استدلال ریاضی

درک شهودی، قیاس و استدلال استقرایی

۱- درک شهودی، یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است.

۲- قیاس (تمثیل)، یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون می‌باشد. در واقع انواع تمثیل می‌توانند در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به کار روند.

۳- استدلال استقرایی، روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

۴- با توجه به تعریف، مشخص است که استدلال استقرایی نوعی محدودیت دارد، چون بر پایه‌ی تعداد محدودی مشاهدات، نتیجه‌گیری می‌شود.

مثال: گزاره‌های مقابل را در نظر بگیرید: الف) $1+3=4$ ب) $1+3+5=9$ ج) $1+3+5+7=16$

با توجه به مشاهدات بالا می‌توان بر پایه‌ی استدلال استقرایی نتیجه‌گرفت که مجموع اعداد فرد متوالی، مربع کامل است.

الگوی ۱

۱- برای درک این حقیقت که «حاصل‌ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است» فرض می‌کنیم که خروج آب از یک مخزن عملی منفی بوده و از این صحنه فیلمبرداری کرده و هنگام نمایش این عمل فیلم را به عقب برمی‌گردانیم که باز هم عملی منفی بوده است و بازگشت آب به مخزن عملی مثبت تلقی می‌شود، کدام استدلال در این‌جا به‌کار رفته است؟ (مثال کتاب درسی صفحه ۵)

۱) شهودی ۲) تمثیلی ۳) استنتاجی ۴) اثبات بازگشتی

۲- ضرب المثل «مار گزیده، از ریسمان سیاه و سفید می‌ترسد» اشاره دارد به: (آزمون کانون - ۸۶)

۱) استدلال قیاسی ۲) استدلال استقرایی ۳) استدلال استنتاجی ۴) درک شهودی

۳- از حرارت دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه، نتیجه گرفته شده است که میله‌های فلزی در اثر حرارت طولشان زیاد می‌شود. نوع استدلال برای این نتیجه‌گیری کدام است؟ (آزمون کانون - ۹۰)

۱) استنتاجی ۲) استقرایی ۳) تمثیلی ۴) درک شهودی

۴- کدام یک از احکام زیر با روش استدلال شهودی قابل درک است؟ (تمرین کتاب درسی صفحه ۱۵)

۱) مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با: $(n-2)\times 180^\circ$

۲) طول هر ضلع مثلث از مجموع طول دو ضلع دیگر کوچکتر است.

۳) اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۴) در هر مثلث ارتفاع‌ها، همرسند.

الگوی ۲

۵- استدلال استقرایی یعنی ...... ؟ (آزمون کانون - ۸۵)

۱) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات.

۲) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم.

۳) استدلالی است که از حکم کلی، حکم جزئی را نتیجه می‌گیریم.

۴) هیچکدام.

*۶- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات، کدام نوع استدلال است؟ (سراسری ریاضی - ۸۸)

۱) قیاسی ۲) شهودی ۳) استنتاجی ۴) استقرایی

۷- ضرب المثل «مشت نمونه خروار است» از لحاظ استدلال با کدام یک از ضرب‌المثل‌های زیر مشابه است؟ (سراسری انسانی - ۸۶)

۱) سالی که نکوست از بهارش پیداست. ۲) قطره قطره جمع گردد، وانگهی دریا شود.

۳) با یک گل بهار نمی‌شود. ۴) شاهنامه آخرش خوش است.

استدلال ریاضی

اصل استقرای ریاضی و اصل استقرای تعمیم یافته

اصل استقرا: فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد، اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی نیز درست است.

مثال: به کمک اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$P(1): n=1 \Rightarrow \frac{1(1+1)}{2}=1$ درست

$P(k): n=k \Rightarrow 1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ فرض استقرا

$P(k+1): n=k+1 \Rightarrow 1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ حکم استقرا

اگر به طرفین فرض استقرا، $(k+1)$ اضافه کنیم داریم:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = (k+1)(\frac{k}{2}+1)=(k+1)\times\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

بدین ترتیب حکم استقرا ثابت شد.

مثال: اگر $a \geq -1$ عددی حقیقی و $n \in N$، آن‌گاه $(1+a)^n \geq 1+na$.

$P(1): n=1 \Rightarrow 1+a \geq 1+a$ درست

$P(k): n=k \Rightarrow (1+a)^k \geq 1+ka$ فرض استقرا

$P(k+1): n=k+1 \Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ حکم استقرا

کافی است طرفین فرض استقرا را در $(1+a)$ که با توجه به $a \geq -1$ عددی مثبت است و جهت نامساوی را تغییر نمی‌دهد، ضرب کنیم. داریم:

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1+a)(1+ka)=1+\underbrace{ka+a}_{(k+1)a}+ka^2 \\ k\in N \Rightarrow ka^2 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow (1+a)(1+ka) \geq 1+(k+1)a \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

حکم استقرا ثابت شد.

اصل استقرای تعمیم‌یافته: فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m>1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است (m را شروع استقرا می‌گویند).

الگوی ۳

۸- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل $30^3 + ... + 14^3 + 12^3 + 10^3$ کدام است؟

۱) ۱۱۴۱۰۰　۲) ۱۱۴۲۰۰　۳) ۱۱۴۳۰۰　۴) ۱۱۴۴۰۰　(سراسری - ۹۱)

۹- حاصل $(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times...\times(1-\frac{1}{n})$ کدام است؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) $\frac{(n+1)!}{n!}$　۲) $1-\frac{1}{n}$　۳) $\frac{1}{n}$　۴) $\frac{n!}{(n+1)!}$

۱۰- حاصل $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ کدام است؟ (سراسری - ۷۴)

۱) $\frac{n}{n+1}$　۲) $\frac{1}{n(n+1)}$　۳) $\frac{1}{n}$　۴) $\frac{1}{n^2+1}$

*۱۱- حاصل عبارت $n^{۲}+...+۳^{۲}+۲^{۲}+۱^{۲}$ کدام است؟ $(n\in N)$ (آزاد ریاضی - ۷۷)

۱) $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$ ۲) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ ۳) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲}$ ۴) $n^{۳}-n$

۱۲- کدام گزینه به ازای nهای طبیعی، همواره صحیح است؟ (آزمون کانون - ۷۹)

۱) $n!\le ۲^{n}$ ۲) $n!\le ۳^{n}$ ۳) $n!\le (\frac{n}{۲}+\frac{۱}{n})^{n}$ ۴) $n!\le (\frac{n}{۲}-\frac{۳}{۲})^{n}$

الگوی ۴

۱۳- در اثبات نامساوی $\frac{n}{۲}<\frac{۱}{۲^{n}-۱}+...+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۳}+۱;(n\ge ۳)$ با کمک استقرای تعمیم یافته از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۱)

۱) $۲^{k}>k$ ۲) $۲^{k+۱}>۲$ ۳) $۲^{k+۱}>۳$ ۴) $۲^{k}>k^{۲}-۱$

۱۴- حکم « $۲^{n}<n!$ » برای هر عدد طبیعی n، $(n\ge m)$ صحیح است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی m کدام است؟ (تمرین کتاب درسی صفحه ۱۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

*۱۵- در اصل استقرای تعمیم یافته برای حکم « $۴^{n}<(n+۱)!:n\ge m$ »، عدد طبیعی مناسب m کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۶- برای اثبات حکم « $۳^{n}<(n+۱)!$ » به ازای $n\ge m$ با استفاده از استقرای تعمیم یافته، کوچک‌ترین عدد طبیعی مناسب m کدام است؟

(مسأله امتحان نهایی - ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

*۱۷- برای اثبات نامعادله‌ی « $\frac{n}{۲}<\frac{۱}{۲^{n}-۱}+...+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۳}+۱$ » با استفاده از استقرای تعمیم یافته به ازای اعداد طبیعی $n\ge m$، کم‌ترین مقدار طبیعی m کدام است؟ (سنجش - ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸- اصل استقرای ریاضی در مورد حکم « $\frac{۵n}{۱۲}<\frac{۱}{n}+...+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+P(n):۱$ » برای اعداد طبیعی $n\ge m$ برقرار است. کوچک‌ترین مقدارطبیعی m کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۷۸)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

الگوی ۵

۱۹- در اثبات حکم $n!>(\sqrt{۶})^{n}$، با اصل استقرای تعمیم یافته، از کدام نامساوی بدیهی استفاده می‌شود؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۲)

۱) $(k+۱)>\sqrt{۶};k\ge ۵$ ۲) $(k+۱)>\sqrt{۶};k\ge ۳$ ۳) $k^{۲}>۶;k\ge ۳$ ۴) $k^{۲}>۶;k\ge ۵$

۲۰- در اثبات $۲^{n}>n^{۲};n\ge ۵$ با روش استقراء ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی- ۸۶)

۱) $k^{۲}>k$ ۲) $۲k-۱>۵$ ۳) $(k-۱)^{۲}>۲$ ۴) $(k+۱)^{۲}>۲$

*۲۱- در اثبات نامساوی $۱+۲+۳+....+n<\frac{۱}{۸}(۲n+۱)^{۲};n\ge ۱$، با کمک استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی به کار می‌رود؟

(سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) $k+۱<۲k$ ۲) $k+۱<۲k+۳$

۳) $۴(k^{۲}+۳k+۲)<(۲k+۳)^{۲}$ ۴) $۴k^{۲}+۱۲k+۹=(۲k+۳)^{۲}$

۲۲- در اثبات نامساوی $۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+...+\frac{۱}{n^{۲}}<۲-\frac{۱}{n}$، با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کارمی‌رود؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۰)

۱) $K+۲>K+۱$ ۲) $۲K-۱>K+۱$ ۳) $K^{۲}+K>K^{۲}-۱$ ۴) $K^{۲}+K+۱>K^{۲}+K$

استدلال ریاضی

استدلال استنتاجی، قضایای شرطی و دو شرطی و برهان خلف

۱– استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۲– با استفاده از استدلال استنتاجی، مطمئن هستیم که نتیجه همواره درست است.

۳– قضایای کلی، احکامی هستند که همواره برقرار می‌باشند.

مثال: همه‌ی انسان‌ها، روزی می‌میرند. علی یک انسان است در نتیجه علی، روزی می‌میرد.

۴– برای اثبات قضایای ریاضی، از استدلال استنتاجی استفاده می‌شود.

مثال: برای اثبات حکم «در هر مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی یک رأس برابر مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن است» از استدلال استنتاجی استفاده می‌شود.

۵– مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض نامیده می‌شود.

۶– با ارائه‌ی مثال‌های فراوان نمی‌توان درستی یک نتیجه‌گیری کلی را اثبات کرد، اما با ارائه‌ی تنها یک مثال نقض‌کننده، می‌توان آن را رد کرد. به این مثال، مثال نقض گوییم.

مثال: «همه‌ی اعداد اول، فرد هستند» مثال نقض: ۲ عددی اول و زوج است.

۷– به عبارت «اگر p آن‌گاه q» یک قضیه‌ی شرطی گفته می‌شود، گزاره‌ی p را فرض قضیه و گزاره‌ی q را، حکم قضیه می‌نامیم و آن را به صورت $(p \Rightarrow q)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: «اگر $|x| < ۲$ آن‌گاه $-۲ < x < ۲$» یک گزاره‌ی شرطی است.

«$|x| < ۲$» فرض قضیه و «$-۲ < x < ۲$» حکم قضیه هستند.

۸– عکس قضیه‌ی شرطی، همواره برقرار نیست.

مثال: اگر «$x < y < ۰$» آن‌گاه «$x^۲ < y^۲$» یک قضیه‌ی شرطی است.

اما برعکس آن برقرار نیست. زیرا برای آن مثال نقض وجود دارد. $x = -۳ \,,\; y = ۴ \Rightarrow x^۲ < y^۲ \,,\; x < ۰$

یعنی اگر «$x^۲ < y^۲$» آن‌گاه نمی‌توان همواره رابطه‌ی «$x < y < ۰$» را نتیجه گرفت.

۹– عکسِ نقیض یک قضیه‌ی شرطی، معادل با آن قضیه است، یعنی: «اگر p آن‌گاه q» معادل «اگر $\sim q$ آن‌گاه $\sim p$» می‌باشد.

$\sim p$ را نقیض گزاره‌ی p می‌نامیم.

۱۰– قضیه‌ی دو شرطی به قضیه‌ای گفته می‌شود که عکس آن نیز یک قضیه‌ی درست باشد.

مثال: «اگر یکی از زوایای مثلثی ۹۰° باشد، بین اضلاع آن رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است» یک قضیه‌ی دو شرطی می‌باشد زیرا عکس آن نیز برقرار است. یعنی اگر در مثلثی با اضلاع a و b و c، رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار باشد، زاویه‌ی روبرو به ضلع a، ۹۰° می‌باشد.

۱۱– اگر برای اثبات یک حکم، از درستی حکم به یک رابطه‌ی بدیهی یا فرض قضیه برسیم، اثبات بازگشتی انجام شده است.

۱۲– اثبات بازگشتی شیوه‌ی مناسبی برای اثبات نیست. مگر آنکه تمامی مراحل انجام شده، بازگشت‌پذیر باشند.

۱۳– برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم مراحل زیر را دارد.

الف) فرض می‌کنیم حکم قضیه نادرست است.

ب) نشان می‌دهیم که این فرض غلط نتیجه‌ای دارد که با اصول یا فرض قضیه، متناقض است.

ج) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرضی که نادرست در نظر گرفته بودیم، درست خواهد بود و حکم اثبات می‌شود.

مثال: نشان دهید $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گنگ است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم غلط است، یعنی $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ عددی گویا است.

$$\sqrt{۲}-\sqrt{۳}=x,\ x\in Q \Rightarrow (\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۲}=x^{۲} \Rightarrow ۲+۳-۲\sqrt{۶}=x^{۲} \Rightarrow \sqrt{۶}=\frac{۵-x^{۲}}{۲}$$

چون $x\in Q$ بنابراین $\frac{۵-x^{۲}}{۲}\in Q$ در نتیجه $\sqrt{۶}$ نیز گویا است، که این تناقض است، یعنی حکمی که غلط در نظر گرفته بودیم، درست بوده است. بنابراین $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

الگوی ۶

۲۳- برای اثبات یک حکم ریاضی، کدام روش معتبرتر است؟ (مثال کتاب درسی صفحه ۱۷)

۱) استدلال قیاسی ۲) استدلال استنتاجی ۳) استدلال استقرایی ۴) درک شهودی

۲۴- برای اثبات حکم «در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه و نیم‌ساز وارد بر قاعده، بر هم منطبق‌اند» از چه روشی استفاده می‌شود؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) استدلال قیاسی ۲) استدلال استقرایی ۳) استدلال استنتاجی ۴) درک شهودی

۲۵- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟ (سراسری - ۹۲)

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

الگوی ۷

۲۶- کدام عدد کلیت حکم «هرچه باشد n، عدد طبیعی زوج، $۲^{n}+۱$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟ (سراسری انسانی-۷۷)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۷- کدام گزینه‌ی زیر مثال نقض دارد؟ (سراسری ریاضی- ۸۰)

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲ فرد است.
۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی الساقین است.
۴) توان سوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان دوم آن است.

۲۸- برای کدام گزینه مثال نقض وجود <u>ندارد</u>؟ (آزمون کانون - ۸۸)

۱) مجموع دو عدد گنگ عددی گنگ است.
۲) دو زاویه که اضلاع متناظرشان موازی است، با هم برابرند.
۳) مربع هر عدد مثبت، بزرگ‌تر از خود عدد است.
۴) در متوازی‌الاضلاع دو زاویه‌ی مجاور مکملند.

۲۹- کدام عبارت مثال نقض دارد؟ (سراسری انسانی- ۸۰)

۱) حاصل ضرب هر دو عدد فرد متوالی، عددی فرد است.
۲) حاصل تفاضل هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
۳) حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
۴) حاصل جمع هر عدد اول با یک عدد فرد، عددی فرد است.

۳۰- اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟ (سراسری انسانی- ۷۶)

۱) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۱۶}$ ۲) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۱۲}$ ۳) $\sqrt{۲۱۶}$ و $\sqrt{۱۸}$ ۴) $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۱۸}$

۳۱- کلیت حکم «حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است» با چه عدد گویایی، نقض می‌شود؟ (آزاد ریاضی- ۸۱)

۱) صفر ۲) اعشاری ۳) منفی ۴) اعشاری متناوب مرکب

*۳۲- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی- ۸۸)

۱) ۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۳۳– کدام یک از احکام زیر نادرست است؟ (آزمون کانون – ۸۱)

۱) اگر n عددی صحیح و n^{3} فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

۲) اگر n^{2} عددی صحیح باشد، آن‌گاه n نیز عددی صحیح است.

۳) اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه همواره $n^{2} \geq n$.

۴) اگر n عددی صحیح و n^{2} زوج باشد، آن‌گاه n نیز عددی زوج است.

۳۴– کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟ (آزمون کانون – ۹۰)

۱) حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) حاصل ضرب یک عدد گنگ در یک عدد گویا، عددی گنگ است.

۴) مجموع یک عدد گنگ با یک گویا، عددی گنگ است.

***۳۵– کدام یک از قضایای شرطی زیر نادرست می‌باشند؟** (آزمون کانون – ۹۰)

۱) اگر $x^{2}-3x+2=0$ آن‌گاه $x=1\ ,\ x=2$

۲) اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$

۳) اگر $x>0$ آن‌گاه $x+\frac{1}{x} \geq 2$

۴) اگر $x \in R$ آن‌گاه عبارت $x^{2}-x+3$ همواره مثبت است.

الگوی ۸

***۳۶– کدام قضیه به صورت قضیه‌ی دو شرطی بیان نمی‌شود؟** (سراسری ریاضی– ۷۸)

۱) در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع برهم منطبق هستند.

۲) در مثلث قائم الزاویه عمود منصف اضلاع، بر روی وتر، متقاطع هستند.

۳) در مثلث قائم الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.

۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه‌ی 90°، بزرگ‌ترین ضلع است.

۳۷– کدام یک قضیه‌ی دو شرطی است؟ $(x, y \in R)$ (سنجش – ۷۹)

۱) $\frac{x}{y} \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
۲) $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow xy > 0$
۳) $x^{2} < y^{2} \Rightarrow x < y$
۴) $x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

۳۸– گزاره‌ی «اگر $x>2$ باشد، آن‌گاه $x^{2}>4$ است» معادل کدام گزاره است؟ (سراسری تجربی– ۷۳)

۱) اگر $x^{2}<4$ آن‌گاه $x<2$

۲) اگر $x^{2} \geq 4$ آن‌گاه $x \geq 2$

۳) اگر $x^{2} \leq 4$ آن‌گاه $x \leq 2$

۴) اگر $x^{2}>4$ آن‌گاه $x>2$

الگوی ۹

۳۹– می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر مربع یک عدد صحیح مضرب ۵ باشد، خود آن عدد نیز حتماً مضرب ۵ است» کدام روش را برای اثبات به کار ببریم؟ (ورودی پیش ریاضی – ۷۴)

۱) استدلال تمثیلی
۲) روش استقرا
۳) برهان خلف
۴) مثال نقض

***۴۰– اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟** (سراسری ریاضی– ۸۶)

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

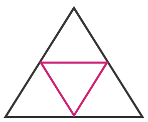
۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

اصل لانه کبوتری

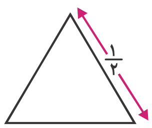
۱- اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر، n لانه‌ی کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌های کبوتر باشد $(m > n)$، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه‌ی کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.

مثال: از ۱۳ نفر حاضرین در یک میهمانی، ثابت می‌شود که حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند. زیرا، ۱۲ ماه را مطابق ۱۲ لانه‌ی کبوتر و ۱۳ میهمان را مطابق ۱۳ کبوتر فرض می‌کنیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، بر طبق اصل لانه کبوتر، حداقل یک لانه وجود دارد که دست کم دو کبوتر در آن قرار داشته باشند. یعنی حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند.

مثال: مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. ۵ نقطه را در داخل مثلث در نظر می‌گیریم، نشان دهید حداقل ۲ نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است.



مطابق شکل، هر ضلع مثلث را نصف کرده و نقاط حاصل را به هم وصل می‌کنیم.
ملاحظه کنید که ۴ مکان برای حضور ۵ نقطه وجود دارد. مطابق اصل لانه کبوتر حداقل یک مثلث کوچک وجود دارد که دست کم دو نقطه در آن قرار گیرند.



می‌دانیم که در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، حداکثر فاصله‌ی بین دو نقطه، زمانی است که در دو رأس آن قرار گیرند که در این صورت فاصله‌ی آن‌ها برابر طول ضلع مثلث کوچک یعنی $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.
بنابراین حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ است.

۲- از بین m کبوتر که بخواهند در n لانه قرار گیرند $(m > n)$ حداقل یک لانه وجود دارد که دست کم $\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱$ کبوتر در آن قرار گیرند.
([ ] علامت جزء صحیح است.)

مثال: در بین ۱۷ نفر، دست کم چند نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند؟
تعداد روزهای هفته، ۷ است. بنابراین داریم:
$$\left[\frac{۱۷-۱}{۷}\right]+۱=۲+۱=۳$$
حداقل ۳ نفر، در یک روز هفته متولد شده‌اند.

۳- حداقل تعداد کبوترها برای آن‌که در یک لانه از n لانه، حداقل m کبوتر باشند برابر است با: $n(m-۱)+۱$

۴- در بعضی از مسائل، لانه‌ها را به صورت ترکیبی می‌دهند، در این صورت باید تعداد لانه‌ها را طبق اصل ضرب در هم ضرب کرد تا تعداد موقعیت‌های ممکن به دست آید.

مثال: کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل سه نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، کدام است؟
۱۲ماه در سال و ۷ روز در هفته داریم. یعنی $۸۴=۷\times ۱۲$ موقعیت (لانه‌ی کبوتر) داریم. چون در صورت سؤال حداقل۳ نفر ذکر شده است، اگر ابتدا در هر موقعیت (لانه‌ی کبوتر) ۲ نفر قرار گیرند، یعنی $۱۶۸=۲\times ۸۴$ نفر، حال اگر یک نفر به‌آن‌ها اضافه کنیم، کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل سه نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، به دست آمده است. با توجه به نکته‌ی ۳ نیز می‌توان گفت حداقل افراد برابر است با:
$$۸۴(۳-۱)+۱=۸۴\times ۲+۱=۱۶۹$$

مثال: ۷۱ کبوتر، حداکثر در چند لانه کبوتر قرار بگیرند، تا حداقل در یک لانه بیش از ۳ کبوتر قرار داشته باشد؟
با توجه به صورت سؤال، حداقل یک لانه وجود دارد که دست کم ۴ کبوتر در آن قرار دارند یعنی مطابق نکته‌ی ۲ داریم:
$$\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱=۴\Rightarrow\left[\frac{۷۱-۱}{n}\right]=۳\Rightarrow ۳\le\frac{۷۰}{n}<۴\Rightarrow n\le\frac{۷۰}{۳}\Rightarrow \max(n)=\left[\frac{۷۰}{۳}\right]=۲۳$$
بنابراین، حداکثر تعداد لانه‌ها، ۲۳ می‌باشد.

الگوی ۱۰

۴۱- سیزده عدد طبیعی متمایز را بر عدد ۱۲ تقسیم کرده‌ایم، مطابق اصل لانه کبوتری کدام گزینه همواره صحیح است؟ (ورودی پیش ریاضی - ۷۵)

۱) باقی‌مانده‌ها همگی برابرند.
۲) حداقل ۳ عدد دارای یک باقی‌مانده هستند.
۳) حداقل یکی از اعداد مضرب ۱۲ است.
۴) حداقل ۲ عدد دارای یک باقی‌مانده هستند.

۴۲– در یک کلاس ۵۴ نفری، دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟ (سراسری ریاضی– ۸۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۳– مجموعه‌ی S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر ۱۲، حداقل چند عضو، باقی‌مانده یکسان دارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (سراسری ریاضی– ۹۰)

*۴۴– اگر S یک زیرمجموعه‌ی ۵۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم هر یک از اعضای S بر عدد ۱۶، تعداد عضوهای هم باقی‌مانده چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور– ۸۸)

۱) درست ۳ عضو ۲) دست کم ۳ عضو ۳) کم‌تر از ۴ عضو ۴) دست کم ۴ عضو

*۴۵– در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه‌اند. انتخاب شونده باید رأی بیش‌تر از سایرین داشته باشد، حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۶– در یک مدرسه‌ی ۲۰۰ نفری، حداقل چند نفر وجود دارند که ماه تولد آن‌ها، ماه خاصی باشد؟ (آزاد ریاضی – ۷۵)

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۵ ۴) صفر

۴۷– ۶۵ کبوتر حداکثر در چند لانه‌ی کبوتر قرار بگیرند، تا حداقل در یک لانه بیش از ۲ کبوتر قرار داشته باشد؟ (سراسری ریاضی– ۸۱)

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

۴۸– حداقل چند زوج مرتّب به صورت (a,b)، با مختص‌های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی، جمع مختص‌های اول و جمع مختص‌های دوم، اعداد زوج هستند؟ (سراسری ریاضی– ۹۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۹– هریک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم، تا به‌طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ داشته باشیم؟ (سراسری ریاضی– ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

الگوی ۱۱

۵۰– هر زیرمجموعه n عضوی $A=\{1,2,3,4,...,23\}$، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می‌باشد. حداقل n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳ (سراسری خارج از کشور– ۹۲)

۵۱– یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از اعداد طبیعی با حداقل چند عضو را در نظر بگیریم، تا حداقل ۲ عدد در این مجموعه وجود داشته باشند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۷، با هم برابر باشد؟ (مسأله امتحان پایان ترم استان – ۸۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

*۵۲– حداقل چند عدد از مجموعه $\{2,3,4,...,30\}$، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم، لااقل دو عدد آنها مقسوم علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲ (سراسری ریاضی – ۸۹)

*۵۳– کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، کدام است؟ (سراسری ریاضی– ۸۲)

۱) ۷۵ ۲) ۷۸ ۳) ۸۵ ۴) ۸۸

۵۴– حداقل چند دوتایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم، تا به‌طور قطع، لااقل در دو جفت انتخاب شده‌ی (a,b) و (c,d)، حاصل هر دو عدد $a+c$ و $b+d$ زوج باشند؟ (سراسری خارج از کشور– ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۵– در یک سمینار افراد مختلفی از سه کشور مختلف با ۴ تخصص مختلف در زمینه‌ی پزشکی شرکت کرده‌اند، حداقل چند نفر در این سمینار سخنرانی کنند تا مطمئن باشیم، حداقل ۳ مرد یا ۳ زن از یک کشور درمورد یک شاخه‌ی تخصصی صحبت کرده‌اند؟ (آزمون کانون – ۸۸)

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۷۳ ۴) ۷۲

۵۶– درون مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱، حداقل چند نقطه اختیار کنیم تا بتوان از طریق اصل لانه کبوتری اثبات کرد که حداقل ۲ نقطه از این نقاط، فاصله‌ی کم‌تر از $\frac{1}{3}$ دارند؟ (آزمون کانون – ۸۹)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

*۵۷– در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی خارج شده هم‌رنگ باشند؟ (سراسری خارج از کشور– ۹۰)

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

فصل دوم: آنالیز ترکیبی

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
قرمز: به این قسمت مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول، به آن مبحث مسلط نبودید و دانش خود را در حد رنگ قرمز ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

آنالیز ترکیبی

۱- اصول شمارش و جایگشت
آبی | سبز | قرمز

- الف) اصل ضرب
- ب) جایگشت n شیء بدون تکرار
- ج) جایگشت n شیء با تکرار

۲- ترتیب و ترکیب
آبی | سبز | قرمز

- الف) تبدیلات r تایی از n شیء متمایز
- ب) ترکیب
- ج) ضریب دوجمله‌ای
- د) دسته‌بندی مسائل ترکیب و تبدیل

۳- جلوه‌های دیگری از آنالیز ترکیبی
آبی | سبز | قرمز

- الف) عدم تطبیق
- ب) جایگشت دایره‌ای
- ج) تعداد مستطیل‌ها
- د) تعداد مربع‌ها در صفحه‌ی n×n
- هـ) تعداد مسیرها

تعداد سؤالات فصل
۶۵
تعداد سؤالات سراسری
۱۱
تعداد سؤالات سایر آزمون‌ها
۵۴

از فصل دوم (آنالیز ترکیبی) به‌طور متوسط در هر سال ۱ تست در کنکورهای ۵ سال اخیر طرح شده است.
در این فصل ۶۵ تست از آنالیز ترکیبی آورده‌ایم. یعنی به ازای هر تست کنکور، ۶۵ تست را تمرین خواهید کرد.

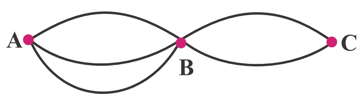
آنالیز ترکیبی: اصول شمارش و جایگشت

اصول شمارش و جایگشت

اصل ضرب و اصل جمع

اصل ضرب

فرض کنید نحوه‌ی انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد. مرحله‌ی اول به $n_۱$ طریق قابل انجام باشد، بـه هـر روشـی کـه مرحلـه‌ی اول انجام شود، مرحله‌ی دوم به $n_۲$ طریق قابل انجام باشد، و ... و به هر روشی که مراحل اول تا $k-۱$ انجام شوند، مرحله‌ی kام بـه n_k طریـق قابل انجام باشد. در این صورت کل کار به $n_۱n_۲...n_k$ طریق قابل انجام است.



مثال: فرض کنید بین دو شهر A و B سه جاده و بین شهرهای B و C نیز دو جاده وجود دارد. به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

حل: این کار به دو مرحله قابل تجزیه است. مرحله‌ی اول رفتن از A به B و مرحله‌ی دوم رفتن از B به C، که طبق اصل ضرب داریم:

$$۳\times ۲=۶$$

مسائل:

۱- چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف a، b، c، d، f می‌توان نوشت؟

حل: یک کلمه‌ی ۴ حرفی به صورت ④ ③ ② ① است که جایگاه اول به ۵ طریق، جایگاه دوم به ۵ طریق، جایگاه سوم به ۵ طریق و جایگاه چهارم نیز به ۵ طریق قابل پر شدن است، لذا تمام حالات برابر است با: $۵\times ۵\times ۵\times ۵=۵^۴$

۲- یک تاس و یک سکه را پرتاب کرده‌ایم. چند حالت مختلف ممکن است پدید آید؟

حل: سکه دارای ۲ حالت مختلف و تاس نیز دارای ۶ حالت مختلف است پس بنابر اصل ضرب $۲\times ۶=۱۲$ حالت ممکن است پدید آید.

۳- یک اتوبوس با ۲۵ مسافر در ۷ ایستگاه توقف می‌کند. مسافرین این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در این استگاه‌ها پیاده شوند؟

حل: هر مسافر به ۷ حالت مختلف مجاز است عمل کند، یعنی می‌تواند در هرکدام از ۷ ایستگاه پیاده شود، پس بنابر اصل ضرب داریم:

$$\underbrace{۷\times ۷\times ۷\times ...\times ۷}_{\text{۲۵ نفر}}=۷^{۲۵}$$

۴- چند عدد ۳ رقمی فرد با ارقام ۱ و ۳ و ۶ و ۰ و ۸ می‌توان ساخت؟

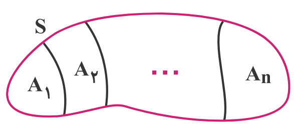
حل: ابتدا از انتخاب یکان شروع می‌کنیم، چون باید عدد فرد باشد یکی از اعداد ۱ یا ۳ را باید انتخاب کنیم، پس ۲ حالت مختلف وجـود دارد، صدگان نباید صفر باشد، لذا ۴ حالت برای پر کردن آن وجود دارد و دهگان نیز از بین ۵ رقم هرکدام می‌تواند باشد:

$$\underset{\text{صدگان}}{۴}\times \underset{\text{دهگان}}{۵}\times \underset{\text{یکان}}{۲}=۴۰$$

اصل جمع

فرض کنید مجموعه‌ی S اجتماع مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $A_۱$، $A_۲$، . . . و A_n باشد. در این صورت:

$$|S|=|A_۱|+|A_۲|+...+|A_n|$$



۵- از بین ۴ نفر ایرانی، ۶ نفر ایتالیایی و ۳ نفر آلمانی به چند طریق می‌توان دو نفر انتخاب کرد به‌طوری که هموطن نباشند؟

حل: برای ۲ نفر سه حالت مجزا ایجاد می‌شود:

۱) ایرانی، ایتالیایی: اگر یک نفر ایرانی و دیگری ایتالیایی باشد، تعداد حالات برابر است با: $۴\times ۶=۲۴$

۲) ایرانی، آلمانی: اگر یک نفر ایرانی و دیگری آلمانی باشد، تعداد حالات برابر است با: $۴\times ۳=۱۲$

۳) ایتالیایی، آلمانی: اگر یک نفر ایتالیایی و دیگری آلمانی باشد، تعداد حالات برابر است با: $۶\times ۳=۱۸$

که طبق اصل جمع کل حالات برابر می‌شود با: $۲۴+۱۸+۱۲=۵۴$

اصل متمم

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع S باشد. در این صورت تعداد اعضایی از S که در A قرار ندارند (تعداد اعضای متمم A) برابر $|S|-|A|$ است.

S

۶- در چند عدد سه رقمی، رقم ۵ وجود دارد؟

حل: در اینجا بهتر است ابتدا اعداد سه رقمی که رقم ۵ ندارند را محاسبه نموده و از کل اعداد ۳ رقمی کم کنیم،

$|S|$ کل اعداد ۳ رقمی $= ۹\times۱۰\times۱۰ = ۹۰۰$

$|A|$ کل اعداد ۳ رقمی که رقم ۵ ندارند $= ۸\times۹\times۹ = ۶۴۸$

اعدادی که رقم ۵ دارند $= |S|-|A| = ۲۵۲$

فاکتوریل

حاصل‌ضرب اعداد طبیعی ۱ تا n را n فاکتوریل گویند و با $n!$ نمایش می‌دهند.

تذکر: بنابر قرارداد، $۰!=۱$ است.

الگوی ۱۲

۵۸- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۴ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (سراسری ریاضی - ۶۳)

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

*۵۹- چند عدد پنج رقمی یافت می‌شود که رقم اول آن ۲ و رقم آخر آن ۴ باشد و هیچ‌یک از رقم‌های آن تکراری نباشد؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۰۴ ۳) ۳۳۶ ۴) ۲۱۶

۶۰- تعداد اعداد طبیعی دو رقمی که مضرب ۲ یا ۵ باشند، برابر است با: (سراسری ریاضی - ۵۸)

۱) ۳۶ ۲) ۶۳ ۳) ۴۵ ۴) ۵۴

۶۱- با ارقام ۵ , ۳ , ۲ , ۰ چند عدد ۴ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (سراسری ریاضی - ۶۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

*۶۲- یک قفل رمزی دارای یک رمز ۳ رقمی فرد با ارقام ۹ , ... , ۲ , ۱ است. اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز دو دقیقه طول بکشد، حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟ (سراسری ریاضی - ۷۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۳/۵

۶۳- شماره‌گذاری اتومبیل‌ها در یک شهر با حروف الفبای فارسی و اعداد دو رقمی بدون صفر است، اگر شروع شماره‌گذاری از الف-۱۱ و به طور صعودی باشد، شماره‌ی هزارمین اتومبیلی که شماره‌گذاری می‌شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۲)

۱) د - ۴۱ ۲) ر - ۳۹ ۳) ز - ۴۱ ۴) ز - ۳۹

۶۴- یک سیب، یک گلابی و یک پرتقال را به چند طریق می‌توان بین ۱۰ نفر توزیع کرد؟ (آزمون کانون - ۹۰)

۱) $۳^{۱۰}$ ۲) $۱۰^{۳}$ ۳) $P(۱۰,۳)$ ۴) $C(۱۰,۳)$

۶۵- با ارقام ۱، ۳، ۴، ۶ و ۷ چند عدد ۳ رقمی کم‌تر از ۶۰۰ می‌توان ساخت به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد؟ (آزمون کانون - ۹۱)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۱۲۰