

فهرست

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

- درس اول: هندسه تحلیلی ۸
- درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲ ۲۰
- درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی ۳۱

فصل دوم: هندسه

- درس اول: ترسیم‌های هندسی ۴۰
- درس دوم: استدلال ۴۵
- درس سوم: قضیه تالس ۴۸
- درس چهارم: تشابه مثلث‌ها ۵۴

فصل سوم: تابع

- درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع ۶۳
- درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک ۷۳
- درس سوم: اعمال جبری روی توابع ۸۱

فصل چهارم: مثلثات

- درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۹۲
- درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۹۶
- درس سوم: توابع مثلثاتی ۱۰۴

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۱۱۵
- درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۱۲۰
- درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی ۱۲۹

فصل ششم: حد و پیوستگی

- درس اول: فرآیندهای حدی ۱۳۹
- درس دوم: محاسبه حد توابع ۱۴۵
- درس سوم: پیوستگی ۱۵۳

فصل هفتم: آمار و احتمال

- درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۱۶۴
- درس دوم: آمار توصیفی ۱۷۸
- پاسخ پرسش‌های دشوار ۱۸۹

فصل

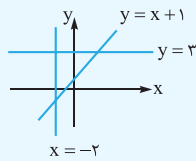


هندسة تحليلي وجبر

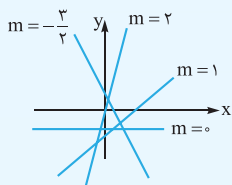
درس هندسه تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادله خط

خط راست، امتدادی است که از دو نقطه می‌گذرد. با داشتن دو نقطه A و B از خط می‌توان شکل آن را رسم کرد. معادله خط، رابطه بین X و Y است که در تمام نقاط خط برقرار می‌شود. معادله خط‌های مایل به صورت $y = ax + b$ و معادله خط افقی (موازی محور Xها) به صورت $y = k$ و معادله خط قائم (موازی محور Yها) به صورت $x = h$ است.



مقدار شیب، نشان می‌دهد که خط چه قدر مایل است (یعنی چه قدر به محور Yها نزدیک است)، شیب (ضرب زاویه یک خط) برابر است با نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، یعنی $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



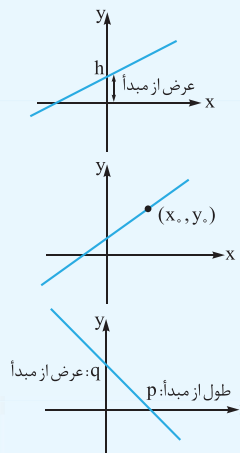
شیب خط افقی (موازی محور Xها) برابر صفر است و شیب خط عمود، موازی محور Yها تعریف نمی‌شود.

با توجه به شیب دو خط می‌توان بررسی کرد که آن دو خط نسبت به هم چگونه‌اند. دو حالت مهم داریم:

الف اگر شیب‌ها برابر باشند، دو خط موازی‌اند. **ب** اگر شیب‌ها، عکس و قرینه هم باشند، دو خط بر هم عمودند. پس وقتی دو خط با شیب m_1 و m_2

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{و شرط موازی بودن: } m_1 = m_2 \quad \text{و شرط عمود بودن: } m_1 m_2 = -1$$

با داشتن شیب، می‌توان معادله خط را نوشت:



الف اگر شیب و عرض از مبدأ را داشته باشیم، معادله خط $y = mx + h$ است.
 عرض از مبدأ \uparrow
 شیب \downarrow

ب اگر شیب و یک نقطه از خط را داشته باشیم، معادله خط $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.

یادآوری با داشتن طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط، معادله آن $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ است.

مثلاً در خط به معادله $2y + mx = 3$ ، شیب برابر است با: $2y = -mx + 3 \Rightarrow y = -\frac{m}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow$ شیب $= -\frac{m}{2}$
 شیب، همان ضریب X است؛ البته باید در طرف چپ تنها باشد.

اگر بخواهیم این خط با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد، باید شیب آن‌ها برابر شود، یعنی $2 = -\frac{m}{2}$ پس $m = -4$ است.

اگر بخواهیم این خط بر خط $y = \frac{2}{3}x - 1$ عمود شود، باید شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه هم باشند، یعنی:

$$-\frac{m}{2} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow -\frac{m}{3} = -1 \Rightarrow m = 3$$

شیب دومی
 شیب اولی



توجه سه نقطه A، B، و C زمانی روی یک خط راست (بر یک استقامت) هستند که شیب پاره‌خط‌های AB، AC، و BC برابر باشند.

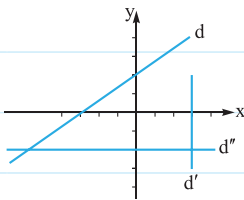
پس مثلاً باید $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ باشد.

بنابراین اگر سه نقطه $(-m+2, 3)$ و $(-1, m)$ و $(2, 1)$ روی یک خط راست باشند، داریم:

$$\frac{m-1}{-1-2} = \frac{3-1}{-m+2-2} \Rightarrow \frac{m-1}{-3} = \frac{2}{-m} \Rightarrow -m^2 + m = -6 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow m = -2 \text{ یا } 3$$

به ازای $m = -2$ نقاط $(4, 3)$ ، $(-1, -2)$ و $(2, 1)$ روی خط $y = x - 1$ هستند و به ازای $m = 3$ نقاط $(-1, 3)$ ، $(-1, 3)$ و $(2, 1)$ روی خط $2x + 3y = 7$ هستند.

پرسش‌ها



۱ معادله خط‌های روبه‌رو را بنویسید.

۲ معادله خطی را بنویسید که:

(الف) از دو نقطه $(-1, 1)$ و $(1, 2)$ عبور کند.

(ب) با شیب ۳ از نقطه $(1, 2)$ بگذرد.

(پ) از مبدأ مختصات با ضریب زاویه $-\frac{1}{4}$ رسم شود.

۳ در معادله $y = ax + b$ ، شیب خط برابر است با

در معادله‌های $ax + by = c$ یا $ax + by + c = 0$ ، شیب خط برابر است با

اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ را داشته باشیم، شیب خط برابر است با

اگر زاویه خط با محور xها را داشته باشیم، شیب خط برابر است با

۴ شیب خطی -2 است. این خط نسبت به خطوط زیر چه وضعی دارد؟ (موازی یا عمود یا متقاطع غیر عمود)

(الف) خطی با شیب ۳

(ب) خطی با شیب $-\frac{1}{3}$

(پ) خطی با شیب $\frac{1}{3}$

(ت) خطی با شیب -2

۵ کدام دو خط بر هم عمودند؟

(الف) $y = -2, x = 1$

(ب) $y = +\frac{1}{3}, y = -2$

(پ) $y = \frac{2}{3}x, 4y + 6x = 11$

(ت) $y = 2x - 1, x = 2y - 1$

۶ الف) شیب خط $y = 3 - (k+1)x$ چه قدر است؟

ب) به ازای کدام مقدار k ، این خط موازی نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) است؟

پ) به ازای کدام مقدار k ، این خط بر خط $y = 2 - 3x$ عمود است؟

ت) به ازای $k = 1$ ، خط مذکور را رسم کنید؛ نمودار آن از کدام نواحی می‌گذرد؟

ث) عرض از مبدأ آن به ازای $k = 2$ چه قدر است؟

ج) به ازای کدام مقدار k ، عرض از مبدأ آن $\frac{1}{3}$ است؟

۷ رئوس مثلثی $A(2, 3)$ ، $B(k, 1)$ و $C(-1, 0)$ هستند. شیب اضلاع را حساب کنید. آیا مقداری از k وجود دارد که BC و AB بر هم عمود

شوند؟ (یعنی $\hat{B} = 90^\circ$ باشد.)

۸ دو سر پاره خط AB ، نقاط $A(3, 1)$ و $B(-1, 2)$ هستند.

الف) معادله خطی را بیابید که در نقطه A بر پاره خط AB عمود شود؟

ب) معادله خطی را بیابید که از مبدأ به موازات AB رسم شود؟

۹ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی $3 - 5$ و 5 هستند.

الف) معادله این خط را بنویسید و شیب آن را تعیین کنید؟

ب) کدام نقطه روی این خط دارای عرض 2 است؟

پ) نقطه‌ای با طول -1 بر این خط بیابید؟

ت) این خط و محورهای مختصات چه مساحتی محصور می‌کنند؟

۱۰ به ازای کدام مقدار m ، نقاط $(-3, -2)$ ، $(5, 2)$ و $(m+4, m-1)$ روی یک خط راست اند؟

۱۱ از نقطه $A(3, 4)$ خطی بر $l: 2x - y = 1$ عمود می‌کنیم. معادله این خط و مختصات پای قائم (محل عمودشدن) کدام است؟

— (فاصله دو نقطه و نقطه وسط پاره‌خط) —

فاصله دو نقطه از هم یا طول پاره‌خط AB به صورت $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

پس فاصله یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$AB = |y_2 - y_1|$$

اگر دو نقطه A و B دارای طول مساوی باشند:

$$AB = |x_2 - x_1|$$

و اگر دارای عرض مساوی باشند:

نقطه وسط پاره‌خط AB ، نقطه‌ای با مختصات $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ است. مثلاً در مثلثی با رئوس $A(1, -1)$ ، $B(3, 1)$ و $C(2, 4)$ داریم:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow AC = \sqrt{(2-1)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{26}$$

$$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

وسط ضلع AB نقطه $M(\frac{3+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}) = (2, 0)$ است؛ بنابراین طول میانه CM برابر است با:

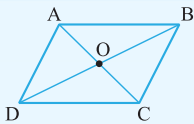
$$x_C = x_M \Rightarrow CM = |y_M - y_C| = 4 - 0 = 4$$

توجه در مورد مثلث، ۲ نکته داریم. یکی برای محاسبه مساحت و دیگری برای مرکز ثقل (مختصات برخورد میانه‌ها)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

$$G = \frac{A+B+C}{3} = (\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3})$$

توجه در مورد متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، با توجه به شرط منصف‌بودن قطرها، می‌توان ثابت کرد که:



$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} = x_O$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} = y_O$$

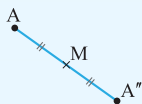
پس مثلاً در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با رئوس $A(1, -1)$ و $B(0, 2)$ ، $C(3, 1)$ و $D(4, -2)$ است تا شرط

$$A + C = B + D$$

هم برای x و هم برای y برقرار شود.

توجه با استفاده از مفهوم نقطه وسط پاره‌خط و قرینه می‌توان نشان داد که قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به نقطه $M(\alpha, \beta)$ ، نقطه‌ای با

مختصات $A''(2\alpha - x_1, 2\beta - y_1)$ است. بنابراین قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به مبدأ نقطه $A''(-x_1, -y_1)$ است.



پرسش‌ها



۱۲ دو نقطه $A(6, 7)$ و $B(4, -5)$ داده شده‌اند.

الف) فاصله‌های AB ، A و B را پیدا کنید.

ب) وسط A و B چه مختصاتی دارد؟

پ) معادله عمودمنصف AB کدام است؟

۱۳ با استفاده از طول اضلاع و شیب‌ها، نشان دهید مثلث با رئوس $A(8, 6)$ ، $B(4, 8)$ و $C(2, 4)$ قائم‌الزاویه است؟

۱۴ مثلث با رئوس $(1, 6)$ ، $(2, -2)$ و $(-3, -1)$ چه نوعی است؟

۱۵ اگر دو رأس از مثلث متساوی‌الاضلاعی $(3, 0)$ و $(-1, 0)$ باشند، مختصات رأس سوم کدام است؟ با رسم شکل نشان دهید چرا مسئله دو

جواب دارد؟

۱۶ دو سر قطری از یک دایره $A(-1, 8)$ و $B(5, -2)$ هستند.

الف) مرکز دایره در کدام نقطه است؟

ب) شعاع دایره چه قدر است؟

پ) آیا نقطه $(-4, 6)$ روی این دایره است؟

ت) اگر نقطه $(1, k)$ روی این دایره باشد، k کدام است؟ راهنمایی: به تعریف دایره دقت کنید.

ث) این دایره روی محور y ها، وتری با کدام طول ایجاد می‌کند؟ راهنمایی: نقاط برخورد با محور y ها را پیدا کنید.

۱۷ دو سر پاره خطی داده شده‌اند. معادله عمودمنصف پاره خط را بنویسید (یعنی معادله خطی که نقاط روی آن از دو سر پاره خط به یک فاصله‌اند).

الف) $(-1, 2), (7, 4)$

ب) $(1, 4), (1, 7)$

پ) $(2, -1), (0, -1)$

ت) مبدأ، $(4, -2)$

ث) $(b, a), (a, b)$

ج) $(-a, a), (a, -a)$

۱۸ مختصات نقطه‌ای که از سه نقطه $A(8, -2)$ و $B(6, 2)$ ، $C(3, 3)$ به یک فاصله باشد، بیابید؟ (یک بار از مفهوم عمودمنصف استفاده کنید و

یک بار نقطه مورد نظر را $M(\alpha, \beta)$ در نظر بگیرید و با شرط‌های $AM = BM = CM$ به معادله‌هایی بر حسب α و β برسید.)

توجه: این نقطه مرکز دایره‌ای است که از ۳ نقطه A ، B ، C می‌گذرد.

۱۹ مرکز و شعاع دایره‌ای که از نقاط $(2, -1)$ ، $(0, 0)$ و $(-2, -4)$ می‌گذرد، بیابید.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که این نقاط، سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

۲۰ آیا نقاط زیر، رئوس یک متوازی‌الاضلاع‌اند؟

الف) $(-5, -1), (1, 2), (5, 1), (-2, -1)$

ب) $(0, 1), (-1, -2), (-3, k), (b, -1)$

۲۱ سه رأس مستطیلی $C(0, 9)$ ، $B(-4, -1)$ و $A(3, 2)$ هستند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید. (ابتدا معلوم کنید در مثلث ABC کدام زاویه قائمه است؟)

۲۲ سه رأس از یک لوزی، نقاط $C(-8, -1)$ ، $B(-2, -7)$ و $A(6, 7)$ هستند. رأس چهارم لوزی در کدام نقطه است؟ (اول معلوم کنید از بین AB ، AC و BC کدامها مساوی اند؟)

الف) مساحت مثلث با رئوس $C(5, 7)$ ، $B(1, -3)$ و $A(-5, 1)$ کدام است؟

ب) مختصات نقطه برخورد ۳ میانه و طول ارتفاع C را پیدا کنید.

پ) معادله و طول میانه AM کدام است؟

۲۳ قرینه نقطه $A(2, 3)$ نسبت به نقطه $M(-4, 1)$ کدام است؟

۲۴ مرکز دایره‌ای $(2, 3)$ و یک سر قطری از آن $(-1, 2)$ است.

الف) مختصات سر دیگر این قطر را بیابید.

ب) معادله قطری از این دایره که موازی خط $3x - 2y = 1$ باشد را بیابید.

۲۵ وسط اضلاع مثلثی، نقاط $N(-1, 1)$ ، $M(1, 2)$ و $P(3, 0)$ هستند.

الف) مختصات مرکز ثقل را بیابید.

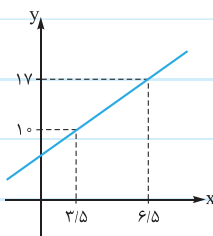
ب) با توجه به این که میانه‌ها در نقطهٔ مرکز ثقل به نسبت ۲ به ۱ متقاطع‌اند، مختصات رئوس را بیابید.

۲۶ قرینه و تصویر نقطهٔ $A(3, -1)$ را نسبت به خط $l: x - 2y = 1$ بیابید.

راهنمایی: ابتدا معادلهٔ خطی گذرنده از A و عمود بر l را بنویسید، سپس نقطهٔ تلاقی آن خط و l را بیابید.

۲۷ نمودار یک تابع خطی به صورت مقابل داده شده است.

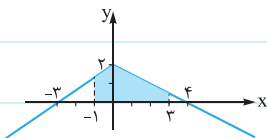
الف) عرض نقطه با طول ۵ چه قدر است؟



ب) میانگین مقادیر تابع در فاصلهٔ $[3/5, 6/5]$ کدام است و در کدام طول رخ می‌دهد؟

ب) عرض نقطه با طول‌های ۲ و ۷ روی این خط را بیابید.

۲۸ مساحت رنگی در شکل مقابل کدام است؟



۲۹ با رسم مدارها و نصف‌النهارها، سطح کرهٔ زمین تقریباً مثل دستگاه مختصات می‌شود، مثلاً مرکز شهر

تهران در طول جغرافیایی تقریبی ۵۱ و عرض جغرافیایی ۳۵ قرار دارد. اگر اختلاف یک واحدی طول یا عرض

جغرافیایی ۱۱۲ کیلومتر باشد و مکه در طول و عرض جغرافیایی ۴۰ و ۲۱ باشد، فاصلهٔ طولی و عرضی و فاصلهٔ

مستقیم تهران تا مکه را بیابید.



۳۰ عرض جغرافیایی شهرهای توکیو، آتن و لیسبون هر سه حدود ۳۶° است. طول جغرافیایی آن‌ها به ترتیب ۱۳۹° شرقی، ۲۱° شرقی و ۹° غربی

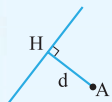
است. فاصلهٔ این شهرها از هم چه قدر است؟



۳۱ دو پمپ بنزین در محله‌ای وجود دارد که مختصات قرارگیری آن‌ها به صورت $(۴, ۳)$ و $(۸, ۱)$ ثبت شده است. می‌خواهیم هر اتومبیل به مختصات مشخص به پمپ بنزین نزدیک‌تر برود. معادله خطی که مرز دو ناحیه برای انتخاب پمپ بنزین را نشان می‌دهد، کدام است؟

— فاصله نقطه از خط —

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$d = AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

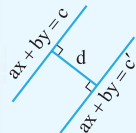
$$\frac{|۳(-۱) - ۴(۱) - ۲|}{\sqrt{۳^2 + (-۴)^2}} = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$$

مثلاً فاصله نقطه $(-۱, ۱)$ از خط $۳x - ۴y - ۲ = 0$ برابر است با:

$$OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

پس فاصله مبدأ مختصات از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

برای محاسبه فاصله دو خط موازی، باید اول معادله آن‌ها را به شکل $\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c' \end{cases}$ (یعنی قسمت x و y دقیقاً یکسان و اعداد ثابت در یک طرف) درآوریم، پس فاصله برابر است با:



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین فاصله دو خط $۲x - y = ۶$ و $۲x - y = -۴$ از هم برابر است با $\frac{|۶ - (-۴)|}{\sqrt{۲^2 + (-۱)^2}}$ ، یعنی $\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$ یا $۲\sqrt{۵}$.

پرسش‌ها ?

۳۲ فاصله نقطه $P(-۱, ۲)$ از خط به معادله $x - ۲y - ۶ = 0$ کدام است؟

۳۳ نقطه به طول ۳ روی خط $۲x - y = ۵$ از خط گذرنده از نقاط $(۶, ۱)$ و $(۴, ۰)$ به کدام فاصله است؟

۳۴ شیب و عرض از مبدأ خطی به ترتیب $\sqrt{۳}$ و -۲ هستند. مبدأ مختصات از این خط چه قدر فاصله دارد؟

۳۵ مساحت مربعی را حساب کنید که:

الف) رأسش $A(۱, ۲)$ و معادله یک ضلع آن $x - y = ۲$ باشد.

ب) یک رأسش $A(-1, 1)$ و معادلهٔ یک قطرش $y = \frac{1}{3}x - 1$ باشد.

ب) نقطهٔ برخورد دو قطرش $O(1, 3)$ و معادلهٔ یک ضلع آن $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$ باشد.

ت) دو ضلع آن روی خطوط $y = 2x - 1$ و $4x - 2y + 1 = 0$ باشند.

۳۶) معادلهٔ دو قطر از دایره‌ای $x - y = 1$ و $y - 2x = 7$ هستند.

الف) مرکز آن، کدام نقطه است؟

ب) اگر این دایره بر خط $x + y = 6$ مماس باشد، شعاع آن کدام است؟

ب) خطوط با شیب ۲ به معادلهٔ $y = 2x + m$ بر این دایره مماس‌اند. m را بیابید.

۳۷) دو نقطه روی خط $y = x - 2$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها از خط $3x - 4y = 1$ برابر $1/2$ است. این نقاط را پیدا کنید.

۳۸) دو خط به معادلات $x - y = 1$ و $x - y = -3$ بر دایره‌ای مماس‌اند. مساحت این دایره چه قدر است؟

۳۹ فاصله نقطه $A(3, -1)$ را از خطوط زیر بیابید:

الف) $y = 3$

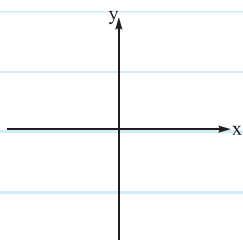
ب) $x = 4$

پ) محور y ها

ت) محور x ها

در مورد فاصله نقطه از محورها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴۰ کدام نقاط در صفحه مختصات وجود دارند که از دو محور به یک فاصله باشند؟



۴۱ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ داریم. معادله خطوط مماس بر آن به صورت $x + by = c$ است. چه ارتباطی بین b و c وجود دارد؟

راهنمایی: فاصله مرکز از مماس برابر شعاع است.

۴۲ دو خط موازی $x - 2y = 1$ وجود دارند که از آن به فاصله $\sqrt{5}$ باشند. معادله این دو خط را بیابید.

۴۳ نقطه $M(x, y)$ طوری حرکت می‌کند که از دو خط $x - 2y = 1$ و $2x + y = 1$ به فاصله مساوی باشد. معادله مسیر حرکت M چگونه است؟

تعبیر هندسی این مسئله چیست؟

۴۴ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی، مقادیر مثبت p و q هستند. فاصله مبدأ از این خط چه قدر است؟

۴۵ در مثلث با رئوس $A(1, -1)$ ، $B(3, 2)$ و $C(-1, 4)$ ، طول ارتفاع BH کدام است؟

۴۶ فاصله نقطه $A(4, k)$ از خط $x - 2y = 1$ نصف فاصله آن از خط $x + y = 3$ است. مقادیر k کدام اند؟

۴۷ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, -1)$ گذشته و فاصله اش از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ است. چرا مسئله دو جواب دارد؟

۴۸ دو خط $2x + y = 1$ و $2y + x = 3$ بر دایره ای مماس اند، اگر مرکز دایره روی نیمساز ربع اول باشد، شعاع آن را بیابید.

راهنمایی: فاصله مرکز دایره از 2 خط مماس با هم مساوی است.

۲

درس

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

— (روش تغییر متغیر برای حل معادله) —

در سال‌های قبل، روش‌های دلتا، تجزیه، تبدیل به مربع کامل و ... را برای حل معادله درجه دوم دیدید. بعضی از معادله‌ها درجه دوم نیستند، اما قابل تبدیل به درجه دوم‌اند. یعنی اگر عبارتی را A بگیریم، قیافه معادله شبیه درجه ۲ می‌شود. معمولاً باید عبارتی که به توان ۲ می‌رسد را متغیر جدیدی بنامیم.

این معادله‌ها را ببینید:

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

x^2 را بنامیم:

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (u+1)(u-2) = 0 \Rightarrow u = -1 \text{ یا } 2$$

پس داریم:

$$\begin{cases} u = x^2 = -1 \\ u = x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{این امکان ندارد} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$(x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1) + 24 = 0$$

$x^2 - 1$ را بگیریم:

$$u^2 - 11u + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (u-3)(u-8) = 0 \Rightarrow u = 3 \text{ یا } 8$$

پس داریم:

$$\begin{cases} u = x^2 - 1 = 3 \\ u = x^2 - 1 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{2x}\right) - 6 = 0$$

$\frac{x+1}{2x}$ را بگیریم:

$$u^2 - u - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (u-3)(u+2) = 0 \Rightarrow u = 3 \text{ یا } -2$$

پس داریم:

$$\begin{cases} u = \frac{x+1}{2x} = 3 \\ u = \frac{x+1}{2x} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 6x \Rightarrow x = \frac{1}{5} \\ x+1 = -4x \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

پرسش‌ها ?

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

ب) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$