مقدمه

اشکال هندسی در زندگی، همیشه دارای کاربردهای فراوان بوده و برای فعالیت‌های انسان، الهام‌بخش و سمبل نیز شده است. دایره یکی از این اشکال می‌باشد که مثلاً ابتدایی‌ترین کاربرد آن، چرخ و چرخ‌دنده‌ها هستند که از قدیم‌الایام مورد استفادهٔ بشر قرار گرفته‌اند.

هم‌چنین دایره در هنر ایرانی، به شکل شمس و یک حلقهٔ نورانی دیده می‌شود و در خطوط گل، بوته، اشکال اِسلیمی و ترکیب رنگ‌ها، دایره به عنوان اساسی‌ترین شکل، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

همان‌طور که می‌دانید، دایره در علوم فیزیک، نجوم و ... استفادهٔ بسیاری دارد و در شهرسازی مدرن از نظریه‌هایی چون نظریهٔ متحدالمرکز و نظریهٔ قطاعی و مدل حلقه‌ای کمک گرفته می‌شود.

در این فصل از کتاب می‌خواهیم شما را از پایه، با این مبحث بسیار شیرین آشنا کنیم و پله‌پله پیش رویم تا شما عزیزان کاملاً با مفهوم و موارد استفاده از دایره، اعم از روابط زاویه‌ای و روابط طولی آشنا شوید.

۱ مفاهیم مقدماتی دایره

شما دانش‌آموزان عزیز، در سال‌های قبل مطالب مهمی از دایره مثل زاویهٔ مرکزی، محاطی، وتر در دایره و ... را فراگرفته‌اید.

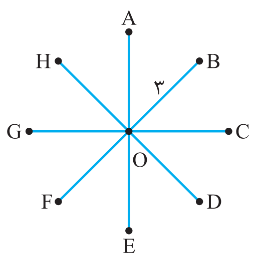
در کتاب پیش رو، علاوه بر یادآوری مطالب گذشته و طرح مثال‌های متنوع، می‌خواهیم دروس جدیدی را در مورد دایره عنوان کنیم که مباحث بسیار کاربردی و شیرینی خواهند بود.

موارد جدید در این فصل از کتاب، زاویه‌های بین دو وتر متقاطع، روابط طولی بین وترهای متقاطع، هم‌چنین مماس بر دایره و مماس‌های مشترک دو دایره و ... هستند که همراه با پیش‌فرض‌های مقدماتی بیان خواهند شد.

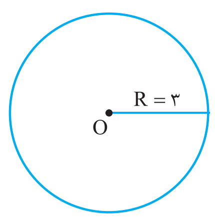
ابتدا به کتاب هندسهٔ کلاس دهم رجوع می‌کنیم. در بخش ترسیمات هندسی، مسئلهٔ مهمی به صورت زیر طرح شده است:

مجموعهٔ نقاطی از صفحه را بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی به نام O، برابر ۳ باشد.

مطابق شکل (۱)، نقطهٔ ثابتی مثل O را در صفحه در نظر می‌گیریم و چند نقطه مثل A، B و ... به فاصلهٔ ۳ از آن قرار می‌دهیم. کاملاً مشخص است که نقاط A، B و ... روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R = ۳$ قرار می‌گیرند؛ چون فاصله‌شان از O، برابر ۳ سانتی‌متر است. یعنی برای یافتن مجموعهٔ نقاط مطلوب، به مرکز O و شعاع ۳، دایره‌ای رسم می‌کنیم.



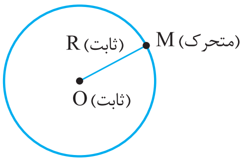
(۱)



(۲)

حالا طبق مطالب عنوان‌شده در این مسئله، می‌خواهیم تعریف دقیق دایره را مطرح کنیم.

تعریف دایره



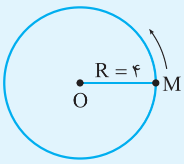
مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی در همین صفحه، برابر مقدار ثابتی باشد.

نقطهٔ ثابت را **مرکز** و فاصلهٔ ثابت را **شعاع دایره** می‌گوییم.

دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

مثال و پاسخ

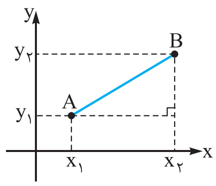
مثال **نقطهٔ ثابت O در صفحه داده شده است. اگر نقاط متحرکی مثل M در صفحه طوری قرار گیرند که همواره فاصله‌شان تا O برابر ۴ باشد، محیط منحنی را که این نقاط طی می‌کنند بیابید.**



پاسخ طبق مفهوم دایره، چون فاصلهٔ نقاط متحرکی مثل M در صفحه، از نقطهٔ ثابت O، مقدار ثابت ۴ است؛ پس این نقاط متحرک، مطابق شکل روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R = ۴$ حرکت می‌کنند.

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲\pi(۴) = ۸\pi$$

یک فرمول مهم: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ که در صفحه مشخص شده‌اند، از دستور زیر به دست می‌آید:



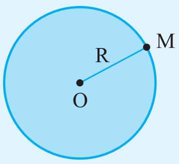
$$\boxed{|BA| = |AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

به عبارت دیگر، زیر یک رادیکال، مربع **تفاوت** xها و مربع **تفاوت** yها را با هم جمع می‌کنیم.

(دقت کنید این فرمول با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به سادگی قابل اثبات است.)

مثال و پاسخ

مثال **نقطهٔ M(۲,۰) روی دایره‌ای به مرکز O(۴,۴) قرار دارد. مساحت این دایره را بیابید.**

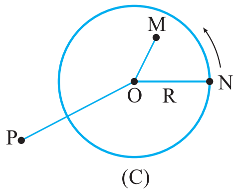


پاسخ مطابق شکل برای تعیین مساحت دایره، باید R را پیدا کنیم:

$$R = |OM| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۲۰}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{مساحت دایره}}{\underset{\downarrow}{S}} = \pi R^۲ = \pi(\sqrt{۲۰})^۲ = ۲۰\pi$$

اوضاع نسبی نقطه و دایره



حالا که مفهوم دایره را فراگرفته‌ایم، می‌خواهیم ببینیم اگر یک دایره را در صفحه رسم کنیم و نقطه‌ای در همان صفحه در نظر بگیریم، آن‌گاه آن نقطه و دایره نسبت به هم چه وضعیتی می‌توانند داشته باشند؟

هر دایره، صفحه را به سه بخش تقسیم می‌کند:

۱) **داخل دایره:** فاصلهٔ نقاطی که درون دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارند، از شعاع دایره کم‌تر است.

$|OM| < R \Leftrightarrow$ M درون دایرهٔ $C(O,R)$ است.

۲) **روی دایره:** فاصلهٔ نقاطی که روی دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارند، با شعاع دایره مساوی است.

$|ON| = R \Leftrightarrow$ N روی دایرهٔ $C(O,R)$ است.

۳) **خارج دایره:** فاصلهٔ نقاطی که خارج دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارند، از شعاع دایره بیشتر است.

$|OP| > R \Leftrightarrow$ P خارج دایرهٔ $C(O,R)$ است.

به عبارت دیگر برای تشخیص وضعیت نقطهٔ معلومی مثل A، نسبت به دایرهٔ $C(O,R)$ باید فاصلهٔ مرکز دایره تا این نقطه $(|OA|)$، نسبت به شعاع دایره (R) سنجیده شود.

مثال و پاسخ

مثال **مشخص کنید نقطهٔ $A(۲,۱)$، داخل یا خارج دایره‌ای به مرکز $O(۰,۰)$ و شعاع ۳ قرار دارد یا روی آن قرار گرفته است؟**

پاسخ ابتدا فاصلهٔ نقاط O و A را می‌یابیم:

$$|OA|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

چون $R=۳$ بوده و $|OA|<R$ است $(\sqrt{۵}<۳)$، پس نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,R)$ واقع است.

مثال **نقطهٔ $A(m+۲,۳)$ در صفحهٔ دایرهٔ $C(O,۱۰)$ به مرکز $O(۱,-۳)$ قرار دارد. حدود m را چنان بیابید که:**

الف **A درون دایره قرار گیرد.** **ب** **A خارج دایره واقع شود.**

پاسخ منظور از $C(O,۱۰)$ یعنی شعاع دایره ۱۰ است.

الف شرط این‌که نقطهٔ A درون دایره قرار گیرد، این است که $|OA|<R$ باشد:

$$|OA|<۱۰ \Rightarrow \sqrt{(\underbrace{(m+۲)}_{x_۲}-\underset{x_۱}{۱})^۲+(\underset{y_۲}{۳}-(\underset{y_۱}{-۳}))^۲}<۱۰ \Rightarrow \sqrt{(m+۱)^۲+۳۶}<۱۰ \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} (m+۱)^۲+۳۶<۱۰۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)^۲<۶۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |m+۱|<۸ \Rightarrow -۸<m+۱<۸ \Rightarrow -۹<m<۷$$

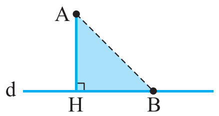
دقت کنید برای تبدیل نامساوی قدرمطلقی به نامساوی مضاعف، از رابطهٔ $|x|<k \Rightarrow -k<x<k$ استفاده کرده‌ایم.

ب شرط این‌که نقطهٔ A بیرون دایره قرار گیرد، این است که $|OA|>R$ باشد:

$$|OA|>۱۰ \Rightarrow \sqrt{(m+۱)^۲+۳۶}>۱۰ \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} (m+۱)^۲+۳۶>۱۰۰ \Rightarrow (m+۱)^۲>۶۴$$

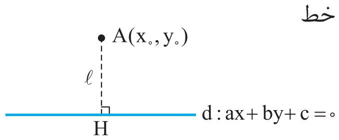
$$\xrightarrow{\text{جذر}} |m+۱|>۸ \Rightarrow \begin{cases} m+۱>۸ \Rightarrow m>۷ \\ \text{یا} \\ m+۱<-۸ \Rightarrow m<-۹ \end{cases}$$

دقت کنید برای تبدیل نامساوی قدرمطلقی به نامساوی مضاعف از رابطهٔ $|x|>k \Rightarrow \begin{cases} x>k \\ \text{یا} \\ x<-k \end{cases}$ استفاده کرده‌ایم.



(۱)

(۲)



یادآوری مطابق شکل (۱)، خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده است. طبق تعریف فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، همان طول عمودی است که از نقطهٔ A بر d رسم شده است. (یعنی طول پاره‌خط AH که بر d عمود شده، فاصلهٔ A از خط d می‌باشد.) چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، طول وتر (AB) از طول یک ضلع زاویهٔ قائمه (مثلاً AH) بزرگ‌تر است، پس **کم‌ترین فاصلهٔ یک نقطهٔ خارج یک خط را، برابر طول عمود رسم‌شده از آن نقطه بر خط در نظر می‌گیریم.** طبق شکل (۲) که نقطهٔ A بر خط d واقع شده است، فاصلهٔ A از d، صفر خواهد بود.

نکته خط d به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از این خط (یا همان طول عمود رسم‌شده از A بر d) را می‌توانیم از دستور زیر حساب کنیم:

$$|AH|=\ell=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

دقت کنید هنگام استفاده از این فرمول، تمام جملات مربوط به معادلهٔ خط یک طرف تساوی بوده و **طرف دوم فقط و فقط عدد صفر باشد.** حال یک خط کسری می‌گذاریم، در صورت کسر با قراردادن قدرمطلق، تا خواستیم معادلهٔ خط را بنویسیم، به جای x و y آن، طول و عرض نقطهٔ داده‌شده یعنی $x_۰$ و $y_۰$ را قرار می‌دهیم و در مخرج کسر هم، جذر مجموع مربعات ضرایب x و y خط را می‌نویسیم.

مثال و پاسخ

مثال **فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۱)$ را از خط $۳x=۴y$ بیابید.**

پاسخ معادلهٔ خط را به صورت $۳x-۴y=۰$ می‌نویسیم:

$$A\begin{bmatrix} x_۰=۲ \\ y_۰=-۱ \end{bmatrix} \text{ و } ۳x-۴y=۰ \Rightarrow \ell=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

مثال و پاسخ

مثال **اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $۲x+۴y=m$ برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مقادیر m را بیابید.**

پاسخ ابتدا معادلهٔ خط را به صورت $۲x+۴y-m=۰$ استاندارد می‌کنیم:

$$O\begin{bmatrix} x_{۰}=۰ \\ y_{۰}=۰ \end{bmatrix} \text{ و } ۲x+۴y-m=۰ \Rightarrow \ell=\frac{|۲(۰)+۴(۰)-m|}{\sqrt{۲^{۲}+۴^{۲}}}$$

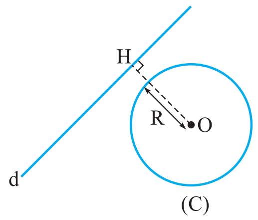
$$\Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{|-m|}{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow \underbrace{|-m|}_{|m|}=\underbrace{\sqrt{۵}\times\sqrt{۲۰}}_{\sqrt{۱۰۰}} \Rightarrow |m|=۱۰ \Rightarrow m=\pm۱۰$$

دقت کنید داخل قدرمطلق را می‌توان به دلخواه قرینه کرد.

اوضاع نسبی یک خط و دایره

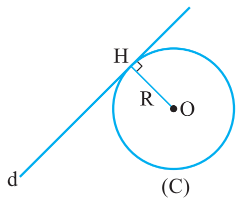
همان‌طور که در سال‌های قبل دیدید، اگر یک خط و یک دایره در یک صفحه رسم شده باشند، **حداکثر** در دو نقطه مشترک خواهند بود.

برای تشخیص وضعیت یک خط و یک دایره، **فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.**



۱) خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند: در این حالت (مطابق شکل) اگر از مرکز دایرهٔ (C) بر خط d عمود کنیم، فاصلهٔ مرکز تا خط d (یعنی طول عمود OH) از R بزرگ‌تر خواهد بود.

$\boxed{\text{خط d و دایرهٔ (C) هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.} \Leftrightarrow |OH|>R}$



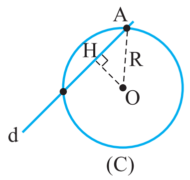
۲) خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند: در این حالت (مطابق شکل) اگر از مرکز دایرهٔ (C) بر خط d عمود کنیم، فاصلهٔ مرکز تا خط d (یعنی طول عمود OH) مساوی R است.

$\boxed{\text{خط d و دایرهٔ (C) در یک نقطه مشترک‌اند.} \Leftrightarrow |OH|=R}$

نتیجهٔ بسیار مهم اگر نقطه‌ای مثل H روی دایره باشد، خطی را که از H می‌گذرد و بر شعاعی از دایره که از H عبور می‌کند، عمود باشد، مماس بر دایره در نقطهٔ H می‌گوییم.

پس همواره به یاد داشته باشید: $\boxed{\text{شعاع و مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر هم عمودند.}}$

۳) خط و دایره در دو نقطه مشترک‌اند: در این حالت (مطابق شکل) اگر از مرکز دایرهٔ (C) بر خط d عمود کنیم، فاصلهٔ مرکز تا خط d (یعنی طول عمود OH) کم‌تر از R است.



دقت کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH، طول هر ضلع زاویهٔ قائمه (مثل OH) از طول وتر (یعنی $OA=R$) کم‌تر است.

$\boxed{\text{خط d و دایرهٔ (C) در دو نقطه مشترک‌اند.} \Leftrightarrow |OH|<R}$

خط d و دایرهٔ (C) در این حالت با هم متقاطع‌اند و خط d را قاطع بر دایرهٔ (C) می‌گوییم.

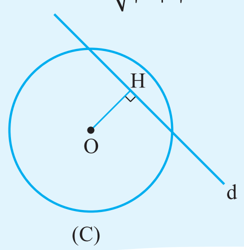
مثال و پاسخ

مثال **خط $x+y+۲=۰$ و دایرهٔ $C(O,۱۰)$ به مرکز $O(۱,-۱)$ در یک صفحه مفروض‌اند. وضعیت خط و دایره را مشخص کنید.**

پاسخ ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ $O(x_{۰}=۱, y_{۰}=-۱)$ را از خط $d: x+y+۲=۰$ می‌یابیم:

$$OH=\frac{|۱+(-۱)+۲|}{\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

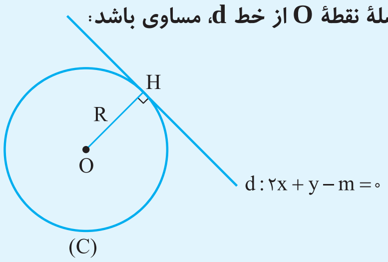
و چون این فاصله از $R=۱۰$ کم‌تر است، خط در دو نقطه، دایره را قطع می‌کند.
(به شکل توجه کنید)



مثال و پاسخ

مثال خط $d: 2x + y = m$ و دایرهٔ $C(O, \sqrt{5})$ به مرکز $O(0, 1)$ در یک صفحه مفروض‌اند. مقادیر m را چنان بیابید که خط و دایره بر هم مماس شوند.

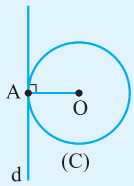
پاسخ شرط این‌که خط d بر دایرهٔ (C) مماس باشد، این است که شعاع دایره با فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d، مساوی باشد:



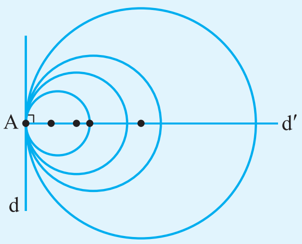
$$OH = \frac{|2(0) + 1 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|1 - m|}{\sqrt{5}} \xrightarrow[OH=R]{R=\sqrt{5}} \frac{|1 - m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |1 - m| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 1 - m = 5 \Rightarrow m = -4 \\ 1 - m = -5 \Rightarrow m = 6 \end{cases}$$

مثال خط d مفروض است. مرکز دایره‌هایی که در یک نقطهٔ مشخص بر خط d مماس باشند، روی چه شکلی قرار دارند؟



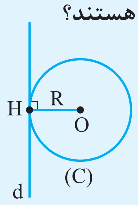
(۱)



(۲)

پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مطابق شکل (۱)، دایرهٔ (C) در نقطهٔ ثابت و مشخص A (که روی d قرار دارد) بر خط d مماس شده است. چون شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است، پس می‌توانیم در نقطهٔ A، دایره‌های دیگری بر خط d مماس کنیم. به دلیل ذکرشده، اگر از مرکز این دایره‌ها به A وصل کنیم، خطوط واصل بر خط d عمود است؛ پس مرکز این دایره‌ها، روی خط d' واقع است که در نقطهٔ A بر خط d عمود است. (به شکل (۲) توجه کنید.)

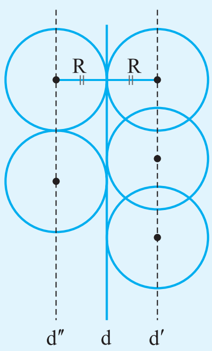
مثال خط d مفروض است. مرکز دایره‌هایی که با شعاع ثابت R بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟



(۱)

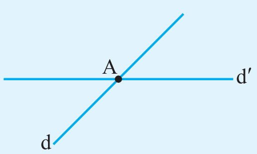
پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مطابق شکل (۱)، دایرهٔ (C)، بر خط d مماس شده است، پس فاصلهٔ مرکز دایره (نقطهٔ O) تا خط d برابر شعاع دایره می‌باشد؛ یعنی طول عمود اخراج‌شده از O بر خط d، همان مقدار ثابت R است. از طرفی می‌دانیم **مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از خط ثابت d به فاصلهٔ معلوم R هستند، روی دو خط موازی با d و در طرفین این خط قرار می‌گیرند.**

پس مرکز دایره‌هایی که با شعاع ثابت R بر خط d مماس می‌شوند، روی دو خط موازی با d و در طرفین این خط قرار می‌گیرند که فاصلهٔ هر خط تا d برابر R است. (به شکل (۲) توجه کنید.)

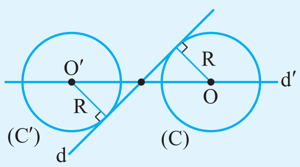


(۲)

مثال دو خط d و d' در نقطهٔ A متقاطع‌اند. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که مرکزش روی خط d' بوده و بر خط d مماس باشد.

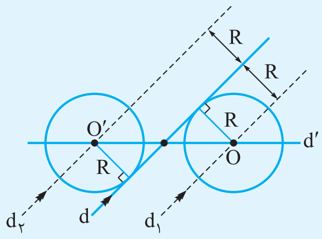


پاسخ مطابق شکل، فرض می‌کنیم مسئله حل شده و دو دایره با شعاع‌های معلوم R و مراکز O و O' (که روی خط d' قرار دارند) بر خط d مماس هستند. (شکل (۱))



(۱)

پس فاصلهٔ مرکز آن‌ها (طول عمودهای رسم‌شده از O و O' بر d) تا خط d برابر R است، بنابراین مرکز این دو دایره روی خطوطی قرار دارند که به موازات d رسم می‌شوند و فاصلهٔ آن‌ها از خط d برابر R است. پس ابتدا دو خط به موازات d و در طرفین آن رسم می‌کنیم که فاصلهٔ این دو خط از d برابر R باشد. محل برخورد این خطوطِ موازی با d' مراکز دایره‌های مطلوب هستند (نقاط O و O'). دایره‌هایی به مراکز O و O' و شعاع معلوم R بر خط d مماس‌اند. (به شکل (۲) توجه کنید)

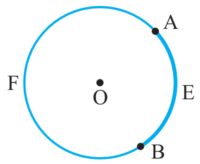


(۲)

حالا که اوضاع نسبی نقطه و خط با دایره را یادگرفتید، مفاهیم مهم دیگری هم هستند که یادآوری آن‌ها خالی از لطف نیست. لطفاً دقت بفرمایید:

کمان

مطابق شکل، دو نقطهٔ A و B را روی دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر گرفته‌ایم. در این صورت دو کمان با این نقاط ساخته می‌شود.



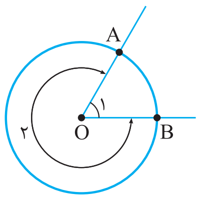
برای جلوگیری از اشتباهات متداول، از یک حرف دلخواه میان کمان استفاده می‌کنیم، مثلاً در شکل رسم‌شده، کمان‌های $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AFB}$ را داریم.

چون محیط یک دایره ۳۶۰° است، پس در شکل فوق می‌توان گفت:

$$\boxed{\overset{\frown}{AEB}+\overset{\frown}{AFB}=۳۶۰^\circ}$$

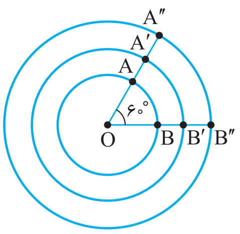
زاویهٔ مرکزی

مطابق شکل دایرهٔ $C(O,R)$ را رسم کرده‌ایم. با انتخاب دو نقطهٔ A و B روی محیط دایره و اتصال آن‌ها به مرکز دایره، دو زاویه به وجود می‌آیند که چون رأس آن‌ها مرکز دایره است، زاویه‌های مرکزی نامیده می‌شوند $(\hat{O}_۱,\hat{O}_۲)$. طبق تعریف **اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برحسب درجه با اندازهٔ کمان روبه‌رویش مساوی است.**



دقت کنید اندازهٔ یک زاویهٔ مرکزی، به طول شعاع دایره ربطی ندارد. در شکل زیر سه دایره رسم شده‌اند که مرکز همگی نقطهٔ O است، ولی شعاع‌های آن‌ها با هم فرق می‌کند، چون $\hat{O}=۶۰^\circ$، پس $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{A''B''}=۶۰^\circ$

البته کاملاً مشخص است که طول کمان‌های AB، $A'B'$ و $A''B''$ با هم متفاوت است زیرا شعاع این سه دایره یکی نیست.



نکته اگر اندازهٔ یک کمان در دایرهٔ $C(O,R)$ برحسب درجه α باشد، طول این کمان از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول کمان} = \text{محیط دایره} \times \frac{\text{اندازهٔ کمان برحسب درجه}}{۳۶۰} \Rightarrow \ell = ۲\pi R(\frac{\alpha}{۳۶۰}) \Rightarrow \boxed{\ell=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}}$$

به این تعریف دقت کنید:

حاصل $\pi(\frac{\alpha}{۱۸۰})$ را مقدار زاویه برحسب رادیان (Radian) می‌گویند.

مثلاً اگر $\alpha=۴۵^\circ$ باشد، برحسب رادیان می‌شود:

$$\alpha(rad)=\pi\frac{۴۵}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۴}$$

مثال و پاسخ

مثال **طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، در دایره‌ای به شعاع ۳۰ cm را برحسب متر بیابید.**

پاسخ در این مسئله R و α (برحسب درجه) داده شده‌اند:

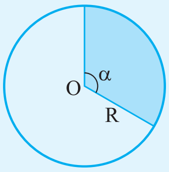
$$R=۳۰\,cm=۳۰\times ۱۰^{-۲}=\frac{۳}{۱۰}m \xrightarrow{\alpha=۳۰^\circ} \ell=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}=\frac{\pi\times\frac{۳}{۱۰}\times ۳۰}{۱۸۰}=\frac{۳\pi}{۶۰}\Rightarrow \ell=\frac{\pi}{۲۰}m$$

مثال و پاسخ

مثال **اگر طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۴۰° در دایرهٔ $C(O,R)$ برابر ۴π باشد، مساحت و محیط دایره را بیابید.**

پاسخ با فرض $\alpha = ۲۴۰^\circ$ و $\ell = ۴\pi$، باید شعاع دایره را بیابیم:

$$\ell = \frac{\pi R\alpha}{۱۸۰} \Rightarrow ۴\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi} \times R \times \cancel{۲۴۰}^{\,۴}}{\cancel{۱۸۰}_{\,۳}} \Rightarrow ۴R = ۱۲ \Rightarrow R = ۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{محیط}\ p = ۲\pi R = ۲\pi \times ۳ = ۶\pi \\ \text{مساحت}\ S = \pi R^۲ = \pi \times ۳^۲ = ۹\pi \end{cases}$$



مثال **مطابق شکل، قطاعی از دایره با زاویهٔ مرکزی α (برحسب درجه) رسم شده است. اگر شعاع دایره R باشد، ثابت کنید مساحت این قطاع عبارت است از** $S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$.

پاسخ

فرض	در دایره‌ای به شعاع R قطاعی با زاویهٔ مرکزی α رسم شده
حکم	$S = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}$

با یک تناسب ساده مسئله حل می‌شود. می‌دانیم مساحت یک دایرهٔ کامل (قطاعی با زاویهٔ مرکزی ۳۶۰°) و شعاع R برابر است با $\pi R^۲$. اگر مساحت قطاع موردنظر را S در نظر بگیریم، داریم:

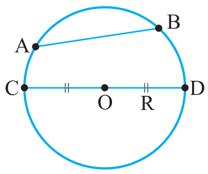
$$\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}} = \frac{\text{زاویهٔ مرکزی قطاع برحسب درجه}}{\text{زاویهٔ مرکزی کل دایره برحسب درجه}} \Rightarrow \frac{S}{\pi R^۲} = \frac{\alpha}{۳۶۰} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}}$$

مثال **قطاعی با زاویهٔ ۶۰° در دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم. اگر مساحت این قطاع $\frac{۵۰\pi}{۳}$ باشد، شعاع دایره را بیابید.**

پاسخ طبق فرمول مساحت قطاع داریم:

$$S = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰} \xrightarrow[\alpha = ۶۰^\circ]{S = \frac{۵۰\pi}{۳}} \frac{۵۰\cancel{\pi}}{۳} = \frac{\cancel{\pi} R^۲ \times ۶۰}{۳۶۰} \Rightarrow R^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۱۰$$

وتر



مطابق شکل، دایرهٔ $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. پاره‌خطی که دو نقطهٔ **متمایز** از این دایره را به هم متصل می‌کند، **وتر** آن دایره نامیده می‌شود. در این شکل AB و CD وترهایی از دایره هستند. وتری که از **مرکز** دایره عبور کند، **قطر** دایره است (مثل CD). هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که این کمان‌های مساوی (که هر کدام ۱۸۰° هستند.) نیم‌دایره نام دارند.

نتیجهٔ مهم در دایره‌ای به شعاع R، طول هر وتر در نامساوی مضاعف $۰ < \ell \leq ۲R$ صدق می‌کند، یعنی در یک دایره نمی‌توانیم کوتاه‌ترین وتر را رسم کنیم؛ ولی طول بزرگ‌ترین وتر همان طول قطر دایره است.

مثال و پاسخ

مثال **طول بزرگ‌ترین وتری را که در دایره‌ای به مساحت ۳۶π رسم می‌شود بیابید.**

پاسخ طول بزرگ‌ترین وتری که در دایره‌ای به شعاع R رسم می‌شود، برابر است با $۲R$. طبق فرض $S = ۳۶\pi$ است:

$$\pi R^۲ = ۳۶\pi \Rightarrow R = ۶ \Rightarrow \text{طول بزرگ‌ترین وتر} = ۲R = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

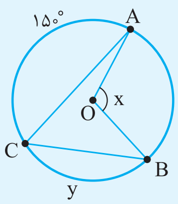
دانش‌آموزان عزیز، حالا که مفاهیم مقدماتی نظیر شعاع، زاویهٔ مرکزی، وتر و مماس را یاد گرفتید، به مسائل مطرح‌شده توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال **شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. نقطهٔ O مرکز دایره است.**

الف **اگر $y = ۹۰^\circ$ باشد، مقدار x را بیابید.**

ب **اگر $x = ۱۱۰^\circ$ باشد، اندازهٔ y را به دست آورید.**



پاسخ مطابق شکل داده‌شده داریم:

الف

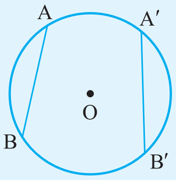
$$\overset{\frown}{AB}+\underbrace{\overset{\frown}{BC}}_{y}+\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+۹۰^\circ+۱۵۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۲۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B \text{ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی}: x=\overset{\frown}{AB}=۱۲۰^\circ$$

ب

$$A\hat{O}B \text{ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی}: \underset{۱۱۰^\circ}{\underset{\downarrow}{x}}=\overset{\frown}{AB} \xrightarrow[\underset{y}{\downarrow}]{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ} ۱۱۰^\circ+y+۱۵۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow y=۱۰۰^\circ$$

مثال **ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند و برعکس.**

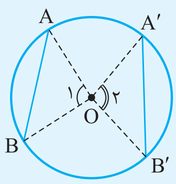


پاسخ این مسئله یک قضیهٔ دوشرطی است:

۱

فرض	$AB=A'B'$
حکم	$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر هر وتر وصل می‌کنیم و ثابت می‌نماییم دو مثلث حاصل همنهشت‌اند:



$$\overset{\Delta}{OAB},\overset{\Delta}{OA'B'}:\begin{cases}OA=OA'=R\\ OB=OB'=R\\ AB=A'B' \text{ فرض}\end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OA'B'}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \xrightarrow[\text{پس با کمان روبه‌رویشان مساوی‌اند}]{\hat{O}_۱ \text{ و } \hat{O}_۲ \text{ هر دو مرکزی هستند}} \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$$

۲

فرض	$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$
حکم	$AB=A'B'$

طبق شکل فوق، مرکز دایره به دو سر هر وتر وصل شده است:

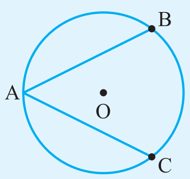
$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'} \xrightarrow[\text{مرکزی } \hat{O}_۲=\overset{\frown}{A'B'}]{\text{مرکزی } \hat{O}_۱=\overset{\frown}{AB}} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

$$\overset{\Delta}{OAB},\ \overset{\Delta}{OA'B'}:\begin{cases}OA=OA'=R\\ OB=OB'=R\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OA'B'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB=A'B'$$

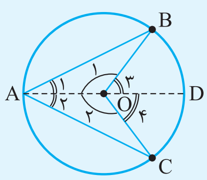
- دانش‌آموزان عزیز، صورت مثال اثباتی فوق را به عنوان یک مطلب مهم درسی در ذهن داشته باشید.

مثال و پاسخ

مثال **مطابق شکل در دایرهٔ $C(O,R)$، وترهای AB و AC مساوی‌اند. ثابت کنید پاره‌خط OA نیمساز $\hat{A}$ است و امتداد آن، کمان BC را نصف می‌کند.**



پاسخ



فرض	$AB=AC$
حکم	$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲,\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$

مطابق شکل، نقطهٔ O را به نقاط B و C (دو سر غیرمشترک وترها) وصل کرده‌ایم. هم‌چنین پاره‌خط AO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند:

$$\overset{\Delta}{OAB},\ \overset{\Delta}{OAC}:\begin{cases}AB=AC\\ OB=OC=R\\ OA=OA\end{cases}\xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})}\overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OAC}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\ \checkmark\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\end{cases}$$

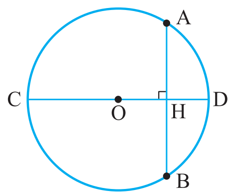
طبق شکل، کاملاً مشخص است که $\hat{O}_3$ مکمل $\hat{O}_1$ و هم‌چنین $\hat{O}_4$ مکمل $\hat{O}_2$ است:

$$\hat{O}_1=\hat{O}_2\ \Rightarrow\ 180-\hat{O}_3=180-\hat{O}_4\ \Rightarrow\ \hat{O}_3=\hat{O}_4$$

از طرفی $\hat{O}_3$ و $\hat{O}_4$ به ترتیب زاویه‌های مرکزی رو به کمان‌های BD و DC هستند که به ترتیب با این کمان‌ها مساوی‌اند، پس $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$.

● پس از طرح مثال‌هایی که دیدید، می‌خواهیم شما را با یک قضیهٔ بسیار مهم به نام قضیهٔ عمود بر وتر آشنا کنیم، این قضیه در حل مسائل، مخصوصاً مسائل عددی، بسیار کاربرد دارد.

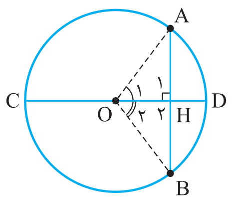
قضیه **عمود بر وتر: در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.**



اثبات

فرض	قطر $CD\perp AB$ وتر
حکم	$AH=HB,\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{OAH},\ \overset{\Delta}{OBH}:\begin{cases}OA=OB=R\\ OH=OH\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\end{cases}\xrightarrow[\text{ضلع قائم}]{\text{وتر و یک}}\overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}$$

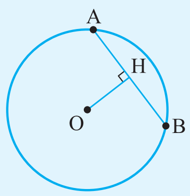
$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}\begin{cases}AH=HB\ \checkmark\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\end{cases}\xrightarrow[\text{مرکزی}\ \hat{O}_2=\overset{\frown}{BD}]{\text{مرکزی}\ \hat{O}_1=\overset{\frown}{AD}}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\ \checkmark$$

از طرفی، چون CD قطر دایره است، دایره را به دو کمان 180° تبدیل کرده است:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=180^\circ\\ \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\ \cancel{\overset{\frown}{AD}}+\overset{\frown}{AC}=\cancel{\overset{\frown}{BD}}+\overset{\frown}{BC}\ \Rightarrow\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\ \checkmark$$

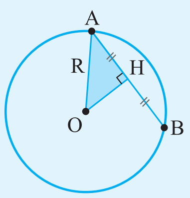
مثال و پاسخ

مثال **در شکل روبه‌رو:**



الف **اگر طول شعاع برابر ۱۰ بوده و OH = ۶، مطلوب است طول AH و AB.**

ب **اگر مساحت دایره برابر ۳۶π بوده و AH = OH، مطلوب است طول AB.**



پاسخ **الف** ابتدا در مثلث OAH، قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{OAH}:OA^2=OH^2+AH^2\ \Rightarrow\ 10^2=6^2+AH^2$$

$$\Rightarrow\ AH=8\ \xrightarrow{\text{طبق قضیهٔ عمود بر وتر}}\ AB=2AH=2\times 8=16$$

ب با داشتن مساحت، طبق رابطهٔ $S=\pi R^2$، شعاع دایره را می‌یابیم:

$$36\pi=\pi R^2\ \Rightarrow\ R=6$$

حالا در مثلث OAH، قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

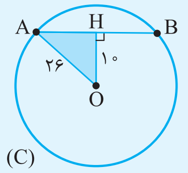
$$AO^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۶^۲ = AH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۲AH^۲ = ۳۶ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

مساوی‌اش را قرار می‌دهیم

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ عمود بر وتر}} AB = ۲AH = ۶\sqrt{۲}$$

مثال **دایرهٔ $C(O,۲۶)$ داده شده است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۱۰ باشد، طول وتر AB را بیابید.**

پاسخ مطابق شکل، دایرهٔ (C) همراه وتر AB رسم شده و از مرکز دایره بر این وتر عمود گردیده است:

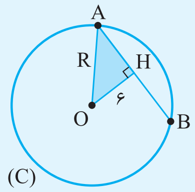


$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۲۶^۲ = AH^۲ + ۱۰^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = ۶۷۶ - ۱۰۰ = ۵۷۶ \Rightarrow AH = ۲۴ \xrightarrow{\text{قضیهٔ عمود بر وتر}} AB = ۲AH = ۴۸$$

مثال **فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ از وتر $AB = ۱۶$ برابر ۶ است. نسبت محیط به مساحت این دایره را بیابید.**

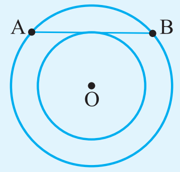
پاسخ مطابق شکل با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس، شعاع دایره را می‌یابیم:



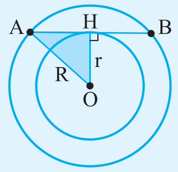
$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^۲ = OH^۲ + \underset{\text{طبق قضیهٔ عمود بر وتر برابر نصف AB است}}{\underset{\downarrow}{AH^۲}} \Rightarrow R^۲ = ۶^۲ + (\frac{۱۶}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۱۰ \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{۲\pi R}{\pi R^۲} = \frac{۲}{R} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$

مثال **در شکل روبه‌رو نقطهٔ O مرکز هر دو دایره است و وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. اگر محیط دایرهٔ بزرگ‌تر ۶π و مساحت دایرهٔ کوچک‌تر π باشد، طول وتر AB را بیابید.**



پاسخ مطابق شکل، مرکز دایره‌ها (نقطهٔ O) را به نقطهٔ تماس H و همچنین نقطهٔ A وصل کرده‌ایم. چون مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس $\hat{H} = ۹۰^\circ$. شعاع دایرهٔ بزرگ را R و شعاع دایرهٔ کوچک را r در نظر گرفته‌ایم.



$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^۲ = AH^۲ + r^۲ \quad (*)$$

حال طبق فرض از محیط و مساحت داده‌شده، مقادیر R و r را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط دایرهٔ بزرگ} = ۲\pi R = ۶\pi \Rightarrow R = ۳ \\ \text{مساحت دایرهٔ کوچک} = \pi r^۲ = \pi \Rightarrow r = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{در } (*)} ۳^۲ = AH^۲ + ۱^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

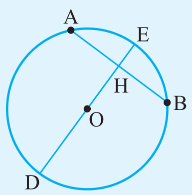
$$\xrightarrow[\text{بر وتر}]{\text{قضیهٔ عمود}} AB = ۲AH = ۴\sqrt{۲}$$

اکنون که قضیهٔ عمود بر وتر و کاربردهای آن را یاد گرفته‌ایم، می‌خواهیم برویم سراغ عکس قضیهٔ عمود بر وتر. جالب است این قضیه به نوعی دارای دو عکس قضیهٔ مهم است! به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال و پاسخ

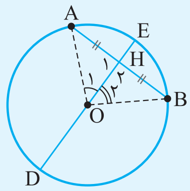
مثال **ثابت کنید در هر دایره، قطری که یک وتر را نصف می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نیز نصف می‌کند.**

پاسخ



فرض	DE قطر و AB وتر، $AH = HB$
حکم	$DE \perp AB, \widehat{AE} = \widehat{EB}, \widehat{AD} = \widehat{DB}$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{OAH},\ \overset{\Delta}{OBH}:\begin{cases}AH=BH\\ OH=OH\\ OA=OB=R\end{cases}\xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}}\overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\begin{cases}\hat{H}_1=\hat{H}_2\xrightarrow{A\hat{H}B=\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ}\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\Rightarrow DE\perp AB\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\xrightarrow[\text{مرکزی }\hat{O}_2=\overset{\frown}{BE}]{\text{مرکزی }\hat{O}_1=\overset{\frown}{AE}}\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}\end{cases}$$

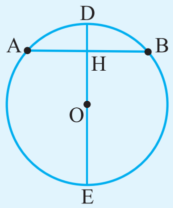
از طرفی چون DE قطر است، پس $\overset{\frown}{DB}+\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AE}=180^\circ$ و از $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AE}$ نتیجه می‌شود $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

می‌توان گفت **خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل کند، بر آن وتر عمود است؛ پس کمان‌های نظیر آن وتر را هم نصف می‌کند.**

مثال و پاسخ

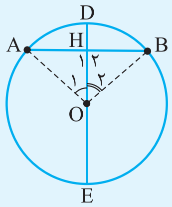
مثال ثابت کنید در هر دایره، قطری که کمان نظیر یک وتر را نصف می‌کند، بر آن وتر عمود است و آن وتر را نیز نصف می‌کند.

پاسخ



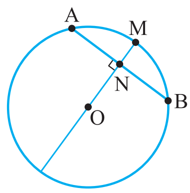
فرض	DE قطر و AB وتر، $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB},\ \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$
حکم	$AH=HB,\ DE\perp AB$

مطابق شکل، مرکز دایره را به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. از فرض $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$ نتیجه می‌شود زاویه‌های مرکزی $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_1$، هم مساوی‌اند:



$$\overset{\Delta}{OAH},\ \overset{\Delta}{OHB}:\begin{cases}OA=OB=R\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OH=OH\end{cases}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\begin{cases}AH=HB\ \checkmark\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2\end{cases}\xrightarrow{A\hat{H}B=\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ}\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\Rightarrow DE\perp AB$$

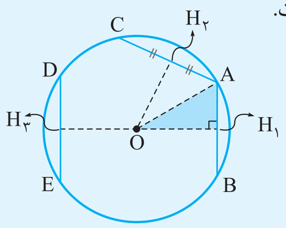


نتیجهٔ بسیار مهم **مطابق شکل، فرض کنید نقطهٔ M وسط یکی از کمان‌های نظیر وتر AB بوده و نقطهٔ N هم وسط خودِ وتر AB است. اگر این دو نقطه را به هم وصل کنیم، از مرکز دایره گذشته و خودبه‌خود قطر عمود بر وتر AB رسم می‌شود. با رسم خطی عمود بر این قطر در نقطهٔ N، خودِ وتر AB هم رسم خواهد شد.**

مثال و پاسخ

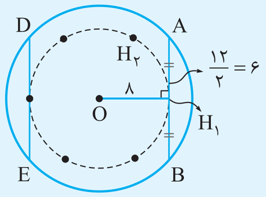
مثال **دایرهٔ C(O,۱۰) مفروض است. وترهایی به طول ۱۲ را در این دایره رسم می‌کنیم. وسط این وترها کجا واقع می‌شوند؟**

پاسخ مطابق شکل سه وتر AB، AC و DE به طول ۱۲، در دایرهٔ C(O,۱۰) رسم شده است.



می‌دانیم اگر وسط وتری (مثل AB) را به مرکز دایره وصل کنیم، پاره‌خط حاصل بر آن وتر عمود است. پس در مثلث OAH_1 قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$OA^2 = OH_1^2 + AH_1^2 \xrightarrow[AH_1=\frac{AB}{2}=\frac{12}{2}=6]{\text{قضیهٔ عمود بر وتر}} 10^2 = OH_1^2 + 6^2 \Rightarrow OH_1 = 8$$



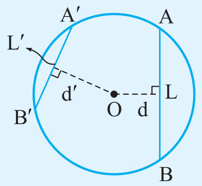
پس وسط تمام وترهای رسم‌شده از مرکز دایره (که نقطهٔ ثابت O است) فاصلهٔ ثابتی دارند، بنابراین وسط این وترها روی یک دایره به مرکز O و شعاع $OH_1 = OH_2 = \cdots = 8$ قرار دارند.

مثال ثابت کنید از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

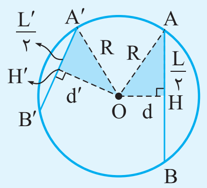
پاسخ این مسئله یک قضیهٔ دوشرطی است:

۱

فرض	$L > L'$
حکم	$d < d'$



مطابق شکل، مرکز دایره را به نقاط A و A' وصل می‌کنیم. طبق قضیهٔ عمود بر وتر از $OH \perp AB$، نتیجه می‌شود $AH = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2}$، به صورت مشابه $A'H' = \frac{A'B'}{2}$. حال در دو مثلث رنگی قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OAH}: OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = d^2 + (\frac{L}{2})^2 \\ \overset{\Delta}{OA'H'}: OA'^2 = OH'^2 + A'H'^2 \Rightarrow R^2 = d'^2 + (\frac{L'}{2})^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 + \frac{L^2}{4} = d'^2 + \frac{L'^2}{4} \Rightarrow \frac{L^2}{4} - \frac{L'^2}{4} = d'^2 - d^2 \quad (*)$$

حال طبق فرض چون $L > L'$ پس سمت چپ رابطهٔ (*)، علامت مثبت دارد. بنابراین:

$$d'^2 - d^2 > 0 \Rightarrow d'^2 > d^2 \xrightarrow{\text{جذر}} d' > d$$

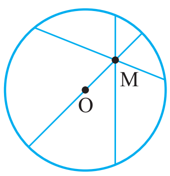
۲ دقیقاً مشابه با اثبات **۱** به رابطهٔ (*) می‌رسیم.

فرض	$d < d'$
حکم	$L > L'$

حال طبق فرض چون $d < d'$ است، پس سمت راست رابطهٔ (*) علامت مثبت دارد. بنابراین:

$$\frac{L^2}{4} - \frac{L'^2}{4} > 0 \Rightarrow \frac{L^2}{4} > \frac{L'^2}{4} \xrightarrow{\times 4} L^2 > L'^2 \xrightarrow{\text{جذر}} L > L'$$

یادآوری از یک نقطه درون یک دایره، بی‌شمار وتر عبور می‌کند. بزرگ‌ترین وتر گذرنده از این نقطه (M)، همان قطر دایره است.

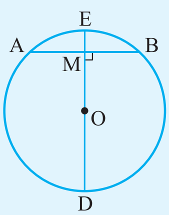


حال طی حل مثال زیر، می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توانیم کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ درون دایره را هم رسم کنیم یا خیر؟

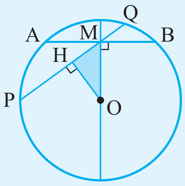
مثال و پاسخ

مثال ثابت کنید کوتاه‌ترین وتری که از یک نقطه درون دایره می‌توان رسم کرد، وتری است عمود بر قطر گذرنده از این نقطه.

پاسخ



فرض	AB وتر و DE قطر دایره و $DE \perp AB$
حکم	AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است.



طبق برهان خُلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یعنی AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M نباشد. در این صورت وترِ PQ را از M می‌گذرانیم و فرض می‌کنیم این وتر، کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M باشد. از مرکز دایره عمود OH را بر وتر PQ رسم می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{OMH}: \text{وتر } OM \text{ و ضلع قائمه } OH \Rightarrow OM > OH$$

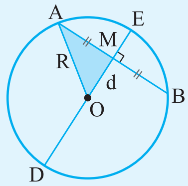
و می‌دانیم هر چه فاصلهٔ مرکز از وتر بیشتر باشد، طول آن وتر کم‌تر است:

$$\left.\begin{array}{l} OM \perp AB \\ OH \perp PQ \end{array}\right\} \xrightarrow{OM > OH} AB < PQ$$

که با فرض این‌که PQ کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است، در تناقض است. پس AB همان کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است.

مثال **طول کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M درون دایرهٔ $C(O,R)$ رسم می‌شود را به دست آورید. (فاصلهٔ M از مرکز دایره را d فرض کنید.)**

پاسخ مطابق شکل ابتدا نقطهٔ M را درون دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم طوری که روی مرکز **نباشد**.



در این صورت ابتدا قطر DE گذرنده از M را رسم می‌کنیم (به عنوان بزرگ‌ترین وتر گذرنده از M) سپس وتر AB را در نقطهٔ M، بر این قطر عمود می‌کنیم (به عنوان کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M). چون قطر DE بر وتر AB عمود شده است، پس وتر AB در نقطهٔ M، نصف خواهد شد **(قضیهٔ عمود بر وتر)**:

$$\overset{\Delta}{OAM}: OA^{۲} = AM^{۲} + OM^{۲} \Rightarrow R^{۲} = AM^{۲} + d^{۲} \quad \text{فیثاغورس}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{R^{۲} - d^{۲}} \xrightarrow{AB = ۲AM} \boxed{AB = ۲\sqrt{R^{۲} - d^{۲}}}$$

فرمول گفته‌شده را به خاطر بسپارید.

مثال **نقطهٔ M به فاصلهٔ ۶ از مرکز دایرهٔ (C) قرار گرفته است. اگر طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از این نقطه ۱۶ باشد، طول بلندترین وتر گذرنده از M را بیابید.**

پاسخ برای محاسبهٔ طول بلندترین وتر گذرنده از M، یعنی قطر دایره، باید شعاع دایره (R) را بیابیم:

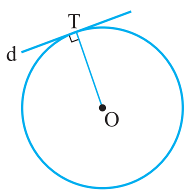
$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از } M \quad L = ۲\sqrt{R^{۲} - d^{۲}} \Rightarrow ۱۶ = ۲\sqrt{R^{۲} - ۶^{۲}} \Rightarrow ۸ = \sqrt{R^{۲} - ۳۶}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۶۴ = R^{۲} - ۳۶ \Rightarrow R^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۱۰ \Rightarrow \text{طول بلندترین وتر} = ۲R = ۲۰$$

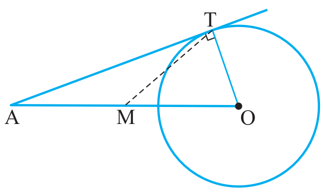
رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن

می‌دانیم شعاع دایره بر مماس بر دایره در نقطهٔ تماس عمود است.

مطابق شکل (۱)، خط d بر دایرهٔ $C(O,R)$ در نقطهٔ T مماس است، بنابراین شعاع OT در نقطهٔ T بر خط d عمود خواهد بود. حال مطابق شکل (۲) از نقطهٔ A خارج دایرهٔ $C(O,R)$، مماس AT بر دایره رسم شده است. مثلث OAT در رأس T، قائم‌الزاویه است.



(۱)



(۲)

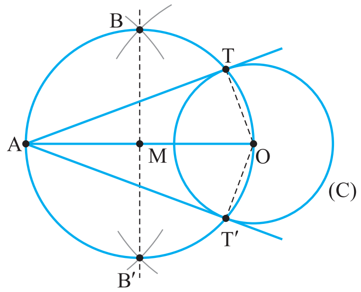
می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، یعنی $MT = AM = OM$. پس دایره‌ای به مرکز M و قطر OA، قطعاً از T می‌گذرد.

بنابراین برای رسم مماس بر یک دایره از نقطه‌ای خارج دایره به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

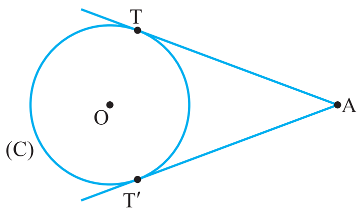
۱ عمودمنصف پاره‌خط OA را رسم می‌کنیم. به این منظور به مراکز O و A، دو کمان به شعاع‌های یکسان (و هر کدام بیش از $\frac{OA}{۲}$) می‌زنیم تا یکدیگر را در B و B' قطع کنند.

خط گذرنده از B و B' عمودمنصف OA است که OA را در M قطع می‌کند.

۲ به مرکز M و شعاع $OM = \frac{OA}{۲}$ دایره‌ای می‌زنیم تا دایرهٔ $C(O,R)$ را در T و T' قطع کند.



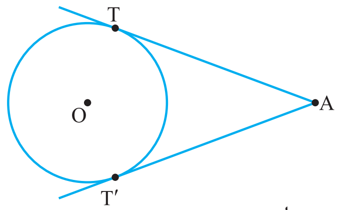
۳ AT و AT' مماس‌های مرسوم از A بر دایرهٔ (C) هستند.



نکته **از هر نقطهٔ خارج دایره، دو مماس بر دایره رسم می‌شود.**
مطابق شکل از نقطهٔ A خارج دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس AT و AT' بر دایره رسم شده است.

حالا طبق قضیهٔ زیر می‌بینیم که طول این مماس‌ها همواره با هم مساوی است:

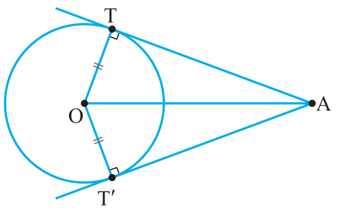
قضیه **طول مماس‌های رسم‌شده بر دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند.**



اثبات

فرض	از A مماس‌های AT و AT' بر دایره‌رسم‌شده
حکم	$AT = AT'$

مطابق شکل نقطهٔ A را به مرکز دایره (نقطهٔ O) وصل می‌کنیم. می‌دانیم شعاع بر مماس در نقطهٔ تماس عمود است:



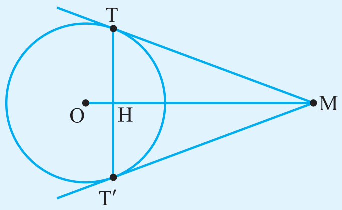
$$\overset{\Delta}{OAT},\ \overset{\Delta}{OAT'}: \begin{cases} AO = AO \\ OT = OT' = R \\ \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \overset{\Delta}{OAT} \cong \overset{\Delta}{OAT'}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AT = AT'$$

حالا که این قضیهٔ بسیار مهم را یاد گرفتید به مسائل مطرح‌شده توجه کنید.

مثال و پاسخ

مثال **مطابق شکل MT و MT' در نقاط T و T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس‌اند. نقطهٔ H نیز محل برخورد وتر TT' با پاره‌خط OM است. موارد زیر را ثابت کنید.**



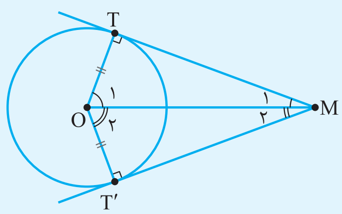
الف **پاره‌خط OM نیمساز زاویه‌های $T\hat{M}T'$ و $T\hat{O}T'$ است.**

ب **پاره‌خط OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است.**

پ $OH \times OM = R^2$

ت $TT'^2 = 4MH \times OH$

ث $TT' \times OM = 2R \times MT$



پاسخ

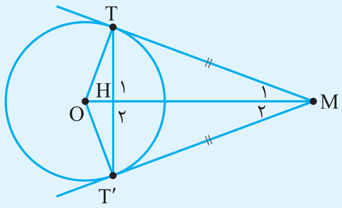
الف

فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره‌رسم‌شده
حکم	$\hat{M}_1 = \hat{M}_2,\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

مطابق شکل مرکز دایره را به نقاط تماس T و T' وصل کرده‌ایم، در این صورت $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$ (شعاع بر مماس در نقطهٔ تماس عمود است.):

$$\overset{\Delta}{OMT},\ \overset{\Delta}{OMT'}: \begin{cases} \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \\ OT = OT' = R \\ OM = OM \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \overset{\Delta}{OMT} \cong \overset{\Delta}{OMT'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

دقت کنید چون می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره، با هم مساوی است می‌توانستیم از تساوی $MT = MT'$ نیز در اثبات همنهشتی دو مثلث استفاده کنیم.



ب

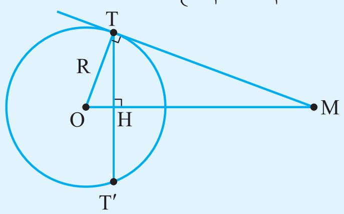
فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	OM عمودمنصف TT' است

طبق قسمت **الف** می‌دانیم پاره‌خط واصل بین نقطهٔ M خارج دایره و مرکز (یعنی OM) نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است:

$$\overset{\Delta}{MTH}\,,\ \overset{\Delta}{MT'H}:\begin{cases} MT = MT' \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ MH = MH \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض زض})} \overset{\Delta}{MTH} \cong \overset{\Delta}{MT'H}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} TH = T'H\ \checkmark \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases} \xrightarrow[\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ]{T\hat{H}T'=180^\circ} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow OM \perp TT'$$

یعنی OM عمودمنصف TT' است.



پ

فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$OH \times OM = R^2$

مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ TMO ($\hat{T} = 90^\circ$)، TH ارتفاع وارد بر وتر OM است. (دقت کنید طبق مورد **ب**، OM **عمودمنصف** TT' است.) می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با ضرب قطعاتی که روی وتر ایجاد می‌کند، یعنی $TH^2 = OH \times HM$. حال سمت چپ حکم را باز می‌کنیم:

$$OH \times OM = OH \times (OH + HM) = OH^2 + \underbrace{OH \times HM}_{TH^2} \overset{\text{فیثاغورس در } \overset{\Delta}{OTH}}{=\!=\!=} OT^2 = R^2$$

می‌توان گفت در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع قائم برابر است با ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر یعنی $OT^2 = OH \times OM$، به عبارتی $R^2 = OH \times OM$.

ت

فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$TT'^2 = 4MH \times OH$

مطابق شکل مورد قبل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ TMO ($\hat{T} = 90^\circ$)، TH ارتفاع وارد بر وتر OM است. (دقت کنید طبق مورد **ب**، OM **عمودمنصف** TT' است.) می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با ضرب قطعاتی که روی وتر ایجاد می‌کند، یعنی $TH^2 = OH \times MH$.

چون OM عمودمنصف TT' است، پس $TH = \frac{TT'}{2}$. حال به جای TH مساوی آن را قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{TT'}{2}\right)^2 = OH \times MH \Rightarrow \frac{TT'^2}{4} = OH \times MH \xrightarrow{\times 4} \boxed{TT'^2 = 4OH \times MH}$$

ث

فرض	از M دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده
حکم	$TT' \times OM = 2R \times MT$

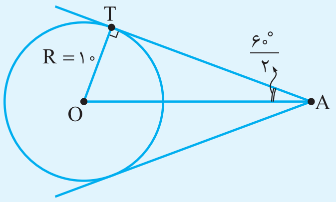
مطابق شکل مورد **پ**، در مثلث قائم‌الزاویهٔ TMO ($\hat{T} = 90^\circ$)، TH ارتفاع وارد بر وتر OM است. (دقت کنید طبق مورد **ب**، OM عمودمنصف TT' است.) می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، برابر است با ضرب دو ضلع قائم در یکدیگر:

$$\overset{\Delta}{OTM}: TH \times OM = \underset{\substack{\downarrow \\ R}}{OT} \times MT \xrightarrow{TH = \frac{TT'}{2}} \frac{TT'}{2} \times OM = R \times MT \xrightarrow{\times 2} \boxed{TT' \times OM = 2R \times MT}$$

مثال و پاسخ

مثال زاویهٔ بین دو مماس رسم‌شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,۱۰)$ برابر ۶۰° است. طول پاره‌خط OA و طول مماس‌های مرسوم را بیابید.

پاسخ مطابق شکل فرض کنید از A دو مماس با زاویهٔ ۶۰° نسبت به هم بر دایرهٔ $C(O,۱۰)$ رسم شده است. می‌دانیم خطی که مرکز دایره را به نقطهٔ خارج دایره (A) وصل می‌کند، نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است:



$$\overset{\Delta}{OAT}:\begin{cases}\sin\underbrace{O\hat{A}T}_{۳۰^\circ}=\dfrac{OT}{OA}\Rightarrow\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۱۰}{OA}\Rightarrow OA=۲۰\\[2ex] \cos\underbrace{O\hat{A}T}_{۳۰^\circ}=\dfrac{AT}{OA}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}=\dfrac{AT}{۲۰}\Rightarrow AT=۱۰\sqrt{۳}\end{cases}$$

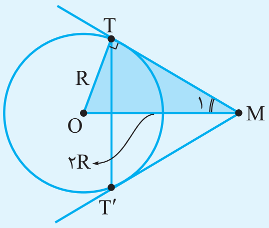
دقت کنید پس از محاسبهٔ OA، می‌توانستیم از قضیهٔ فیثاغورس در $\overset{\Delta}{OAT}$ استفاده کنیم و AT را بیابیم.

مثال دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ $۲R$ از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطوط MT و MT' بر این دایره (در نقاط T و T') مماس‌اند.

الف طول مماس‌های MT و MT' را برحسب R بیابید.

ب طول وتر TT' را به دست آورید.

پ نوع مثلث MTT' را مشخص کنید.



پاسخ **الف** مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:

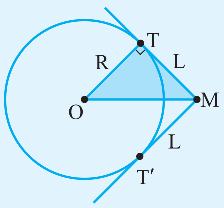
$$\sin\hat{M}_۱=\frac{OT}{OM}=\frac{R}{۲R}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{M}_۱=۳۰^\circ$$

دقت کنید چون **ضلع روبه‌رو** به $\hat{M}_۱$ و **وتر** مثلث OMT معلوم بودند از سینوس استفاده کردیم. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{OTM}:\cos\hat{M}_۱=\frac{MT}{OM}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{MT}{۲R}\Rightarrow\boxed{MT=R\sqrt{۳}=MT'}$$

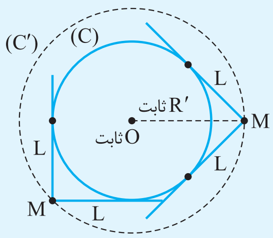
ب و **پ** از طرفی چون OM نیمساز $T\hat{M}T'$ است، پس $T\hat{M}T'=۲\hat{M}_۱=۶۰^\circ$. همچنین چون مثلث MTT' همواره با زاویهٔ رأس M (نقطهٔ بیرون دایره) متساوی‌الساقین است و الان هم زاویهٔ رأس آن ۶۰° است، پس در حقیقت متساوی‌الاضلاع بوده و $TT'=MT=R\sqrt{۳}$.

مثال دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ این دایره را مشخص کنید که از آن‌ها بتوان مماس‌هایی به طول مشخص L بر دایره رسم کرد.



پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و از نقطهٔ M خارج دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس به طول ثابت و مشخص L بر این دایره رسم کرده‌ایم. چون مماس بر شعاع در نقطهٔ تماس، عمود است $(\hat{T}=۹۰^\circ)$؛ پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OMT داریم:

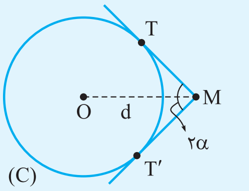
$$OM^۲=OT^۲+TM^۲=R^۲+L^۲\Rightarrow OM=\sqrt{R^۲+L^۲}=\text{ثابت}$$



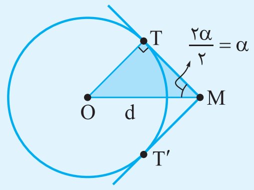
حال چون نقطهٔ O در صفحه، ثابت و فاصلهٔ نقطهٔ M هم تا این نقطه مقدار ثابت $\sqrt{R^۲+L^۲}$ است، پس نقطهٔ موردنظر M، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ثابت $R'=\sqrt{R^۲+L^۲}$ قرار دارد. یعنی اگر به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^۲+L^۲}$ دایره‌ای رسم کنیم، از تمام نقاط روی این دایره می‌توانیم دو مماس به طول L بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم نماییم.

مثال و پاسخ

مثال در شکل روبه‌رو از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' با زاویهٔ ۲α نسبت به هم بر دایرهٔ (C) رسم شده است و فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C)، مقدار ثابت d می‌باشد. مساحت مثلث OMT را برحسب d و نسبت‌های مثلثاتی ۲α بیابید.



پاسخ مطابق شکل مثلث OMT، در نقطهٔ تماس T، قائم‌الزاویه است، زیرا مماس MT بر شعاع OT در نقطهٔ T عمود است.



از طرفی زاویهٔ بین دو مماس توسط پاره‌خط OM، نصف می‌شود. می‌دانیم مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف ضرب دو ضلع قائم این مثلث است. پس OT و MT را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α و طول **وتر** $OM = d$ پیدا می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{OMT}:\begin{cases}\sin\alpha = \dfrac{OT}{OM} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{OT}{d} \Rightarrow \boxed{OT = d\sin\alpha} & (۱)\\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{MT}{OM} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{MT}{d} \Rightarrow \boxed{MT = d\cos\alpha} & (۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{و}(۲)} S_{\overset{\Delta}{OMT}} = \frac{۱}{۲}OT \times MT = \frac{۱}{۲}(d\sin\alpha)(d\cos\alpha) \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OMT}} = \frac{۱}{۲}d^{۲}\sin\alpha\cos\alpha$$

می‌توان گفت چون $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$، پس:

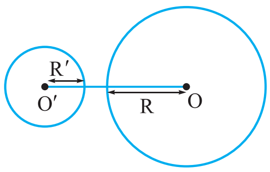
$$S_{\overset{\Delta}{OMT}} = \frac{۱}{۲}d^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\right) \Rightarrow \boxed{S_{\overset{\Delta}{OMT}} = \frac{۱}{۴}d^{۲}\sin ۲\alpha}$$

در آخرین قسمت از درس اول یعنی مفاهیم مقدماتی دایره، می‌رسیم به اوضاع نسبی دو دایره. یعنی می‌خواهیم ببینیم دو دایره در یک صفحه نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

اوضاع نسبی دو دایره

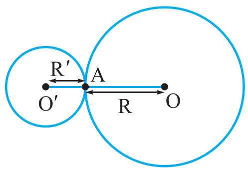
برای تشخیص وضعیت نسبی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ باید فاصلهٔ دو مرکز (که اصطلاحاً به آن طول خط‌المرکزین گفته می‌شود) را با جمع و تفریق شعاع دو دایره مقایسه کنیم. (معمولاً طول خط‌المرکزین را با d یا OO' نمایش می‌دهیم). در این صورت می‌توان حالات زیر را برای دو دایره متصور شد:

الف متخارج: در این حالت دو دایره کاملاً خارج یکدیگر بوده و هیچ نقطهٔ اشتراکی ندارند، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها از جمع دو شعاع بیشتر است (از تفاضل دو شعاع هم که قطعاً بزرگ‌تر است).



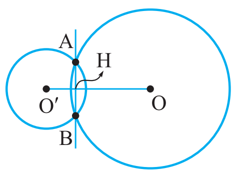
$$\boxed{C(O,R) \text{ و } C'(O',R') \text{ متخارجاند} \Leftrightarrow d > R + R'}$$

ب مماس‌برون: در این حالت دو دایره از بیرون بر هم مماس بوده و فقط در یک نقطه مشترک‌اند، پس طول خط‌المرکزین این دو دایره، برابر است با جمع دو شعاع.

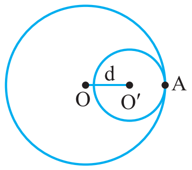


$$\boxed{C(O,R) \text{ و } C'(O',R') \text{ مماس‌برون‌اند} \Leftrightarrow d = R + R'}$$

پ متقاطع: در این حالت دو دایره در دو نقطه مشترک‌اند، پس طول خط‌المرکزین این دو دایره، بین جمع و تفریق دو شعاع قرار دارد. دقت کنید در این حالت، پاره‌خطی که نقاط تقاطع را به هم وصل می‌کند، وتر مشترک دو دایره نام دارد. **وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع بر خط‌المرکزین آن‌ها عمود است و توسط خط‌المرکزین نصف می‌شود** **($OO' \perp AB$ و $AH = HB$)**

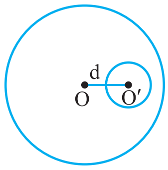


$$\boxed{C(O,R) \text{ و } C'(O',R') \text{ متقاطع‌اند} \Leftrightarrow |R - R'| < d < R + R'}$$



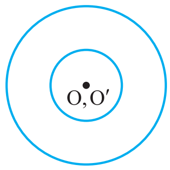
پ) مماس‌درون: در این حالت دو دایره از داخل بر هم مماس هستند و فقط در یک نقطه مشترک‌اند (شبیه حالت مماس‌برون)، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها، برابر قدرمطلق تفاضل دو شعاع است.

$C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس‌درون‌اند $\Leftrightarrow d=|R-R'|$



ث) متداخل: در این حالت دو دایره هیچ اشتراکی با هم ندارند و یکی از آن‌ها کاملاً درون دیگری واقع است، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها از تفریق دو شعاع کم‌تر است، ولی به صفر نمی‌رسد.

$C(O,R)$ و $C'(O',R')$ متداخل‌اند $\Leftrightarrow ۰<d<|R-R'|$



ج) هم‌مرکز: در این حالت، مثل حالت متداخل، دو دایره هیچ اشتراکی با هم ندارند، با این تفاوت که مرکز دو دایره، یک نقطه است. در این حالت طبیعتاً طول خط‌المرکزین صفر است (اصلاً خط‌المرکزینی وجود ندارد).

$C(O,R)$ و $C'(O',R')$ هم‌مرکزند $\Leftrightarrow d=۰$

مثال و پاسخ

مثال **دو دایرهٔ $C(O,۴)$ و $C'(O',۸)$ با فرض $OO'=\sqrt{۸}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟**

پاسخ با فرض $R=۴$ و $R'=۸$، طول خط‌المرکزین $d=\sqrt{۸}$ را با $R+R'$ و $|R-R'|$ مقایسه می‌کنیم:

$$R+R'=۴+۸=۱۲,\ |R-R'|=|۴-۸|=۴, d=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\simeq ۲/۸$$

پس $۰<d<|R-R'|$ است، یعنی دو دایره متداخل‌اند.

مثال **دو دایره با مساحت‌های ۴π و ۹π و مراکز $O(m-۱,۴)$ و $O'(۲,۱)$ مفروض‌اند. مقدار m را چنان بیابید که این دو دایره مماس‌برون باشند.**

پاسخ چون دو دایره مماس‌برون هستند، پس طول خط‌المرکزین دو دایره، برابر جمع شعاع آن‌ها است. ابتدا شعاع دو دایره را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S=\pi R^۲ \Rightarrow ۴\pi=\pi R^۲ \Rightarrow R=۲ \\ S'=\pi R'^۲ \Rightarrow ۹\pi=\pi R'^۲ \Rightarrow R'=۳ \end{cases}$$

$$d=OO'=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{((m-۱)-۲)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{(m-۳)^۲+۹}$$

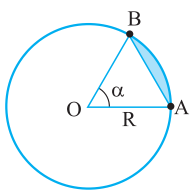
$$\xrightarrow{d=R+R'} \sqrt{(m-۳)^۲+۹}=۵ \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} (m-۳)^۲+۹=۲۵ \Rightarrow (m-۳)^۲=۱۶$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |m-۳|=۴ \Rightarrow \begin{cases} m-۳=۴ \Rightarrow m=۷ \\ m-۳=-۴ \Rightarrow m=-۱ \end{cases}$$

سؤال‌های امتحانی

۱- نقطهٔ $A(m-۱,۲)$ روی دایرهٔ $C(O,۵)$ قرار دارد و مرکز دایره نقطهٔ $O(۱,-۲)$ است. مقدار m را بیابید.

۲- دایرهٔ $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. وترهایی به طول ثابت L را در این دایره رسم می‌کنیم. وسط این وترها روی چه شکلی قرار می‌گیرند؟



۳- مطابق شکل در دایرهٔ $C(O,R)$ دو شعاع با زاویهٔ بین α برحسب درجه نسبت به هم رسم شده‌اند. قسمت رنگی را که محدود به دایره و وتر AB است، قطعه‌ای از دایره می‌نامیم. مساحت این قطعه را برحسب α و R بیابید.

۴- مساحت دایرهٔ $C(O,R)$ برابر ۱۶۹π است. اگر وتر $AB=۲۴$ در این دایره رسم شود، فاصلهٔ مرکز دایره تا این وتر کدام است؟

۵- طول کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از نقطهٔ M درون دایرهٔ $C(O,R)$ به ترتیب ۱۶ و ۲۰ است. فاصلهٔ M از مرکز دایره را بیابید.

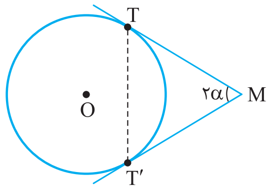
۶- دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. چگونه نقاطی از صفحهٔ این دایره را پیدا می‌کنید که از آن‌ها بتوان دو مماس بر دایره رسم کرد که با هم زاویهٔ α می‌سازند؟

۷- نقطهٔ P به فاصلهٔ $3R$ از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ واقع است. کسینوس زاویهٔ بین دو مماس را بیابید.

۸- دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ این دایره را مشخص کنید که از آن‌ها بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد.

۹- از نقطهٔ P دو مماس عمود بر هم، بر دایره‌ای به شعاع R رسم شده است. سطح بین دو مماس و محیط دایره را بیابید.

۱۰- مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس با زاویهٔ بین 2α بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده است. مساحت مثلث MTT' را برحسب R و نسبت‌های مثلثاتی α بیابید.



۱۱- دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است.

الف) مرکز دایره‌هایی با شعاع R' که خارج این دایره قرار دارند و روی محیط دایرهٔ (C) می‌غلتند روی چه شکلی قرار دارد؟

ب) اگر این دایره‌های غلتان داخل دایرهٔ $C(O,R)$ و مماس بر آن باشند، مرکزشان روی چه شکلی می‌افتد؟ $(R > R')$

۱۲- ثابت کنید خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک این دو دایره است.

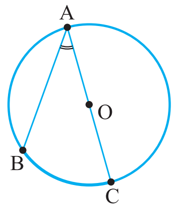
۱۳- ثابت کنید در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

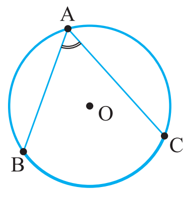
۲ زاویه در دایره

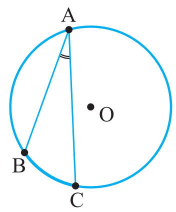
همان‌طور که در درس اول این فصل مشاهده فرمودید، کمان، زاویهٔ مرکزی و ... را تعریف نمودیم. حالا می‌خواهیم بحث زاویه در دایره را تکمیل کنیم. در این درس، ابتدا زاویه‌های محاطی و ظلی را که رأس آن‌ها روی دایره است مطرح می‌کنیم، سپس به زاویهٔ بین دو وتر متقاطع درون دایره یا امتداد دو وتر و هم‌چنین زاویهٔ بین امتداد یک وتر و مماس خواهیم پرداخت.

زاویهٔ محاطی

زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند، زاویهٔ محاطی می‌نامیم. کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویهٔ محاطی محدود بوده و داخل زاویه قرار دارد، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند. مطابق شکل‌های رسم‌شده، $\hat{A}$ محاطی رو به کمان BC است.





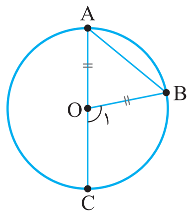


حالا طبق قضیهٔ زیر، می‌خواهیم رابطهٔ بین زاویهٔ محاطی و کمان روبه‌رویش را پیدا کنیم.

قضیه **اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌رویش است.**

اثبات

فرض	$\hat{A}$ زاویهٔ محاطی رو به کمان $\overset{\frown}{BC}$ است
حکم	$\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



مطابق شکل، حالتی را در نظر می‌گیریم که یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی $\hat{A}$، قطری از دایره باشد. در این صورت نقطهٔ B را به مرکز دایره وصل می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{OAB}:\begin{cases} OA = OB = R \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \text{خارجی } \hat{O}_۱ = \hat{A} + \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{A} + \hat{A} = ۲\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_۱}{۲} \quad (*)$$

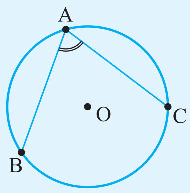
از طرفی $\hat{O}_۱$ یک زاویهٔ مرکزی رو به کمان $\overset{\frown}{BC}$ است، پس $\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{BC}$ بوده و طبق رابطهٔ (*) به راحتی نتیجه می‌شود $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$.

- ممکن است از خود بپرسید آیا حتماً باید یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی، قطری از دایره باشد تا اندازهٔ این زاویه نصف کمان روبه‌رویش شود؟

پاسخ این سؤال منفی است! طبق مثال‌هایی که مطرح می‌شود، ثابت می‌کنیم **تحت هر شرایطی، اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان روبه‌روی آن می‌باشد.**

مثال و پاسخ

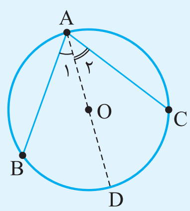
مثال **در شکل روبه‌رو ثابت کنید** $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$.



پاسخ

فرض	$B\hat{A}C$ زاویهٔ محاطی رو به کمان $\overset{\frown}{BC}$ است
حکم	$B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

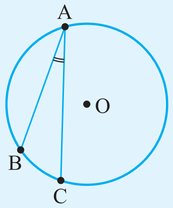
مطابق شکل، رأس A زاویهٔ محاطی را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی که یک ضلع آن قطری از دایره باشد، نصف کمان روبه‌رویش است:



$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

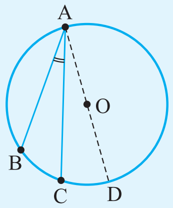
مثال و پاسخ

مثال: در شکل روبه‌رو ثابت کنید $B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$.



پاسخ:

فرض	$B\hat{A}C$ زاویهٔ محاطی رو به کمان $\overset{\frown}{BC}$ است
حکم	$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



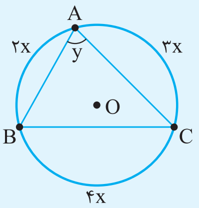
مطابق شکل رأس A زاویهٔ محاطی را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی که یک ضلع آن قطری از دایره باشد، نصف کمان روبه‌رویش است:

$$B\hat{A}C=B\hat{A}D-C\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

حالا می‌خواهیم کاربرد رابطهٔ زاویهٔ محاطی و کمان روبه‌رویش را بررسی نماییم. به مثال‌هایی که مطرح می‌کنیم بسیار توجه کنید:

مثال و پاسخ

مثال: در شکل روبه‌رو مقادیر x و y را بیابید.



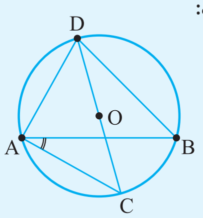
پاسخ: کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BC}$ یک دایرهٔ کامل را تشکیل می‌دهند:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۴۰^\circ$$

در نهایت $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BC است:

$$y=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۴x}{۲}=۲x\xrightarrow{x=۴۰^\circ}y=۸۰^\circ$$

مثال: در شکل روبه‌رو O مرکز دایره بوده و $\overset{\frown}{AD}=۱۰۰^\circ$ و $B\hat{A}C=۲۵^\circ$ است. موارد زیر را تعیین کنید:



الف) $\hat{B}$

ب) $\hat{C}$

پ) $\overset{\frown}{DB}$

ت) $D\hat{A}B$

ث) $D\hat{A}C$

پاسخ:

الف) محاطی $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$

ب) محاطی $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$

پ) محاطی $B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow ۲۵^\circ=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ \xrightarrow{\text{DC قطر دایره}} \underbrace{\overset{\frown}{BC}}_{۵۰^\circ}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{DB}=۱۳۰^\circ$

ت) محاطی $D\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{DB}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$

ث) محاطی $D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{DBC}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$

می‌توان گفت:

$$D\hat{A}C=D\hat{A}B+B\hat{A}C=۶۵^\circ+۲۵^\circ=۹۰^\circ$$