

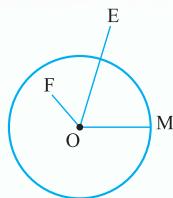
# فصل ادیبو



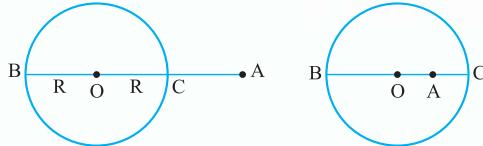


## مفاهیم اولیه و روابط هادر دایره

۱ در صفحه، یک نقطه نسبت به دایره یکی از وضعیت‌های زیر را دارد:



- $OM = R \Leftrightarrow$  روی دایره M
- $OE > R \Leftrightarrow$  بیرون دایره E
- $OF < R \Leftrightarrow$  درون دایره F

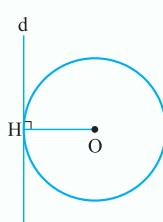


۲ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره  $E(O, R)$  از نقطه A با وصل کردن نقطه A

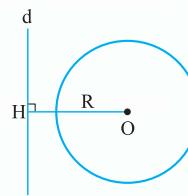
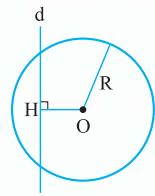
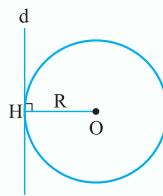
به مرکز دایره و تقاطع خط حاصل با دایره، به دست می‌آید و با فرض  $OA = d$

$$AB = d + R, AC = |d - R|$$

۳ خط مماس بر شعاع نقطه تماس، عمود است و بالعکس خط عمود بر انتهای شعاع، بر دایره مماس است.



۴ وضعیت خط و دایره: دایره  $C(O, R)$  و خط  $d$  را در صفحه در نظر می‌گیریم. در این صورت دایره (C) و خط d یکی از وضعیت‌های زیر را



نسبت به یکدیگر دارند.

(OH = R) خط و دایره مماس‌اند.

(OH < R) خط و دایره متقاطع‌اند.

(OH > R) خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند.

تست اگر فاصله نقاط M و N تا مرکز دایره  $C(O, R)$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0$  باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به

دایره چگونه‌اند؟

۱) هر دو بیرون دایره واقع‌اند.

۲) یکی روی دایره، دیگری بیرون آن واقع است.

۳) یکی درون و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

۴) هر دو درون دایره‌اند.

$$2x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0 \Rightarrow (2x - R)(x - 2R) = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{2} \text{ یا } x = 2R$$

پاسخ گزینه «۴»

پس فاصله یکی از نقاط کمتر و دیگری بیشتر از شعاع دایره است و این یعنی یک نقطه داخل و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

تست دورترین و نزدیک‌ترین فاصله یک نقطه ثابت از نقاط یک دایره به ترتیب ۱۳ و ۵ است. مساحت دایره کدام است؟

۱)  $9\pi$

۲)  $16\pi$

۳)  $25\pi$

۴)  $4\pi$

پاسخ گزینه «۲» فرض کنیم نقطه خارج دایره باشد. در این صورت داریم:

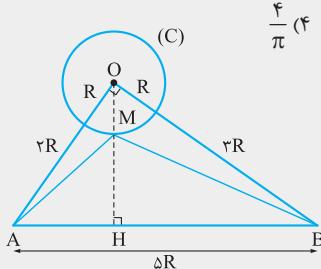
$$\begin{cases} d + R = 13 \\ d - R = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2d = 18 \Rightarrow d = 9, R = 13 - 9 = 4 \quad S = \pi R^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

اگر نقطه داخل دایره باشد، داریم:

$$\begin{cases} d + R = 13 \\ R - d = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R = 18 \Rightarrow R = 9, d = 4 \quad S = \pi R^2 = \pi \times 9^2 = 81\pi$$

**زاویه مرکزی:** زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد.

**تست** دایرة  $C(O, R)$  مفروض است. نقاط  $A$  و  $B$  از مرکز دایره به ترتیب به فاصله‌های  $3R$  و  $4R$  قرار دارند. اگر فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر  $5R$  و  $M$  نقطه‌ای روی دایره باشد، آن‌گاه کمترین مساحت مثلث  $ABM$  چه کسری از مساحت دایره است؟



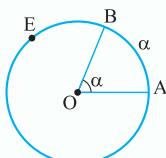
$$\frac{4}{\pi} \quad (1) \quad \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{7}{2\pi} \quad (3) \quad \frac{3}{\pi} \quad (4)$$

**پاسخ گزینه ۲:** نقاط  $A$  و خارج دایره قرار دارد و مثلث  $AOB$  قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث  $ABM$  وقتی کمترین است که ارتفاع  $MH$  در آن کمترین مقدار را داشته باشد و این وضعیت برای نقطه  $M$  وقتی حاصل می‌شود که از عمود  $OH$  را بر خط شامل  $AB$  رسم کنیم در این صورت محل تقاطع این عمود و دایره جای نقطه  $M$  است و در این حالت مثلث  $AMB$  کمترین مساحت را دارد و مقدار آن به شرح زیر به دست می‌آید:

$$S_{(AOB)} = \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} OA \times OB \Rightarrow OH = \frac{3R \times 4R}{5R} = \frac{12}{5} R$$

$$MH = OH - OM = \frac{12}{5} R - R = \frac{7}{5} R$$

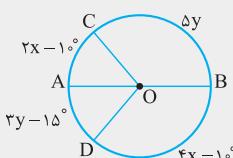
$$\frac{S_{(ABM)}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{1}{2} MH \times AB}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{5} R \times 5R}{\pi R^2} = \frac{7}{2\pi}$$



**اندازه زاویه مرکزی:** اندازه زاویه مرکزی بحسب درجه برابر اندازه کمان روبرو به آن بحسب درجه می‌باشد و به شعاع دایره بستگی ندارد.

$$\widehat{AEB} = 36^\circ - \widehat{AB} = 36^\circ - \alpha$$

$$\text{طول کمان وقتی که اندازه زاویه مرکزی روبرو به آن } \alpha \text{ درجه باشد برابر } L = \frac{\alpha}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \text{ می‌باشد.}$$



**تست** در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و  $AB$  قطر آن است. اندازه زاویه  $\hat{COD}$  کدام است؟

$$110^\circ (2) \quad 115^\circ (1) \quad 116^\circ (4) \quad 120^\circ (3)$$

**پاسخ گزینه ۱:**

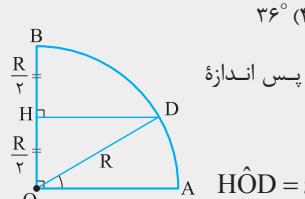
$$\begin{cases} \widehat{AC} + \widehat{BC} = 180^\circ \\ \widehat{AD} + \widehat{BD} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 10^\circ + 5y = 180^\circ \\ 3y - 15^\circ + 4x - 10^\circ = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 190^\circ \\ 3y + 4x = 205^\circ \end{cases}$$

$$-10y + 3y = -380^\circ + 205^\circ \Rightarrow -7y = -175^\circ \Rightarrow y = 25^\circ$$

$$2x + 5y = 190^\circ \Rightarrow 2x + 5 \times 25^\circ = 190^\circ \Rightarrow 2x = 65^\circ \Rightarrow x = 32.5^\circ$$

$$\hat{COD} = \widehat{CD} = \widehat{AC} + \widehat{AD} = 2x - 10^\circ + 3y - 15^\circ = 65^\circ - 10^\circ + 75^\circ - 15^\circ = 115^\circ$$

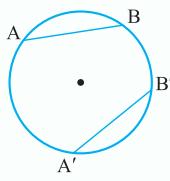
**تست** در یک ربع دایره با شعاع‌های عمود بر هم  $OB$  و  $OA$ ، کمان ربع دایره را در نقطه  $D$  قطع می‌کند. اندازه کمان  $AD$  کدام است؟



$$36^\circ (4) \quad 30^\circ (3) \quad 45^\circ (2) \quad 15^\circ (1)$$

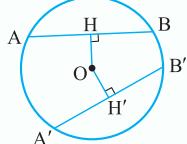
**پاسخ گزینه ۳:** مثلث  $OHD$  قائم‌الزاویه است و یک ضلع آن نصف وتر آن است. پس اندازه زوایای حاده آن  $30^\circ$  و  $60^\circ$  می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\hat{AOD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 30^\circ$$



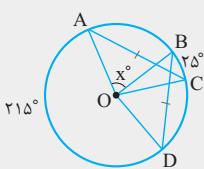
دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$



دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



در شکل رو به رو O مرکز دایره است و داریم  $\widehat{AD} = 25^\circ$  و  $\widehat{BC} = 215^\circ$ . کمان بزرگ  $\widehat{AC} = 25^\circ$  و  $\widehat{BD} = 215^\circ$ .

مقدار x کدام است؟

۱)  $80^\circ$

۲)  $50^\circ$

۳)  $30^\circ$

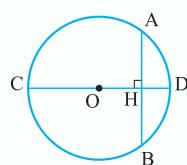
۴)  $60^\circ$

$$AC = BD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{AB} + 25^\circ + 215^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\text{زاویه مرکزی } A\hat{O}B = \widehat{AB} \Rightarrow x = 60^\circ$$

گزینه «۳» پاسخ



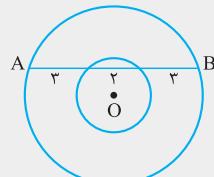
قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

$$CD \perp AB \Rightarrow AH = BH, \widehat{AD} = \widehat{BD}, \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

در هر دایره، قطری از آن وتری را که قطر نیست نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.

در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند، با توجه به شکل، مساحت ناحیه بین دو دایره کدام است؟



۱)  $16\pi$

۲)  $12\pi$

۳)  $18\pi$

۴)  $15\pi$

گزینه «۴» از مرکز دایره بر وتر AB خطی عمود رسم می‌کنیم. وترهای AB و CD هر دو نصف

می‌شوند، پس  $AH = BH = 4$  و  $CH = DH = 1$ . شعاع دایره‌ها را به ترتیب  $R$  و  $OB = R$  و  $OC = r$  می‌نامیم، بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} OB^2 = OH^2 + BH^2 \\ OC^2 = OH^2 + CH^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} OB^2 - OC^2 = BH^2 - CH^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\text{مساحت بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 15\pi$$

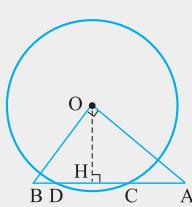
در مثلث قائم‌الزاویه  $AOB$  ( $O = 90^\circ$ ) دایره‌ای به مرکز O وتر AB را در نقطه C و D قطع می‌کند. اگر  $CD = 8$  و  $BD = 4$  باشد، آن‌گاه مساحت مثلث  $AOB$  کدام است؟

۱)  $28\sqrt{3}$

۲)  $28\sqrt{2}$

۳)  $24\sqrt{3}$

۴)  $24\sqrt{2}$

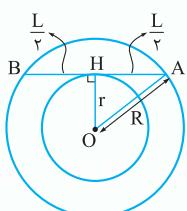


**پاسخ گزینه ۴** عمود OH و تر CD را نصف می‌کند در نتیجه  $CH = DH = 2$  و با توجه به  $BD = 2 \cdot AH = CH + AC = 4 + 4 = 8$  و  $BH = BD + DH = 2 + 4 = 6$  نتیجه می‌شود  $AC = 4$ . اما در مثلث قائم‌الزاویه AOB، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو پاره خطی است که روی وتر پدید می‌آورد.

$$OH^2 = AH \times BH = 8 \times 6 = 48 \Rightarrow OH = 4\sqrt{3}$$

لذا داریم:

$$S_{(AOB)} = \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times (2 + 8 + 4) = 2\sqrt{3} \times 14 = 28\sqrt{3}$$



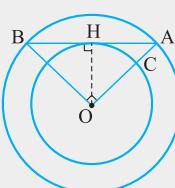
**۱۳** همه وترهایی به طول L در دایره C(O, R)، وسطشان روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r دارند، کمترین فاصله نقاط این شکل و دایره کدام است؟

$$12 - 6\sqrt{2}$$

$$12\sqrt{2} - 12$$

$$6\sqrt{2} - 6$$

$$6 - 3\sqrt{2}$$



**پاسخ گزینه ۴** فرض کنیم AB یکی از وترهایی باشد که زاویه مرکزی رویه را به کمان آن قائم است

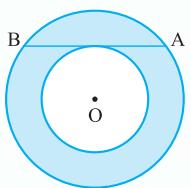
$(AOB = 90^\circ)$  چون  $OA = OB$  است، پس مثلث AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \times 12^2 \Rightarrow AB = 12\sqrt{2}$$

عمود OH و تر AB را نصف می‌کند  $AH = BH = 6\sqrt{2}$  و چون در مثلث قائم‌الزاویه AOH میانه نظیر وتر، نصف

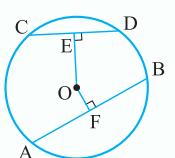
وتر است، پس  $OH = \frac{AB}{2} = 6\sqrt{2}$ . بنابراین وسط همه وترهای AB روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع  $6\sqrt{2}$  قرار دارد که مطابق شکل

فوق کمترین فاصله دو دایره  $12 - 6\sqrt{2}$  است.



**۱۴** اگر دو دایره، هم‌مرکز باشند و وتر AB از دایره بزرگ بر دایره کوچک مماس باشد، آن‌گاه مساحت بین دو دایره

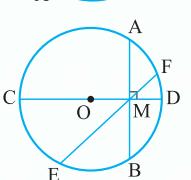
$$\frac{\pi AB^2}{4}$$



از دو وتر نابرابر در یک دایره (یا دو دایره به شعاع‌های مساوی) آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و

بالعکس.

$$AB > CD \Leftrightarrow OF < OE$$



**۱۵** کوتاه‌ترین وتر در یک دایره، که از نقطه‌ای داخل دایره رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه،

عمود است.

$$AB \leq EF \leq CD$$



**۱۶** در دایره C(O, 8) اندازه وترهای AB و CD به ترتیب  $4x+6$  و  $2x+8$  است که x عددی صحیح است. اگر فاصله مرکز

دایره تا وتر CD بیشتر از فاصله آن تا وتر AB باشد، آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا وتر CD کدام است؟

$$\sqrt{30}$$

$$\sqrt{15}$$

$$2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{7}$$

**پاسخ گزینه ۲**

$$OE > OF \Rightarrow CD < AB \Rightarrow 2x + 8 < 4x + 6 \Rightarrow 1 < x$$



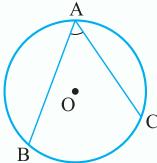
از طرفی شعاع دایره  $\alpha$  است و در مثلث های قائم الزاویه  $OCE$  و  $OBF$  داریم:

$$\begin{cases} BF < OB \\ CE < OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{2} < \alpha \\ \frac{CD}{2} < \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 < \alpha \\ x + 4 < \alpha \end{cases} \Rightarrow x < \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین  $x < \frac{\alpha}{2}$  و چون  $x$  عددی صحیح است، نتیجه می شود  $x = 2$  و داریم:

$$CE = \frac{CD}{2} = \frac{2x + \alpha}{2} = x + 4 = 6$$

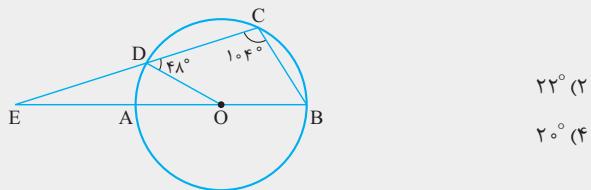
$$OC^2 = OE^2 + CE^2 \Rightarrow \alpha^2 = OE^2 + 6^2 \Rightarrow OE^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow OE = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



**زاویه محاطی:** زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند. اندازه هر زاویه محاطی برابر

است با، نصف اندازه کمان روبرو به آن  $(\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2})$ .

**تست** در شکل زیر،  $O$  مرکز دایره و  $AB$  قطر آن است. امتداد وتر  $CD$  امتداد قطر  $AB$  را در نقطه  $E$  قطع می کند. اگر  $\hat{ODC} = 48^\circ$



باشد، آن گاه اندازه زاویه  $\hat{E}$  کدام است؟

۲۲° (۱)

۲۰° (۴)

۱۸° (۲)

۱۶° (۳)

**پاسخ** گزینه «۴» زاویه  $C$  محاطی است، پس داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \Rightarrow 104^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow 208^\circ = 180^\circ + \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AD} = 28^\circ \Rightarrow A\hat{O}D = 28^\circ$$

در مثلث  $ODE$ ، زاویه  $\hat{ODC}$  خارجی است، در نتیجه:

$$\hat{ODC} = \hat{E} + A\hat{O}D \Rightarrow 48^\circ = \hat{E} + 28^\circ \Rightarrow \hat{E} = 20^\circ$$

**زاویه ظلی:** زاویه ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان روبرو به آن  $(\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2})$ .

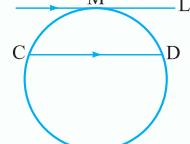


اندازه های کمان های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\widehat{CM} = \widehat{DM}$$

**تست** اگر خط  $M$  در نقطه  $L$  بر دایره مماس باشد و وتر  $CD$  موازی  $ML$  باشد، داریم:



**تست** دایره های به مرکز  $O$  مفروض است. دو وتر موازی  $AE$  و  $BD$  از این دایره در یک طرف  $O$  قرار دارند به

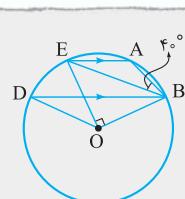
طوری که  $\hat{BOD} = 90^\circ$  و  $\hat{ABE} = 40^\circ$ . اندازه زاویه  $\hat{BOD}$  چند درجه است؟

۱۲۰° (۱)

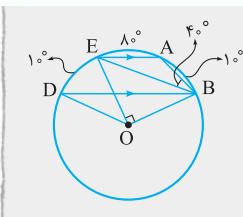
۱۳۰° (۴)

۱۰۰° (۲)

۱۱۵° (۳)



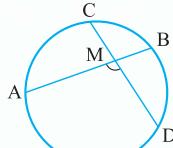
## دایره



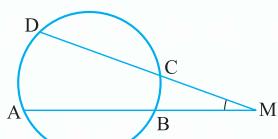
گزینه «۱» چون  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$  و  $AE \parallel BD$ ، پس داریم:  
 $\hat{B}OE = 90^\circ \Rightarrow \hat{AE} + \hat{AB} = 90^\circ \Rightarrow 2 \times 40^\circ + \hat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \hat{AB} = 10^\circ$   
 $\hat{B}OD = \hat{AB} + \hat{AE} + \hat{DE} = 10^\circ + 80^\circ + 10^\circ = 100^\circ$

پاسخ

زاویه بین دو وتر برابر است با:

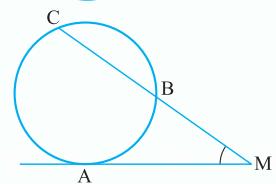


$$\hat{M} = \frac{\hat{AD} + \hat{BC}}{2}$$



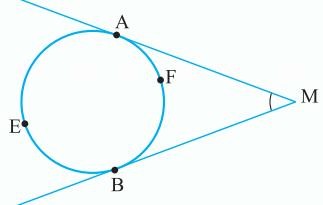
$$\hat{M} = \frac{\hat{AD} - \hat{BC}}{2}$$

زاویه بین امتداد دو وتر برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\hat{AC} - \hat{AB}}{2}$$

زاویه بین خط مماس و امتداد وتر برابر است با:

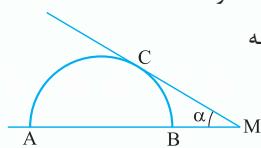


$$\hat{M} = \frac{\hat{AEB} - \hat{AFB}}{2}$$

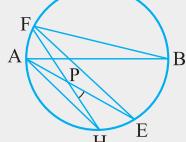
زاویه بین دو خط مماس برابر است با:

اگر زاویه بین دو مماس،  $\hat{M} = \alpha$  باشد (شکل فوق)، آن‌گاه اندازه کمان‌های  $AEB$  و  $AFB$  به ترتیب  $\alpha + 180^\circ$  و  $\alpha - 180^\circ$  است.

اگر زاویه بین مماس و امتداد قطر نیم‌دایره برابر  $\alpha$  باشد، آن‌گاه اندازه کمان‌های  $AC$  و  $BC$  به ترتیب  $\alpha - 90^\circ$  و  $\alpha + 90^\circ$  است.



در شکل،  $AB$  قطری از دایره است و وتر  $EF$  با وتر  $AH$  موازی است. اگر  $\hat{FBA} = 20^\circ$ ، در این صورت اندازه زاویه



۳۵° (۲)

کدام است؟

۴۰° (۱)

۲۵° (۴)

۳۰° (۳)

$$AH \parallel EF \Rightarrow \hat{HE} = \hat{AF} \quad (۱)$$

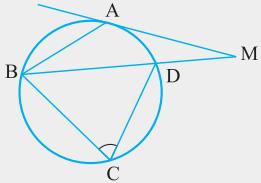
گزینه «۱» پاسخ

$$\hat{F} \text{ زاویه برخورد دو وتر } FH \text{ و } AE \text{ است. } \hat{H}PE \Rightarrow \hat{H}PE = \frac{\hat{AF} + \hat{HE}}{2} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \hat{H}PE = \frac{\hat{AF} + \hat{AF}}{2} = \hat{AF}$$

$$\hat{B} = \frac{\hat{AF}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{\hat{AF}}{2} \Rightarrow \hat{AF} = 40^\circ \Rightarrow \hat{H}PE = \hat{AF} = 40^\circ$$

**تست** در شکل رو به رو،  $MA = AB$  و  $MA$  بر دایره، مماس است. اگر  $\hat{M} = 25^\circ$ ، آن‌گاه اندازه زاویه  $C$  چند درجه است؟



$75^\circ (1)$

$85^\circ (2)$

$5^\circ (3)$

$60^\circ (4)$

گزینه «۲» پاسخ

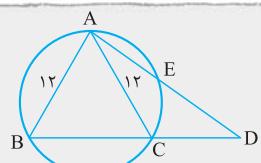
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{AD} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ \quad (1)$$

$$MA = AB \Rightarrow \hat{ABD} = \hat{M} = 25^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 50^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AB} = 50^\circ + \widehat{AD} = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = \frac{100^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

**تست** در دایره مقابل، طول دو وتر  $AB$  و  $AC$  برابر  $12$  است. نقطه  $D$  روی امتداد وتر  $BC$  چنان قرار دارد که  $AD$  دایره را در  $E$  قطع می‌کند و  $AE = 8$  می‌باشد. اندازه  $DE$  کدام است؟



$9 (1)$

$11 (2)$

$1 (3)$

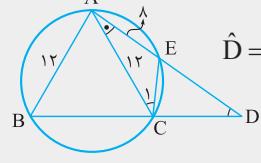
$10 (4)$

گزینه «۳» پاسخ

را به  $C$  وصل می‌کنیم. چون دو وتر  $AB$  و  $AC$  برابرند پس کمان‌های آن‌ها نیز برابر

$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{AE}}{2}$$

است ( $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ). داریم:

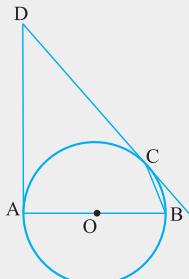


اما زاویه  $\hat{C}_1$  محاطی است، پس  $\hat{D} = \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2}$  و در نتیجه  $\hat{D} = \hat{C}_1$  می‌شود و داریم:

$$(\hat{C}AE = \hat{C}AD, \hat{C}_1 = \hat{D}) \Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{\widehat{AD}} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{12}{AD} = \frac{8}{12} \Rightarrow AD = 18$$

$$\Rightarrow 64 + 8DE = 144 \Rightarrow DE = \frac{144 - 64}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

**تست** در شکل مقابل،  $AB$  قطر دایره و  $DA$  و  $DC$  به ترتیب در نقاط  $A$  و  $C$  بر دایره مماس‌اند. اگر اندازه زاویه ظلی  $C$  برابر  $35^\circ$  باشد، آن‌گاه اندازه زاویه  $D$  کدام است؟



$60^\circ (1)$

$70^\circ (2)$

$75^\circ (3)$

$65^\circ (4)$

گزینه «۲» پاسخ

زاویه ظلی  $C$  برابر  $35^\circ$  است، پس اندازه کمان رو به رو به آن  $70^\circ$  است و داریم:

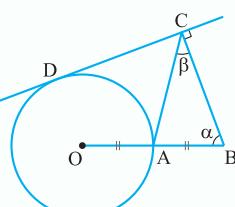
$$\widehat{AC} = 180^\circ - \widehat{BC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

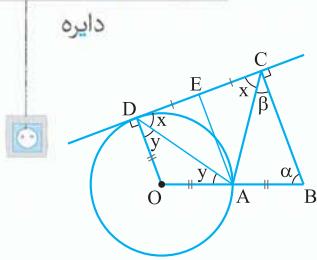
$$\hat{D} = 180^\circ - \widehat{AC} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

**مثال** در شکل مقابل، شعاع  $OA$  از دایره‌ای به مرکز  $O$  را به اندازه خودش تا نقطه  $B$  امتداد داده‌ایم. سپس

مماس دلخواهی در نقطه  $D$  بر دایره رسم می‌کنیم و از  $B$  بر آن عمود  $BC$  را رسم می‌کنیم. ثابت

$$\alpha = 2\beta$$





**پاسخ** از A به وسط ساق CD در ذوزنقه قائم‌الزاویه OBCD وصل می‌کنیم، پس AE پاره خط میانگین ذوزنقه است. لذا با قاعده‌های ذوزنقه موازی است و در نتیجه AE بر CD عمود و نهایتاً عمودمنصف CD است که نتیجه می‌دهد مثلث ACD متساوی‌الساقین می‌باشد ( $AD = AC$ ) و می‌توان  $x = 90^\circ - \beta \Rightarrow y = 90^\circ - x = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$  نوشت:

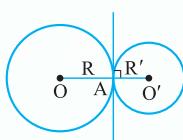
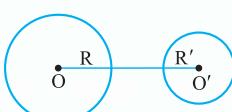
$$\hat{D}AC = 180^\circ - x - x = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta$$

$$\hat{ABC} = \hat{O}AC \Rightarrow \hat{O}AC = \beta + \alpha \Rightarrow \hat{O}AD + \hat{D}AC = \beta + \alpha \Rightarrow \beta + 2\beta = \beta + \alpha \Rightarrow \alpha = 2\beta$$

وضع دو دایره نسبت به هم: دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  با فرض  $R > R'$  و  $OO' = d$  به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.

$$d > R + R'$$

۱- دو دایره برون هم (دو دایره متخارج)

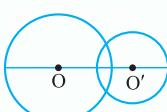


$$d = R + R'$$

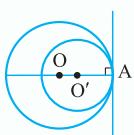
۲- دو دایره مماس برون (مماس خارج)

**نکته** نقطه تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و O'A بر خط مماس در نقطه A عمودند.

۳- دو دایره متقاطع

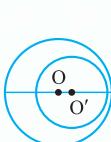


$$R - R' < d < R + R'$$



$$d = R - R'$$

۴- دو دایره مماس درون



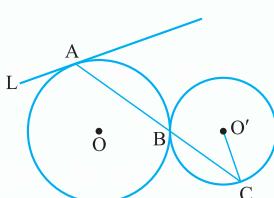
$$d < R - R'$$

۵- دو دایره مداخل



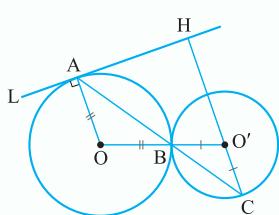
$$d = 0$$

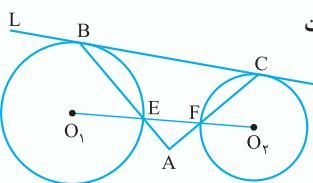
۶- دایره‌های هم‌مرکز



**مثال** در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B مماس خارج‌اند و خط L در نقطه A بر دایره به مرکز O مماس است. اگر امتداد AB، دایره به مرکز O' را در نقطه C قطع کند، ثابت کنید امتداد O'C بر خط L عمود است.

**پاسخ** خط مماس بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است، پس  $OA \perp L$ . از طرفی، دو مثلث متساوی‌الساقین AOB و AOC و BO'C متشابه‌اند زیرا  $\hat{AOB} = \hat{AOC}$  و  $\hat{BO'C} = \hat{AOB}$ . پس  $\hat{OAC} = \hat{ACH}$ . یعنی  $CH$  با  $OA$  موازی و در نتیجه بر خط L عمود است.





**مثال** در شکل مقابل، دو دایره متقاطع هستند و خط  $L$  بر هر دو دایره مماس است. ثابت کنید  $.AB \perp AC$

**پاسخ** فرض کنیم  $O_2\hat{C}F = \beta$  و  $O_1\hat{B}E = \alpha$ .

$B\hat{O}_1E = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$  متساوی الساقین  $O_2CF$  و  $O_1BE$  داریم:

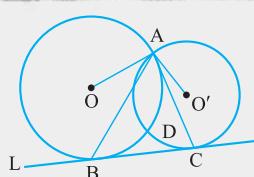
$$C\hat{O}_2F = 180^\circ - \beta - \beta = 180^\circ - 2\beta$$

اما  $O_1B$  و  $O_2C$  هر دو بر خط  $L$  عمودند، زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس داریم:

$$O_1B \parallel O_2C \Rightarrow B\hat{O}_1E + C\hat{O}_2F = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$A\hat{E}F = O_1\hat{E}B = O_1\hat{B}E = \alpha, A\hat{F}E = O_2\hat{F}C = O_2\hat{C}F = \beta$$

$$\hat{A} + A\hat{E}F + A\hat{F}E = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \underbrace{\alpha + \beta}_{90^\circ} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp AC$$



**تست** در شکل رویه‌رو، خط  $L$  بر دو دایره متقاطع در نقاط  $A$  و  $D$  مماس است. اگر  $\hat{OAO}' = 148^\circ$

باشد، آن‌گاه مجموع اندازه‌های کمان‌های  $\widehat{ADB}$  و  $\widehat{ADC}$  چند درجه است؟

$$(1) 212^\circ \quad (2) 200^\circ \quad (3) 248^\circ$$

$$(4) 202^\circ$$

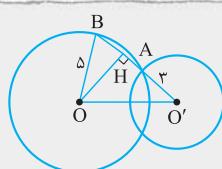
**پاسخ** گزینه «۲» با توجه به مثلث‌های متساوی الساقین، زوایا مطابق شکل می‌شود و داریم:

$$A\hat{C}B = 90^\circ - \beta, A\hat{B}C = 90^\circ - \alpha$$

$$B\hat{A}C + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = \beta + \alpha$$

$$\hat{OAO}' = \alpha + \beta + B\hat{A}C \Rightarrow 148^\circ = \alpha + \beta + \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 74^\circ$$

$$\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = A\hat{O}B + A\hat{O}'C = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 148^\circ = 212^\circ$$



**تست** دو دایره متقاطع  $C(O, 5)$  و  $C'(O', 3)$  مفروض‌اند. به ازای بیشترین مقدار صحیح  $\hat{OO'}$

خطی که از  $O'$  و نقطه تقاطع دو دایره می‌گذرد، وتری با کدام طول در دایره بزرگ‌تر ایجاد می‌کند؟

$$(1) 4/5 \quad (2) 5/5 \quad (3) 5 \quad (4) 6$$

**پاسخ** گزینه «۳» از متقاطع‌بودن دو دایره نتیجه می‌شود  $\hat{AOO'} < 80^\circ$  و بیشترین مقدار صحیح  $\hat{OO'}$  برابر ۷ است. مطابق

شكل، AB وتر مطلوب است، پس داریم:

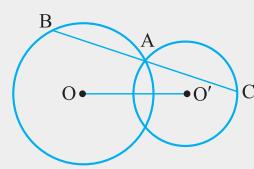
$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = OB^2 - BH^2 + O'H^2$$

فیثاغورس

عمود  $OH$  وتر  $AB$  را نصف می‌کند پس  $AH = BH = x$  و داریم:

$$7^2 = 5^2 - x^2 + (3+x)^2 \Rightarrow 49 = 25 - x^2 + 6x + x^2 + 9 \Rightarrow 6x = 15 \Rightarrow x = \frac{5}{2}, AB = 2AH = 2x = 5$$

**تست** مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ در نقطه A متقاطع‌اند و  $OO' = 12$ . اگر خطی که از A می‌گذرد دو وتر مساوی در دو



دایره ایجاد کند ( $AB = AC$ )، آن‌گاه طول این وترها کدام است؟

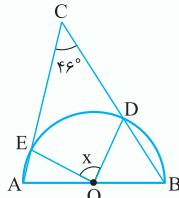
$$(1) \sqrt{120} \quad (2) \sqrt{130} \quad (3) \sqrt{140}$$

$$(4) \sqrt{110}$$





-۳- در شکل مقابل،  $O$  مرکز نیم‌دایره است. مقدار  $x$  کدام است؟



۸۴° (۱)

۹۲° (۲)

۸۶° (۳)

۸۸° (۴)

-۴- نقاط  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ ، دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اگر  $b = A_1A_4$  باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع دهضلعی منتظم  $A_1A_2 \dots A_n$  کدام است؟

$$b = \sqrt{R} (۴)$$

$$R + \frac{b}{2} (۳)$$

$$\sqrt{R^2 - b^2} (۲)$$

$$b - R (۱)$$

-۵- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، دایره‌ای مرکزش روی قاعدهٔ مثلث، در رأس  $A$  بر ضلع  $AC$  مماس و از رأس  $B$  می‌گذرد. ساق مثلث چند برابر شعاع دایره است؟

$$\frac{3}{2} (۴)$$

$$\sqrt{3} (۳)$$

$$\sqrt{3} + 1 (۲)$$

$$2\sqrt{3} (۱)$$

-۶- مربع  $ABCD$  به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس  $A$  و  $B$  و مماس بر ضلع  $CD$  کدام است؟

(سراسری ریاضی فارج از لکشور ۹۵)

$$3 (۴)$$

$$2\sqrt{2} (۳)$$

$$2/\sqrt{2} (۲)$$

$$2/\sqrt{2} (۱)$$

-۷- مربع  $ABCD$  به ضلع  $\sqrt{2} + 2$  واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر رأس  $D$  و مماس بر دو ضلع  $AB$  و  $BC$  کدام است؟

$$2\sqrt{2} - 1 (۴)$$

$$2 - \sqrt{2} (۳)$$

$$\sqrt{2} (۲)$$

$$2 (۱)$$

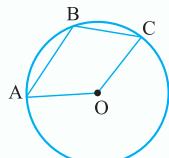
-۸- در نیم‌دایره‌ای به قطر  $AB$ ، وتر  $CD$  چنان قرار دارد که  $\widehat{BC} = 47^\circ$  و  $AB = 2CD$ . اندازهٔ زاویهٔ  $AOD$  چند درجه است؟

$$84^\circ (۴)$$

$$73^\circ (۳)$$

$$53^\circ (۲)$$

$$67^\circ (۱)$$



-۹- در شکل رو به رو،  $O$  مرکز دایره،  $\widehat{AOC}$  کدام است. اندازهٔ زاویهٔ  $\hat{C} = 47^\circ$  و  $\hat{A} = 53^\circ$  است.

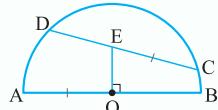
$$16^\circ (۲)$$

$$15^\circ (۱)$$

$$140^\circ (۴)$$

$$120^\circ (۳)$$

-۱۰- در شکل زیر،  $O$  مرکز نیم‌دایره و  $OA = CE$  است. اگر اندازهٔ کمان  $BC$  برابر  $15^\circ$  باشد. آن‌گاه اندازهٔ کمان  $\widehat{AD}$  چند درجه است؟



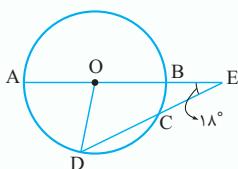
$$6^\circ (۲)$$

$$30^\circ (۱)$$

$$5^\circ (۴)$$

$$45^\circ (۳)$$

-۱۱- در دایره زیر، اندازهٔ پاره خط  $CE$  با طول شعاع دایره برابر است. اگر  $\hat{E} = 18^\circ$  و  $O$  مرکز دایره باشد، اندازهٔ کمان  $AD$  چند درجه است؟



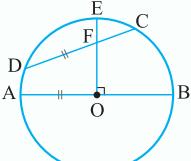
$$45^\circ (۱)$$

$$48^\circ (۲)$$

$$54^\circ (۳)$$

$$72^\circ (۴)$$

-۱۲- در شکل زیر، شعاع  $OE$  بر قطر  $AB$  عمود است. اگر اندازهٔ کمان  $AD = 20^\circ$  و  $DF = OA$  باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان  $CE$  کدام است؟

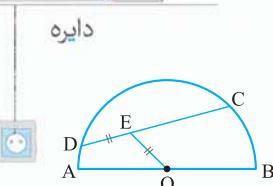


$$3^\circ (۱)$$

$$45^\circ (۲)$$

$$5^\circ (۳)$$

$$55^\circ (۴)$$



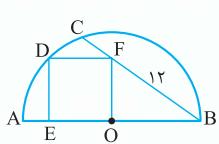
۱۳- در نیم‌دایره مقابل،  $OE = DE$  و قطر  $AB$  دو برابر طول پاره خط  $CE$  است. اندازه کمان  $CD$  چند درجه است؟

$108^\circ$  (۲)

$120^\circ$  (۱)

$90^\circ$  (۴)

$105^\circ$  (۳)



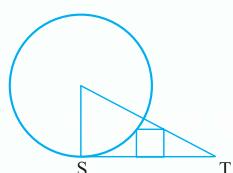
۱۴- مطابق شکل،  $O$  مرکز نیم‌دایره و چهارضلعی  $OEDF$  مربع است. اگر  $BF = 12$  باشد، آن‌گاه ضلع مربع کدام است؟

$2\sqrt{3}$  (۲)

$3\sqrt{2}$  (۱)

$4\sqrt{3}$  (۴)

$4\sqrt{2}$  (۳)



۱۵- در شکل مقابل، شعاع دایره ۵ و ضلع مربع ۲ است. اندازه مماس  $TS$  کدام است؟

۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

۱۶- دو سر قطر نیم‌دایره‌ای روی دو ضلع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد و موازی و تر مثلث می‌باشد. همچنین وتر مثلث، مماس بر نیم‌دایره است. اگر اندازه اضلاع قائم مثلث ۳ و ۴ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟

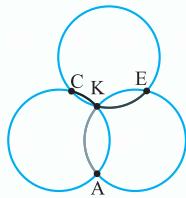
$\frac{60}{46}$  (۴)

$\frac{60}{47}$  (۳)

$\frac{60}{48}$  (۲)

$\frac{60}{49}$  (۱)

۱۷- سه دایره به شعاع‌های متساوی از نقطه  $K$  می‌گذرند و دوبعد متقاطع‌اند. حاصل  $\widehat{AK} + \widehat{KE} + \widehat{CK}$  کدام است؟



$90^\circ$  (۱)

$120^\circ$  (۲)

$180^\circ$  (۳)

$270^\circ$  (۴)

۱۸- در مثلث متساوی‌الساقین  $(ABC)$ ، نقطه  $O$  در امتداد  $AC$  مرکز دایره‌ای است که در نقطه  $B$  بر ضلع  $AB$  مماس است. امتداد  $BC$  این دایره را در  $D$  قطع کرده است، مثلث  $OCD$  چگونه است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

(۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۴) غیرمشخص

۱۹- در مثلث متساوی‌الساقین  $(ABC)$ ، دایره‌ای به مرکز  $B$  و شعاع  $AC$  را در  $E$  و ساق  $AB$  را در  $D$  قطع می‌کند. اندازه زاویه  $ADE$  کدام است؟

$110^\circ$  (۴)

$108^\circ$  (۳)

$105^\circ$  (۲)

$100^\circ$  (۱)

۲۰- در یک ربع دایره،  $OA$  و  $OB$  دو شعاع عمود بر هم هستند و نقطه  $C$  روی کمان آن، چنان قرار دارد که  $BC = 2$  و  $AC = 6\sqrt{2}$  است. شعاع ربع دایره کدام است؟

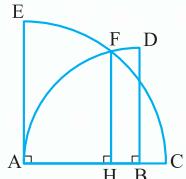
۸ (۴)

$3\sqrt{6}$  (۳)

$5\sqrt{2}$  (۲)

$4\sqrt{3}$  (۱)

۲۱- در شکل مقابل، دو ربع دایره به شعاع‌های ۵ و  $AC = 30$  و  $AB = 25$  رسم شده است. طول پاره خط  $HF$  کدام است؟



۲۱ (۱)

۲۲ (۲)

۲۳ (۳)

۲۴ (۴)

۲۲- در مثلث  $ABC$ ،  $BC = 12$ ،  $\hat{A} = 45^\circ$ ، نیم‌دایره‌ای به قطر  $BC$  ضلع  $AB$  را در  $D$  و ضلع  $AC$  را در  $E$  قطع می‌کند، طول پاره خط  $DE$  کدام است؟

$8\sqrt{2}$  (۴)

$4\sqrt{2}$  (۳)

$6\sqrt{2}$  (۲)

$3\sqrt{2}$  (۱)



-۲۳- در یک ربع دایره  $OA$  و  $OB$  دو شعاع عمود بر هم هستند. نقطه  $D$  روی شعاع  $OA$  چنان است که  $OD = 15$  و  $DA = 5$  و نقطه  $C$  روی ربع دایره چنان قرار دارد که  $\hat{B}\hat{C}D = 90^\circ$  است. طول پاره خط  $CD$  کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

-۲۴- در نیم‌دایره‌ای به قطر  $AB$ ، وتر  $CD$  موازی  $AB$  است و  $C$  به  $A$  نزدیک‌تر است. اگر  $AC = 6$  و  $CD = 1$  باشد، آن‌گاه شعاع نیم‌دایره کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ / ۵ (۲)

۴ (۱)

-۲۵- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{B} = 2\hat{A}$ . نیم‌دایره‌ای به قطر  $BC$  ضلع  $AB$  را در  $E$  و ضلع  $AC$  را در  $D$  قطع می‌کند به طوری که  $AD = 2$  و  $CD = 6$  است. طول پاره خط  $DE$  کدام است؟

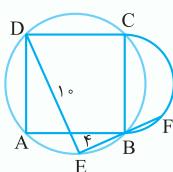
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

-۲۶- در شکل زیر، دایره‌ای از رأس‌های مربع  $ABCD$  می‌گذرد. نیم‌دایره‌ای به قطر  $BC$  را رسم می‌کنیم. نقطه  $E$  روی دایره چنان است که  $DE = 10$  و  $BE = 4$ ، امتداد  $BE$  نیم‌دایره را در نقطه  $F$  قطع می‌کند. طول پاره خط  $BF$  کدام است؟



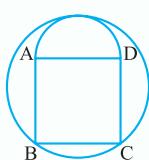
۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

-۲۷- در شکل روبرو،  $ABCD$  مربعی به ضلع واحد و نیم‌دایره به قطر  $AD$  می‌باشد. دایره‌ای از رأس‌های  $B$  و  $C$  گذشته و بر نیم‌دایره مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



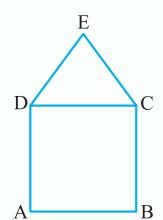
۲ (۲)

۵ (۱)

۳ (۴)

۳ (۳)

-۲۸- در شکل مقابل،  $ABCD$  مربعی به ضلع یک و مثلث  $DEC$  متساوی‌الاضلاع است. شعاع دایره‌ای که از نقاط  $A$ ،  $B$  و  $E$  می‌گذرد، کدام است؟


 $\sqrt{3}$  (۲)

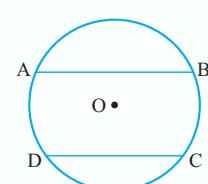
۱ (۱)

 $\frac{3}{2}$  (۴)

 $\sqrt{2}$  (۳)

### وثرهای مساوی، فظر عمودبر و ثروت‌های نامساوی

-۲۹- مطابق شکل، در دایره‌ای به مرکز  $O$ ، دو وتر  $CD$  موازی  $AB$  و فاصله آن‌ها برابر ۵ است، اگر  $AB = 16$  و  $CD = 14$ ، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟


 ۶۸ $\pi$  (۲)

 ۶۵ $\pi$  (۱)

 $\frac{225\pi}{4}$  (۴)

 $\frac{113\pi}{2}$  (۳)

-۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) دایره‌ای به مرکز  $A$  و شعاع  $AB$  وتر مثلث را در  $D$  و ضلع  $AC$  را در  $E$  قطع می‌کند. اگر  $BD = 18$  و  $CD = 7$  باشد، آن‌گاه طول پاره خط  $CE$  کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

-۳۱- امتداد یک وتر به طول ۶ در یک نیم‌دایره، امتداد قطر نیم‌دایره را قطع می‌کند و با آن زاویه  $45^\circ$  می‌سازد. اگر طول پاره خطی که بین نیم‌دایره و نقطه تقاطع با قطر پیدید می‌آید، برابر یک باشد، آن‌گاه طول قطر نیم‌دایره کدام است؟

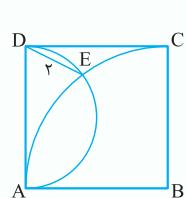
۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

-۳۲- مطابق شکل، در مربع  $ABCD$ ، نیم‌دایره و ربع دایره در نقطه  $E$  متقاطع‌اند و  $DE = 2$ . مساحت مربع کدام است؟

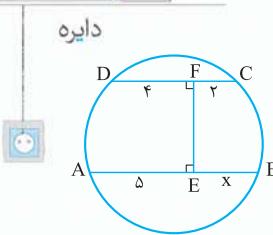


۱۸ (۱)

۱۵ (۲)

۱۶ (۳)

۲۰ (۴)



-۳۳- در شکل مقابل، مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱) ۱  
۲) ۲  
۳) ۳  
۴) ۴  
۵) ۵

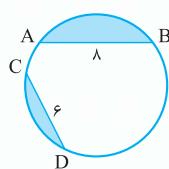
-۳۴- دو وتر متقاطع با طول های برابر، زاویه  $60^\circ$  با یکدیگر می سازند و طول پاره خط هایی که روی یکدیگر پیدید می آورند ۲ و ۸ می باشد. شعاع دایره کدام است؟

- $\sqrt{3}$  (۱)  $3\sqrt{3}$  (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{7}$  (۴)

-۳۵- شعاع های دو دایره هم مرکز ۳ و ۵ است. از نقطه A روی دایره بزرگ تر، دو وتر AE و AF را مماس بر دایره کوچک تر رسم می کنیم. اندازه EF کدام است؟

- ۷/۲ (۱) ۶/۴ (۲) ۹/۶ (۳) ۸/۱ (۴)

-۳۶- در شکل رو به رو، مجموع اندازه های کمان های AB و CD برابر  $180^\circ$  است. اگر  $AB = 8$  و  $CD = 6$  باشد، آن گاه مجموع مساحت های نواحی رنگی، کدام است؟



- $\frac{25\pi}{2} - 8$  (۱)  $10\pi - 12$  (۲)  
 $\frac{25\pi}{2} - 24$  (۳)  $10\pi - 16$  (۴)

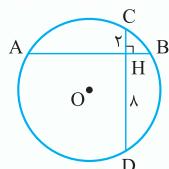
-۳۷- در یک دایره، نقطه C روی وتر AB آن را به دو پاره خط به طول های ۲ و ۱۴ سانتی متری تقسیم کرده است. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی متر باشد، آن گاه مساحت دایره کدام است؟

- $10.8\pi$  (۱)  $64\pi$  (۲)  $128\pi$  (۳)  $72\pi$  (۴)

-۳۸- فاصله وسط کمان نظیر وتر به طول ۲۴ در یک دایره از انتهای این وتر برابر ۱۳ است. فاصله دور ترین نقطه دایره از انتهای این وتر کدام است؟

- ۳۲/۵ (۱) ۳۳/۸ (۲) ۲۱/۲ (۳) ۲۸/۸ (۴)

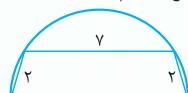
-۳۹- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و دو وتر AB و CD بر هم عمودند، اگر  $DH = 8$ ،  $CH = 2$  و شعاع



- دایره  $r = 3\sqrt{5}$  باشد، اندازه وتر AB کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳)

-۴۰- مطابق شکل، یک ذوزنقه متساوی الساقین با قاعده کوچک ۷ و ساق های ۲ در یک نیم دایره محاط شده است. قطر نیم دایره کدام است؟

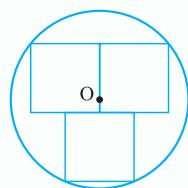


- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲)  
۸ (۳) ۱۰ (۴)

-۴۱- ذوزنقه متساوی الساقینی با قاعده های ۱۲ و ۱۶ در یک دایره به شعاع ۱۰، محاط است. اگر مرکز دایره خارج ذوزنقه باشد. آن گاه مساحت ذوزنقه کدام است؟

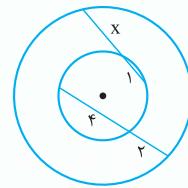
- ۵۴ (۱) ۲۷ (۲) ۵۶ (۳) ۲۸ (۴)

-۴۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و مربع ها به ضلع ۱۶ سانتی مترند. مساحت دایره چند برابر  $\pi$  است؟



- ۴۲۵ (۱) ۳۶۱ (۲)  
۴۴۱ (۳) ۴۷۵ (۴)

-۴۳- در شکل مقابل، دو دایره هم مرکزند. با توجه به اندازه های داده شده X کدام است؟



- ۱ (۱) ۲ (۲)  
۳ (۳) ۴ (۴)



- ۴۴- دو دایره هم مرکزند. وتری به طول  $2\sqrt{3}$  از دایره بزرگ بر دایره کوچک مماس است و وتری به طول ۶، دایره کوچک را قطع می‌کند. طول وتر ایجادشده در دایره کوچک کدام است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

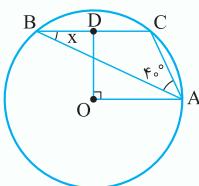
- ۴۵- دو دایره هم مرکزند. اندازه وتری از دایره بزرگ که بر دایره کوچک تر مماس است ۳۲ می‌باشد. اگر کمترین فاصله نقاط روی دو دایره ۸ باشد، آن‌گاه شعاع دایره کوچک تر کدام است؟

۴)

۳)

۲)

۱)



- ۴۶- در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و  $D$  وسط وتر  $BC$  است.  $x$  کدام است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

- ۴۷- دایره‌ای به شعاع ۱۰ و وتر  $AB$  از آن مفروض‌اند. دورترین نقطه دایره از این وتر با طول وتر برابر است. فاصله مرکز دایره از این وتر کدام است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

- ۴۸- در مثلث  $ABC$ ،  $ABC > AC$  و  $O$  مرکز دایره محیطی مثلث  $ABC$  و  $M$  پای میانه رأس  $A$  است. اگر  $\hat{AOM} = 90^\circ$  و  $\hat{A} = 20^\circ$  باشد، آن‌گاه اندازه  $\hat{B}$  چند درجه است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

- ۴۹- در مثلث  $ABC$ ،  $O$  مرکز دایره محیطی و  $D$  به ترتیب پای نیمساز و میانه رأس  $A$  می‌باشند.  $AD$  را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی را در  $A'$  قطع کند. می‌دانیم  $AM$  میانه رأس  $A$  در مثلث  $OAA'$  است، زاویه  $A$  چند درجه است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

- ۵۰- نقطه ثابت  $M$  در دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع ۳، به فاصله  $2\sqrt{2}$  از مرکز دایره قرار دارد. وتر  $EF$  از  $M$  می‌گذرد، کمترین محیط مثلث  $EOF$  کدام است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

- ۵۱- دو دایره به مرکز  $A$  و شعاع‌های ۵ و ۷ مفروض‌اند. با فرض  $AB = 5$ ، اگر  $C$  نقطه‌ای روی دایره بزرگ تر باشد به طوری که اندازه زاویه  $A\hat{C}B$  ماکسیمم باشد، آن‌گاه مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

### زاویه محاطی و ظلی و زاویه پرخورد و نظرها

- ۵۲- در مثلث  $ABC$ ،  $ABC = 30^\circ$ ،  $\hat{B} = 70^\circ$ ،  $\hat{C} = 10^\circ$  است. اگر  $O$  مرکز دایره محیطی مثلث و  $D$  نقطه وسط کمان نظیر ضلع  $BC$  باشد، آن‌گاه زاویه  $AOD$  چند درجه است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

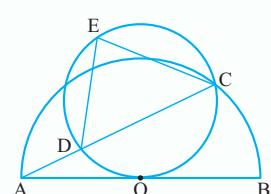
- ۵۳- در شکل زیر، دایره در نقطه  $O$  بر مرکز نیم‌دایره با قطر  $BA$  مماس است. اگر اندازه زاویه  $A$  برابر  $26^\circ$  باشد، آن‌گاه اندازه زاویه  $E$  چند درجه است؟

۱)

۲)

۳)

۴)



- ۵۴- در مثلث  $ABC$ ،  $ABC = 72^\circ$ ، دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. وسط کمان‌های نظیر اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب  $E$  و  $D$  می‌نامیم. زاویه بین دو وتر  $AC$  و  $DE$  در این دایره چند درجه است؟

۴)

۳)

۲)

۱)

- ۵۵- در دایره‌ای به قطر  $AB$ ، نقطه  $M$  روی دایره قرار دارد، به طوری که  $\hat{MAB} = 50^\circ$ . اندازه زاویه ظلی که رأس آن، نقطه  $M$  است، چند درجه است؟

۴)

۳)

۲)

۱)