

توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

پادآوری تابع

تعريف تابع

با «تابع» در سال قبل آشنا شدیم. ابتدا مطالب سال قبل را با هم مرور می‌کنیم تا **قشگی پایام تو باغ!** بعد از رویم سراغ مباهث پیدا کرد.
تابع: یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B را تابع گوییم، هرگاه به هر عضو از مجموعه A (مجموعه متغیرهای مستقل) دقیقاً یک عضو از مجموعه B نظیر شود. در واقع تابع مثل یک دستگاه است که به ازای هر ورودی اش دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

روش‌های نمایش تابع

یک رابطه بین اعضای دو مجموعه را به روش‌های مختلفی می‌نماییم نشان دهیم. سال قبل با روش‌های «نمایش زوج مرتبی»، «نمایش جدولی»، «نمایش پیکانی (نمودار ون)»، «نمایش مختصاتی (نموداری)» و «نمایش توصیفی» آشنا شدیم. سه روش پر کاربرد آن‌ها را با هم دوره می‌کنیم:

۱- نمایش زوج مرتبی: اگر رابطه‌ای را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نشان دهیم، به شرطی می‌تواند تابع باشد که مُؤلفه‌های اول آن تکراری نباشند؛ اگر مُؤلفه‌های اول دو زوج مرتب با هم برابر بودند، شرط آن که آن رابطه تابع باشد این است که مُؤلفه‌های دوم همان دو زوج مرتب نیز با هم برابر باشند.

برای مثال رابطه $\{(1, 1), (1, 6), (2, 5), (1, 1)\}$ تابع نیست، زیرا در دو زوج مرتب $(1, 6)$ و $(1, 1)$ مُؤلفه‌های اول با هم برابر نیستند.

اما رابطه $\{(1, \sqrt{36}), (1, 6), (2, 5), (1, 1)\}$ تابع است، زیرا در دو زوج مرتب $(1, 6)$ و $(1, \sqrt{36})$ که مُؤلفه‌های اولشان با هم برابر است، مُؤلفه‌های دومشان نیز برابر است ($\sqrt{36} = 6$).

نتیجه اگر رابطه $\{(3, 2), (3, a+3), (1, a-1), (2, 5), (2, a+3)\}$ نشان‌دهنده یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

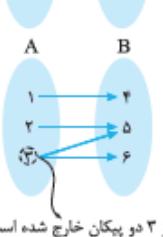
۱) $a=4$ ۲) $a=3$ ۳) $a=2$ ۴) $a=1$

پاسخ گزینه: می‌رویم سراغ دو زوج مرتب $(2, 5)$ و $(2, a+3)$ که مُؤلفه‌های اولشان یکسان است. برای این‌که این رابطه تابع باشد، باید مُؤلفه‌های دوم این دو زوج مرتب نیز با هم برابر باشند:

۲- نمایش پیکانی (نمایش یا نمودار ون): اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را توسط نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

برای مثال، نمایش پیکانی رویه‌رو تابع است، زیرا از هر عضو مجموعه A، دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

ولی نمایش پیکانی رویه‌رو، تابع نیست، زیرا از عضو «۳»، دو پیکان خارج شده است.



از ۳ دو پیکان خارج شده است.



برای تشخیص تابع بودن در نمایش پیکانی، پیکان‌هایی که به مجموعه B وارد می‌شوند مهم نیستند. یعنی اگر به عضوی از مجموعه B هیچ پیکانی وارد نشود یا چندین پیکان وارد شود، مشکلی در تابع بودن پیش نمی‌آید. (فقط اعضاي مجموعه A را پيسبا !)

۳-نمایش مختصاتی (نمایش با نمودار): اگر نمودار یک رابطه ریاضی بین x و y رسم شود، برای تشخیص این که، رابطه مورد نظر تابع است یا نه، کافی است جمله زیر را رعایت کنیم:

«اگر حتی یک خط عمودی محور y ها (یعنی یک خط عمودی) پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار، تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، آن نمودار، تابع است.»

برای مثال شکل مقابل نشان‌دهنده یک تابع است، زیرا هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، یا نمودار را قطع نمی‌کند یا حداقل در یک نقطه آن را قطع می‌کند.

ولی شکل مقابل نشان‌دهنده یک تابع نیست، زیرا خطی موازی محور y ها پیدا می‌شود که نمودار را در بیش از یک نقطه (در اینجا در دو نقطه) قطع کند.

این خط عمودی نمودار را در دو نقطه قطع کرده است.

ضابطه جبری تابع

در بعضی توابع بین مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌های یک ضابطه (فانکن) وجود دارد. برای مثال در تابع $\{(1,4), (2,5), (4,7), (-1,2), (0/5, 3/5)\}$ مؤلفه دوم هر زوج مرتب، ۳ واحد از مؤلفه اول آن بیشتر است. در واقع اگر (x, y) عضو تابع f باشد، y سه واحد از x بیشتر است، یعنی $y = x + 3$. به معادله $y = x + 3$ ، ضابطه جبری این تابع می‌گوییم و آن را به صورت $y = x + 3$ هم می‌نویسیم. در واقع تابع مثل یک دستگاه عمل می‌کند:

x وارد آن می‌شود.

- داخل این دستگاه یک سری بلا سر x می‌آید و نتیجه را به عنوان خروجی می‌دهد.
- به خروجی این دستگاه، $y = f(x)$ می‌گوییم.
- وقتی می‌نویسیم $y = f(x)$ ، یعنی y تابعی از x است. یعنی مقدار y بستگی به این دارد که مقدار x چه قدر باشد (y از x تبعیت می‌کند)؛ در واقع x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.

نکته دستگاه روبه‌رو، ورودی را ابتدا در ۳ ضرب کرده و سپس ۱ واحد از آن کم می‌کند و به خروجی می‌دهد. اگر عدد ۲۰ از دستگاه خارج شده باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$x \xrightarrow{f} 20$$

۵۷ (۴)

۵۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ گزینه ابتدا باید ضابطه تابع را به دست آوریم. این تابع ورودی (x) را ابتدا در ۳ ضرب می‌کند ($3x$) و سپس یک واحد از آن کم می‌کند ($-1 - 3x$) و به خروجی می‌دهد؛ یعنی ضابطه آن به صورت $y = 3x - 1$ است. حالا اگر خروجی ۲۰ باشد، یعنی $3x - 1 = 20 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{3} = 7$ است، پس:

پس ورودی $x = 7$ بوده است.

مقدار تابع در یک نقطه

۶۱

در تابع $y = f(x)$ ، برای آن که مقدار تابع f را به ازای $x = a$ به دست آوریم، کافی است در ضابطه تابع جای تمام x ‌ها، عدد a را قرار دهیم.
مقدار تابع f در نقطه $x = a$ را با $f(a)$ نشان می‌دهیم.

(۹۵) (ج)

۲ (۴)

تست اگر $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 7}$ باشد، حاصل $f(4) - f(2\sqrt{2})$ کدام است؟

۲ (۳)

$\sqrt{2}$

۱ (۱)

اول $f(4)$ را حساب می‌کنیم، باید جای x عدد ۴ را قرار دهیم.

پاسخ گزینه

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7} \Rightarrow f(4) = \sqrt{4^2 - 7} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3$$

حالا $f(2\sqrt{2})$ را حساب می‌کنیم، این بار باید جای x عدد $2\sqrt{2}$ را قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7} \Rightarrow f(2\sqrt{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 7} = \sqrt{(4 \times 2) - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1} = 1$$

حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

دامنه و برد یک تابع

گفته‌یم تابع مثل یک دستگاه است که ورودی می‌گیرد و خروجی می‌دهد.

دامنه: در تابع f ، مجموعه همه مقدارهایی که متغیر مستقل (x) می‌تواند بگیرد را دامنه f می‌گوییم. در واقع دامنه f ، مجموعه همه ورودی‌های تابع f است که با D_f نشان می‌دهیم.

برد: در تابع f ، مجموعه همه مقدارهایی که متغیر وابسته (y) می‌تواند بگیرد را برد f می‌گوییم. در واقع برد f ، مجموعه همه خروجی‌های تابع f است که با R_f نشان می‌دهیم.

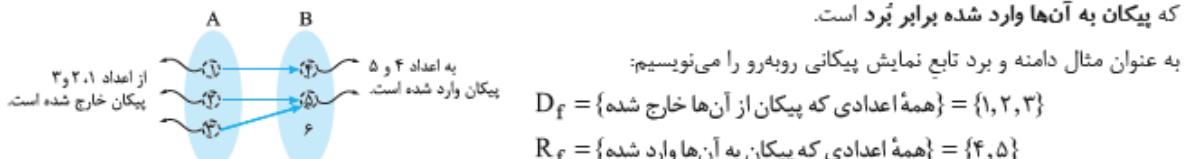
تعیین دامنه و برد در غایش‌های مختلف یک تابع

۱- نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی، مجموعه همه مؤلفه‌های اول برابر دامنه و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم برابر برد تابع است.

به عنوان مثال در تابع $\{(1, 3), (2, 5), (4, 3)\}$ ، دامنه و برد برابر است با:

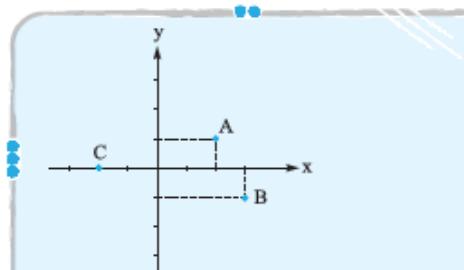
$$D_f = \{1, 2, 4\} \quad R_f = \{3, 5\} \quad \text{همه مؤلفه‌های اول} = \{1, 2, 4\} \quad \text{همه مؤلفه‌های دوم} = \{3, 5\}$$

۲- نمایش پیکانی (نمودار ون): در نمایش پیکانی، مجموعه همه اعضایی که پیکان از آن‌ها خارج شده است، برابر دامنه و مجموعه همه اعضایی که پیکان به آن‌ها وارد شده برابر برد است.



۳- نمایش مختصاتی: در نمایش مختصاتی، مجموعه طول (x) همه نقاط برابر دامنه و مجموعه عرض (y) نقاط برابر برد است.

مثال دامنه و برد تابع رویه‌رو را بنویسید.



$$A = (1, 1), B = (-1, 0), C = (-2, 0)$$

$$D_f = \{-2, -1, 1\}$$

$$R_f = \{0, 1\}$$

پاسخ مختصات نقاط تشکیل‌دهنده تابع را می‌نویسیم:

مجموعه شامل x ‌های نقاط بالا، دامنه تابع است:

مجموعه شامل y ‌های نقاط بالا، برد تابع است:

مثال اگر $f(x) = x^2 - 1$ باشد، برد f را تعیین کنید.

پاسخ برد f خروجی‌هایی است که تابع f به ازای ورودی‌هایش (یعنی اعضای دامنه که شامل $-1, 0, 1, 2$ هستند) تولید می‌کند؛ پس باید تک‌تک اعضای دامنه را جای x در ضابطه $-1 = f(x) = x^2 - 1$ قرار دهیم و خروجی‌هایشان را پیدا کنیم. مجموعه این خروجی‌ها برابر برد است.

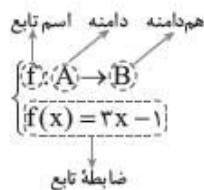
$$f(0) = 0^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ است.}$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ است.}$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ است.}$$

خروجی‌های این تابع فقط اعداد 0 و 1 هستند؛ پس برد این تابع مجموعه $\{0, 1\} = R_f$ است.

نمایش تابع با ضابطه به صورت کامل!



در نمایش تابع f با ضابطه که به صورت کامل به شکل رویه‌رو است، باید بدانیم:

• اسم تابع f است.

• دامنه آن مجموعه A است.

- به B هم‌دامنه تابع می‌گوییم نه برد آن. بدانید که برد همواره زیرمجموعه هم‌دامنه است.
- در خط دوم هم ضابطه تابع نوشته می‌شود که در اینجا برای مثال $1 = f(x) = 2x - 1$ آمده است؛ یعنی می‌گوید هر کدام از اعضای دامنه (A) که وارد تابع می‌شوند، «سه برابر آن منهای یک» از آن خارج می‌شوند.

نمونه تابع $f : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ با کدام گزینه برابر است؟

$$\{(-1, 0), (1, 17)\} \quad (1)$$

$$\{(-1, 1), (1, -1)\} \quad (2)$$

$$\{(-1, 2), (1, 17)\} \quad (3)$$

$$\{(-1, 1)\} \quad (4)$$

پاسخ گزینه در اینجا دامنه تابع، مجموعه $\{-1, 1\}$ است، پس اعداد -1 و 1 حق ورود به تابع f را دارند. این دو عدد را جای x در ضابطه $+1 = f(x) = x^2 + 1$ قرار می‌دهیم تا بینیم چه اعدادی از آن خارج می‌شوند:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{به ازای } -1 \text{ عدد } 2 \text{ خارج می‌شود.}$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{به ازای } 1 \text{ عدد } 2 \text{ خارج می‌شود.}$$

در نتیجه تابع f دارای دو زوج مرتب $(-1, 2)$ و $(1, 2)$ است و آن را به صورت $\{(-1, 2), (1, 2)\} = f$ می‌توانیم بنویسیم.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر رابطه $\{(1, 5), (2, 1-a), (-3, a), (2, 6), (1, 2b-1)\}$ نشان‌دهنده یک تابع باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

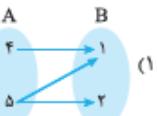
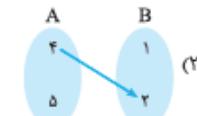
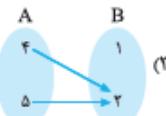
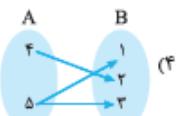
$$1 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

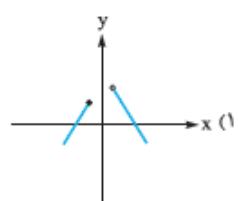
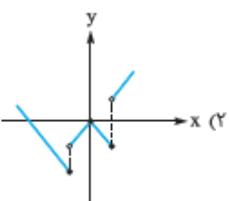
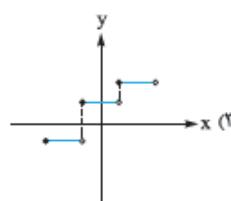
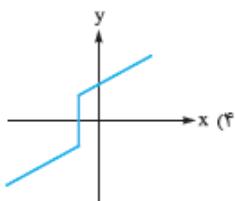
$$12 \quad (3)$$

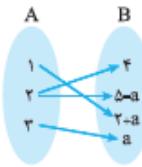
$$-13 \quad (4)$$

۲- کدامیک از نمودارهای پیکانی زیر نشان‌دهنده یک تابع از مجموعه B به مجموعه A است؟



۳- کدامیک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده یک تابع نیست؟





-۴- اگر نمودار پیکانی رو به رو نشان دهنده یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

۱ (۲)

-۱ (۱)

-۳ (۴)

۳ (۵)

-۵- تابع f به هر عدد حقیقی، ۳ برابر مجذور همان عدد به علاوه ۱ را نسبت می‌دهد. ضابطه f کدام است؟

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} \quad (۱)$$

$$f(x) = 3\sqrt{x} + 1 \quad (۳)$$

$$f(x) = 3(x+1)^2 \quad (۲)$$

$$f(x) = 3x^2 + 1 \quad (۴)$$

(سراسری ۱)

۴ (۴)

-۶- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 3$ حاصل $f(1+\sqrt{2}) - f(2)$ کدام است؟

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(۹۳) (ثج)

۶ (۶)

$2 + \sqrt{6}$ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

-۷- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ باشد، مقدار $f(3 + 2\sqrt{6})$ کدام است؟

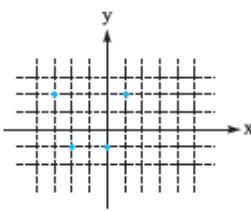
$$\{ -3, -2, 0, 1 \} \quad (۱)$$

$$\{ 0, 2 \} \quad (۲)$$

$$\{ -3, -2, 1 \} \quad (۳)$$

$$\{ -1, 2 \} \quad (۴)$$

-۸- برد تابع مقابله کدام مجموعه است؟



$$\begin{cases} f : \{-2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = -2x + 3 \end{cases} \quad \text{در تابع } \quad (۹)$$

{۱, ۳} (۶)

{-۱, -۳} (۳)

{-۳, ۳} (۲)

{-۲, ۳} (۱)

-۹- در تابع $\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = 4x + 1 \end{cases}$ ، برد تابع کدام است؟ اگر برد تابع، مجموعه $\{-7, 13\}$ باشد، مجموعه A کدام است؟

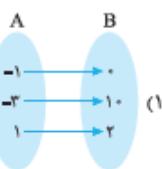
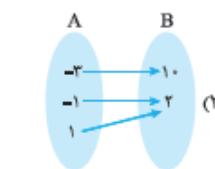
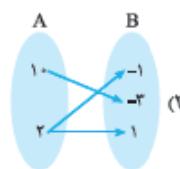
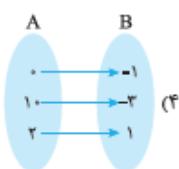
{۱, -۳} (۶)

{-۲, -۳} (۳)

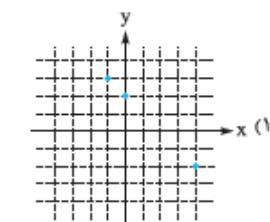
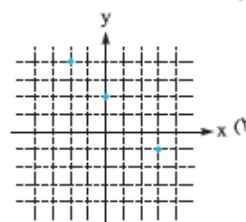
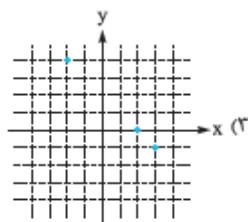
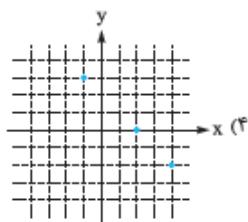
{۲, ۳} (۲)

{-۲, ۳} (۱)

$$\begin{cases} f : \{-1, -3, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{با کدام تابع زیر برابر است؟} \quad (۱۱)$$



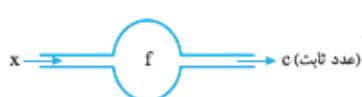
$$\begin{cases} f : \{-2, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2 - x \end{cases} \quad \text{نمودار تابع به کدام صورت است؟} \quad (۱۲)$$



تابع ثابت

به تابعی که ضابطه‌اش به صورت $f(x) = c$ (که c عددی ثابت است) باشد، تابع ثابت می‌گوییم. برای مثال تابع $f(x) = 5$ یا $f(x) = -2$ همگی توابعی ثابت هستند.

در واقع تابع ثابت، دستگاهی است که به ازای همه ورودی‌ها (x هر عددی که باشد)، فقط و فقط یک عدد را به عنوان خروجی به ما می‌دهد.



برد تابع ثابت $f(x) = c$ فقط یک عضو دارد و آن هم c است.

نست اگر برد تابع ثابت f برابر با مجموعه $\{6, a+2\}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۹ (۳)

-۹ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

- پاسخ گزینه **ب**: چون تابع f ثابت است، برد آن فقط یک عضو دارد. سؤال گفته برد f مجموعه $\{6, a+2\}$ است، برای این که این مجموعه تک عضوی باشد، باید $a+2 = 6$ برابر باشد:
- $$a+2=6 \Rightarrow a=4$$
- پس تابع f فقط عدد ۶ را به عنوان خروجی به ما میدهد. زوج مرتب $(3, 3b-9)$ عضو تابع است؛ یعنی به ازای ورودی ۳، خروجی $3b-9$ است که این خروجی باید برابر با ۶ باشد:
- $$3b-9=6 \Rightarrow 3b=15 \Rightarrow b=5$$
- پس $a-b = 4-5 = -1$ برابر است با:

نمایش های مختلف یک تابع ثابت

۱- نمایش زوج مرتبی: نمایش زوج مرتبی یک تابع زمانی نشان دهنده یک تابع ثابت است که مؤلفه های دوم همه زوج مرتب ها با هم برابر باشند. مثلاً تابع $\{(2, 2), (0, 2), (-3, 2), (1, 2)\} = f$ تابعی ثابت است، زیرا مؤلفه دوم تمام زوج مرتب های آن ۲ است.

نست اگر تابع $\{(2, -1), (3, 5a+9), (-2, b+3)\} = f$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

-۶ (۴)

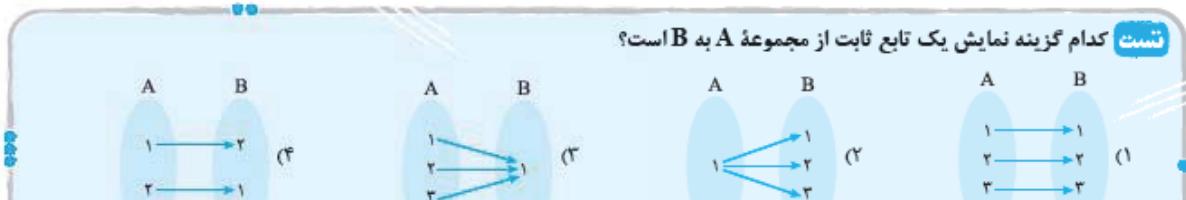
۶ (۳)

-۲ (۴)

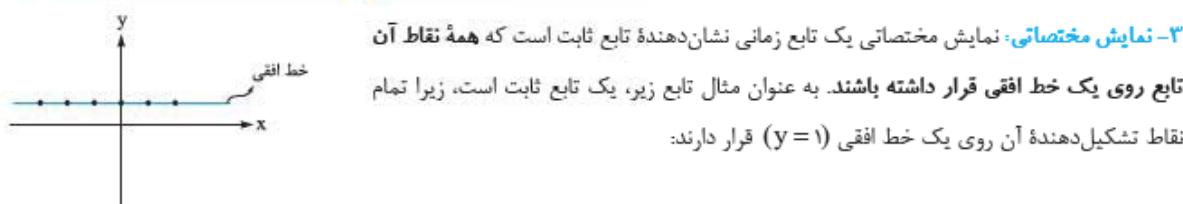
۲ (۱)

- پاسخ گزینه **ب**: f تابعی ثابت است، پس باید مؤلفه های دوم تمام زوج مرتب های آن با هم برابر باشند. مؤلفه های دوم زوج مرتب ها برابر با -1 ، 9 و $5a+9$ هستند، پس $b+3 = 9$ و $5a+9 = -1$ باید با -1 برابر قرار دهیم:
- $$5a+9=-1 \Rightarrow 5a=-10 \Rightarrow a=-2$$
- $$b+3=-1 \Rightarrow b=-4$$
- در نتیجه $a-b = -2-(-4) = 2$ برابر است با:

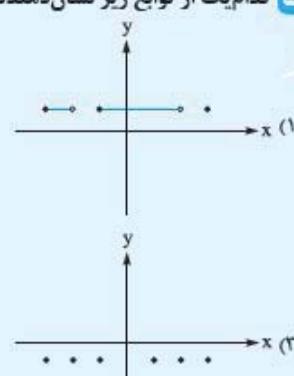
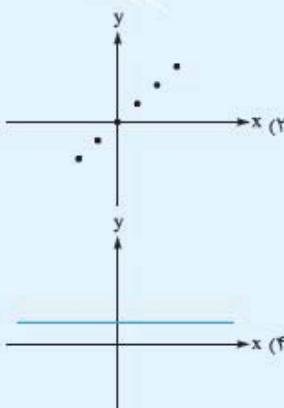
۲- نمایش پیکانی: نمایش پیکانی یک تابع زمانی نشان دهنده تابع ثابت است که همه پیکان ها به یک عضو از مجموعه B وارد شده باشند؛ مثلاً نمایش پیکانی رو به رو نشان دهنده یک تابع ثابت است؛ زیرا تمام پیکان ها به عضو ۴ از مجموعه B وارد شده اند:



- نمایش پیکانی یک تابع، زمانی نشان دهنده یک تابع ثابت است که تمام پیکان ها به یک عضو از مجموعه B وارد شوند. تنها گزینه هایی که این ویژگی را دارند، **ب** است. ضمناً می دانیم که **د** اصلأً تابع نیست.



تست کدامیک از توابع زیر نشان‌دهنده یک تابع ثابت نیست؟



- تمام نقاط تشکیل‌دهنده تابع ۱، ۳ و ۴ روی یک خط افقی قرار دارند، پس تابع ثابت محاسب می‌شوند. نقاط تابع ۲ روی یک خط افقی قرار ندارند، پس این تابع، ثابت محاسب نمی‌شود.

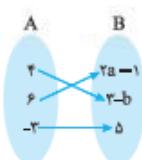
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳- اگر تابع $f = \{(-3, 2), (5, a+2)\}$ ثابت باشد، کدام است؟

- ۱) (۳) ۲) (۳) ۳) (۳) ۴) (۱)

۱۴- اگر برد تابع $f = \{(2b, a+3), (-a+1, 5), (3a+1, b)\}$ دارای یک عضو باشد، دامنه آن کدام است؟

- ۱) $\{-1, 2, 1\}$ (۴) ۲) $\{2, 5, 1\}$ (۳) ۳) $\{-1, 2, 7\}$ (۲) ۴) $\{2, 5\}$ (۱)

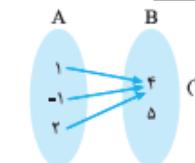


۱۵- اگر تابع رویدرو تابع ثابت باشد، کدام گزینه برابر با صفر است؟

- ۱) $2a+3b$ (۱)
۲) $2a-3b$ (۲)
۳) $3a+2b$ (۳)
۴) $3a-2b$ (۴)

۱۶- کدام گزینه نمایش یک تابع ثابت نیست؟

- ۱) $\{(2, -1), (4, -1), (\sqrt{3}, -1)\}$ (۴)



$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (۱)$$

۱۷- تابع در کدام گزینه آمده است؟

- ۱) $\{(2, 1), (1, -1), (3, 1)\}$ (۴)

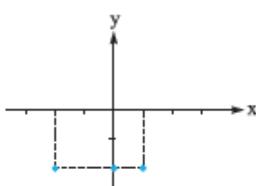
- ۲) $\{(-1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ (۱)

- ۳) $\{(-1, 2), (2, 3), (3, -1)\}$ (۴)

- ۴) $\{(-1, 2), (3, 1)\}$ (۳)

۱۸- اگر تابع $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ ثابت باشد، واریانس اعداد y_1, y_2 و y_3 کدام است؟

- ۱) $y_1 y_2 y_3$ (۴) ۲) $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ (۳) ۳) y_1 (۲) ۴) صفر (۱)



$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = -x \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f : \{-2\} \rightarrow \{-2, 0, 1\} \\ f(x) = 2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f : \{-2, 1\} \rightarrow \{-2\} \\ f(x) = 2 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f : \{-2, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = -x \end{cases} \quad (۴)$$

۱۹- نمودار رویدرو مربوط به تابع با کدام ضایعه است؟

- ۱) (۴) ۲) (۳) ۳) (۲) ۴) (۱)

توابع چند ضابطه‌ای

تابعی که تاکنون دیدیم همگی از یک ضابطه برای کل دامنه‌شان استفاده می‌کردند؛ اما تابعی هم هستند که برای قسمت‌های مختلف دامنه‌شان از ضابطه‌های مختلفی استفاده می‌کنند، مثل تابع روبه‌رو:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & -2 \leq x < 1 \\ x + 2 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

دامنه این تابع اجتماع دو محدوده $1 < x \leq -2$ و $-3 \leq x \leq 1$ است که برابر با محدوده $-2 \leq x \leq 3$ است.

این تابع به ازای ورودی‌های در محدوده $1 < x \leq -2$ ، از ضابطه $y = x - 1$ و به ازای ورودی‌های در محدوده $1 \leq x \leq 3$ از ضابطه $y = x + 2$ خروجی می‌دهد؛ یعنی اگر عددی در محدوده $1 < x \leq -2$ وارد تابع شود، آن را جای x در ضابطه $y = x - 1$ قرار می‌دهیم و مقدار به دست آمده را به عنوان خروجی می‌گیریم و اگر عددی در محدوده $1 \leq x \leq 3$ وارد تابع شود، آن را جای x در ضابطه $y = x + 2$ قرار می‌دهیم و مقدار به دست آمده را به عنوان خروجی می‌گیریم.

در واقع اگر $-2 \leq x < 1$ بود، $y = x - 1$ است و اگر $1 \leq x \leq 3$ بود، $y = x + 2$ است.

به این تابع که بیش از یک ضابطه دارد، تابع چند ضابطه‌ای می‌گوییم. تابعی که مثال زدیم، دارای دو ضابطه بود، پس یک تابع دو ضابطه‌ای است.

هر کدام از ضابطه‌های یک تابع چند ضابطه‌ای می‌توانند یک عدد ثابت هم باشند.

نیت در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ مقدار $f(-2) - f(5)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۵) ۹

(۶) ۵

(۷) ۱۴

پاسخ گزینه

(۵) یعنی مقدار تابع به ازای ورودی $5 = x$ ، دامنه ضابطه اول $x \geq 0$ است که شامل $x = 5$ هم می‌شود؛ پس $x \geq 0 : f(x) = 2x \Rightarrow f(5) = 2(5) = 10$. برای محاسبه (۵) f از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

(۶) یعنی مقدار تابع به ازای ورودی $-2 = x$. دامنه ضابطه دوم $x < 0$ است که شامل $x = -2$ هم می‌شود، پس برای محاسبه (۶) از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم. چون ضابطه دوم یک تابع ثابت است، پس به ازای هر عددی که وارد آن شود، خروجی اش برابر ۱ است: $x < 0 : f(x) = 1 \Rightarrow f(-2) = 1$

$f(5) - f(-2) = 10 - 1 = 9$ مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

نمودار تابع چند ضابطه‌ای

برای رسم نمودار تابع چند ضابطه‌ای، هر کدام از بخش‌های مختلف دامنه را روی محور x ها مشخص می‌کنیم. سپس نمودار ضابطه هر بخش فقط آن قسمتی که در محدوده آن بخش قرار دارد را رسم می‌کنیم.

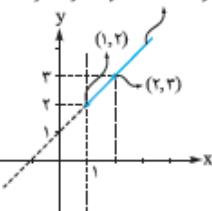
به عنوان مثال برای رسم تابع $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ x - 2 & -2 \leq x < 1 \end{cases}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

● اول محدوده‌های $x \geq 1$ و $x < -2$ را روی محور x ها با خط‌چین‌های عمودی مشخص می‌کنیم:
نکره منظور از بخش (A) محدوده مربوط به ضابطه بالا و منظور از بخش (B) محدوده مربوط به ضابطه پایین است.

● دامنه بخش (A)، $x \geq 1$ است. ضابطه f هم به ازای $x \geq 1$ برابر $y = x + 1$ است. نمودار $y = x + 1$ یک خط است. آن را رسم می‌کنیم:

قسمت‌هایی از این نمودار که در بخش (A) می‌گنجند را نگه می‌داریم و بقیه را پاک می‌کنیم:

برای رسم خط هم نیاز به دو نقطه از خط داریم. بهتر است x ها را در محدوده $x \geq 1$ بدھیم:



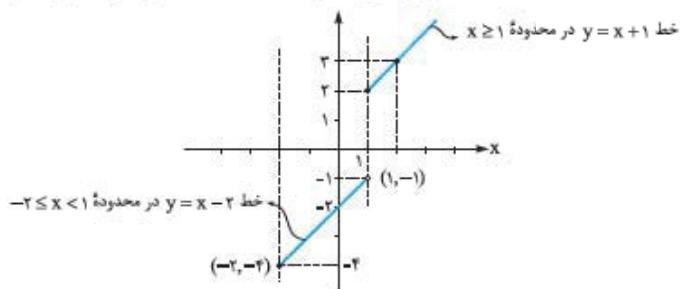
یکی را لب مرز یعنی خود $x = 1$ و یکی را هم $x = 2$ می‌دهیم:

x	1	2
$y = x + 1$	2	3
(x, y)	(1, 2)	(2, 3)

دققت کنید نقطه $(1, 2)$ تپر است؛ زیرا دامنه این بخش $x \geq 1$ بود که شامل خود $x = 1$ هم می‌باشد.

دامنه بخش (B)، $x < -2$ است، ضابطه f هم به ازای $x < -2$ ، برابر $y = x - 2$ است. نمودار $y = x - 2$ یک خط است. آن را رسم می‌کنیم. قسمت‌هایی از این نمودار که در بخش (B) می‌گنجند را نگه می‌داریم و بقیه را پاک می‌کنیم.

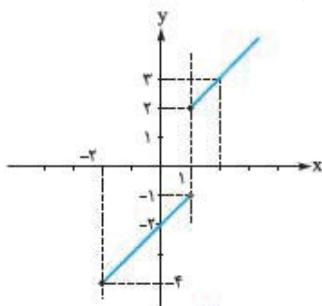
همان‌طور که گفته‌یم برای رسم خط نیاز به دو نقطه از خط داریم. در اینجا بهتر است جای x اعداد اول و آخر محدوده $x \leq -2$ – یعنی -2 را بدهیم:



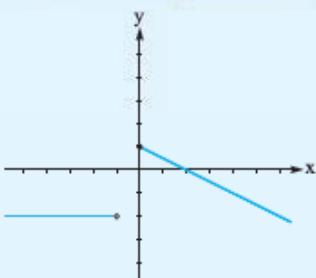
x	1	-2
$y = x - 2$	-1	-4
(x, y)	(1, -1)	(-2, -4)

دقت گنید نقطه $(1, -1)$ توانایی است، زیرا دامنه این بخش $x < -2$ است که شامل خود $x = 1$ نمی‌شود؛ ولی نقطه $(-2, -4)$ توانای است، زیرا دامنه این بخش $x < -2$ است که شامل خود $x = -2$ هم می‌شود.

بد نیست یک بار نمودار این تابع را بدون اضافات ببینیم!



مثال برای نمودار تابع رویدرو، یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید.



پاسخ تابع رسم شده دارای دو بخش است؛ پس دو ضابطه دارد. آن را به دو بخش (A) و (B) قسمت می‌کنیم:

بخش (A) یک خط است که از دو نقطه $(1, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، باید معادله این خط را بنویسیم. ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{2 - 1} = -1$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً نقطه $(1, 0)$)، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

پس برای $x \geq 1$ ، از ضابطه $y = -x + 1$ خروجی می‌گیریم. (دقت گنید چون نقطه $(1, 0)$ توانای است، در دامنه، علامت بزرگ‌تر یا مساوی را قرار دادیم).

بخش (B) یک خط افقی است. ضابطه هر خط افقی در حالت کلی به صورت «عدد = y» است که در اینجا به صورت $y = -2$ است. پس برای $x < 1$ ، از ضابطه $y = -2$ خروجی می‌گیریم. (دقت گنید چون نقطه $(-1, -2)$ توانای است، در دامنه علامت کوچک‌تر یا مساوی قرار ندادیم) پس ضابطه f به صورت رویه‌رو است:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

-۲۱- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 2 \\ 2+4x & x < 2 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

-۲ (۴)

۲ (۱)

-۲۲- در تابع $f(x) + f(-1)$ ، مقدار $f(x)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$$

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۴)

۴ (۱)

-۲۳- در تابع $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{8})$ ، مقدار $f(x)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x \leq 2 \\ x & x > 2 \end{cases}$$

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۴)

۶ (۱)

-۲۴- تابع f به ازای اعداد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن عدد و به ازای اعداد کوچک‌تر از ۲، نصف آن عدد را به عنوان خروجی بیرون می‌دهد. مقدار $f(3) + f(-8)$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۴)

۵ (۱)

-۲۵- باشد، مقدار a^x کدام است؟

$$f(a^x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

 a^x (۴)

۲ (۳)

۱ (۴)

(۱) صفر

-۲۶- در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x-2 & x < 1 \end{cases}$ باشد، مقدار a کدام است؟

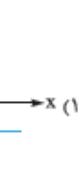
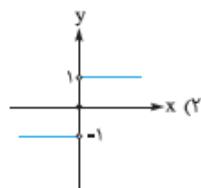
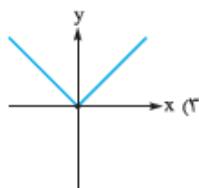
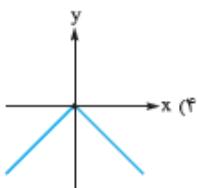
۷ یا ۳ (۴)

۷ فقط (۳)

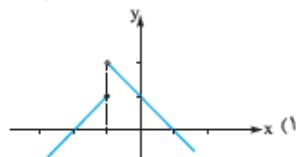
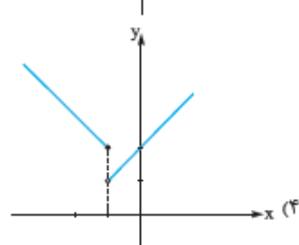
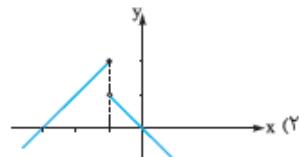
۳ فقط (۳)

۹ فقط (۱)

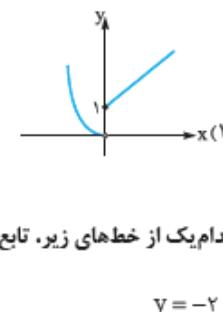
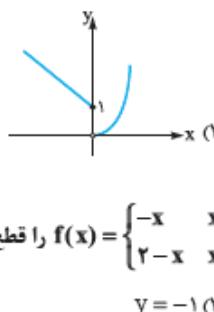
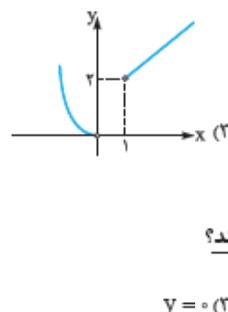
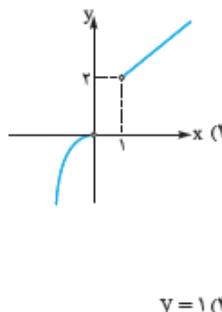
-۲۷- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟



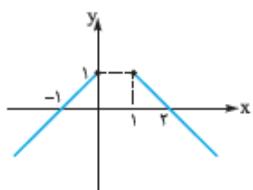
-۲۸- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x > -1 \\ x+2 & x \leq -1 \end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟



۲۹- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$



۳۰- کدامیک از خطهای زیر، تابع $f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ 2-x & x < 0 \end{cases}$ را قطع نمی‌کند؟



$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq 1 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ -x+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq 1 \\ -x+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۳۱- کدام گزینه ضابطه تابع رسم شده را نشان می‌دهد؟

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۳۲- کدامیک از نمودارهای زیر می‌تواند مربوط به داستان زیر باشد؟

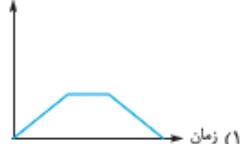
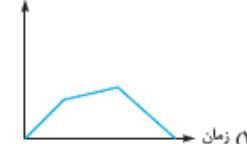
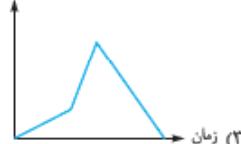
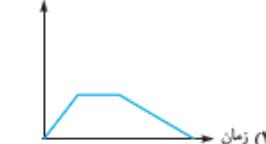
«بهزاد برای قدمزنی از خانه خارج شده است. در ابتدا آهسته قدم می‌زند و سپس سرعتش را بیشتر می‌کند تا به پارک برسد. سپس از مسیری که آمده بود بر می‌گردد و به خانه می‌رسد.»

فاصله از خانه

فاصله از خانه

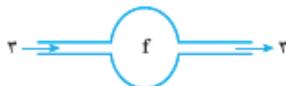
فاصله از خانه

فاصله از خانه



تابع همانی

به تابعی که ضابطه اش $x = f(x)$ باشد، تابع همانی می‌گوییم. در واقع تابع همانی، دستگاهی است که هر عددی که واردش شود، همان عدد را به عنوان خروجی می‌دهد.



در تابع همانی، هر عضوی از دامنه که وارد تابع شود، دقیقاً همان عضو از تابع خارج می‌شود، پس دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است:

$$D_f = R_f$$

برای مثال اگر تابع همانی $x = f(x)$ دامنه‌اش $\{-1, 0, 2\}$ باشد، بردش هم $R_f = \{-1, 0, 2\}$ است.

نحوت اگر در تابع همانی f باشند، $D_f = \{1, 5, a\}$ و $R_f = \{b, 1, 8\}$ کدام است؟

$$-3$$

$$3$$

$$-4$$

$$4$$

$$D_f = R_f \Rightarrow \{1, 5, a\} = \{1, b, 8\}$$

باشد

تابع f همانی است، پس مجموعه دامنه و برد آن با هم برابرند:

عضو ۱ در هر دو مجموعه وجود دارد. عضو ۸ فقط در R_f دیده می‌شود، پس برای آن که در D_f هم عضو ۸ را داشته باشیم، a باید برابر 8 باشد ($a = 8$ ، پس $D_f = \{1, 5, 8\}$ به صورت $b = 8$ در می‌آید).

از مقایسه $\{1, 5, a\}$ با $\{b, 1, 8\}$ داریم $b = 1$ و $a = 8$.

$$b-a=5-8=-3$$

پاسخ گزینه

نمایش‌های مختلف تابع همانی

۱- نمایش زوج مرتب: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، در هر زوج مرتب، مؤلفه اول و دوم باهم برابرند؛ مثلاً تابع $\{(2, 2), (-4, -4), (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$ نشان‌دهنده یک تابع همانی است.

۷۰

نمایش های مختلف تابع همانی

نست در تابع همانی $\{(1, a), (b, 3), (b+2, c)\}$. میانگین a و c کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه: در تابع همانی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند، پس:

$$(1, a) \Rightarrow 1 = a$$

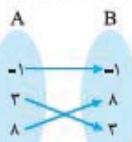
در زوج مرتب $(1, a)$

$$(b, 3) \Rightarrow b = 3$$

$$(b+2, c) \Rightarrow b+2 = c \xrightarrow{b=3} 3+2 = c \Rightarrow c = 5$$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

میانگین a ، b و c برابر است با:



۲- نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی، باید از هر عدد از مجموعه A به همان عدد از مجموعه B پیکان وارد شود. در واقع اعداد سر و ته هر پیکان باید با هم برابر باشند؛ مثلاً نمایش پیکانی رویه‌رو، نشان‌دهنده یک تابع همانی است.



$$a+1 = -3 \Rightarrow a = -4$$

$$2 = c \Rightarrow c = 2$$

$$3b-1 = 1 \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow b = 4$$

$$a+b+c = -4 + 4 + 2 = 2$$

پس $a+b+c$ برابر است با:

۱ (۱)

۲ (۲)

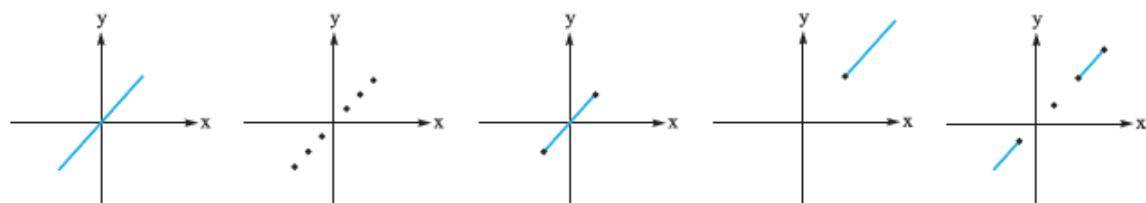
۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ گزینه:

همان‌طور که گفته‌یم، در نمایش پیکانی تابع همانی، اعداد سر و ته هر پیکان باید با هم برابر باشند، پس:

۳- نمایش مختصاتی: همان‌طور که گفته‌یم ضایعه تابع همانی به صورت $y = f(x)$ است، پس نمودار این تابع حتماً روی خط $x = y$ قرار دارد که می‌تواند «کل خط»، «یک یا چند نقطه روی این خط»، «یک یا چند پاره‌خط روی این خط» و ... باشد. به عنوان مثال تمام توابع رسم شده در زیر، تابع همانی هستند، زیرا کل نمودارشان روی خط $x = y$ قرار دارد.

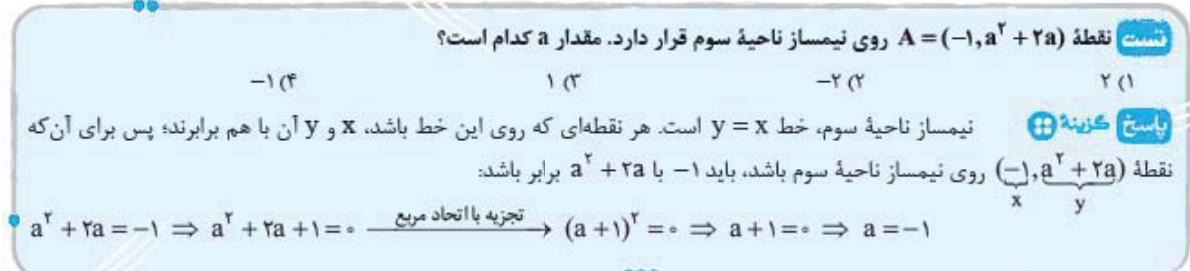
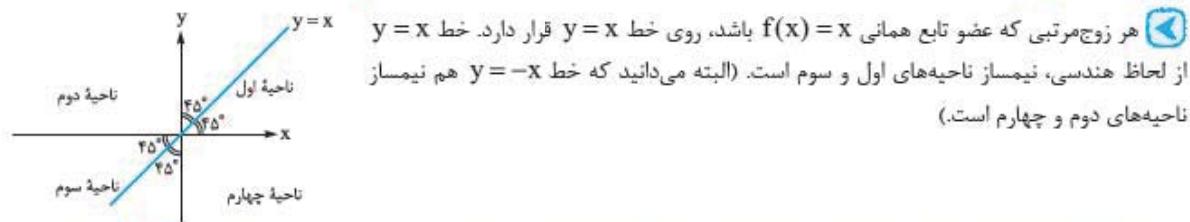
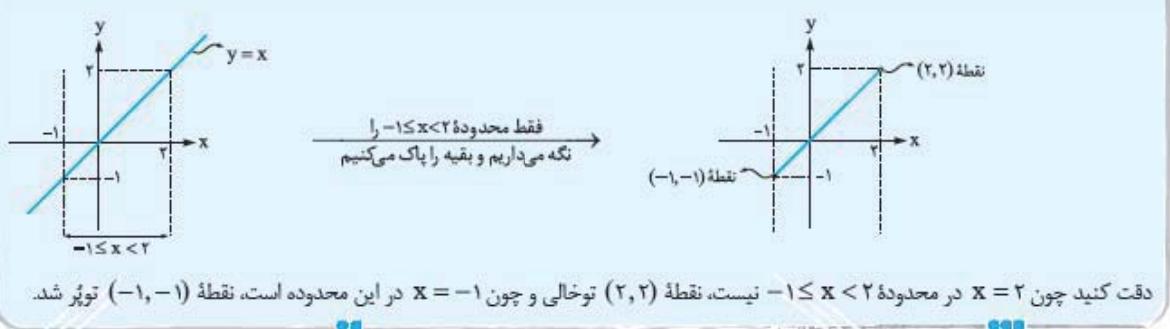


مثال: نمودار تابع همانی g با دامنه $-1 \leq x \leq 2$ را رسم کنید.

پاسخ: تابع g همانی است، پس ضایعه‌اش به صورت $x = g(x)$ است. دامنه این تابع $-1 \leq x \leq 2$ است؛ یعنی فقط x ‌هایی که در محدوده $-1 \leq x \leq 2$ هستند را می‌بذرد. برای رسم نمودار این تابع، خط $x = y$ را رسم می‌کنیم منتها فقط آن قسمتی را که در محدوده دامنه یعنی $-1 \leq x \leq 2$ قرار دارد نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم.

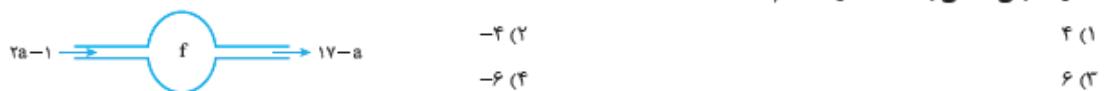


۶۱



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

-۳۳- اگر f تابعی همانی باشد، مقدار a کدام است؟



-۳۴- اگر دامنه تابع همانی f ، مجموعه $\{3, -7, a+1\}$ و برد آن مجموعه $\{2, 3, b\}$ باشد، میانگین a و b چقدر است؟

- ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (۲)

-۳۵- کدام گزینه در مورد تابع همانی همواره صحیح است؟

- (۱) دامنه و برد آن شامل یک عضو است.
(۲) دامنه و برد آن با هم برابر است.
(۳) تعداد اعضای دامنه مهم نیست ولی برد آن یک عضو دارد.
(۴) دامنه و برد آن \mathbb{R} است.

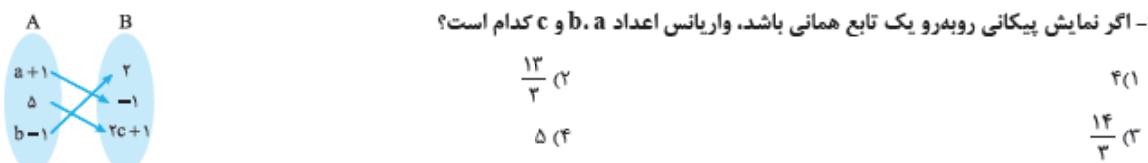
-۳۶- اگر مجموعه دامنه و برد یک تابع با هم برابر باشند، کدام گزینه الزاماً درست است؟

- (۱) این تابع، یک تابع ثابت است.
(۲) این تابع، یک تابع همانی است.
(۳) هیچ کدام
(۴) این تابع، یک تابع خطی است.

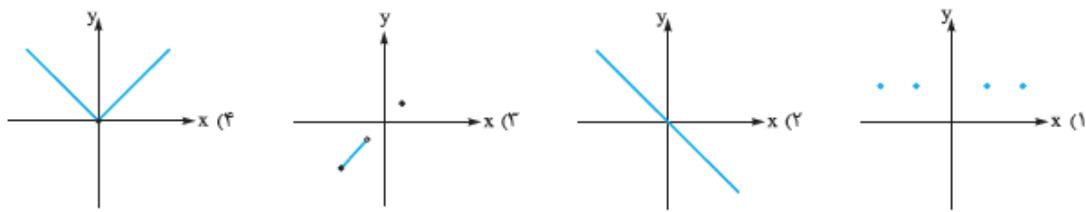
-۳۷- در تابع همانی $\{(a+1, -2), (2b+1, 2-a), (c, -b+c)\}$ ، مقدار $-a+b-c$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

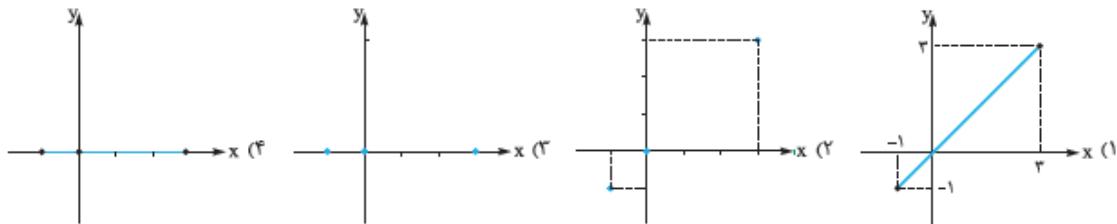
-۳۸- اگر نمایش پیکانی رو بدرو یک تابع همانی باشد، واریانس اعداد a , b , c کدام است؟



۳۹- کدام گزینه نمایش یک تابع همانی است؟



۴۰- کدام یک از گزینه‌های زیر نمودار یک تابع همانی با دامنه $\{-1, 0, 1\}$ را نشان می‌دهد؟



۴۱- اگر نقطه $(2, m^2 - 3m + 4)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ و ۱
(۲) -۲ و -۱
(۳) ۱ و ۲
(۴) -۱ و -۲

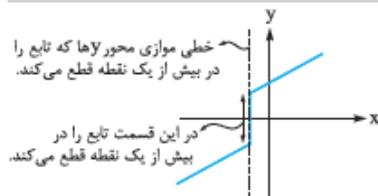
۴۲- اگر نقطه $(m, m^2 - m - 8)$ روی نیمساز ناحیه سوم باشد، m کدام است؟

- (۱) فقط -۲
(۲) ۴ یا -۴
(۳) ۲ یا -۲
(۴) ۱ و ۲

پاسخ تشریحی تابع

- ۱- کزینه** مولفه‌های اول دو زوج مرتب $(1, 5)$ و $(-1, 2b)$ یکسان است. برای این‌که این رابطه تابع باشد، باید مولفه‌های دوم این دو زوج مرتب نیز با هم برابر باشند:
- $$2b - 1 = 5 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$
- همچنین مولفه‌های اول دو زوج مرتب $(2, 6)$ و $(-a, 1)$ نیز یکسان است؛ پس مولفه‌های دوم این دو زوج مرتب نیز با هم برابرند:
- $$1 - a = 6 \Rightarrow -a = 5 \Rightarrow a = -5$$
- $$2a - b = 2(-5) - 3 = -10 - 3 = -13$$
- پس:

- ۲- کزینه** نمايش پیکانی یک رابطه از مجموعه A به B ، به شرطی نشان‌دهنده یک تابع است که از تمام اعضای مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شود. در $\{1\}$ و $\{2\}$ ، از عضو «۵» دو تا پیکان خارج شده، پس تابع نیستند. در $\{3\}$ ، از عضو «۵» هیچ پیکانی خارج نشده، پس تابع نیست. فقط در $\{4\}$ ، از هر دو عضو مجموعه A ، دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس تابع است.

- ۳- کزینه** اگر حتی یک خط موازی محور‌ها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار تابع نیست. این اتفاق فقط در $\{3\}$ می‌افتد.
- 
- اگر نموداری شامل یک تکه کوچک یا بزرگ خط عمودی باشد، قطعاً تابع نیست!

- ۴- کزینه** از عضو $\{2\}$ در مجموعه A دو پیکان به اعداد 4 و -5 وارد شده است. فقط در صورتی که این دو عدد برابر باشند، این رابطه تابع است:
- $$5 - a = 4 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

- ۵- کزینه** تابع f به ازای هر ورودی x 3 برابر مجذور همان عدد به علاوه 1 را بیرون می‌دهد. 3 برابر مجذور x یعنی 3 برابر x^2 که می‌شود $3x^2$. که حالا باید آن را به علاوه 1 کنیم که می‌شود $3x^2 + 1$ ؛ پس به ازای ورودی x خروجی $3x^2 + 1$ را داریم و ضابطه f به صورت $f(x) = 3x^2 + 1$ در می‌آید.

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{2}) &= (1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) + 3 = (\underbrace{1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2}_{2\sqrt{2}}) - 2 - 2\sqrt{2} + 3 \\ &= (1+2\sqrt{2}+2) - 2 - 2\sqrt{2} + 3 = 1 + \cancel{2\sqrt{2}} + 2 - \cancel{2\sqrt{2}} + 3 = 4 \\ f(2) &= 2^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3 \\ f(1+\sqrt{2}) - f(2) &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

بنابراین:

برای محاسبه $f(3+2\sqrt{6})$ کافی است در f جای x ها، عدد $3+2\sqrt{6}$ را قرار دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 6x + 10} \Rightarrow f(3+2\sqrt{6}) = \sqrt{\underbrace{(3+2\sqrt{6})^2 - 6(3+2\sqrt{6}) + 10}_{\text{اتحاد مربع}}} \\ &= \sqrt{\underbrace{9 + 2(3)(2\sqrt{6}) + (2\sqrt{6})^2 - 18 - 12\sqrt{6} + 10}_{4\times 6}} = \sqrt{9 + 2\cancel{2\sqrt{6}} + 24 - 18 - \cancel{2\sqrt{6}} + 10} = \sqrt{9 + 24 - 18 + 10} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- ۶- کزینه** ابتدا مختصات نقاط روی نمودار را می‌نویسیم:
- $$A = (1, 2), B = (-1, 0), C = (-2, -1), D = (-3, 2)$$
- مجموعه شامل همه مولفه‌های دوم زوج مرتب‌های بالا، برد این تابع را تشکیل می‌دهد:
- $$R_f = \{2, -1, -1, 2\} \xrightarrow{\text{حذف تکراری‌ها}} R_f = \{2, -1\}$$
- 