

# فهرست

## فصل اول: دایره

- درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ..... ۸
- درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره ..... ۲۰
- درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی ..... ۳۰

## فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

- درس اول: تبدیل‌های هندسی ..... ۴۱
- درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها ..... ۵۱

## فصل سوم: روابط طولی در مثلث

- درس اول: قضیه سینوس‌ها ..... ۵۸
- درس دوم: قضیه کسینوس‌ها ..... ۶۴
- درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها ..... ۷۱
- درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ..... ۷۶

- پاسخ پرسش‌های دشوار ..... ۸۳

فصل



دايره

# دربارهٔ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

## دایره

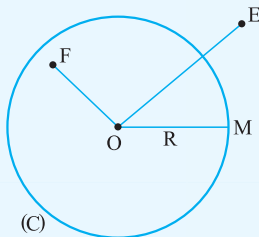
مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت در آن صفحه به فاصله معلومی قرار داشته باشند، دایره نامیده می‌شود. نقطه ثابت را مرکز دایره و فاصله معلوم را شعاع دایره می‌نامند. معمولاً دایره را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند؛ مثلاً دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  را با نماد  $C(O, R)$

نمایش می‌دهیم. یک نقطه نسبت به دایره یکی از وضعیت‌های زیر را دارد:

**الف** نقطه  $M$  روی دایره  $C(O, R)$  است، اگر و تنها اگر  $OM = R$ .

**ب** نقطه  $E$  بیرون دایره  $C(O, R)$  است، اگر و تنها اگر  $OE > R$ .

**پ** نقطه  $F$  درون دایره  $C(O, R)$  است، اگر و تنها اگر  $OF < R$ .



### — اوضاع نسبی یک خط و یک دایره —

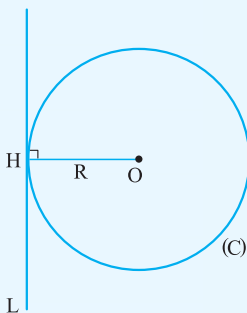
**خط مماس بر دایره:** اگر خط و دایره فقط در یک نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

**خط متقاطع با دایره:** اگر خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط و دایره متقاطع‌اند.

یک خط و یک دایره در صفحه دارای یکی از سه وضعیت زیر هستند:

**الف** خط بر دایره مماس است، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره باشد.

$$OH = R \Leftrightarrow \text{خط } L \text{ بر دایره } (C) \text{ مماس است.}$$

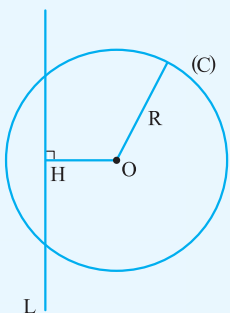


**نکته مهم** خط مماس بر دایره همواره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.  $(OH \perp L)$

و بالعکس اگر خطی بر انتهای یک شعاع از دایره‌ای عمود باشد، آن‌گاه آن خط بر دایره مماس است.

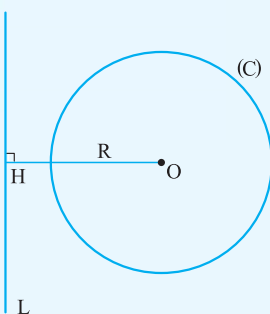
**ب** خط با دایره متقاطع است، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط کم‌تر از شعاع دایره باشد.

$$OH < R \Leftrightarrow \text{خط } L \text{ و دایره } (C) \text{ متقاطع‌اند.}$$



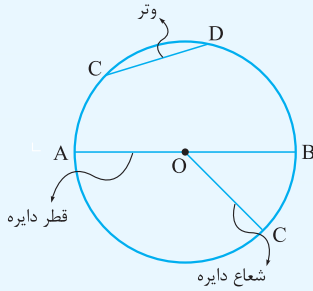
**پ** خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد.

$$OH > R \Leftrightarrow \text{خط } L \text{ و دایره } (C) \text{ نقطه اشتراکی ندارند.}$$



زوایای مرکزی، محاطی و ظلّی

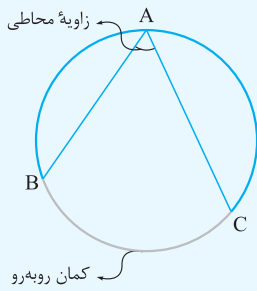
تعاریف



۱) شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲) وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

۳) قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.



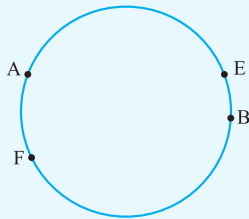
۴) زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند.

شکل مقابل زاویه محاطی BAC را نشان می‌دهد.

۵) کمان: دو نقطه A و B را روی دایره در نظر می‌گیریم. قسمتی از دایره بین این دو نقطه را کمان دایره می‌گویند.

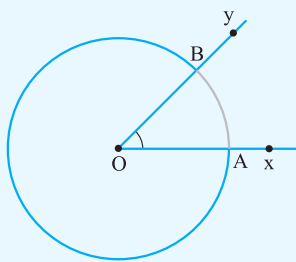
دو نقطه A و B دقیقاً دو کمان را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از کمان AB، کمان کوچک‌تر می‌باشد.

در شکل مقابل دو نقطه A و B دو کمان AEB و AFB را مشخص می‌کند.



۶) زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره باشد. در شکل مقابل xOy یک زاویه مرکزی است.

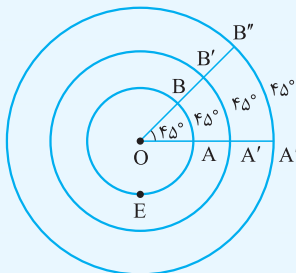
که دایره را در نقاط A و B قطع کرده است و کمان AB روبه‌رو به آن است.



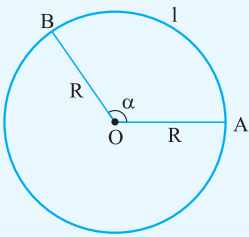
۷) اندازه زاویه مرکزی: اندازه زاویه مرکزی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه برحسب درجه و به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد؛

مثلاً در شکل زیر همه کمان‌های AB، A'B' و A''B'' به اندازه ۴۵° می‌باشند. بنا به قرارداد اندازه نیم‌دایره برحسب درجه ۱۸۰° می‌باشد و اندازه

کمان بزرگ‌تر برحسب درجه برابر است با ۳۶۰° منهای اندازه کمان کوچک‌تر متناظر آن.



$$\widehat{AEB} = 360^\circ - \widehat{AB}$$

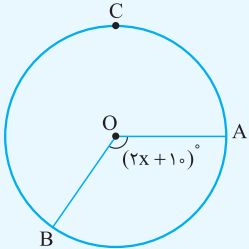


۸ طول کمان: طول کمان با اندازه زاویه مرکزی نظیر آن، رابطه مستقیم دارد.

$$\text{طول کمان } AB = \frac{\alpha}{360} (2\pi R)$$

معمولاً طول کمان را با  $l$  نمایش می‌دهند؛ پس  $l = \frac{\alpha}{360} (2\pi R)$ .

مثال در شکل مقابل اندازه کمان  $ACB$  برابر  $24^\circ$  است. مقدار  $x$  را به دست آورید.



$$\widehat{AB} = 360^\circ - \widehat{ACB} = 360^\circ - 24^\circ = 120^\circ$$

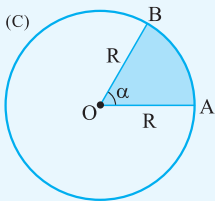
$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow 2x + 10 = 120 \Rightarrow 2x = 110 \Rightarrow x = 55$$

پاسخ

مثال اندازه کمانی برحسب درجه در یک دایره به شعاع  $40$  سانتی‌متر،  $135^\circ$  است. طول این کمان را برحسب سانتی‌متر به دست آورید.

$$\text{طول کمان } AB = \frac{135}{360} \times (2\pi \times 40) = 30\pi \approx 94.2 \text{ cm}$$

پاسخ



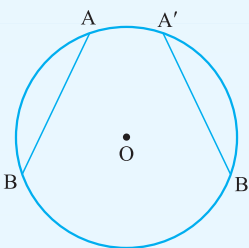
۹ قطاع دایره و مساحت آن: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره

محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره  $C(O, R)$  برحسب

درجه مساوی  $\alpha$  باشد، مساحت قطاع برابر  $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$  می‌باشد.

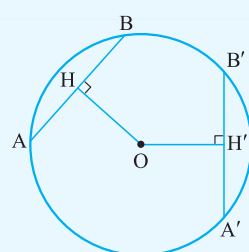
### — خواص وترهای مساوی در دایره —

۱ در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.



$$AB = A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

۲ در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آنها برابر باشد.



$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

مثال فاصله مرکز دایره از وتر  $AB$  از  $3$  برابر فاصله مرکز دایره تا وتر  $A'B'$ ،  $12$  واحد کم‌تر است. اگر اندازه دو وتر  $AB$  و  $A'B'$  برابر باشند،

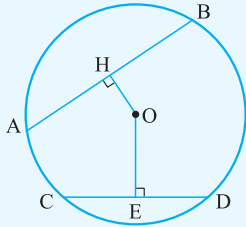
آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا وترهای  $AB$  و  $A'B'$  را بیابید.

پاسخ از شکل فوق استفاده می‌کنیم؛ بنا به فرض داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \Rightarrow OH = OH' \\ OH = 3OH' - 12 \end{array} \right\} \Rightarrow OH = 3OH - 12 \Rightarrow 2OH = 12 \Rightarrow OH = 6 \Rightarrow OH' = 6$$

— خواص وترهای نامساوی در دایره —

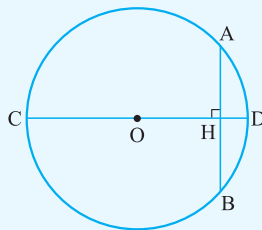
در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) وتر اول از وتر دوم بزرگ‌تر است، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا وتر اول کوچک‌تر از فاصله مرکز دایره تا وتر دوم باشد.



$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OE$$

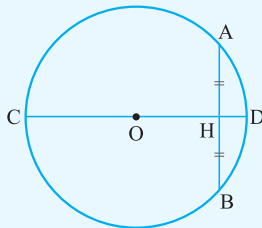
— چگونگی نصف‌شدن وتر به وسیله قطر دایره —

۱۱ در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



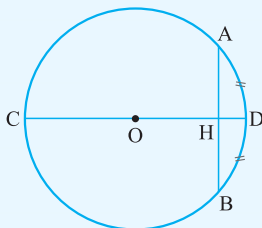
$$AB \text{ بر وتر } CD \text{ عمود} \Rightarrow AH = BH, \begin{cases} \widehat{AD} = \widehat{BD} \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{cases}$$

۱۲ در هر دایره قطری از دایره، وتری از آن را که قطر نیست نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$AH = BH \Rightarrow CD \perp AB, \begin{cases} \widehat{AD} = \widehat{BD} \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{cases}$$

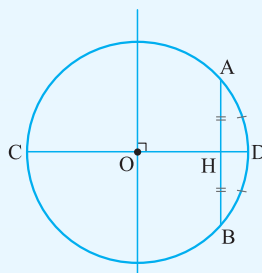
۱۳ در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.



$$\widehat{AD} = \widehat{BD} \text{ یا } \widehat{AC} = \widehat{BC} \Rightarrow CD \perp AB, AH = BH$$

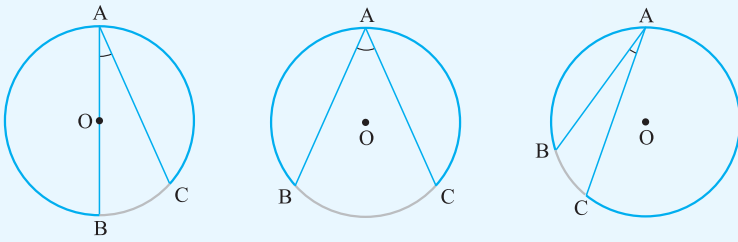
**مثال** وسط وتری از دایره و وسط یکی از کمان‌های نظیر آن معلوم است. طریقه رسم مرکز دایره را شرح دهید.

**پاسخ** وسط وتر AB و وسط کمان AB روی قطری از دایره واقع‌اند که بر AB عمود است، پس D را به H وصل می‌کنیم، نقطه تلاقی امتداد آن با دایره را C می‌نامیم. CD قطر دایره است. عمودمنصف CD را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با CD یعنی نقطه O مرکز دایره است.



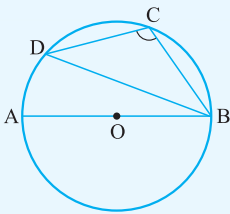
## اندازه زاویه محاطی

اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن.



در هر یک از شکل‌های فوق داریم  $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ .

**مثال** در شکل زیر اندازه زاویه محاطی BCD برابر  $115^\circ$  و AB قطر دایره است. اندازه زاویه محاطی ABD را محاسبه کنید.



**پاسخ** کمان روبه‌رو به زاویه محاطی BCD، BAD می‌باشد؛ پس می‌توان نوشت:

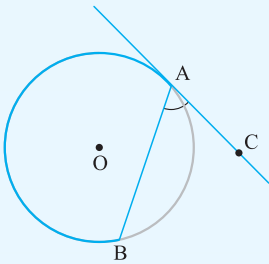
$$\widehat{BCD} = 115^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BAD}}{2} = 115^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = 115^\circ \Rightarrow \frac{180^\circ + \widehat{AD}}{2} = 115^\circ \Rightarrow 180^\circ + \widehat{AD} = 230^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 50^\circ, \hat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

## زاویه ظلّی و اندازه آن

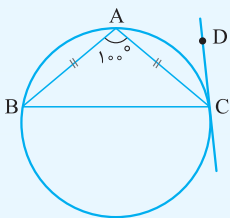
زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است، زاویه ظلّی نامیده می‌شود.

اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن.



$$\hat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

**مثال** در شکل زیر اندازه زاویه محاطی A برابر  $100^\circ$  و وترهای AB و AC برابرند. اندازه زاویه ظلّی ACD را به دست آورید.



**پاسخ** ابتدا اندازه زاویه B را در مثلث ABC محاسبه می‌کنیم. این مثلث متساوی‌الساقین است ( $\hat{B} = \hat{C}$ )؛ پس داریم:

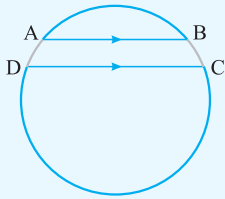
$$\hat{B} + \hat{B} + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 80^\circ$$

$$\text{زاویه ظلّی } \hat{ACD} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

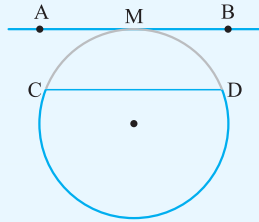
— کمان‌های محصور بین دو وتر موازی —

۱۱) اندازه‌های کمان‌های محصور بین دو وتر موازی همواره با هم برابرند.

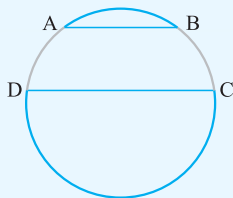


$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

حالت خاص: اگر خط AB در نقطه M بر دایره مماس باشد و  $AB \parallel CD$ ، آن‌گاه  $\widehat{CM} = \widehat{DM}$ .

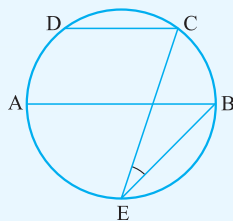


۱۲) اگر دو کمان AD و BC مطابق شکل روبه‌رو برابر باشند، آن‌گاه  $AB \parallel CD$  است.



$$\widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AB \parallel CD$$

مثال | در شکل مقابل AB قطر دایره،  $AB \parallel CD$  و  $\widehat{CD} = 48^\circ$  است. اندازه زاویه E را به دست آورید.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

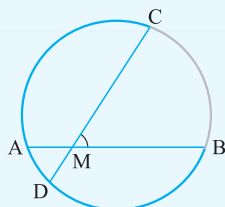
پاسخ

$$\widehat{AD} + \widehat{CD} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + 48^\circ + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

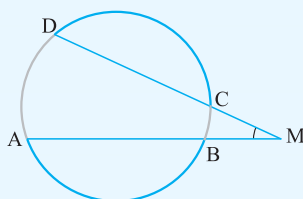
$$\text{زاویه محاطی } E = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{66^\circ}{2} = 33^\circ$$

— زاویه بین دو وتر در دایره —

۱۱) اگر مطابق شکل دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه  $\widehat{M} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$ .

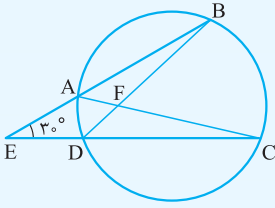


۱۲) اگر مطابق شکل امتداد دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، آن‌گاه  $\widehat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$ .





مثال | در شکل زیر  $\hat{E} = 30^\circ$  و  $\widehat{BC} = 4\widehat{AD}$ . اندازه زاویه  $BFC$  را محاسبه کنید.



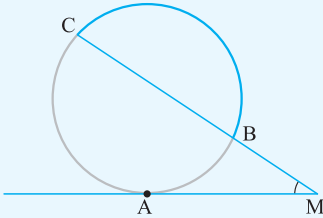
پاسخ | با فرض  $\widehat{AD} = \alpha$ ، داریم  $\widehat{BC} = 4\alpha$  و می توان نوشت:

$$\hat{E} = 30^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \frac{4\alpha - \alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\widehat{BFC} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{\alpha + 4\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2} = \frac{5 \times 20^\circ}{2} = 50^\circ$$

### — زاویه بین مماس و امتداد یک وتر —

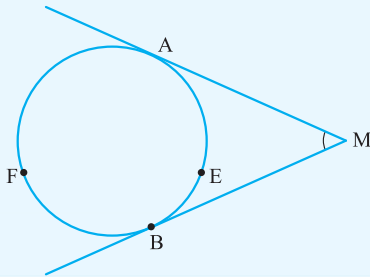
اگر مطابق شکل امتداد وتر  $BC$  و خط مماس بر دایره در نقطه  $A$  یکدیگر را در نقطه  $M$  قطع کنند، آن گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

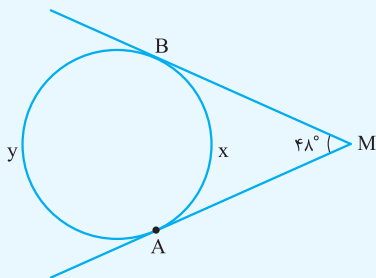
### — زاویه بین دو مماس —

اگر مطابق شکل از نقطه  $M$  دو مماس بر دایره رسم شود، آن گاه زاویه بین دو مماس برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AFB} - \widehat{AEB}}{2}$$

مثال | در شکل مقابل مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید.



$$\hat{M} = \frac{y - x}{2} \Rightarrow 48^\circ = \frac{y - x}{2} \Rightarrow y - x = 96^\circ$$

پاسخ |

از طرفی  $x + y = 36^\circ$  است؛ پس باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x + y = 36^\circ \\ y - x = 96^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2y = 132^\circ \Rightarrow y = 66^\circ, x = 36^\circ - 66^\circ = -30^\circ$$

پرسش‌های دوگزینه‌ای



۱ اگر فاصله مرکز یک دایره از یک خط بیشتر از شعاع دایره باشد، آن گاه وضعیت خط و دایره کدام است؟

- (۱) متقاطع هستند. (۲) نقطه اشتراکی ندارند.

۲ اندازه کمان روبه‌رو به زاویه محاطی، چند برابر اندازه زاویه محاطی است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$

۳ مجموع اندازه‌های یک زاویه ظلی و کمان روبه‌رو به آن، چند برابر اندازه آن زاویه است؟

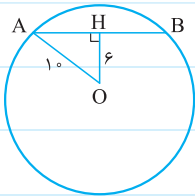
- (۱) ۲ (۲) ۳

۴ در یک دایره به شعاع واحد، اندازه یک کمان برحسب درجه ۶۰ می‌باشد. طول این کمان چه کسری از عدد  $\pi$  است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{3}$

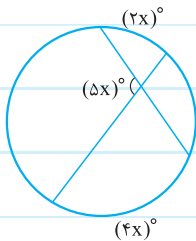
۵ در شکل مقابل طول وتر AB کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶



۶ در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

- (۱)  $\frac{22}{5}$  (۲) ۲۰



۷ اگر اندازه یک وتر در یک دایره با طول شعاع دایره برابر باشد، اندازه کمان نظیر این وتر چند درجه است؟

- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $30^\circ$

۸ اگر اندازه کمان نظیر یک وتر در دایره  $90^\circ$  باشد، آن گاه طول آن وتر چند برابر شعاع دایره است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$

۹ اندازه هر زاویه مرکزی برحسب درجه چند برابر اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲

۱۰ در یک دایره به شعاع ۵، اندازه یک وتر ۸ است. فاصله مرکز دایره تا وتر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳

## درست و نادرست ?

- ۱ اگر دو وتر در یک دایره موازی باشند، کمان‌های محصور بین این دو وتر برابرند.
- ۲ اندازه زاویه ظلّی با اندازه کمان روبه‌رو به آن برابر است.
- ۳ اندازه زاویه محاطی با اندازه کمان روبه‌رو به آن برابر است.
- ۴ طول کمان به اندازه  $\alpha$  درجه در دایره به شعاع  $R$  برابر  $\frac{\alpha}{180} \times \pi \times R$  است.
- ۵ اندازه هر زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره،  $90^\circ$  است.
- ۶ اگر دو زاویه محاطی و ظلّی روبه‌رو به یک کمان باشند، اندازه دو زاویه برابر است.
- ۷ قطری از دایره که بر یک وتر عمود باشد، آن وتر را نصف می‌کند.
- ۸ اگر قطر دایره وتری از آن را نصف کند بر آن وتر عمود است.
- ۹ اگر دو کمان یک دایره برابر باشند، هر دو وترى که از وصل انتهای آنها پدید می‌آید، برابرند.
- ۱۰ اگر دو ضلع یک زاویه محاطی یک طرف مرکز دایره قرار گیرند، آن‌گاه این زاویه حاده است.

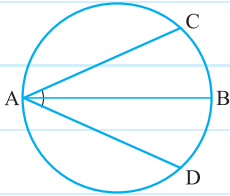
## کامل کنید ?

- ۱ اگر اندازه کمان وتری از یک دایره  $120^\circ$  باشد، آن‌گاه طول وتر ..... برابر شعاع دایره است.
- ۲ در دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $5$ ، به تعداد ..... وتر به طول  $7$  می‌توان رسم کرد.
- ۳ اگر فاصله مرکز یک دایره تا یک خط برابر شعاع دایره باشد، خط و دایره ..... هستند.
- ۴ در دایره‌ای به شعاع  $8$ ، فاصله یک نقطه درون آن از مرکز دایره ..... مقدار صحیح می‌پذیرد.
- ۵ اگر یک ضلع یک زاویه ظلّی قطری از دایره باشد، اندازه این زاویه ..... درجه است.
- ۶ اگر طول کمانی از دایره  $\frac{1}{8}$  محیط دایره باشد، آن‌گاه اندازه این کمان ..... درجه است.
- ۷ خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس ..... است.
- ۸ اگر خطی بر انتهای یک شعاع از دایره عمود باشد، آن‌گاه آن خط بر دایره ..... است.
- ۹ فاصله مرکز دایره از وسط‌های همه وترهایی که هم‌طول‌اند، ..... است.
- ۱۰ اگر وتر  $AB$  بزرگ‌تر از وتر  $CD$  باشد، آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا وتر  $AB$  ..... از فاصله مرکز دایره تا وتر  $CD$  است.

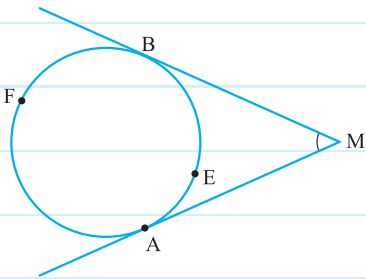
پرسش‌های تشریحی



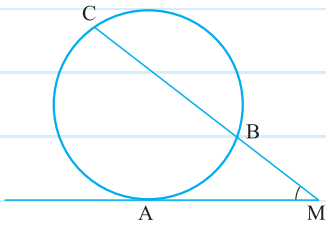
۱ در شکل زیر  $AB$  قطر دایره است. اگر  $\hat{BAC} = \hat{BAD}$ ، آن گاه ثابت کنید  $AC = AD$ .



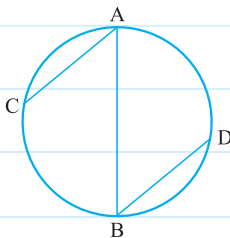
۲ در شکل زیر ثابت کنید  $\hat{M} = \frac{\widehat{AFB} - \widehat{AEB}}{2}$



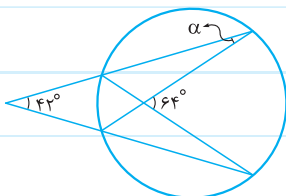
۳ در شکل زیر ثابت کنید  $\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$



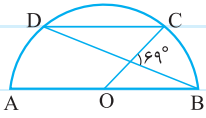
۴ در شکل مقابل  $AB$  قطری از دایره است و وترهای  $AC$  و  $BD$  موازی‌اند. ثابت کنید  $AC = BD$ .



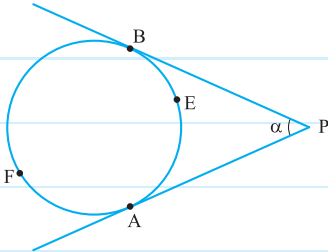
۵ در شکل مقابل مقدار  $\alpha$  را به دست آورید.



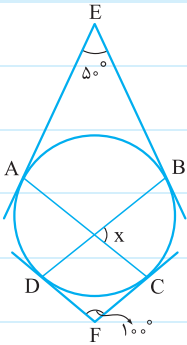
۶ در شکل زیر  $AB$  قطر نیم‌دایره و  $O$  مرکز آن است. اگر  $CD$  موازی  $AB$  باشد، اندازه کمان  $CD$  را به دست آورید.



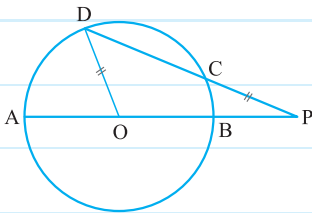
۷ در شکل مقابل از نقطه  $P$  دو مماس  $PA$  و  $PB$  بر دایره رسم شده است. اگر اندازه زاویه  $P$  برابر  $\alpha$  باشد، ثابت کنید  $\widehat{AFB} = 180^\circ + \alpha$  و  $\widehat{AEB} = 180^\circ - \alpha$ .



۸ در شکل زیر از نقاط  $E$  و  $F$  بر دایره مماس رسم شده است. اگر  $\hat{E} = 50^\circ$  و  $\hat{F} = 100^\circ$  باشد، آن‌گاه مقدار  $x$  را به دست آورید.

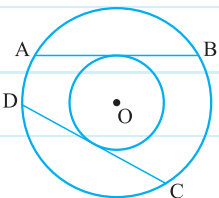


۹ در شکل زیر  $AB$  قطر و  $O$  مرکز دایره است. اگر طول پاره‌خط  $PC$  برابر شعاع دایره باشد، ثابت کنید  $\hat{AOD} = 3\hat{P}$ .

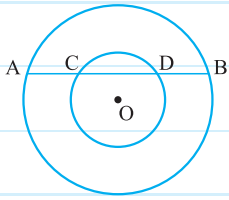


۱۰ در دایره  $C(O, R)$  اندازه کمان  $AB$  برابر  $120^\circ$  و طول وتر  $AB$  برابر ۱۲ سانتی‌متر است. فاصله مرکز دایره از وتر  $AB$  و شعاع دایره را به دست آورید.

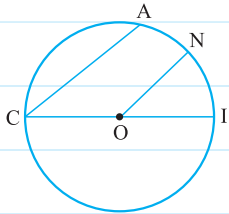
۱۱ در شکل زیر دو دایره هم‌مرکز می‌باشند و وترهای  $AB$  و  $CD$  از دایره بزرگ بر دایره کوچک مماس‌اند. ثابت کنید  $AB = CD$ .



۱۲ در شکل زیر دو دایره هم‌مرکز هستند و وتر  $AB$  دایره کوچک‌تر را در نقاط  $C$  و  $D$  قطع کرده است. ثابت کنید  $AC = BD$ .

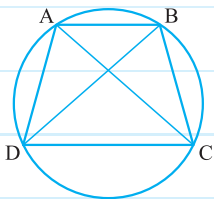


۱۳ در دایره روبه‌رو به مرکز  $O$  و قطر  $CI$  داریم  $CA \parallel ON$ . ثابت کنید  $\widehat{AN} = \widehat{NI}$ .



۱۴ شعاع‌های دو دایره هم‌مرکز ۳ و ۵ سانتی‌متر هستند. اندازه وتر از دایره بزرگ‌تر را که بر دایره کوچک‌تر مماس است، محاسبه کنید.

۱۵ با توجه به شکل ثابت کنید:



الف) اگر  $AD = BC$ ، آن‌گاه  $AC = BD$ .

ب) اگر  $AC = BD$ ، آن‌گاه  $AD = BC$ .

۱۶ ثابت کنید کوچک‌ترین وتر که از یک نقطه در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

۱۷ ثابت کنید خطی بر انتهای شعاع دایره عمود باشد، بر آن دایره مماس است.