب ابتدا دامنهٔ ۲ تابع را به دست می‌آوریم:

$D_f=\mathbb{R} \to$ دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است

چون در این تابع دو ضابطه‌ای، در ضابطهٔ اول یک عبارت گویا داریم که ریشهٔ مخرج آن $x=-۲$ است ولی می‌بینیم $D_g=\mathbb{R} \to$ که این ضابطه برای $x \neq -۲$ است. یعنی در واقع هیچگاه $x=-۲$ نمی‌تواند باشد.

چون دامنهٔ دو تابع مساوی است، شرط دوم تساوی دو تابع را بررسی می‌کنیم.

اگر $x \neq -۲ \Rightarrow g(x)=\dfrac{x^۳+۸}{x+۲}=\dfrac{\cancel{(x+۲)}(x^۲-۲x+۴)}{\cancel{(x+۲)}}=x^۲-۲x+۴=f(x)$

اگر $x=-۲ \Rightarrow g(-۲)=۱۲=f(-۲)$

پس دو تابع f و g با هم مساویند.

مثال اگر توابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x-۱} & ;\ x\neq ۱\\ a-۱ & ;\ x=۱\end{cases}$ و $g(x)=x-۳$ با هم مساوی باشند، آن‌گاه مقدار a را بیابید.

پاسخ با توجه به این که $\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x-۱}=\dfrac{(x-۱)(x-۳)}{x-۱}=x-۳$ داریم: $f(x)=\begin{cases}x-۳ & x\neq ۱\\ a-۱ & x=۱\end{cases}$

همان‌طور که می‌بینیم برای $x \neq ۱$ ضابطهٔ دو تابع f و g با هم برابرند، پس برای این که دو تابع با هم مساوی باشند باید در نقطهٔ $x=۱$ نیز مقدارهایشان یکسان شوند، یعنی باید $f(۱)=g(۱)$. $f(۱)=a-۱\ ,\ g(۱)=۱-۳=-۲ \Rightarrow a-۱=-۲ \Rightarrow a=-۱$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۸. دو تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x^۲-۴}$ و $g(x)=\dfrac{a}{x-۲}+\dfrac{b}{x+۲}$ با هم مساوی‌اند. حاصل ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹. اگر دو تابع $f=\{(۱,۴),(a,۵),(۶,۲)\}$ و $g=\{(۳,b),(a+۳,c),(d,e)\}$ با هم برابر باشند، حاصل $a+b+c+d+e$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۰. **مهم** به توابع زیر توجه کنید:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x+۱}{x+۱},\quad g(x)=x+۱ \qquad p(x)=\frac{x^۳+x^۲+x}{x^۲+x+۱},\quad q(x)=x$$

کدام درست است؟

۱) $f(x)=g(x)$ ۲) $p(x)=q(x)$ ۳) $f(x)=g(x)$ و $p(x)=q(x)$ ۴) هیچ‌کدام درست نیست.

۲۱. **مهم** دو تابع $f(x)=\dfrac{۳}{x-۲}$ و $g(x)=\dfrac{ax+b}{x^۲+cx+d}$ با هم برابر هستند. حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۲. دو تابع $f(x)=x-۳$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-x-۶}{x+۲} & x\neq -۲\\ a & x=-۲\end{cases}$ با هم برابر هستند. مقدار a کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) -۷ ۴) -۸

۲۳. **مهم** در کدام گزینه تساوی دو تابع برقرار نیست؟

۱) $g(x)=\dfrac{x}{x^۲}\ ,\ f(x)=\dfrac{۱}{x}$
۲) $g(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}\ ,\ f(x)=|x-۱|$
۳) $g(x)=|x+\dfrac{۱}{x}|\ ,\ f(x)=|x|+\dfrac{۱}{|x|}$
۴) $g(x)=|x|-|\dfrac{۱}{x}|\ ,\ f(x)=|x-\dfrac{۱}{x}|$

۲۴. تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-3|}{x-3}$ با کدام تابع برابر است؟

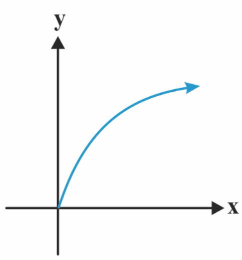
۱) $g(x)=\begin{cases}2x-1 & x>3\\ 2 & 1<x<3\\ 1-2x & x<1\end{cases}$
۲) $g(x)=\begin{cases}2 & x>3\\ 0 & 1<x<3\\ -2 & x<1\end{cases}$
۳) $g(x)=\begin{cases}1-2x & x>3\\ -2 & 1<x<3\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$
۴) $g(x)=\begin{cases}-2 & x>3\\ 0 & 1<x<3\\ 2 & x<1\end{cases}$

۲۵. دشوار اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x+b}{x+2} & x\neq a\\ c & x=a\end{cases}$ و $g(x)=dx+e$ برابر باشند $(d\neq 0)$، حاصل $a+b+c+d+e$ کدام است؟

۱) 1
۲) -1
۳) 3
۴) -3

توابع رادیکالی

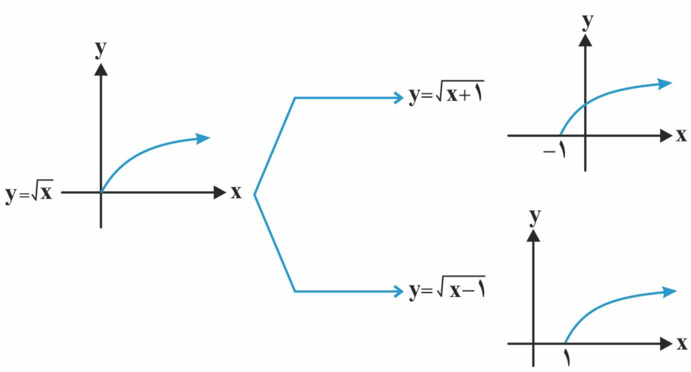
تابع $f(x)=\sqrt{x}$



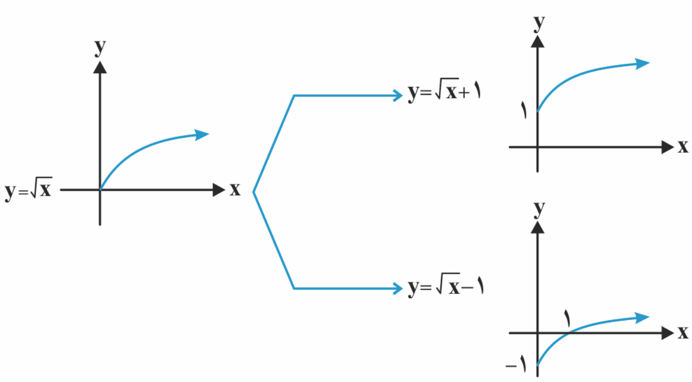
ساده‌ترین تابع رادیکالی است که نمودارش به صورت مقابل است.
دامنه و برد این تابع اعداد حقیقی نامنفی است.

رسم نمودار توابع رادیکالی به کمک انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$

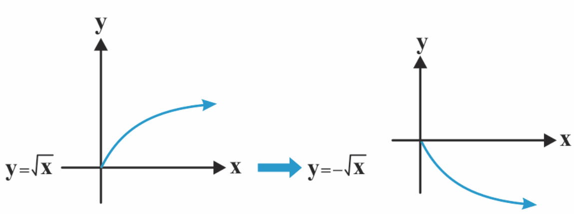
- برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x+a}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها به اندازه a واحد به راست و یا چپ انتقال دهیم.
اگر $a>0$ باشد، نمودار را به چپ و اگر $a<0$ باشد، نمودار را به راست انتقال می‌دهیم. مانند:



- برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x}+a$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در امتداد محور yها به اندازه a واحد به بالا و یا پایین انتقال دهیم. اگر $a>0$ باشد، نمودار را به بالا و اگر $a<0$ باشد، نمودار را به پایین انتقال می‌دهیم. مانند:



- برای رسم نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم. به صورت مقابل:



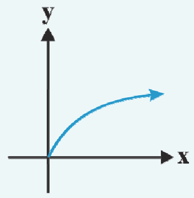
مثال نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

الف) $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$

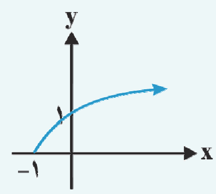
ب) $g(x)=-۳+\sqrt{x-۱}$

پاسخ الف)

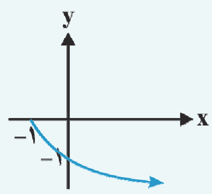
$y=\sqrt{x}$



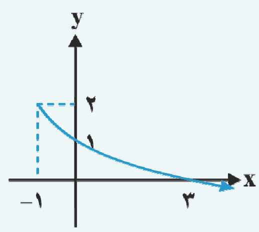
نمودار را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم $\longrightarrow y=\sqrt{x+۱}$



نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم $\longrightarrow y=-\sqrt{x+۱}$

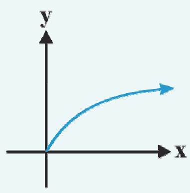


نمودار را ۲ واحد در امتداد محور yها بالا می‌بریم $\longrightarrow y=۲-\sqrt{x+۱}$

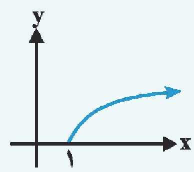


ب)

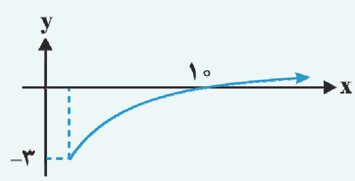
$y=\sqrt{x}$



نمودار را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم $\longrightarrow y=\sqrt{x-۱}$



نمودار را ۳ واحد در امتداد محور yها پایین می‌آوریم $\longrightarrow y=-۳+\sqrt{x-۱}$



دامنه توابع رادیکالی

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی دو حالت در نظر می‌گیریم:

- اگر فرجه رادیکال فرد باشد، بدون در نظر گرفتن رادیکال دامنه تابع زیر رادیکال را به دست می‌آوریم.
- اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید اولاً دامنه تابع زیر رادیکال را تعیین کنیم و ثانیاً باید تابع زیر رادیکال را بزرگ‌تر و یا مساوی صفر قرار دهیم و سپس بین مقادیر به دست آمده برای x از اولاً و ثانیاً اشتراک بگیریم.

مثال دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=\sqrt[۳]{\dfrac{x+۴}{x^{۲}-۲x}}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{x^{۲}-x}{x-۲}}$

ج) $y=\sqrt{۴-\sqrt{x+۱}}$

د) $y=\sqrt{\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}}$

پاسخ **الف** چون فرجه رادیکال فرد است پس فقط کافی است دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم:

$x^۲-۲x=۰ \to x(x-۲)=۰ \to x=۰\ ,\ x=۲ \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

ب چون فرجه رادیکال زوج است پس باید علاوه بر این که دامنه عبارت زیر رادیکال را می‌یابیم، عبارت $\frac{x^۲-x}{x-۲}\geq ۰$ باشد. یعنی:

$x-۲\neq ۰ \to x\neq ۲$ **۱**

$P=\frac{x^۲-x}{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{x(x-۱)}{x-۲}\geq ۰$

x		۰		۱		۲	
P	−	۰	+	۰	−	ت ن	+

$\Rightarrow x\in[۰,۱]\cup(۲,+\infty)$ **۲**

از اشتراک **۱** و **۲** دامنه تابع برابر است با: $D_y=[۰,۱]\cup(۲,+\infty)$

ج در این تابع چون دو رادیکال با فرجه زوج داریم، پس:

اولاً $x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱$ **۱**

ثانیاً $۴-\sqrt{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۱}\leq ۴ \Rightarrow x+۱\leq ۱۶ \Rightarrow x\leq ۱۵$ **۲**

از اشتراک **۱** و **۲** دامنه تابع برابر است با: $D_y=[-۱,۱۵]$

د برای تعیین دامنه در این تابع سه شرط به صورت زیر داریم:

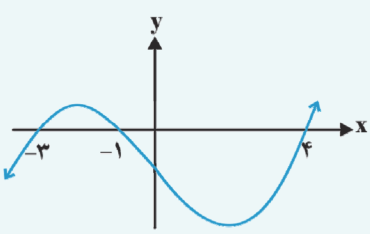
اولاً $x\geq ۰$ **۱**

ثانیاً $۱+\sqrt{x}\neq ۰ \Rightarrow \sqrt{x}\neq -۱ \to$ همواره برقرار است $\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ **۲**

ثالثاً $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\geq ۰ \xrightarrow{۱+\sqrt{x}>۰} ۱-\sqrt{x}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x}\leq ۱ \Rightarrow x\leq ۱$ **۳**

از اشتراک **۱**، **۲** و **۳** دامنه تابع برابر است با: $D_y=[۰,۱]$

مثال شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ را بیابید.



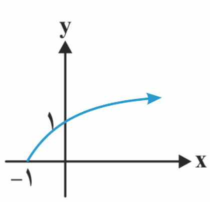
پاسخ با توجه به نمودار داده شده می‌توان گفت دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس دامنه تابع $g(x)$ مقادیری از x است کـه $xf(x)\geq ۰$ می‌شود. برای برقراری این نامساوی باید x و $f(x)$ هم علامت باشند، یعنی:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow f(x)\geq ۰ \Rightarrow x\in[۴,+\infty) \\ \text{یا} \\ x\leq ۰ \Rightarrow f(x)\leq ۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰] \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} D_g=(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰]\cup[۴,+\infty)$$

برد توابع رادیکالی

می‌دانیم برد تابع در واقع تصویر قائم نمودار تابع روی محور yها است. مثلاً برد تابع $y=\sqrt{x+۱}$ با توجه به نمودارش که به صورت می‌باشد، برابر اعداد حقیقی نامنفی است، یعنی:

برد $\mathbb{R}=[۰,+\infty)$



در توابع رادیکالی به راحتی می‌توانیم با توجه به محدوده دامنه تابع، حدودی برای y که همان برد تابع است، بیابیم. مثلاً برابر تعیین برد تابع $y=۳+\sqrt{x-۲}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x-۲\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow ۳+\sqrt{x-۲}\geq ۳ \Rightarrow \overset{\text{برد}}{\mathbb{R}}=[۳,+\infty)$$

مثال در تابع $f(x)=a-\sqrt{x+b}$ اگر دامنه تابع بازه $[۴,+\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ باشد، $a+b$ کدام است؟

پاسخ چون دامنه $[۴,+\infty)$ است، پس: $x\geq ۴$. در واقع $x+b\geq ۰\to x\geq -b \xrightarrow[x\geq ۴]{\text{چون}} -b=۴\Rightarrow b=-۴\Rightarrow y=a-\sqrt{x-۴}$

با توجه به تابع فوق داریم: $x-۴\geq ۰\Rightarrow \sqrt{x-۴}\geq ۰\Rightarrow -\sqrt{x-۴}\leq ۰\Rightarrow a-\sqrt{x-۴}\leq a\Rightarrow y\leq a$

چون برد بازه $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ است، یعنی $y\leq -\frac{۱}{۲}$، پس $a=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد و داریم: $a+b=-\frac{۱}{۲}-۴=-\frac{۹}{۲}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۶. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳۵-x^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۷

۲۷. دامنهٔ $f(x)=\sqrt{(۴-x^۲)(x^۲-x+۱)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۸. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{-x^۲(x^۲-۴)^۲}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۹. دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}-\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}+\sqrt{۱-۲x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $R-[-۱,۱]$ ۴) $R-(-۱,۱)$

۳۰. **مهم** اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۳۱. **مهم** دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۲-\sqrt{x-۱}}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۵,+\infty)$ ۳) $[۱,۵]$ ۴) $[-۵,۵]$

۳۲. اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ۹۲)

۱) $x\leq -۱$ ۲) $x\geq -۱$ ۳) $x\leq ۱$ ۴) $x\geq ۱$

۳۳. **دشوار** دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-|x|-۲}$ کدام گزینه است؟

۱) $x\geq ۲, x\leq -۲$ ۲) $-۱<x<۱$ ۳) $-۲<x<۲$ ۴) R

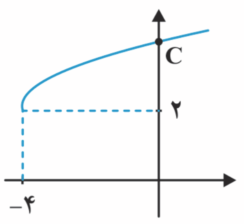
۳۴. **دشوار** دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۰,\sqrt{۲})$ ۴) $\{۰\}\cup[۱,+\infty)$

۳۵. تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ مفروض است. اگر دامنهٔ آن $[-۴,+\infty)$ و برد آن $[-۳,+\infty)$ باشد، آن‌گاه این نمودار محور xها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

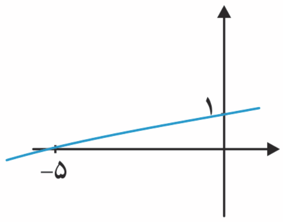
۱) $(۵,۰)$ ۲) $(۶,۰)$ ۳) $(۷,۰)$ ۴) $(۸,۰)$

۳۶. **مهم** نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به شکل روبه‌رو است. مقدار C کدام است؟



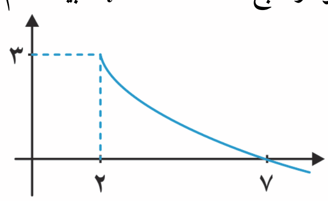
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

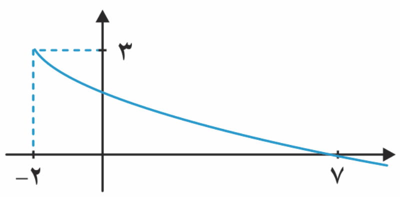
۳۷. نمودار تابع $y=a+\sqrt{x+b}$ به شکل روبه‌رو است. حاصل ab کدام است؟

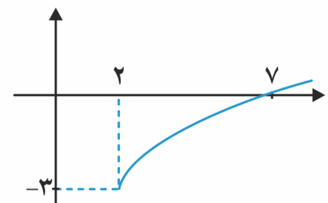


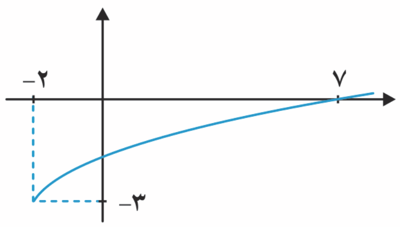
۱) ۱۸
۲) -۱۸
۳) ۱۶
۴) -۱۶

۳۸. نمودار تابع $y=۳-\sqrt{x+۲}$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۹. برد تابع f به معادلهٔ $y=\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

۴۰. برد تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x+۳}$ کدام است؟

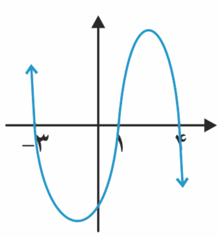
۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[\sqrt{۲},+\infty)$ ۳) $[\sqrt{۳},+\infty)$ ۴) $[\sqrt{۵},+\infty)$

۴۱. مهم به توابع مقابل توجه کنید: $q(x)=\sqrt{x^۳+x}$ $p(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x^۲+۱}$ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۲}}$ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+۲}}$

کدام درست است؟

۱) $f(x)=g(x)$ ۲) $p(x)=q(x)$ ۳) $p(x)=q(x)$, $f(x)=g(x)$ ۴) هیچ‌کدام

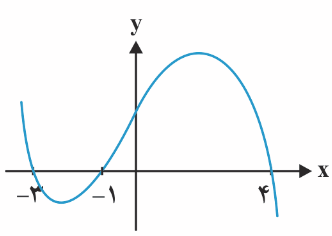
۴۲. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۳]\cup[۱,۴]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۴,+\infty)$
۳) $[-۳,۰]\cup[۱,۴]$
۴) $(-\infty,-۳]\cup[۴,+\infty)$

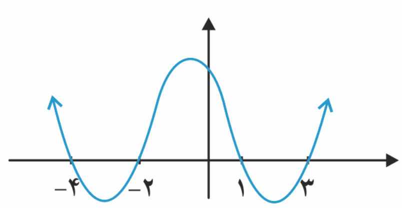
(سراسری خارج از کشور تجربی ۹۴)

۴۳. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۴۴. دشوار شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{(x+۱)f(x)}}$ کدام است؟

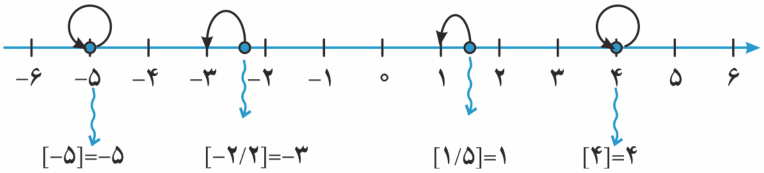


۱) $(-\infty,-۴)\cup[-۲,-۱]\cup[۱,۳]$
۲) $(-\infty,-۴)\cup(-۲,-۱)\cup(۱,۳)$
۳) $[-۴,-۲]\cup[-۱,۱]\cup[۳,+\infty)$
۴) $(-۴,-۲)\cup(-۱,۱)\cup(۳,+\infty)$

تابع جزء صحیح

تعریف جزء صحیح

اگر x عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x یا براکت x که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کوچک‌تر یا مساوی x است. به عنوان مثال داریم:



تذکر اگر برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود داشته باشد، به طوری که $n \le x < n+۱$ آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $[x]=n$.

مثلاً: $-۶ \le \frac{-۳۵}{۶} < -۵ \Rightarrow [\frac{-۳۵}{۶}]=-۶$ $\qquad$ $۳ \le \sqrt{۱۱} < ۴ \Rightarrow [\sqrt{۱۱}]=۳$

مثال حاصل $[-۵x]$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

پاسخ $[-۵(\sqrt{۲})] \xlongequal{\sqrt{۲}\simeq ۱/۴۱} [-۵(۱/۴۱)]=[-۷/۰۵]=-۸$

مثال اگر $x^۲+x<۰$ باشد، حاصل عبارت $[x]+[x^۲]+[x^{+۳}]$ را بیابید.

پاسخ ابتدا حدود x را از نامساوی $x^۲+x<۰$ بدست می‌آوریم:

$x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow$

x		−۱		۰	
x(x+۱)	+	ο	−	ο	+

$\Rightarrow -۱<x<۰$

$$-۱<x<۰ \Rightarrow \begin{cases} [x]=-۱ \\ ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰ \\ -۱<x^۳<۰ \Rightarrow [x^۳]=-۱ \end{cases} \Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]=-۱+۰-۱=-۲$$

مثال اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل عبارت $P=[\sqrt{n^۲}]+[\sqrt{n^۲+۱}]+\dots+[\sqrt{n^۲+n}]$ به‌دست آورید.

پاسخ با توجه به اینکه $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$[\sqrt{n^۲}]=[n]=n$$
$$n^۲<n^۲+۱<(n+۱)^۲ \Rightarrow n<\sqrt{n^۲+۱}<n+۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲+۱}]=n$$
$$n^۲<n^۲+۲<(n+۱)^۲ \Rightarrow n<\sqrt{n^۲+۲}<n+۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲+۲}]=n$$
$$\vdots$$
$$n^۲<n^۲+n<(n+۱)^۲ \Rightarrow n<\sqrt{n^۲+n}<n+۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲+n}]=n$$

چون تعداد براکت‌ها در صورت سؤال برابر $(n+۱)$ تا می‌باشد و دیدیم که حاصل هر براکت برابر n شد. پس مجموع داده شده برابر است با:

$$P=(n+۱)n=n^۲+n$$

ویژگی‌های تابع جزء صحیح

۱) $[x]\le x \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x \\ \text{اگر } x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x]<x \end{cases}$

۲) $[x]\le x<[x]+۱ \Rightarrow ۰\le x-[x]<۱$

توجه برای هر عدد حقیقی x می‌توان گفت $x=[x]+\alpha$ ، که α جزء اعشاری x (جزء کسری x) نامیده می‌شود و با توجه به خاصیت فوق همواره $۰\le\alpha<۱$.

نکته با توجه به خاصیت ۲ می‌توان گفت در حالت کلی $۰\le U-[U]<۱$ است.

۳) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ; \quad x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ; \quad x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

مثال $[2/4]+[-2/4]=2+(-3)=-1$ مثال $[5]+[-5]=5-5=0$

۴ $[x\pm k]=[x]\pm k\,;k\in\mathbb{Z}$

$[k\pm x]=k+[\pm x]\,;\,k\in\mathbb{Z}$

مثال $[x-3]=[x]-3$ مثال $[3-x]=3+[-x]$

۵ $[-x]=\begin{cases}-[x] & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

مثال $[-7]=-[7]=-7$ مثال $[-3/4]=-[3/4]-1=-3-1=-4$

۶ $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\ ;\ 0\le\alpha+\beta<1\\ [x]+[y]+1\ ;\ 1\le\alpha+\beta<2\end{cases}$ (α جزاعشاری x و β جزء اعشاری y است)

۷ $[2x]=\begin{cases}2[x] & ;\ 0\le\alpha<\frac{1}{2}\\ 2[x]+1 & ;\ \frac{1}{2}\le\alpha<1\end{cases}$ (α جزء اعشاری x است)

۸ $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$

مثال اگر $y=x-3[\frac{x}{3}]$ در این صورت حدود y کدام است؟

پاسخ

$y=x-3[\frac{x}{3}]=3(\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}])$

با توجه به نکته ویژگی (۲) داریم:

$0\le\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}]<1\Rightarrow 0\le 3(\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}])<3\Rightarrow 0\le y<3$

معادلات شامل جزء صحیح

در حالت کلی برای معادله $[f(x)]=n$ داریم: معادله جواب ندارد $\Leftarrow n\notin\mathbb{Z}$ اگر و اگر $n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\le f(x)<n+1$

مثال مجموعه جواب معادلات زیر را بدست آورید.

الف) $[3x]=\frac{1}{4}$ ب) $[x]+[x+2]=8$ ج) $x+[2x]+[4x]=15$

پاسخ الف) چون $\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$ پس معادله جواب ندارد $\Leftarrow [3x]=\frac{1}{4}$

ب) $[x]+[x+2]=8\Rightarrow[x]+[x]+2=8\Rightarrow 2[x]=6$

$\Rightarrow[x]=3\Rightarrow 3\le x<4$

ج) $x+[2x]+[4x]=15\Rightarrow x=\underbrace{15}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{[2x]}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{[4x]}_{\in\mathbb{Z}}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

با فرض $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+2x+4x=15\Rightarrow 7x=15\Rightarrow x=\frac{15}{7}$ غ ق ق $\notin\mathbb{Z}$

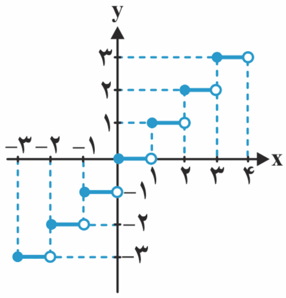
پس این معادله جواب ندارد.

تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح که به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود، تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد.

دامنه این تابع $\mathbb{R}$، و برد آن مجموعه $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) است.

با توجه به تعریف جزء صحیح برای $x\in[n,n+1)$ ؛ $(n\in\mathbb{Z})$ داریم $f(x)=n$ بنابراین نمودار تابع جزء صحیح در بازه $[-3,4)$ به صورت مقابل است.



مثال نمودار تابع $y=-[x]+1$ را در بازه $[-2,1]$ رسم کنید.

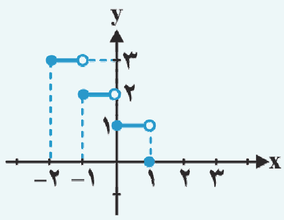
پاسخ می‌توانیم با محدوده بندی نمودار را به صورت زیر رسم کنیم:

$-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=-(-2)+1=3$

$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=-(-1)+1=2$

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0+1=1$

$x=1 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=-1+1=0 \rightarrow$ نقطه به مختصات $(1,0)$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۵. اگر $f(x)=|[5x]|-[|3x|]$ مقدار $f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟ (سنجش ریاضی ۹۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۴۶. حاصل $[(1-\sqrt{3})^{20}]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲۰

۴۷. **مهم** دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{[x]-1}}$ کدام است؟ (پیش‌دانشگاهی تجربی ۷۵)

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $(2,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۴۸. اگر $\frac{x-1}{4-x}>0$ باشد، حاصل $[\sqrt{x}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۹. اگر $[\frac{x}{2}]=1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۰. **دشوار** دامنهٔ توابع $f(x)=\frac{1}{-[\frac{x^2}{4}]}$ و $g(x)=\frac{1}{[\frac{x^2-4}{5}]}$ به ترتیب کدام است؟

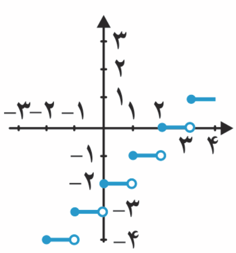
۱) $D_f=(-2,2)$ ، $D_g=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

۲) $D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ، $D_g=(-\infty,-3]\cup(-2,2)\cup[3,+\infty)$

۳) $D_f=(-2,2)$ ، $D_g=(-\infty,-3]\cup(-2,2)\cup[3,+\infty)$

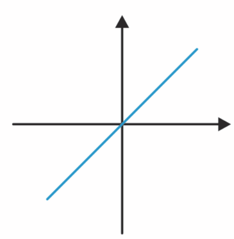
۴) $D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ، $D_g=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

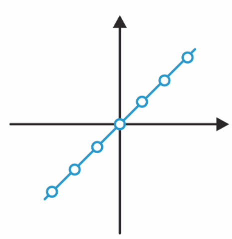
۵۱. **مهم** اگر نمودار $f(x)=[x-3]+a$ به شکل زیر باشد، مقدار a کدام است؟

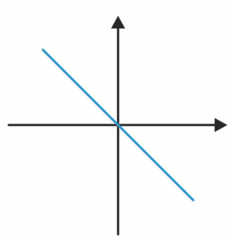


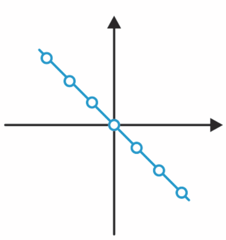
۱) ۱
۲) -1
۳) ۳
۴) -3

۵۲. نمودار $f(x)=\frac{-x}{[x]+[-x]}$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

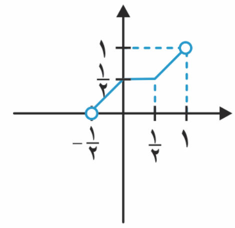
۳) 

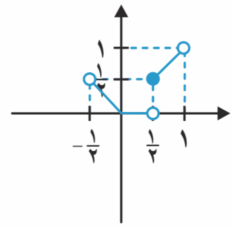
۴) 

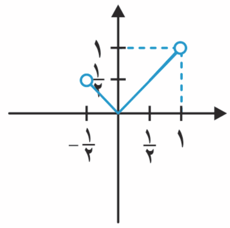
۵۳. نمودار تابع $y=[x^{۲}]$ روی بازهٔ $x\in(-۲,۲)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۱)

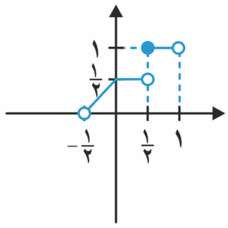
۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

۵۴. مهم نمودار تابع $f(x)=x[۲x]$ در بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},۱)$ کدام است؟

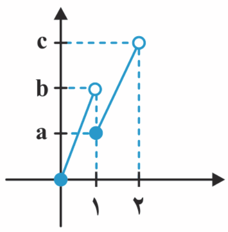
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۵. نمودار $f(x)=x(۳-[x])$ به شکل روبه‌رو است. حاصل $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟



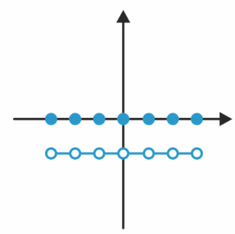
۱) ۱

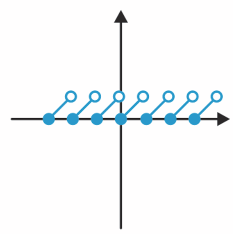
۲) ۲

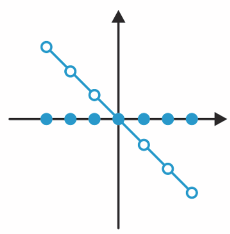
۳) ۳

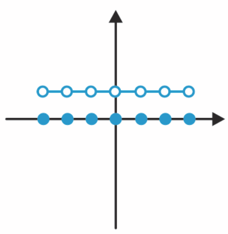
۴) ۴

۵۶. مهم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x([x]+[-x])$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۷. برد تابع با ضابطه $f(x)=[x+۲]+[-x]$ کدام است؟ (سنجش تجربی ـ ۹۴)

۱) $[۱,۲]$　　۲) $\{۱,۲\}$　　۳) $(۱,۲]$　　۴) $\{۲\}$

۵۸. مهم جواب‌های معادله $[۳x-۲]=-۴$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است.) (سنجش تجربی ۹۳)

۱) $[-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳})$　　۲) $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳}]$　　۳) $(-۱,-\frac{۲}{۳}]$　　۴) $[-۱,-\frac{۲}{۳})$

۵۹. مجموعه جواب معادلهٔ $۲[x]+[۱-x]=۲$ کدام است؟

۱) $(۲,۳)$　　۲) $(۲,۴)-\{۱\}$　　۳) $(۲,۴)$　　۴) $(۲,۳)\cup\{۱\}$

۶۰. جواب معادله $۲x+[x]=۱$ در کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $-\frac{۳}{۲}$

۶۱. مهم جواب معادلهٔ $[۳x]=۳[x]$ کدام است؟

۱) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x<K+\frac{۱}{۳}\}$

۲) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x\le K+\frac{۱}{۳}\}$

۳) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x<K+\frac{۲}{۳}\}$

۴) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x\le K+\frac{۲}{۳}\}$

۶۲. مهم اگر $[x]=[x+\frac{۱}{۲}]$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $[x]=[x-\frac{۱}{۲}]$　　۲) $۲[x]=[۲x]$　　۳) $[x]=[x-۱]$　　۴) $۲[x]=[۲x]+۱$

۶۳. تابع $f(x)=x+[x]$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a تساوی $f(a)=\frac{۷}{۳}$ برقرار است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۴}{۳}$　　۳) $\frac{۵}{۳}$　　۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ‌نامه

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

توابع گویا

۱. گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{lll} f(x)=-۱ \Rightarrow \dfrac{۲}{x+۲}=-۱ \Rightarrow & & x=-۴ \\ f(x)=۱ \Rightarrow \dfrac{۲}{x+۲}=۱ \Rightarrow & & x=۰ \\ f(x)=۲ \Rightarrow \dfrac{۲}{x+۲}=۲ \Rightarrow & & x=-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=\{-۴,-۱,۰\}$$

۲. گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳} \Rightarrow f(۲-\sqrt{۳})=\frac{۲(۲-\sqrt{۳})^۲+۲}{(۲-\sqrt{۳})^۲-۳}=\frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۴\sqrt{۳}}=$$
$$\frac{۴(۴-۲\sqrt{۳})}{۴(۱-\sqrt{۳})}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{(۴-۲\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}{(۱-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}=$$
$$\frac{-۲+۲\sqrt{۳}}{-۲}=۱-\sqrt{۳}$$

۳. گزینه ۱ از اتحاد تفاضل مکعب‌ها (چاق و لاغر) استفاده می‌کنیم:

$$x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$$
$$f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x+۴}=\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{x^۲+۲x+۴}=x-۲$$

با توجه به این که اعداد ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع هستند، داریم:

$$f(-۲)+f(-۱)+f(۰)+f(۱)+f(۲)=$$
$$-۴+(-۳)+(-۲)+(-۱)+۰=-۱۰$$

۴. گزینه ۲

$$f(a)=\frac{a-۱}{a+۱},\ f(b)=\frac{b-۱}{b+۱}$$
$$f(a)+f(b)=۰ \Rightarrow \frac{a-۱}{a+۱}+\frac{b-۱}{b+۱}=۰ \Rightarrow$$
$$\frac{(a-۱)(b+۱)+(a+۱)(b-۱)}{(a+۱)(b+۱)}=۰$$
$$\frac{ab-b+a-۱+ab-a+b-۱}{(a+۱)(b+۱)}=۰ \Rightarrow \frac{۲ab-۲}{(a+۱)(b+۱)}=۰$$
$$\Rightarrow ۲ab-۲=۰ \Rightarrow ab=۱$$

۵. گزینه ۱

$$p(x)=۳۰۰ \Rightarrow \frac{۷۰۰x}{۱۰۰-x}=۳۰۰ \Rightarrow ۷۰۰x=۳۰۰۰۰-۳۰۰x$$
$$\Rightarrow x=۳۰$$

۶. گزینه ۴

$$f(x)>۰/۰۸ \Rightarrow \frac{۰/۲۴t}{t^۲+۲}>۰/۰۸ \xrightarrow{\div ۰/۰۸}$$
$$\frac{۳t}{t^۲+۲}>۱ \Rightarrow \frac{۳t}{t^۲+۲}-۱>۰ \Rightarrow \frac{-t^۲+۳t-۲}{t^۲+۲}>۰ \xrightarrow{t^۲+۲>۰}$$
$$-t^۲+۳t-۲>۰ \Rightarrow -(t-۱)(t-۲)>۰ \Rightarrow$$

t		۱		۲	
$-(t-۱)(t-۲)$	−	۰	+	۰	−

پس پاسخ $۱<t<۲$ است که همان ساعت دوم است.

۷. گزینه ۲ مخرج نباید ۰ شود:

$$۲x+۱\neq ۰ \Rightarrow x\neq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

۸. گزینه ۲ حاصل مخرج نباید ۰ شود، پس عبارت $۳x^۲-mx+۱۲$ نباید ۰ شود، چون عبارت درجهٔ ۲ است، مقدار Δ باید منفی باشد:

$$۳x^۲-mx+۱۲ \xrightarrow{\Delta<۰} (-m)^۲-۴\times ۳\times ۱۲<۰ \Rightarrow$$
$$m^۲-۱۲^۲<۰ \Rightarrow (m-۱۲)(m+۱۲)<۰$$

m		−۱۲		۱۲	
$m^۲-۱۲$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow -۱۲<m<۱۲ \Rightarrow |m|<۱۲$$

۹. گزینه ۲ حاصل مخرج به ازای فقط یک مقدار ۰ شده است، پس $x^۲-۳x+a$ دقیقاً یک ریشه دارد، پس $\Delta=۰$.

$$x^۲-۳x+a=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} (-۳)^۲-۴a=۰ \Rightarrow a=\frac{۹}{۴}$$

پس مخرج $x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}$ است و ریشه‌اش (که همان b است) را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=۰ \Rightarrow (x-\frac{۳}{۲})^۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

پس:

$$a-b=\frac{۹}{۴}-\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

۱۰. گزینه ۴ می‌دانیم $x\neq ۰$، پس:

$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \to x+\dfrac{۱}{x}\geq ۲ \\ x<۰ \to x+\dfrac{۱}{x}\leq -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow R_f=\mathbb{R}-(-۲,۲)$$

۱۱. گزینه ۴ اگر $t=x-۱$، آن‌گاه داریم:

$$t>۰ \to t+\frac{۱}{t}\geq ۲ \Rightarrow x-۱+\frac{۱}{x-۱}\geq ۲ \Rightarrow x+\frac{۱}{x-۱}\geq ۳$$
$$t<۰ \to t+\frac{۱}{t}\leq -۲ \Rightarrow x-۱+\frac{۱}{x-۱}\leq -۲ \Rightarrow x+\frac{۱}{x-۱}\leq -۱$$

پس برد تابع $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ است.

۱۲. گزینه ۲

$$y=\frac{۲}{x} \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} y=\frac{۲}{x-۳} \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}}$$
$$y=\frac{۲}{x-۳}+۲ \Rightarrow y=\frac{۲+۲x-۶}{x-۳} \Rightarrow y=\frac{۲x-۴}{x-۳}$$

۱۳. گزینه ۴

$$y=\frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y=\frac{۱}{x}+۴$$
$$y=\frac{۱}{x}+۴ \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y=\frac{۱}{x+۳}+۴$$

تلاقی با محور yها: $y=\frac{۱}{x+۳}+۴ \xrightarrow{x=۰}$

$$y=\frac{۱}{۳}+۴=\frac{۱۳}{۳} \to (۰,\frac{۱۳}{۳})$$

تلاقی با محور xها: $y=\dfrac{1}{x+3}+4 \xrightarrow{y=0}$

$$\frac{1}{x+3}+4=0 \Rightarrow x=-\frac{13}{4} \rightarrow \left(-\frac{13}{4},0\right)$$

.۱۴ گزینه ۱

$$g(x)=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}=3+\frac{1}{x-2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(x-2)=\frac{1}{x-2} \Rightarrow f(x-2)+3=3+\frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow g(x)=f(x-2)+3$$

.۱۵ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-x-2}=\frac{x(x^2-x-2)}{x^2-x-2}=\frac{x(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=x \\ D_f=\mathbb{R}-\{-1,2\} \end{cases}$$

بنابراین نمودار گزینهٔ ۳ درست است.

.۱۶ گزینه ۴ معادلهٔ $x=\dfrac{K}{x}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x=\frac{K}{x} \Rightarrow x^2=K \xrightarrow{x>0} x=\sqrt{K}$$

$$y=x \xrightarrow{x=\sqrt{K}} y=\sqrt{K}$$

$$\left.\begin{matrix} O(0,0) \\ A(\sqrt{K},\sqrt{K}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA=\sqrt{(\sqrt{K}-0)^2+(\sqrt{K}-0)^2}=\sqrt{2K}$$

$$OA=2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2K}=2\sqrt{2} \Rightarrow 2K=8 \Rightarrow K=4$$

.۱۷ گزینه ۴

$$y=\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{b واحد به چپ}} y=\frac{1}{x+b} \xrightarrow{\text{a واحد به پایین}}$$

$$y=\frac{1}{x+b}+a \; ; \; b>1 \, , \, a<0$$

$$\xrightarrow{(-1,0)} \frac{1}{b-1}+a=0 \Rightarrow \frac{1+ab-a}{b-1}=0 \Rightarrow$$

$$ab+1=a \quad (\mathrm{I})$$

$$\xrightarrow{(0,-\frac{1}{2})} \frac{1}{b}+a=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ab+1}{b}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$ab+1=-\frac{b}{2} \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I,II}} a=-\frac{b}{2} \xrightarrow{\mathrm{II}} -\frac{b^2}{2}+1=-\frac{b}{2} \Rightarrow b^2-b-2=0 \Rightarrow$$

$$(b-2)(b+1)=0 \xrightarrow{b>0} b=2$$

$$ab+1=a \xrightarrow{b=2} 2a+1=a \Rightarrow a=-1 \Rightarrow ab=-2$$

تساوی دو تابع

.۱۸ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$$

$$g(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-4}=\frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$2x=(a+b)x+2a-2b \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow ab=1$$

.۱۹ گزینه ۲

$$\left.\begin{matrix} \{1,6\}\in D_f \\ \{3\}\in D_g \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f=D_g=\{1,3,6\} \xrightarrow{D_f} a=3$$

$$\left.\begin{matrix} (a+3,c) \xrightarrow{a=3} (6,c)\in D_f \\ (6,2)\in D_g \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=2$$

$$\left.\begin{matrix} f=\{(1,4),(3,5),(6,2)\} \\ g=\{(3,b),(6,2),(d,e)\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=5 \, , \, d=1 \, , \, e=4$$

$$\Rightarrow a+b+c+d+e=3+5+2+1+4=15$$

.۲۰ گزینه ۲ اگر ضابطه و دامنهٔ دو تابع برابر باشند، دو تابع باهم برابر هستند.

$$\left.\begin{matrix} D_f=\mathbb{R}-\{-1\} \\ D_g=\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

در تابع p مخرج نباید ۰ شود.

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \Rightarrow D_p=\mathbb{R} \, , \, D_q=\mathbb{R}$$

دامنهٔ p و q برابر با $\mathbb{R}$ است.

$$p(x)=\frac{x^3+x^2+x}{x^2+x+1}=\frac{x(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=x \Rightarrow p(x)=q(x)$$

.۲۱ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{3}{x-2} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

در تابع $g(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+cx+d}$، مخرج باید تنها بـه ازای $x=2$، برابـر با ۰ می‌شود، پس عبارت x^2+cx+d ریشهٔ مضاعف $x=2$ را دارد:

$$(x-2)^2=x^2+cx+d \Rightarrow x^2-4x+4=x^2+cx+d \Rightarrow$$

$$c=-4 \, , \, d=4$$

حال داریم:

$$\left.\begin{matrix} g(x)=\dfrac{ax+b}{(x-2)^2} \\ f(x)=\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3x-6}{(x-2)^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax+b=3x-6 \Rightarrow a=3 \, , \, b=-6$$

پس:

$$a+b+c+d=3-6-4+4=-3$$

.۲۲ گزینه ۱

$$f(x)=x-3 \Rightarrow f(-2)=-5 \Rightarrow g(-2)=-5$$

$$g(-2)=a \Rightarrow a=-5$$

برابری دو تابع را نشان می‌دهیم:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} & x\neq -2 \\ -5 & x=-2 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)} & x\neq 2 \\ -5 & x=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} x-3 & x\neq -2 \\ -5 & x=-2 \end{cases} \Rightarrow g(x)=f(x)$$

.۲۳ گزینه ۴ در گزینهٔ ۱ برابر هستند:

$$\left.\begin{matrix} g(x)=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x} \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}} f=g$$

در گزینهٔ ۲ برابر هستند:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱| \\ f(x)=|x-۱| \end{array}\right\}$$

در گزینهٔ ۳ برابر هستند:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{۱}{x} & x>۰ \\ -x-\dfrac{۱}{x} & x<۰ \end{cases} \\ g(x)=\begin{cases} x+\dfrac{۱}{x} & x>۰ \\ -x-\dfrac{۱}{x} & x<۰ \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\}} f=g$$

در گزینهٔ ۴ برابر نیستند:

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{۱}{۲})=|-\frac{۱}{۲}+۲|=\frac{۳}{۲} \\ g(-\frac{۱}{۲})=|-\frac{۱}{۲}|-|-۲|=-\frac{۳}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow f\neq g$$

۲۴. گزینهٔ ۲

$$x>۳\Rightarrow \frac{|x-۱|}{x-۱}+\frac{|x-۳|}{x-۳}=\frac{x-۱}{x-۱}+\frac{x-۳}{x-۳}=۱+۱=۲$$

$$۱<x<۳\Rightarrow \frac{|x-۱|}{x-۱}+\frac{|x-۳|}{x-۳}=\frac{x-۱}{x-۱}+\frac{۳-x}{x-۳}=۱-۱=۰$$

$$x<۱\Rightarrow \frac{|x-۱|}{x-۱}+\frac{|x-۳|}{x-۳}=\frac{۱-x}{x-۱}+\frac{۳-x}{x-۳}=-۱-۱=-۲$$

۲۵. گزینهٔ ۱ g یک تابع خطی است، پس f هم باید خطی باشد، این تنها در حالتی اتفاق می‌افتد که در عبارت $\frac{x^۲+۳x+b}{x+۲}$ صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد. پس حاصل صورت به ازای $x=-۲$ باید ۰ شود.

$$x^۲+۳x+b \xrightarrow{x=-۲} ۴-۶+b=۰\Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+۳x+۲}{x+۲} & x\neq a \\ c & x=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+۱)(x+۲)}{x+۲} & x\neq a \\ c & x=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-۲\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq -۲ \\ c & x=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+۱=dx+e\Rightarrow d=e=۱\Rightarrow g(x)=x+۱$$

$$f(-۲)=g(-۲)\Rightarrow c=-۲+۱\Rightarrow c=-۱$$

$$a+b+c+d+e=-۲+۲-۱+۱+۱=۱$$

توابع رادیکالی

۲۶. گزینهٔ ۳

$$y=\sqrt{۳۵-x^۲}\Rightarrow ۳۵-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲-۳۵\leq ۰\Rightarrow$$

$$(x-\sqrt{۳۵})(x+\sqrt{۳۵})\leq ۰\Rightarrow -\sqrt{۳۵}\leq x\leq \sqrt{۳۵}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۳۵}\simeq ۵/۹} -۵/۹\leq x\leq ۵/۹$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-۵,-۴,\dots,۴,۵\}$$

مجموعهٔ بالا شامل ۱۱ عضو است.

۲۷. گزینهٔ ۲ در عبارت $x^۲-x+۱$ ضریب $x^۲$ مثبت است و چون $\Delta<۰$ است، نتیجه می‌گیریم که حاصل $x^۲-x+۱$ همواره مثبت است. عبارت زیر رادیکال باید مثبت یا صفر شود.

$$(۴-x^۲)(x^۲-x+۱)\geq ۰ \xrightarrow{x^۲-x+۱>۰} ۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow$$

$$x^۲-۴\leq ۰\Rightarrow$$

$$(x-۲)(x+۲)\leq ۰\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

۲۸. گزینهٔ ۲ $x^۲(x^۲-۴)^۲\geq ۰\Rightarrow -x^۲(x^۲-۴)\leq ۰$

پس عبارت زیر رادیکال همواره منفی یا ۰ است و تنها هنگامی که ۰ شود می‌تواند قابل قبول باشد:

$$x^۲(x^۲-۴)^۲=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲-۴=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۲,-۲ \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع $\{-۲,۰,۲\}$ است.

۲۹. گزینهٔ ۲

$$\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}\rightarrow \frac{x-۱}{x+۱}\geq ۰\Rightarrow \begin{cases} x\neq -۱ \\ x\geq ۱ \\ x\leq -۱ \end{cases} \Rightarrow (-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)\ \boxed{\text{I}}$$

$$\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}\rightarrow \frac{x+۱}{x-۱}\geq ۰\Rightarrow \begin{cases} x\neq ۱ \\ x\geq ۱ \\ x\leq -۱ \end{cases} \Rightarrow (-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)\ \boxed{\text{II}}$$

$$\sqrt{۱-۲x}\rightarrow ۱-۲x\geq ۰\Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲}\Rightarrow (-\infty,\frac{۱}{۲}]\ \boxed{\text{III}}$$

از اشتراک بازه‌های I، II و III، بازهٔ $(-\infty,-۱)$ به‌دست می‌آید.

۳۰. گزینهٔ ۲

$$۲x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲-۲x\leq ۰\Rightarrow x(x-۲)\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

$$\Rightarrow -۲\leq -x\leq ۰\Rightarrow ۱\leq ۳-x\leq ۳\rightarrow [۱,۳]$$

۳۱. گزینهٔ ۳

$$\sqrt{x-۱}\Rightarrow x\geq ۱\ \boxed{\text{I}}$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{x-۱}}\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{x-۱}\leq ۲\Rightarrow x-۱\leq ۴$$

$$\Rightarrow x\leq ۵\ \boxed{\text{II}} \xrightarrow{\text{اشتراک II, I}} ۱\leq x\leq ۵\Rightarrow [۱,۵]$$

۳۲. گزینهٔ ۲ مسئله را در دو حالت $x\geq -۲$ و $x<-۲$ در نظر می‌گیریم:

$$x+|x+۲|\geq ۰ \xrightarrow{x\geq -۲} x+x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱$$

$$x+|x+۲|\geq ۰ \xrightarrow{x<-۲} x-x-۲\geq ۰\rightarrow$$

پس دامنهٔ $f(x)$ برابر با $[-۱,+\infty)$ است. پس دامنهٔ $f(-x)$ برابر با $(-\infty,۱]$ است که $x\leq ۱$ را می‌دهد.

۳۳. گزینهٔ ۱ مسئله را در دو حالت $x\geq ۰$ و $x<۰$ بررسی می‌کنیم:

$$x^۲-|x|-۲\geq ۰ \xrightarrow{x\geq ۰} x^۲-x-۲\geq ۰\Rightarrow (x+۱)(x-۲)\geq ۰\Rightarrow$$

$$x\geq ۲ \ \text{یا}\ x\leq -۱ \xrightarrow{x\geq ۰} x\geq ۲\ \boxed{\text{I}}$$

$$x^۲-|x|-۲\geq ۰ \xrightarrow{x<۰} x^۲+x-۲\geq ۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\geq ۰\Rightarrow$$

$$x\leq -۲ \ \text{یا}\ x\geq ۱ \xrightarrow{x<۰} x\leq -۲\ \boxed{\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{I, II}} x\geq ۲\ \text{یا}\ x\leq -۲$$

۳۴. گزینه ۴ به دلیل $\sqrt{x}$ متوجه می‌شویم که $x \ge ۰$، سپس مسئله را در دو حالت $x=۰$ و $x>۰$ بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت $x>۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x-\sqrt{x}} \to x-\sqrt{x} \ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-۱) \ge ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}>۰}$$
$$\sqrt{x}-۱ \ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x} \ge ۱ \Rightarrow x \ge ۱ \quad \boxed{\mathrm{I}}$$
$$x-\sqrt{x} < x \overset{\boxed{\mathrm{I}}}{\Rightarrow} \sqrt{x-\sqrt{x}} < \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x-\sqrt{x}} > -\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow x-\sqrt{x-\sqrt{x}} > x-\sqrt{x} \xrightarrow{x-\sqrt{x}\ge ۰} x-\sqrt{x-\sqrt{x}} \ge ۰$$

پس $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ به ازای $x \ge ۱$ تعریف می‌شود. سپس حالت $x=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(۰)=\sqrt{۰-\sqrt{۰-\sqrt{۰}}} \Rightarrow \text{تعریف می‌شود}$$

با توجه به I نتیجه می‌شود که دامنهٔ تابع $[۱,+\infty)\cup\{۰\}$ است.

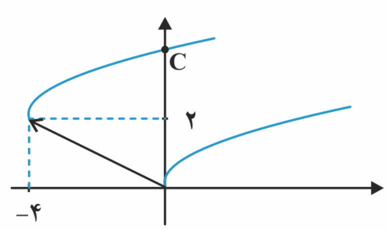
۳۵. گزینه ۱

$$f(x)=a+\sqrt{x+b} \Rightarrow x+b \ge ۰ \Rightarrow x \ge -b \Rightarrow$$
$$D_f=[-b,+\infty) \Rightarrow b=۴$$
$$\sqrt{x+b} \ge ۰ \Rightarrow a+\sqrt{x+b} \ge a \Rightarrow R_f=[a,+\infty) \Rightarrow a=-۳$$

پس با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، نقطهٔ تلاقی تابع با محور xها را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-۳+\sqrt{x+۴} \xrightarrow{f(x)=۰} -۳+\sqrt{x+۴}=۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+۴}=۳ \Rightarrow x=۵$$

۳۶. گزینه ۲ با توجه به شکل، متوجه می‌شویم که نمودار $y=a+\sqrt{x+b}$ از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ به اندازهٔ ۴ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا به دست آمده است:



$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y=\sqrt{x+۴} \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}}$$
$$y=۲+\sqrt{x+۴} \Rightarrow a=۲\ ,\ b=۴$$

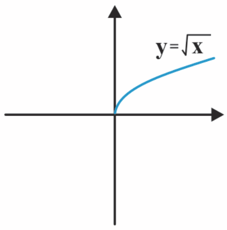
برای نقطهٔ $(۰,C)$ داریم:

$$y=۲+\sqrt{x+۴} \xrightarrow{(۰,C)} C=۲+\sqrt{۴} \Rightarrow C=۴$$

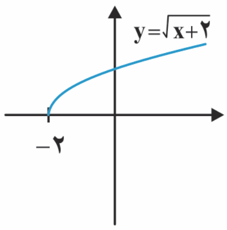
۳۷. گزینه ۲ تابع از نقاط $(۰,۱)$ و $(-۵,۰)$ گذشته است، پس:

$$y=a+\sqrt{x+b} \xrightarrow{(۰,۱)} a+\sqrt{b}=۱ \Rightarrow \sqrt{b}=۱-a$$
$$\Rightarrow b=۱-۲a+a^۲ \quad \boxed{\mathrm{I}}$$
$$y=a+\sqrt{x+b} \xrightarrow{(-۵,۰)} a+\sqrt{b-۵}=۰ \Rightarrow \sqrt{b-۵}=-a$$
$$\Rightarrow b=۵+a^۲ \quad \boxed{\mathrm{II}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{I}\ ,\ \mathrm{II}} ۱-۲a=۵ \Rightarrow a=-۲$$
$$۱=a+\sqrt{b} \xrightarrow{a=-۲} -۲+\sqrt{b}=۱ \Rightarrow b=۹ \Rightarrow ab=-۱۸$$

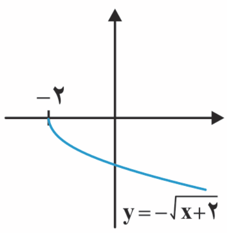
۳۸. گزینه ۲ نمودار $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



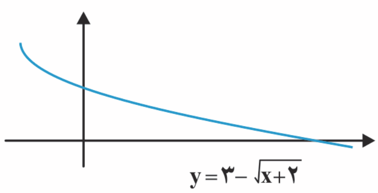
نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $y=\sqrt{x+۲}$ حاصل شود:



نمودار $y=\sqrt{x+۲}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا $y=-\sqrt{x+۲}$ حاصل شود:



نمودار $y=-\sqrt{x+۲}$ را ۳ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا $y=۳-\sqrt{x+۲}$ حاصل شود:



۳۹. گزینه ۲ ابتدا دامنهٔ تابع را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{۱-x^۲} \to ۱-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow (۱-x)(۱+x) \ge ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x+۱) \le ۰ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$$

برای برد تابع داریم:

$$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le x^۲ \le ۱ \Rightarrow -۱ \le -x^۲ \le ۰ \Rightarrow$$
$$۰ \le ۱-x^۲ \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۱-x^۲} \le ۱ \Rightarrow ۰ \le y \le ۱$$

پس برد تابع $[۰,۱]$ است.

۴۰. گزینه ۲

$$(x+۱)^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲+۲x+۱ \ge ۰ \Rightarrow x^۲+۲x+۳ \ge ۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^۲+۲x+۳} \ge \sqrt{۲} \Rightarrow f(x) \ge \sqrt{۲} \Rightarrow R_f=[\sqrt{۲},+\infty)$$

۴۱. گزینه ۲ دامنهٔ دو تابع برابر باید برابر باشند.

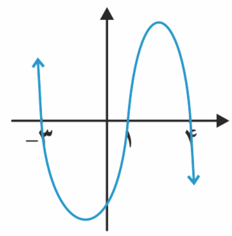
$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+۲}} \Rightarrow \frac{x}{x+۲} \Rightarrow \frac{x}{x+۲} \ge ۰ \Rightarrow$$
$$D_f=(-\infty,-۲)\cup[۰,+\infty)$$
$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۲}} \Rightarrow x \ge ۰\ ,\ x>-۲ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$$
$$\Rightarrow D_f \ne D_g \Rightarrow f \ne g$$

$$p(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x^{۲}+۱}\xrightarrow{x^{۲}+۱>۰}x\geq۰\Rightarrow D_p=[۰,+\infty)$$
$$q(x)=\sqrt{x^{۳}+x}=\sqrt{x(x^{۲}+۱)}\Rightarrow x(x^{۲}+۱)\geq۰\xrightarrow{x^{۲}+۱>۰}x\geq۰\Rightarrow D_q=[۰,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow D_p=D_q\\ p(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x^{۲}+۱}=\sqrt{x(x^{۲}+۱)}=\sqrt{x^{۳}+x}=q(x)\end{array}\right\}\Rightarrow p=q$$

۴۲. گزینهٔ ۳ جـدول تعییـن علامت عبـارت $xf(x)$ را در نظـر می‌گیریم:

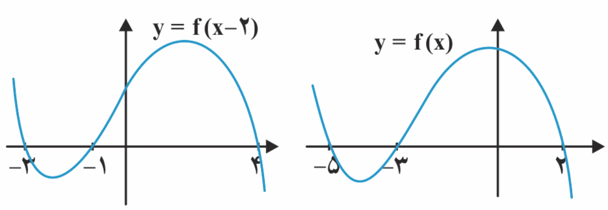
		-۳		۰		۱		۴	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	۰	$-$
$xf(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$



باید $xf(x)\geq۰$ باشد، با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$xf(x)\geq۰\Rightarrow[-۳,۰]\cup[۱,۴]$$

۴۳. گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار را ۲ واحد به چپ انتقال مـی‌دهیـم تـا نمودار $y=f(x)$ به دست آید.



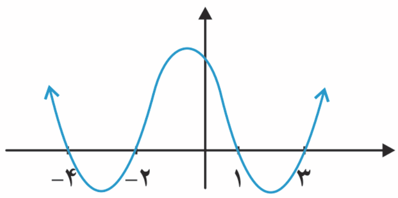
حل جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

		-۵		-۳		۰		۲	
x	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$xf(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$xf(x)\geq۰\Rightarrow x\in[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

۴۴. گزینهٔ ۳ جدول تعیین علامت عبارت $(x+۱)f(x)$ را در نظر می‌گیریم:

		-۴		-۲		-۱		۱		۳	
$x+۱$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
$(x+۱)f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$



بـا توجـه بـه عبـارت $\frac{۱}{\sqrt{(x+۱)f(x)}}$ متوجـه مـی‌شـویم کـه $(x+۱)f(x)>۰$ باشد، و با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$(x+۱)f(x)>۰\Rightarrow(-۴,-۲)\cup(-۱,۱)\cup(۳,+\infty)$$

تابع جزء صحیح

۴۵. گزینهٔ ۲

$$\left[-\frac{۵}{۲}\right]=[-۲/۵]=-۳\Rightarrow\left|\left[-\frac{۵}{۲}\right]\right|=۳$$
$$\left[\frac{۳}{۲}\right]=[۱/۵]=۱\Rightarrow\left[\left|-\frac{۳}{۲}\right|\right]=۱$$
$$f(-\frac{۱}{۲})=\left|\left[-\frac{۵}{۲}\right]\right|-\left[\left|-\frac{۳}{۲}\right|\right]=۳-۱=۲$$

۴۶. گزینهٔ ۱

$$\sqrt{۳}\simeq۱/۷\Rightarrow۱-\sqrt{۳}\simeq-۰/۷\Rightarrow-۱<۱-\sqrt{۳}<۰\Rightarrow$$
$$۰<(۱-\sqrt{۳})^{۲}<۱\Rightarrow۰<(۱-\sqrt{۳})^{۲۰}<۱\Rightarrow[(۱-\sqrt{۳})^{۲۰}]=۰$$

۴۷. گزینهٔ ۲

$$y=\frac{۱}{\sqrt{[x]-۱}}\Rightarrow[x]-۱>۰\Rightarrow[x]>۱\Rightarrow x\geq۲$$

۴۸. گزینهٔ ۲

$$\frac{x-۱}{۴-x}>۰\Rightarrow\frac{x-۱}{x-۴}<۰\Rightarrow۱<x<۴\Rightarrow۱<\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱$$

۴۹. گزینهٔ ۱

$$\left[\frac{x}{۲}\right]=۱\Rightarrow۱\leq\frac{x}{۲}<۲\Rightarrow۲\leq x<۴$$
$$A=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^{۲}}=|x-۲|\xrightarrow{x\geq۲}A=x-۲$$
$$B=\sqrt{x^{۲}-۸x+۱۶}=\sqrt{(x-۴)^{۲}}=|x-۴|\xrightarrow{x<۴}B=۴-x$$
$$\Rightarrow A+B=x-۲+۴-x=۲$$

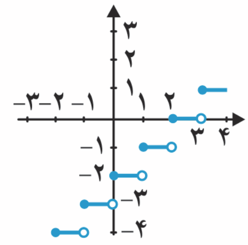
۵۰. گزینهٔ ۲ در هر تابع بررسی می‌کنیم مخرج در کجا صفر می‌شود.

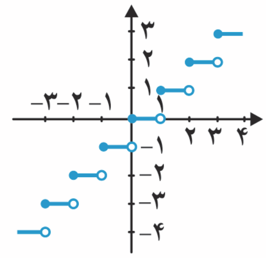
$$f(x):\left[\frac{x^{۲}}{۴}\right]=۰\Rightarrow۰\leq\frac{x^{۲}}{۴}<۱\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^{۲}}{۴}\geq۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}\\ \frac{x^{۲}}{۴}<۱\Rightarrow x\in(-۲,۲)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\cap}x\in(-۲,۲)\Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$$
$$g(x):\left[\frac{x^{۲}-۴}{۵}\right]=۰\Rightarrow۰\leq\frac{x^{۲}-۴}{۵}<۱$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^{۲}-۴}{۵}\geq۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)\\ \frac{x^{۲}-۴}{۵}<۱\Rightarrow x\in(-۳,۳)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\cap}x\in(-۳,-۲]\cup[۲,۳)\Rightarrow D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۲,۲)\cup[۳,+\infty)$$

.۵۱ گزینه ۱

$f(x)=[x-۳]+a=[x]+a-۳$

اکنون نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)=[x]$ را بررسی می‌کنیم:





با توجه به مقایسهٔ نمودار، متوجه می‌شویم که نمودار $f(x)$ انتقال یافتهٔ نمودار $g(x)$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت پایین است:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=[x]+a-۳ \\ f(x)=g(x)-۲=[x]-۲ \end{array}\right\}\Rightarrow a-۳=-۲\Rightarrow a=۱$$

.۵۲ گزینه ۲

$$x+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

پس مخرج به ازای $x\in\mathbb{Z}$ برابر با صفر می‌شود، در نتیجه دامنه به صورت $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است. اگر $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

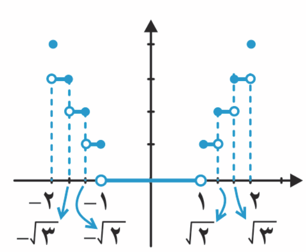
$$f(x)=\frac{-x}{[x]+[-x]}=\frac{-x}{-۱}=x$$

پس ضابطهٔ $f(x)=x$ را داریم، به طوری که نقاط به طول عدد صحیح در دامنه نیستند.

.۵۳ گزینه ۲

$$x\in(-۲,-\sqrt{۳}]\to[x^۲]=۳$$
$$x\in(-\sqrt{۳},-\sqrt{۲}]\to[x^۲]=۲$$
$$x\in(-\sqrt{۲},-۱]\to[x^۲]=۱$$
$$x\in(-۱,۱)\to[x^۲]=۰$$
$$x\in[۱,\sqrt{۲})\to[x^۲]=۱$$
$$x\in[\sqrt{۲},\sqrt{۳})\to[x^۲]=۲$$
$$x\in[\sqrt{۳},۲)\to[x^۲]=۳$$

پس نمودار به شکل زیر می‌شود:



.۵۴ گزینه ۲ تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x[۲x]=\begin{cases} -x & -\frac{۱}{۲}<x<۰ \\ ۰ & ۰\le x<\frac{۱}{۲} \\ x & \frac{۱}{۲}\le x<۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ بالا، گزینهٔ ۲ درست است.

.۵۵ گزینه ۲ تابع را به صورت چند ضابطه‌ای درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=x(۳-[x])=\begin{cases} ۳x & ۰\le x<۱ \\ ۲x & ۱\le x<۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\to y=۲x\xrightarrow{x=۱}y=۲\Rightarrow a=۲ \\ c\to y=۲x\xrightarrow{x=۲}y=۴\Rightarrow c=۴ \\ b\to y=۳x\xrightarrow{x=۱}y=۳\Rightarrow b=۳ \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a+c}{b}=\frac{۲+۴}{۳}=۲$$

.۵۶ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=۰ \\ x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -x & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ بالا، نمودار گزینهٔ ۳ درست است.

.۵۷ گزینه ۲

$$[x]+[-x]=۰ \text{ یا } -۱$$

$$f(x)=[x+۲]+[-x]=[x]+۲+[-x]=\underbrace{[x]+[-x]}_{۰ \text{ یا } -۱}+۲=۱ \text{ یا } ۲$$

.۵۸ گزینه ۱

$$[۳x-۲]=-۴\Rightarrow-۴\le۳x-۲<-۳\Rightarrow-۲\le۳x<-۱\Rightarrow$$
$$-\frac{۲}{۳}\le x<-\frac{۱}{۳}$$

.۵۹ گزینه ۴ در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=۰\quad\boxed{\text{I}}$

$$۲[x]+[۱-x]=۲\Rightarrow۲[x]+۱+[-x]=۲\Rightarrow[x]+[x]+[-x]=۱$$
$$\xrightarrow{\boxed{\text{I}}}[x]=۱\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=۱$$

حالت دوم: $x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=-۱$

$$۲[x]+[۱-x]=۲\Rightarrow۲[x]+۱+[-x]=۲\Rightarrow[x]+[x]+[-x]=۱$$
$$[x]-۱=۱\Rightarrow[x]=۲\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}x\in(۲,۳)$$

.۶۰ گزینه ۲

$$۲x+[x]=۱\Rightarrow۲x=۱-[x]\Rightarrow۲x\in\mathbb{Z}$$

چون $۲x$ عددی صحیح است، نتیجه می‌گیریم یا x عددی صحیح است یا به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ از عددی صحیح بیش‌تر است. با فرض $K\in\mathbb{Z}$، دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$x=K\to۲x+[x]=۱\Rightarrow۲K+K=۱\Rightarrow K=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{K\in\mathbb{Z}}$$

قابل قبول نیست.

$$x=K+\frac{۱}{۲}\to۲x+[x]=۱\Rightarrow۲K+۱+K=۱\Rightarrow K=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

.۶۱ گزینه ۱ فرض می‌کنیم K عددی صحیح باشد، مسئله را در سه حالت:

$K\le x<K+\frac{۱}{۳}$، $K+\frac{۱}{۳}\le x<K+\frac{۲}{۳}$ و $K+\frac{۲}{۳}\le x<K+۱$

بررسی می‌کنیم:

$$K\le x<K+\frac{۱}{۳}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} [x]=K\Rightarrow۳[x]=۳K \\ ۳K\le۳x<K+۱\Rightarrow[۳x]=۳K \end{array}\right\}\Rightarrow۳[x]=[۳x]$$

$$K+\frac{۱}{۳}\le x<K+\frac{۲}{۳}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}[x]=K\Rightarrow 3[x]=3K\\ 3K+1\le 3x<3K+2\Rightarrow [3x]=3K+1\end{array}\right\}\Rightarrow 3[x]\ne[3x]$$

$$K+\frac{2}{3}\le x<K+1\Rightarrow \left.\begin{array}{l}[x]=K\Rightarrow 3[x]=3K\\ 3K+2\le 3x<3K+3\Rightarrow [3x]=3K+2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 3[x]\ne[3x]$$

پس تنها حالت $K\le x<K+\frac{1}{3}$ پاسخ مسئله است.

۶۲. گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم K عددی صحیح باشد، مسئله را در دو حالت $K\le x<K+\frac{1}{2}$ و $K+\frac{1}{2}\le x<K+1$ بررسی می‌کنیم:

$$K\le x<K+\frac{1}{2}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}[x]=K\\ K+\frac{1}{2}\le x+\frac{1}{2}<K+1\Rightarrow [x+\frac{1}{2}]=K\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow [x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]$$

$$K+\frac{1}{2}\le x<K+1\Rightarrow \left.\begin{array}{l}[x]=K\\ K+1\le x+\frac{1}{2}<K+\frac{3}{2}\Rightarrow [x+\frac{1}{2}]=K+1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow [x]\ne\left[x+\frac{1}{2}\right]$$

پس باید $K\le x<K+\frac{1}{2}$ باشد، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}2[x]=2K\\ 2K\le 2x<2K+1\Rightarrow [2x]=2K\end{array}\right\}\Rightarrow [2x]=2[x]$$

۶۳. گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $a=K+t$ که در آن $[a]=K$ و در نتیجه $0\le t<1$، پس:

$$f(a)=a+[a]=K+t+K=2K+t$$

$$f(a)=\frac{7}{3}\Rightarrow 2K+t=\frac{7}{3}\Rightarrow 2K+t=2+\frac{1}{3}\Rightarrow K=1\,,t=\frac{1}{3}$$

$$a=K+t=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

درس دوم: آشنایی با برخی از ویژگی‌های توابع

تابع یک به یک

۶۴. گزینهٔ ۴

$$\left.\begin{array}{l}(m,3)\\ (-1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow m=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}(2m,a)\\ (-2,2)\end{array}\right\}\xrightarrow{m=-1}\left.\begin{array}{l}(-2,a)\\ (-2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

۶۵. گزینهٔ ۴

$$\left.\begin{array}{l}(2,5)\\ (m^2-m,5)\end{array}\right\}\Rightarrow m^2-m=2\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow m=2 \text{ یا } -1$$

$$m=2\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(3,1)\\ (3,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$m=-1\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(3,1)\\ (3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع نیست}$$

۶۶. گزینهٔ ۴

$$\left.\begin{array}{l}(a^2,4)\\ (6+a,4)\end{array}\right\}\Rightarrow a^2=6+a\Rightarrow a^2-a-6=0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+2)\Rightarrow a=3 \text{ یا } -2$$

اگر $a=3$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(a^2,4)\\ (9,7)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(9,4)\\ (9,7)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع نیست}$$

ولی اگر $a=-2$ باشد، تابعی یک به یک داریم.

۶۷. گزینهٔ ۴ در یک تابع یک به یک، نباید هیچ خطی موازی محور xها وجود داشته باشد که تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند. این موضوع تنها در گزینهٔ ۴ مشاهده می‌شود.

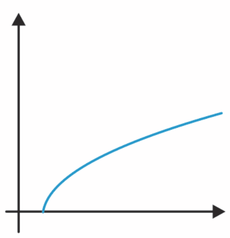
۶۸. گزینهٔ ۳

$$\left.\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=-1\Rightarrow y=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{یک به یک نیست} \quad : \text{گزینهٔ (۱)}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=-1\Rightarrow y=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{یک به یک نیست} \quad : \text{گزینهٔ (۲)}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=-1\Rightarrow y=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{یک به یک نیست} \quad : \text{گزینهٔ (۴)}$$

اما تابع $y=\sqrt{x-1}$ یک به یک است، زیرا نمودارش به شکل مقابل است و هیچ خط موازی محور xها وجود ندارد که آن را در بیش از یک نقطه قطع کند.

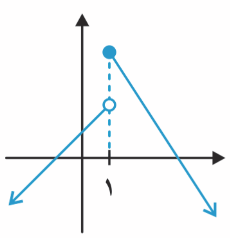


۶۹. گزینهٔ ۲ تابع f را به این صورت در نظر می‌گیریم:

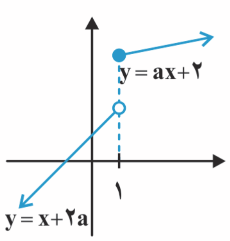
$$f:\{(1,a),(2,b),(3,c),\dots,(9,i)\}$$

چون تابع یک به یک است، نتیجه می‌گیریم که مقدار هیچ کدام از حروف $a,b,c,\dots,i$ با هم برابر نیست. پس $(a,b,c,\dots,i)$ جایگشتی از اعداد $(1,2,3,\dots,9)$ است، تعداد جایگشت‌ها می‌شود !۹.

۷۰. گزینهٔ ۲ اگر a منفی باشد، تابع یک به یک نمی‌شود، زیرا نمودارش به شکل مقابل می‌شود:



بنابراین a مثبت است و نمودار تقریباً به شکل مقابل می‌شود:



با توجه به شکل، مقدار y در نقطه‌ای به طول ۱ در خط $y=ax+2$ باید بیش‌تر از خط $y=x+2a$ یا مساوی با آن باشد:

$$\left.\begin{array}{l}y=x+2a\xrightarrow{x=1}y=1+2a\\ y=ax+2\xrightarrow{x=1}y=a+2\end{array}\right\}\Rightarrow 1+2a\le a+2\Rightarrow a\le 1$$

$$\Rightarrow 0<a\le 1$$

۷۱. گزینهٔ ۴

$$f(x)=a^2x-4ax+3=(a^2-4a)x+3$$

پس f یک تابع خطی است. یک تابع خطی یک به یک است. مگر این‌که تابع ثابت باشد، پس ضریب x باید صفر باشد:

$$a^2-4a=0\Rightarrow a(a-4)=0\Rightarrow a=0 \text{ یا } 4$$