مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی دهم

ویژهٔ استعدادهای درخشان

مؤلف: حجت انصاری، محمدصالح ارشاد

شناسنامه کتاب

سرشناسه	:	ارشاد، سیدمحمدصالح، ۱۳۶۵
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضی دهم، ویژه استعدادهای درخشان
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۵
مشخصات ظاهری	:	۲۹×۲۲ س م. ۱: مصور (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ص ۲۱۶
فروست	:	مجموعه کتاب علامه‌حلی
شابک	:	978-600-7755-57-0
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپای مختصر
یادداشت	:	(فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی *http://opac.nlai.ir* : قابل دسترسی است)
شناسه افزوده	:	انصاری، حجت، ۱۳۵۹
شماره کتابشناسی ملی	:	۴۴۰۸۵۸۵

علامه حلی

عنوان کتاب	ریاضی دهم، ویژه استعدادهای درخشان
ناشر	انتشارات حلی
مؤلف	حجت انصاری، محمدصالح ارشاد
مسئول هماهنگی	شیوا دلوچی
طراح جلد	سعید شمس
تصویرساز	محمدحسین صفدریان
صفحه‌آرا	راضیه سادات فرهانیان
رسام	عاطفه قلیچ‌خانی
حروف‌نگار	آزاده مهری
سال چاپ	۱۳۹۵
نوبت چاپ	اول
شمارگان	۶۰۰۰ جلد
قیمت	تومان
شماره شابک	۹۷۸-۶۰۰-۷۷۵۵-۵۷-۰

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۹-۶۶۷۴۴۳۸۴

جالب است براتی

کلیه حقوق این اثر برای ناشر محفوظ است.

هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق برداشت تمام یا قسمتی از اثر را به صورت چاپ، فتوکپی و جزوه ندارد.

متخلفان به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از ناشران تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرد.

پیشگفتار

به نام خدا

چند سال پیش، تعدادی از معلمان با دغدغه «آموزش استعدادهای درخشان» ، دورهم جمع شدند و موسسه علامه حلی را تأسیس کردند. این معلمها ـ که خودشان از دانش‌آموختگان مدارس استعدادهای درخشان شهر تهران می‌باشند ـ سال‌ها در مدارس سمپاد (سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان)، به دنبال پیاده‌سازی روش‌های جدید و مؤثر آموزش بوده‌اند و درنهایت تصمیم گرفتند تا نتیجه این تجربیات را در موسسه علامه‌حلی در اختیار دیگر فعالان در عرصه آموزش بگذارند.

مجموعه کتاب‌های انتشارات علامه‌حلی، یکی از محصولات این تلاش جمعی است. در این کتاب‌ها تلاش شده است تا علاوه‌بر تأمین محتوای مناسب برای دانش‌آموزان برتر کشور، روش‌های جدیدتر و مؤثرتر آموزشی هم در انتقال این محتوا به کار گرفته شده و پیاده‌سازی شود. در پس این کتاب‌ها، ساعت‌ها کار فکری برای انتخاب ساختار و شیوه تدوین صرف شده است. فعال کردن دانش‌آموز در روند آموزش و ارجاع او به انجام مشاهدات، فعالیت‌ها و آزمایش‌های مناسب برای انتقال مفاهیم آموزشی و همچنین ترغیب دانش‌آموز برای مراجعه به منابع گسترده‌تر چون سایت‌های علمی اینترنتی و نرم‌افزارهای آموزشی، از ویژگی‌های این سیستم آموزشی است. علاوه‌بر این برای کمک به فرایند تدریس معلمین عزیز، محصولات جانبی چون متن راهنمای تدریس کتاب، محتوای الکترونیک و ... در کنار هر کتاب تولید شده است.

مجموعه کتاب‌های علامه‌حلی، با همکاری جمع زیادی از مؤلفین و معلمان باتجربه مدارس سمپاد ـ که به‌دقت انتخاب شده‌اند ـ تألیف و ویرایش گردیده است؛ اما آرزوی ما در این مؤسسه این است که از حضور تمامی معلمان دلسوز و باتجربه مدارس سمپاد و دیگر مراکز آموزشی برتر کشور عزیزمان، در تألیف کتاب‌ها و دیگر محصولات آموزشی، بهره ببریم؛ بنابراین از شما دبیران عزیز خواهشمندیم تجربه‌های خود را در زمینه استفاده از این کتاب و آموزش آن در کلاس، برای ما به آدرس الکترونیک: *book@mhelli.ir* ارسال فرمایید تا ما در چاپ‌های بعدی کتاب، از تجربیات، نظرات و حتی تصاویر ارسالی شما در انجام آزمایش‌ها، فعالیت‌ها، بازدیدها و ... در کتاب ـ و البته با ذکر نام ارسال‌کننده ـ استفاده کنیم. البته دانش‌آموزان خوب و پرتلاش هم می‌توانند در این کار همکاری کنند و با معلمین خود در اجرای این طرح همراه شوند.

عابدی جعفری

مدیر انتشارات حلی

قبل از شروع به مطالعهٔ کتاب این قسمت را بخوانید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هرکدام وجود دارد که هریک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:

درخت دانش: در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

اهداف رفتاری: بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

پاسخگو باش: در این قسمت باید پاسخگوی مطالبی که تا اینجا خوانده‌اید باشید. پاسخگوی سؤالاتی که انتظار می‌رود بعد از خواندن درس تا آن قسمت، بتوانید باکمی فکرکردن به آن‌ها جواب دهید.

فسفر بسوزان: شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سوالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیدها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

کنکاش‌کن: همه یادگیری در زمان کلاس اتفاق نمی‌افتد. گاهی لازم است راجع‌به یک موضوع خارج از فضای کلاس تحقیق کنیم و نتیجه آن را در کلاس ارائه دهیم. کتابخانه، خانواده، دوستان، اینترنت و ... منابعی هستند که برای این کار میتوانیم استفاده کنیم.

دست‌به‌کارشو: در موضوعات علمی مخصوصاً علوم تجربی، یادگیری باکیفیت بدون انجام آزمایش، مشاهده و ساخت وسایل علمی امکان‌پذیر نیست. در قسمت دست‌به‌کارشو نحوه انجام آزمایش، دستورالعمل ساخت وسیله و یا نوع مشاهده توضیح داده می‌شود.

تاریخ علم: در این بخش شخصیتی در متن درس معرفی می‌شود و درکنار صفحه، عکس و مختصری از زندگی وی می‌بینید. حق مسلم ما است که حداقل قیافه این دانشمندان دوست داشتنی را ببینیم، شاید در کتاب‌های آینده عکس شما هم اینجا قرار بگیرد!

جالب است بدانی: برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به‌راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.

نوبت بازی: خیلی وقت‌ها موضوعات درسی اساس یک بازی هستند و یا می‌شود برای یادگرفتن آن‌ها از یک بازی استفاده کرد. در نوبت بازی درواقع هم درس می‌خوانیم و هم بازی می‌کنیم

جمع‌بندی کن: در انتهای فصل برای یک جمع‌بندی سریع می‌توان از این قسمت کمک گرفت. در این قسمت با هم فصل را جمع می‌کنیم و نکات و مطالب مهم را برای خود تکمیل می‌کنیم.

تصحیح کن: یک بار هم خودمان را جای معلم‌ها بگذاریم و برگه تصحیح کنیم. این قسمت یک برگه امتحانی با جواب است که برخی از جواب‌ها دارای غلط و اشتباه است. برگه را تصحیح کنید و نمره دهید.

لغت‌نامه: ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضوع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات مهم با معادل انگلیسی آن آورده شده است.

تمرین‌ها: در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید. سوالات سخت با ستاره مشخص شده، اگر این سوالات را نتوانستید حل کنید خیلی به خودتان آسیب نزنید!

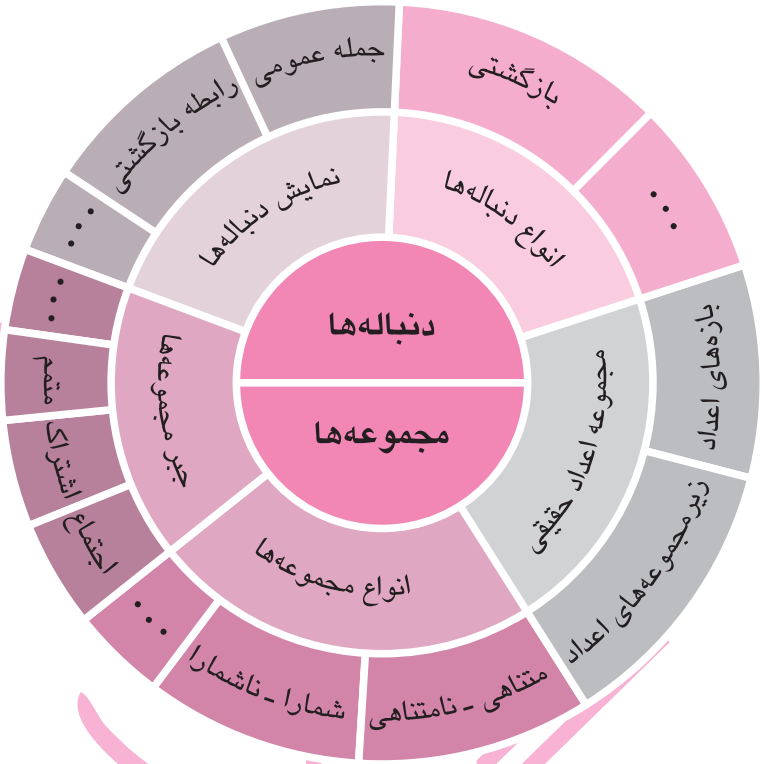
پرسش‌های چهارگزینه‌ای: سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. سؤالات چهارگزینه‌ای با این پیش فرض طراحی شده است که اگر نکات مربوط به سؤال را بلد باشید حداکثر در ۲ دقیقه بتوانید به آن جواب دهید.

پاسخ‌ها: پاسخ سوالات چهارگزینه‌ای همه فصل‌ها به‌صورت معرفی گزینه درست طراحی شده. جواب‌های نهایی سؤال‌ها هم برای چک کردن درستی راه حل، ارائه شده است. پاسخ تشریحی تمرین‌های زوج به‌طور کامل در وب‌سایت کتاب به‌صورت رایگان قابل مشاهده است.

فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

بشر تا به حال دنباله‌های زیادی را مورد بررسی قرار داده است. دنباله فیبوناتچی از دنباله‌های شگفت‌انگیز در طبیعت است. هرجا که گذر می‌کنیم رد پایی از آن یافت می‌شود. آیا می‌دانید تناسب اندام اغلب جانداران منطبق بر ویژگی‌های این دنباله است؟



اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی:

- خواص مجموعه‌ها ازجمله متناهی و نامتناهی بودن آن‌ها را بشناسی.
- نمایش دیگری از بعضی از مجموعه‌ها به‌صورت بازه اعداد حقیقی ارائه کنی .
- مجموعه‌های متمم را تشریح نمایی.
- تعاریف مقدماتی دنباله‌ها و دو دنباله معروف حسابی و هندسی را توضیح دهی

◄ مجموعه اعداد حقیقی

سال گذشته با مجموع اعداد طبیعی آشنا شدیم:

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$$

هر عضو مجموعه اعداد طبیعی از حاصل جمع تعدادی عدد ۱ حاصل می‌شود.

از اجتماع مجموعه اعداد طبیعی و عدد صفر مجموعه اعداد حسابی ایجاد می‌شود:

$$I = \mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$$

از اجتماع مجموعه اعداد حسابی و قرینه‌های آن‌ها اعداد صحیح ایجاد می‌شوند:

$$\mathbb{Z} = \{۰, ۱, -۱, ۲, -۲, ...\}$$

از تقسیم هر عدد صحیح بر عدد صحیح غیر صفر یک عدد گویا داریم:

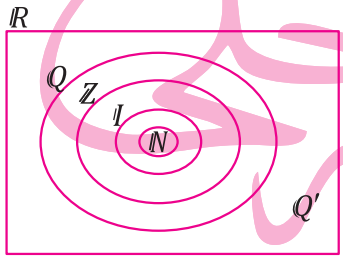
$$Q = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in z \ , \ b \neq ۰\right\}$$

و درنهایت هر عدد حقیقی غیر گویایی یک عدد گنگ است:

$$Q' = \mathbb{R} - Q$$

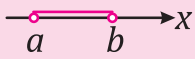
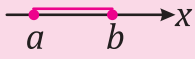
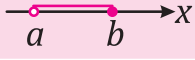
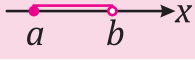
مثال ۱. به کمک نمودار، مجموعه اعداد $\mathbb{N}$, I , $\mathbb{Z}$, Q, Q' را نمایش دهید.

پاسخ:



◄ بازه اعداد حقیقی

هر نقطه بر روی محور اعداد حقیقی، متناظر با یک عدد است و برعکس. برای هر عدد حقیقی یک نقطه روی محور اعداد حقیقی نظیر می‌شود. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۱ و ۲ را می‌توانیم با نمادهای ریاضی به‌صورت $A = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ ۱ < x < ۲\}$ نمایش دهیم. این مجموعه شامل هر عدد گویا و گنگی بین ۱ و ۲ است. مثل ۱/۵، $\frac{۷}{۵}$، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و بی‌نهایت عدد دیگر. این مجموعه را بازه یا فاصله می‌نامیم، آن را با نماد (۲ ، ۱) نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «بازه باز ۱ تا ۲». منظور از کلمهٔ باز این است که خود ۱ و ۲ عضو نیستند. با این مقدمه تعاریف زیر را ارائه می‌کنیم.

نام‌گذاری بازه	نمایش هندسی	نمایش با نماد بازه	نمایش به‌صورت مجموعه
بازهٔ باز		(a,b)	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
بازه‌ی بسته		$[a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$
بازهٔ نیم‌باز		$(a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$
بازهٔ نیم‌باز		$[a,b)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$
بازهٔ باز		$(a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$
بازهٔ نیم‌باز		$[a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x\}$
بازهٔ باز		$(-\infty,a)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$
بازهٔ نیم‌باز		$(-\infty,a]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \le b\}$
بازهٔ باز		$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

۱ ـ هر جا از نماد پرانتز استفاده شود، یعنی آن عدد عضو بازه نیست.

۲ ـ هر جا از نماد کروشه استفاده شود، یعنی آن عدد عضو بازه است.

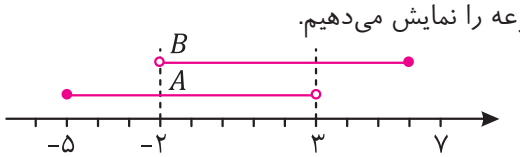
۳ ـ ازآنجاکه $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) یا $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) عدد نیستند و تنها نمادهایی برای نمایش مفهوم بی‌نهایت‌اند؛ برای آن‌ها از پرانتز استفاده می‌کنیم.

۴ ـ بازهٔ $(-\infty\ ,\ +\infty)$ همان کل مجموعه اعداد حقیقی است که آن را با R نمایش می‌دهیم.

یک بازه، نمادی برای نمایش یک مجموعه است. درنتیجه بازه‌ها مجموعه‌اند. پس اعمال مجموعه‌ها روی آن‌ها قابل انجام است. یعنی می‌توان دو بازه را اجتماع یا اشتراک گرفت و یا بازه‌ای را از بازه‌ای دیگر کم کرد. برای این کار بهتر است از محور اعداد حقیقی کمک بگیرید.

مثال ۲. اگر $A=[-۵\ ,\ ۳)$ و $B=(-۲\ ,\ ۷]$ باشد، مجموعه‌های $A\cap B$ ، $A\cup B$ و $A-B$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا بر روی محور اعداد حقیقی این دو مجموعه را نمایش می‌دهیم.



اشتراک این دو بازه، مجموعه‌ای است که اعضای آن هم در A و هم در B هستند.

$$A\cap B=(-۲\ ,\ ۳)$$

اجتماع این دو بازه، مجموعه‌ای است که اعضای آن حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B وجود دارند.

$$A\cup B=[-۵\ ,\ ۷]$$

اگر از بازهٔ مجموعهٔ A آن اعدادی که در اشتراک با مجموعهٔ B هستند حذف کنیم $A-B$ به دست می‌آید.

$$A-B=[-۵\ ,\ -۲]$$

◄ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ متناهی: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را بتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، آن مجموعه را مجموعهٔ متناهی می‌گوییم.

مجموعه نامتناهی: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، آن مجموعه را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال ۳. متناهی و نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۵

ب) مجموعهٔ مورچه‌های روی کره زمین

ج) بازهٔ $[۱, ۵]$

پاسخ: الف) نامتناهی است. زیرا هر عدد صحیح کمتر از ۵ یک عدد صحیح کوچک‌تر از خود دارد. مثلاً قبل از ۰، ۱- است و قبل از ۱-، ۲- و همین روند ادامه دارد. درنتیجه نمی‌توان گفت مثلاً این مجموعه ۱۰۰۰ عضوی است!

ب) متناهی است. درست است که تعداد مورچه‌ها خیلی زیاد هستند و ما نمی‌توانیم همه آن‌ها را پیدا کنیم و بشماریم! اما به‌هرحال تعداد مشخصی مورچه وجود دارد. مثلاً $۱۰^{۱۰}$ مورچه؛ اما ما نمی‌دانیم دقیقاً چند مورچه روی کره زمین است.

ج) نامتناهی است. ازآنجاکه بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویا و بین هر دو عدد گنگ و هر عدد گویا و گنگ بی‌نهایت عدد گویا و گنگ است؛ تعداد اعضای هر بازه‌ای از اعداد حقیقی نامتناهی است.

جالب است بدانی

از نتایج مهم ریاضی در قرن نوزدهم و بیستم و از موفقیت‌های جالب‌توجه نظریه مجموعه‌ها این بوده است که ریاضیدانان این دوره برای اولین بار توانستند به‌طور دقیق در مورد مفهوم نامتناهی صحبت کنند. این در حالی است که بسیاری از ریاضیدانان این حوزه از ریاضی، را نامفهوم می‌دانستند و آن را مورد انتقادات جدی قرار می‌دادند.

به‌عنوان مثالی از کارهای انجام شده در مورد نامتناهی‌ها به مقایسه اندازه چهار مجموعه نامتناهی (اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی) می‌پردازیم.

کانتور نشان داد که اندازه سه مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا برابر است. این حرف شاید کمی عجیب به نظر برسد. چگونه اندازه مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد طبیعی برابر است، درحالی‌که مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه مطلق مجموعه اعداد صحیح است (یعنی عضوی در اعداد صحیح هست که در اعداد طبیعی نیست و نه بالعکس)؟ اما کانتور مدعی است که به‌سادگی نمی‌توان در مورد نامتناهی‌ها قضاوت کرد. در مورد استدلال و روش کانتور در فصل پنجم بیشتر توضیح خواهیم داد.

اما سؤال بسیار مهمی که در دوره کانتور مطرح شد این بود که حالا که اندازه مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا برابر است، آیا مجموعه‌ای بزرگ‌تر از این مجموعه‌ها وجود دارد؟ کانتور نشان داد که اندازه مجموعه اعداد حقیقی از مجموعه اعداد طبیعی بزرگ‌تر است. اینکه آیا مجموعه‌ای با اندازه‌ای مابین اعداد حقیقی و اعداد طبیعی وجود دارد یا خیر از مسائل باز و جذاب ریاضی معاصر است.

شاید بین دو واژهٔ ناشمارا و نامتناهی همیشه دچار تردید شده‌اید. خوب است بدانید که مجموعه‌های شمارا و ناشمارا با مجموعه‌های متناهی و نامتناهی دارای تفاوت‌اند.

مجموعه‌های شمارا: اگر به ازای هر عضو از مجموعهٔ اعداد طبیعی دقیقاً ۱ عضو از مجموعه‌ای موجود بوده که بین آن‌ها تناظر وجود داشته باشد، آن مجموعه را شمارا گوییم. درواقع اگر بتوان به کمک اعداد طبیعی عضوهای یک مجموعه را شماره‌گذاری کرد آن مجموعه شمارا بوده و در غیر این صورت ناشمارا است.

جالب است بدانی

کانتور در سال ۱۸۴۵ در سن‌پترزبورگ در به دنیا آمد. وی در ۱۸۶۰ با نمره بسیار عالی از دبیرستان فارغ‌التحصیل شد و آموزگارانش به مهارت‌های استثنایی وی در ریاضیات، به‌ویژه در مثلثات، اشاره داشتند. کانتور در ۱۸۶۲ وارد دانشگاه زوریخ شد سپس در دانشگاه برلین به مطالعات خود ادامه داد. در سال ۱۸۶۷ کانتور رساله دکتری خود را، که درباره نظریه اعداد بود، در دانشگاه برلین به پایان رساند. پس از یک دوره کوتاه تدریس در مدرسه‌ای دخترانه در برلین، شغلی در دانشگاه هاله پذیرفت و تمام دوره کاری خود را در همین دانشگاه گذراند.

فسفر بسوزان

نشان دهید مجموعه اعداد صحیح شمارا هستند.

◄ عملیات مجموعه‌ها

یادآوری: در سال گذشته با عملیات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه آشنا شده‌ایم.
در زیر این اعمال را یادآوری می‌کنیم.
هر عملگر مجموعه، یک مجموعهٔ جدید ایجاد می‌کند که به‌صورت زیر قابل تعریف‌اند:

اجتماع $(A\cup B)$: مجموعه‌ای است که هر عضو آن در حداقل یکی از مجموعه‌های A یا B است.

اشتراک $(A\cap B)$: مجموعه است که هر عضو آن هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است.

تفاضل $A-B$: مجموعهٔ همه عضوهایی از A است که در B عضویت ندارد.

مجموعهٔ جهانی (مادر)

مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های موردبحث، زیرمجموعهٔ آن هستند مجموعه جهانی یا مادر نامیده و معمولاً با نماد M و U نمایش داده می‌شود.

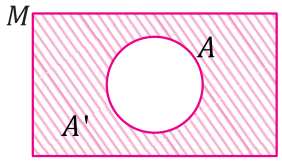
$$A'=\{x\in M\,|\,x\notin A\}$$

مثلاً وقتی در مورد هر زیرمجموعه اعداد حقیقی صحبت می‌کنیم مجموعه مرجع ما معمولاً اعداد حقیقی‌اند.

متمم یک مجموعه

مجموعه‌ای که شامل عضوهای مجموعه مرجع به‌غیراز مجموعه A باشد را متمم مجموعه A گوییم و با A' نمایش می‌دهیم:

$$A'=\{x\in M\,|\,x\notin A\}$$



$$A'=M-A$$

مثال ۴. اگر مجموعه اعداد طبیعی ۱ رقمی مجموعه مرجع باشد و آن را M بنامیم و $A=\{x\in M\,|\,x=2k\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$، $B=\{2\,,3\,,5\,,7\}$ و $C=\{x\in M\,|\,x=3k,k\in\mathbb{Z}\}$ مجموعه‌های زیر را به کمک اعضا نمایش دهید.

الف) A' ب) B' ج) C' د) $A\cap C'$

پاسخ:

الف) $A=\{۲,۴,۶,۸\}\rightarrow A'=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

ب) $B=\{۲,۳,۵,۷\}\rightarrow B'=\{۱,۴,۶,۸,۹\}$

ج) $C=\{۳,۶,۹\}\rightarrow C'=\{۱,۲\ ۴,۵,۷,۸\}$

د) $A\cap C'=\{۲,۴,۸\}$

مثال ۵. هریک از مجموعه‌های زیر مساوی چه مجموعه‌ای هستند؟

الف) $(A')'$ ب) M' ج) ϕ'

پاسخ:

الف) $(A')'=A$ ب) $M'=\phi$ ج) $\phi'=M$

کل ریاضی در قالب مجموعه‌ها

یکی از تحولات اساسی ریاضیات در دوره معاصر با ارائه نظریه مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور در اواخر قرن نوزدهم رخ داد. مفهوم مجموعه و احکام آن نقش بسیار بنیادی در ریاضیات دارد، به‌نحوی‌که نظریه مجموعه‌ها پایه و اساس ریاضیات معاصر محسوب می‌شود.

در ابتدای قرن بیستم تلاش برای فرو کاستن کل ریاضیات به نظریه مجموعه‌ها آغاز شد. منظور از فرو کاستن در اینجا این است که بتوان کلیه احکام ریاضی در شاخه‌های مختلف مثل هندسه، جبر و آنالیز را از اصول نظریه مجموعه‌ها استخراج کرد. برای درک بهتر این موضوع یکی از شیوه‌های فرو کاستن اعداد طبیعی به مجموعه‌ها در زیر نمایش داده شده است:

$۰\triangleq\varnothing$

$۱\triangleq\{\varnothing\}$

$۲\triangleq\{\{\varnothing\},\varnothing\}$

$۳\triangleq\{\{\{\varnothing\},\varnothing\},\{\varnothing\},\varnothing\}$

و به همین ترتیب سایر اعداد بر اساس مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. با اندکی دقت در تعریف اعداد داده شده می‌توان الگویی برای تعریف "جمع با ۱" پیدا کرد:

$$n+۱\triangleq n\cup\{n\}$$

که در آن n یک عدد طبیعی است. به‌این‌ترتیب اعداد چیزی نیستند به‌جز مجموعه‌هایی که بر اساس تعریف جمع ساخته می‌شوند.

ارنست زرملو، ریاضیدان آلمانی در قرن بیستم، به‌طور موفقیت‌آمیز نظریه مجموعه‌ها را اصل موضوعی کرد و درنهایت، جوزپه پئانو، ریاضیدان ایتالیایی، کل جبر و آنالیز را با تکیه به چند اصل موضوع متکی بر نظریه مجموعه‌ها بازسازی کرد. از نکات مهم این اصول موضوعه این است که این اصول هیچ تناقضی به بار نمی‌آورند و می‌توان نشان داد که اصل موضوع‌ها باهم سازگاری دارند. به‌این‌ترتیب این ادعا که همچنان موردتوجه ریاضیدانان است مطرح شد که تنها چیزی که از ریاضیات لازم داریم نظریه مجموعه‌هاست و سایر شاخه‌ها ریاضی بر آن تکیه دارند.

◄ جبر مجموعه‌ها (محتوای تکمیلی)

فعالیت: با رسم نمودارهای وِن مناسب درستی روابط زیر بین مجموعه‌ها را نشان دهید و آن‌ها را به خاطر بسپارید.

۱) $\begin{cases}(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\end{cases}$ (خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها)

۲) $\begin{cases}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{cases}$ (خاصیت توزیع‌پذیری)

۳) $\begin{cases}A\cap(A\cup B)=A\\A\cup(A\cap B)=A\end{cases}$

۴) $A-B=A\cap B'$

تذکر: رابطه ۴ نشان می‌دهد هر تفاضلی را می‌توان به اشتراک و هر اشتراکی را می‌توان به تفاضل تبدیل کرد.

به عنوان مثال:

$$\begin{cases}A-B'=A\cap(B')'=A\cap B\\A'-B=A'\cap B'\end{cases}$$

تذکر: رابطه ۴ نشان می‌دهد هرگاه بخواهیم اشتراک دو مجموعه را حساب کنیم می‌توانیم هریک از مجموعه‌ها را از متمم مجموعهٔ دیگر کم کنیم:

$$\begin{cases}A\cap B=A-B'\\A\cap B=B-A'\end{cases}$$

۵) $\begin{cases}(A\cap B)'=A'\cup B'\\(A\cup B)'=A'\cap B'\end{cases}$

مثال ۶. به کمک جبر مجموعه‌ها، تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=B-A$

ب) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=B$

ج) $[A'\cap(A'\cup B)]\cup A=M$

پاسخ:

الف) $A-B=A\cap B'\Rightarrow(A-B)'=(A\cap B')'\Rightarrow A'\cup(B')'=A'\cup B$

$$\Rightarrow(A'\cup B)\cap(A\cup B)=B\cup(\underbrace{A'\cap A}_{\phi})=B\cup\phi=B$$

$$\Rightarrow(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=B\cap A'=B-(A')'=B-A$$

ب) $\begin{cases}A\cap(A'\cup B)=(\underbrace{A\cap A'}_{\phi})\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B\\B\cap(A'\cup B')=(B\cap A')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\phi})=(B\cap A')\cup\phi=B\cap A'\end{cases}$

$$\Rightarrow(A\cap B)\cup(B\cap A')=B\cap(\underbrace{A\cup A'}_{M})=B\cap M=B$$

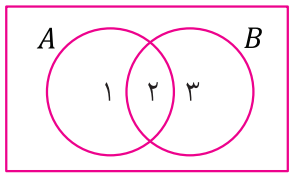
ج) $A'\cap(A'\cup B')=A'\Rightarrow[A'\cap(A'\cup B)]\cup A=A'\cup A=M$

◄ شمارش اعضای مجموعه‌ها

تعداد اعضای مجموعه A را با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

۱) شمارش اعضای اجتماع دو مجموعه

برای شمارش اعضای اجتماع دو مجموعه کافی است تعداد عضوهای دو مجموعه را جمع کنیم و سپس تعداد اعضای مشترک دو مجموعه را کم کنیم؛ زیرا هر عضو مشترک دو بار شمارش شده است:



$$n(A\cup B)=\underbrace{n(A)}_{۱,۲}+\underbrace{n(B)}_{۲,۳}-\underbrace{n(A\cap B)}_{۲}=۱,۲,۳$$

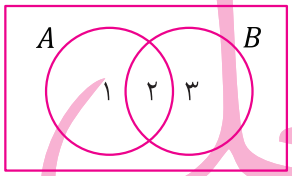
برای ۳ مجموعه A و B و C داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

به کمک نمودار وِن درستی رابطه بالا را نشان دهید.

۲) شمارش اعضای تفاضل دو مجموعه

برای شمارش تعداد عضوهای مجموعهٔ $A-B$ کافی است تعداد عضوهای مجموعه A را منهای تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ کنیم:



$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$۱,۲\ -\ ۲\ \rightarrow\ ۱$$

مثال ۷. اگر A مجموعه‌ای ۱۰ عضوی و B مجموعه‌ای ۱۲ عضوی باشد و اجتماع آن‌ها ۱۷ عضو داشته باشد، تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را حساب کنید.

الف) $A-B$ ب) $A'\cap B$

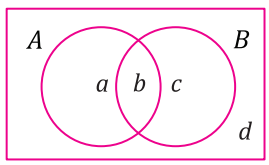
پاسخ:

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۱۷=۱۰+۱۲-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۵$

$\Rightarrow n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۰-۵=۵$

ب) برای محاسبه تعداد اعضای این مجموعه از نمودار وِن کمک می‌گیریم:



می‌توان تعداد اعضای مناطق a، b، c و d را به دست آورد.

می‌دانیم $n(A\cap B)=۵$ است. درنتیجه منطقه b، ۵ عضوی است.

از طرفی چون B دارای ۱۲ عضو است درنتیجه منطقه c، ۷ عضوی است. A' شامل مناطق c و d است که اشتراک آن با مجموعه B منطقه C است. درنتیجه مجموعه $A'\cap B$ دارای ۷ عضو است.

تذکر: در قسمت قبل نشان دادیم، $A'\cap B=B\cap A'=B-A$ است.

درنتیجه:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱۲-۵=۷$$

مثال ۸. یک مدرسه ۱۱۷ دانش‌آموز دارد. از این ۱۱۷ نفر، ۵۵ نفر علاقه‌مند به فوتبال، ۴۶ نفر علاقه‌مند به والیبال و ۴۰ نفر هم به بسکتبال علاقه‌مند هستند. ۱۱ نفر هم به فوتبال و هم به والیبال، ۱۰ نفر هم به فوتبال و هم به بسکتبال و ۱۳ نفر هم به والیبال و هم به بسکتبال علاقه دارند. اگر بدانیم ۴ نفر به، هیچ ورزشی علاقه‌ای ندارند:

الف) چند نفر به هر سه ورزش علاقه‌مندند؟

ب) چند نفر فقط به فوتبال علاقه‌مندند؟

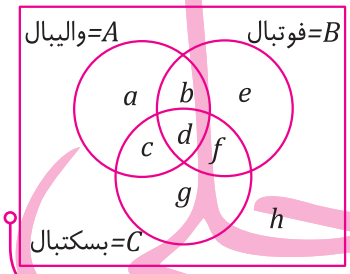
ج) چند نفر حداقل به ۲ ورزش علاقه‌مندند؟

پاسخ: الف) به کمک رابطهٔ زیر می‌توان تعداد اعضای منطقه d که همان کسانی هستند که به هر سه ورزش علاقه‌مند هستند را به دست آورد:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$۱۱۷-۴=۵۵+۴۶+۴۰-۱۱-۱۰-۱۳+n(A\cap B\cap C)\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۶$$

ب) با توجه به نمودار ون زیر، تعداد اعضایی که عضو مناطق a، e، g هستند فقط به یک ورزش علاقه‌مند می‌باشند. اشتراک مجموعه A و B دو منطقه b و d بوده که دارای n عضو است. ازآنجاکه منطقه d دارای ۶ عضو است پس منطقه b، ۵ عضوی می‌باشد. اشتراک مجموعه‌های A و C دو منطقهٔ d و c بوده که دارای ۱۰ عضو است. ازآنجاکه منطقه d، ۶ عضوی است پس منطقه c، ۴ عضوی می‌باشد. اشتراک مجموعه‌های B و C دو منطقهٔ d و f است از آن‌جا که منطقه d، ۶ عضوی است. منطقه f، ۷ عضوی است. بنابراین:



$$n(A)=n(a)+n(b)+n(c)+n(d)$$

$$\downarrow$$

$$۵۵=n(a)+۵+۴+۶\Rightarrow n(a)=\quad ۴۰$$

ج) کافی است مجموع تعداد اعضای b، c، d، f را جمع کنیم:

$$n(b)+n(c)+n(d)+n(f)=۵+۴+۶+۷=۲۲$$

◄ دنباله‌ها

تعریف: به هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد گوییم. هر عددی که در یک دنباله قرار گرفته باشد، یک جملهٔ آن دنباله نام دارد. مثلاً اعداد روبه‌رو یک دنباله را تشکیل می‌دهند: ۱، ۳، ۵، ۷

در دنبالهٔ فوق اعداد ۱، ۳، ۵ و ۷ به ترتیب جملات اول، دوم، سوم و چهارم دنباله نامیده می‌شوند.

مفهوم دنباله به‌عنوان یک ماشین: یک دنباله - اعداد درواقع دستگاهی است که ورودی‌های آن اعداد طبیعی و خروجی‌های آن اعداد حقیقی‌اند. حال اگر خروجی‌های این دستگاه را به ترتیب پشت سر هم قرا دهیم، به عدد نخست نوشته شده جملهٔ اول دنباله، به عدد دوم نوشته شده جملهٔ دوم دنباله و به‌طورکلی به عدد n اُم حاصل از این دنباله، جملهٔ nاُم این دنباله گوییم.

مثال ۹. فرض کنید دستگاهی داریم که مجموعهٔ اعداد طبیعی را به ترتیب از ۱ دریافت و عملیات خاصی بر روی آن انجام می‌دهد. این دستگاه عدد دریافتی را به توان ۲ می‌رساند و یک واحد از آن کم می‌کند و سپس عدد حاصل را به‌عنوان خروجی به ما تحویل می‌دهد.

الف) ۵ خروجی اول این دستگاه را به‌عنوان دنباله‌ای از اعداد بنویسید.

ب) جمله‌های ۱۵اُم و ۱۶اُم این دنبالهٔ اعداد را مشخص کنید.

پ) جملهٔ nاُم این دنباله را بنویسید.

ت) جملهٔ چندم این دنباله ۳۶۰ است؟

پاسخ: الف)

عدد ورودی	۱	۲	۳	۴	۵
عدد خروجی	$۱^۲-۱=۰$	$۲^۲-۱=۳$	$۳^۲-۱=۷$	$۴^۲-۱=۱۵$	$۵^۲-۱=۲۴$

درنتیجه دنبالهٔ روبه‌رو حاصل می‌شود: ۱، ۳، ۷، ۱۵، ۲۴

ب) می‌دانیم ورودی ۱۵اُم عدد ۱۵ و ورودی ۱۶اُم عدد ۱۶ است، پس هرکدام را به توان ۲ می‌رسانیم و از آن‌ها یک واحد کم می‌کنیم:

$$\text{جملهٔ ۱۵اُم} = ۱۵^۲-۱=۲۲۴$$

$$\text{جملهٔ ۱۶اُم} = ۱۶^۲-۱=۲۵۵$$

پ) $\text{جملهٔ } n\text{اُم} = n^۲-۱ \Rightarrow \text{خروجی } n\text{اُم} = n \Rightarrow \text{ورودی } n\text{اُم}$

ت) فرض کنید خروجی nاُم این دنباله ۳۶۰ است. این خروجی برحسب n، عدد $n^۲-۱$ است، پس داریم:

$$n^۲-۱=۳۶۰ \Rightarrow n^۲=۳۶۱ \Rightarrow n=۱۹ \ , \ n=-۱۹$$

در معادلهٔ بالا جواب ۱۹- قابل‌قبول نیست. چون شمارهٔ جمله نمی‌تواند منفی باشد!

اگر دنباله‌ای را a بنامیم، جملهٔ اول آن را با نماد $a_۱$، جملهٔ دوم آن را با نماد $a_۲$ و به‌همین ترتیب جملهٔ nاُم را با نماد a_n نمایش می‌دهیم. مثلاً در مثال قبلی دنبالهٔ روبه‌رو را داریم:

$$\underset{\downarrow}{a_۱} \ , \ \underset{\downarrow}{a_۲} \ , \ \underset{\downarrow}{a_۳} \ , \ \underset{\downarrow}{a_۴} \ , \ \underset{\downarrow}{a_۵} \ , \ \dots \ , \ \underset{\downarrow}{a_n}$$

$$۰ \ , \ ۳ \ , \ ۸ \ , \ ۱۵ \ , \ ۲۴ \ , \ \dots \ , \ ۱$$

در این دنباله، جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=n^۲-۱$ بیان می‌شود که در آن جملهٔ nاُم دنباله با قرار دادن شمارهٔ جملهٔ موردنظر به‌جای n حاصل می‌شود.

مثال ۱۰. با استفاده از چوب‌کبریت شکل‌های زیر ساخته شده‌اند.

الف) با توجه به شکل، در هر مرحله نسبت به مرحله قبل چند چوب‌کبریت اضافه می‌شود؟

ب) با توجه به قسمت «الف» تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در ۵ شکل اول را به‌صورت دنباله‌ای از اعداد بنویسید.

پ) تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در مرحلهٔ nاُم را به دست آورید.*

پاسخ: الف) در هر مرحله برای ایجاد یک ۶ضلعی جدید، ۵ چوب‌کبریت به کنار ۶ ضلعی قبلی اضافه می‌شود.

ب)

$$a_۱=۶ \Rightarrow a_۲=\underbrace{۶+۵}_{\text{جمله اول}}=۱۱ \Rightarrow a_۳=\underbrace{۱۱+۵}_{\text{جمله دوم}}=۱۶ \Rightarrow a_۴=\underbrace{۱۶+۵}_{\text{جمله سوم}}=۲۱$$

$$\Rightarrow a_۵=\underbrace{۲۱+۵}_{\text{جمله چهارم}}=۲۶ \Rightarrow ۶,۱۱,۱۶,۲۱,۲۶$$

* جملهٔ عمومی یک دنباله که تنها چند جملهٔ آن را در اختیار داریم، معمولاً منحصربه‌فرد نیست و ما در اینجا ساده‌ترین چیزی که به ذهن اغلب دانش‌آموزان می‌رسد را ارائه کرده‌ایم.

پ) اگر به دنباله دقت کنید متوجه می‌شوید تعداد چوب‌کبریت‌های مرحلهٔ دوم ۵تا بیشتر از مرحلهٔ اول، تعداد چوب‌کبریت‌های مرحلهٔ سوم $۲\times۵=۱۰$ بیشتر از مرحلهٔ اول و تعداد چوب‌کبریت‌های مرحلهٔ چهارم $۳\times۵=۱۵$ تا بیشتر از مرحلهٔ اول است. درنتیجه حدس می‌زنیم تعداد چوب‌کبریت‌های مرحلهٔ nاُم $(n-۱)\times۵$ تا بیشتر از مرحلهٔ اول است:

$$۶\ ,\ ۶+۵\ ,\ ۶+\underbrace{۵+۵}_{۲\times۵}\ ,\ ۶+\underbrace{۵+۵+۵}_{۳\times۵}\ ,\ \dots\ ,\ ۶+\underbrace{۵+۵+\dots+۵}_{(n-۱)\times۵}$$

$$a_۱=۶\ ,\ a_۲=۱۱\ ,\ a_۳=۱۶\ ,\ a_۴=۲۱\ ,\ a_n=۶+۵(n-۱)$$

درنتیجه جملهٔ nاُم برابر است با: $a_n=۶+۵(n-۱)=۵n+۱$

پس در مرحلهٔ nاُم، $۵n+۱$ چوب‌کبریت خواهیم داشت.

مثال ۱۱. جملهٔ چندم دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $a_n=\frac{۲n-۱}{۳n+۲}$ است، برابر $\frac{۳}{۵}$ است؟

پاسخ: باید ببینیم به ازای چه مقدار nی a_n برابر $\frac{۳}{۵}$ خواهد شد، پس عبارت $\frac{۲n-۱}{۳n+۲}$ را برابر $\frac{۳}{۵}$ قرار می‌دهیم:

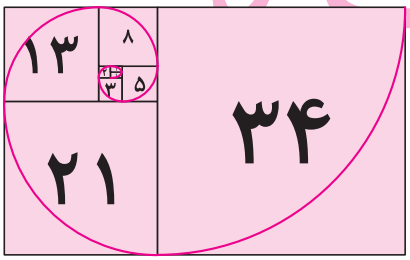
$$\frac{۲n-۱}{۳n+۲}=\frac{۳}{۵}\ \Rightarrow\ ۱۰n-۵=۹n+۶\ \Rightarrow\ n=۱۱$$

◄ دنباله بازگشتی

تعریف: به دنباله‌ای که جملهٔ اول یا تعدادی از جملات اولیهٔ آن مشخص باشد و جمله‌های بعدی برحسب تعدادی از جملات قبلی بیان شده باشند، دنباله بازگشتی گوییم.

مثلاً دنبالهٔ مثال ۲ یک دنبالهٔ بازگشتی است. زیرا تعداد چوب‌کبریت‌های هر مرحله برابر است با تعداد چوب‌کبریت‌های مرحلهٔ قبل به‌علاوه ۵.

مثال ۱۲. دنباله‌ای به نام دنبالهٔ فیبوناچی، ریاضیدان معروف ایتالیایی، وجود دارد که دو جملهٔ اولیهٔ آن ۱ است و جملات بعدی از حاصل جمع دو جملهٔ قبلی به دست می‌آیند.



الف) شش جملهٔ اول این دنباله را بنویسید.

ب) این دنباله را با زبان ریاضی (نمادهای ریاضی) بنویسید.

پاسخ: (الف

$$\begin{cases}a_۱=۱\\a_۲=۱\end{cases}\Rightarrow a_۳=۲\ ,\ \begin{cases}a_۲=۱\\a_۳=۲\end{cases}\Rightarrow a_۴=۳\ ,\ \begin{cases}a_۳=۲\\a_۴=۳\end{cases}\Rightarrow a_۵=۵\ ,\ \begin{cases}a_۴=۳\\a_۵=۵\end{cases}\Rightarrow a_۶=۸$$

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸

ب)

$$F_۱=۱\ ,\ F_۲=۱\ ,\ F_n=\underbrace{F_{n-۱}}_{\text{یعنی جمله قبل از جمله }n\text{ام}}+\underbrace{F_{n-۲}}_{\text{یعنی دو جمله قبل از جمله }n\text{ام}}\quad (n\geq ۳)$$

این رابطه برای جملات سوم به بعد برقرار است.

چند تعریف

۱) دنباله‌ای را که هر جملهٔ آن نسبت به جملهٔ قبلی کمتر نباشد (غیر از جملهٔ اول) یک دنبالهٔ صعودی (افزایشی) گویند. منظور از کم‌تر نباشد این است که یا مساوی است یا بیشتر.

۲) دنباله‌ای را که هر جملهٔ آن نسبت به جملهٔ قبلی بیشتر نباشد (غیر از جملهٔ اول)، یک دنبالهٔ نزولی (کاهشی) گویند. منظور از بیشتر نباشد این است که یا مساوی است یا کم‌تر.

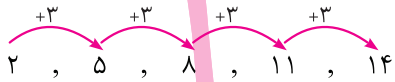
$۱, ۳, ۵, ۷ \Rightarrow$ دنبالهٔ افزایشی

$-۱, ۳, -۴, ۹ \Rightarrow$ دنبالهٔ نه کاهشی نه افزایشی

$۲, -۱, -۵, ۷ \Rightarrow$ دنبالهٔ کاهشی

◄ دنبالهٔ حسابی

تعریف: دنباله‌ای که هر جملهٔ آن (غیراز جملهٔ اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جملهٔ قبلی به دست می‌آید را دنبالهٔ حسابی (یا تصاعد حسابی) گوییم و به این مقدار را ثابت قدرنسبت دنباله می‌نامیم. به‌عنوان مثال دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:



در این دنباله هر جمله (غیر ازجمله اول) ۳ واحد بزرگ‌تر از جملهٔ قبلی خود است. پس این دنباله، یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ است. به‌عبارت‌دیگر می‌توان گفت هر دنباله‌ای که تفاضل هر جمله از جملهٔ قبلی (غیر ازجمله اول) مقدار ثابتی باشد را دنبالهٔ حسابی گوییم. بر این اساس اگر جملهٔ اول دنباله را a و قدرنسبت را d بنامیم می‌توانیم با نمادهای ریاضی این دنباله را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف دنبالهٔ حسابی با نمادهای ریاضی :
$$\begin{cases} a_۱ = a \\ a_n - a_{n-۱} = d \Rightarrow a_n = a_{n-۱} + d \quad (n > ۱) \end{cases}$$

دنبالهٔ حسابی درواقع یک دنبالهٔ بازگشتی است.

طبق تعریف، مثلاً دنبالهٔ ۸، ۵، ۳، ۱ یک دنبالهٔ حسابی نیست، زیرا تفاضل جملهٔ دوم از جملهٔ اول ۲ است ولی تفاضل جملهٔ چهارم از جملهٔ سوم ۳ است.

جملات یک دنبالهٔ حسابی را برحسب جملهٔ اول (a) و قدرنسبت آن (d) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_۱ & , & a_۲ & , & a_۳ & , & a_۴ & , \ \dots \ , & a_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ a & , & a+d & , & a+۲d & , & a+۳d & , \ \dots \ , & a+(n-۱)d \end{array}$$

$$+(n+۱)d$$

درواقع جملهٔ دوم، $۱d$ بیشتر از جملهٔ اول، جملهٔ سوم $۲d$ بیشتر از جملهٔ اول و جملهٔ nاُم $(n-۱)d$ بیشتر از جملهٔ اول است. درنتیجه جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n = a_۱ + (n-d)$ است.

$$a_n - a_{n-۱} = d \longleftrightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

مثال ۱۳. کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌تواند یک دنبالهٔ حسابی باشد. درصورتی‌که هریک از دنباله‌های زیر یک دنبالهٔ حسابی باشد، قدرنسبت و جملهٔ عمومی آن را بنویسید.

الف)...، ۱۴، ۱۱، ۸، ۵، ۲ ب) $1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, -1, \ldots$ پ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

پاسخ: طبق تعریف، دنباله‌ای یک دنبالهٔ حسابی است که تفاضل هر دو جملهٔ متوالی مقدار ثابتی باشد:

الف)

$$\underbrace{2 \overset{+3}{,} 5 \overset{+3}{,} 8 \overset{+3}{,} 11 \overset{+3}{,} 14 \ldots}_{\text{دنباله حسابی است}} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_n = 2 + 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3n - 1$$

ب)

$$\underbrace{1 \overset{+3}{,} \frac{1}{2} \overset{+3}{,} 0 \overset{+3}{,} -\frac{1}{2} \overset{+3}{,} -1 \ldots}_{\text{دنباله حسابی است}} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$$

پ) یک دنبالهٔ حسابی نیست زیرا تفاضل هر دو جملهٔ متوالی مقدار ثابتی نیست.

$$\frac{1}{2} \overset{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}}{,} \frac{2}{3} \overset{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}}{,} \frac{3}{4} \overset{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}}{,} \frac{4}{5} \overset{}{,} \frac{5}{6}$$

مثال ۱۴. اگر جملهٔ سوم یک دنبالهٔ حسابی ۱۰ و جملهٔ هشتم آن ۱۵- باشد، این دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: برای مشخص شدن یک دنبالهٔ حسابی کافی است جملهٔ اول و قدرنسبت آن را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 10 \\ a_8 = -15 \Rightarrow a_8 = a_1 + 7d = -15 \end{cases} \Rightarrow a_8 - a_3 = 5d$$

$$\Rightarrow 5d = -25 \Rightarrow d = -5 \ , \ a_3 = a_1 + 2d = 10 \xrightarrow{d=-5} a_1 = 20$$

با توجه به محاسبات فوق مشخص است که جملهٔ هشتم $5d$ بیشتر از جملهٔ سوم است:

$$a_1, a_2, a_3 \overset{+d}{,} a_4 \overset{+d}{,} a_5 \overset{+d}{,} a_6 \overset{+d}{,} a_7 \overset{+d}{,} a_8 \Rightarrow a_8 - a_3 = 5d$$

$$\overset{+5d}{\frown}$$

درنتیجه جملهٔ اول دنباله ۲۰ و قدرنسبت ۵- است. یعنی هر جمله از دنباله، ۵ واحد کمتر از جملهٔ قبل است.

...، ۱۰-، ۵-، ۰، ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰

اگر در یک دنبالهٔ حسابی دو جملهٔ متمایز، مثلاً a_m و a_n را داشته باشیم، در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d \Rightarrow \boxed{a_m - a_n = (m-n)d}$$

اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، (سه جملهٔ متوالی یک دنباله حسابی باشند)، b برابر با نصف حاصل‌جمع دو عدد a و c است:

$$\underbrace{a \ , \ b \ , \ c}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

اثبات:

$$\begin{cases} a = b - d \\ c = b + d \end{cases} \Rightarrow a + c = 2b \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

در اینجا به b واسطهٔ حسابی a و c یا میانگین حسابی a و c گویند.

مثال ۱۵. مقدار a را طوری بیابید که سه عدد زیر، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند و سپس این سه عدد را مشخص کنید.

$$\underbrace{۶a+۷}_{a_۱} \ , \ \underbrace{۴a-۱}_{a_۲} \ , \ \underbrace{۱۰a-۱}_{a_۳}$$

پاسخ: اگر a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، داریم $b=\frac{a+c}{۲}$؛ درنتیجه:

$$\frac{(۶a+۷)+(۱۰a-۱)}{۲}=۴a-۱ \Rightarrow ۱۶a+۶=۸a-۲ \Rightarrow ۸a=-۸ \Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow a_۱=۶a+۷=۱ \ , \ a_۲=۴a-۱=-۵ \ , \ a_۳=۱۰a-۱=-۱۱$$

$$\Rightarrow ۱,-۵,-۱۱ \Rightarrow \text{قدرنسبت}=d=-۶$$

مثال ۱۶. بین دو عدد ۶ و ۸۶، سه عدد قرار دهید که این ۵ عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند.

پاسخ: راه اول: مطابق شکل بالا، ۸۶ جملهٔ پنجم و ۶ جملهٔ اول است:

$$a_۵=a_۱+۴d \Rightarrow ۸۶=۶+۴d \Rightarrow ۴d=۸۰ \Rightarrow d=۲۰$$

درنتیجه جملات $a_۲$ ، $a_۳$ و $a_۴$ به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{matrix} a_۲ & , & a_۳ & , & a_۴ \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ ۶ & , & ۲۶ & , & ۴۶ & , & ۶۶ & , & ۸۶ \end{matrix}$$

$$+۲۰ \quad +۲۰ \quad +۲۰ \quad +۲۰$$

راه دوم: $a_۳$ میانگین حسابی ۶ و ۸۶ است. زیرا فاصلهٔ مساوی از این دو جمله دارد؛ درنتیجه:

$$a_۳=\frac{a_۱+a_۵}{۲} \Rightarrow a_۳=\frac{۸۶+۶}{۲}=۴۶$$

همین‌طور $a_۲$ میانگین حسابی $a_۱$ و $a_۳$ است و $a_۴$ میانگین حسابی $a_۳$ و $a_۵$ است، درنتیجه:

$$a_۲=\frac{a_۱+a_۳}{۲} \Rightarrow a_۲=\frac{۶+۴۶}{۲}=۲۶$$

$$a_۴=\frac{a_۳+a_۵}{۲} \Rightarrow a_۴=\frac{۴۶+۸۶}{۲}=۶۶$$

مجموع جملات دنباله حسابی

فرض کنید می‌خواهیم مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی را به کمک ماشین‌حساب، به دست آوریم. مثلاً مجموع ۱۰۰ جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ حسابی زیر:

۵ و ۸ و ۱۱ و .... و ۳۰۲

قطعاً اگر تک‌تک جملات را پشت سرهم جمع کنیم کار بسیار سخت و طاقت‌فرسایی خواهد بود.

فسفربسوزان: راه‌حلی برای محاسبه سریع مجموع جملات دنباله حسابی را ارائه دهید.

اگر جملات یک دنباله حسابی را دو بار باهم جمع کنیم به‌طوری‌که جمله اول را با جملهٔ nاُم و جمله دوم را با جملهٔ $n-۱$اُم و ... جمع کنیم با توجه به‌تساوی $a_n+a_m=a_p+a_q \ \ (m+n=p+q)$ داریم:

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\ldots+a_n$$

$$S_n=a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}+\ldots+a_۱$$

$$a_۱+a_n=a_۲+a_{n-۱}=a_p+a_p \Rightarrow (p+q=n+۱)$$

$$۲S_n=n(a_۱+a_n) \Rightarrow S_n=\frac{n(a_۱+a_n)}{۲}$$

با توجه به آنکه $a_n = a_1 + (n-1)d$ است می‌توان رابطه S_n را برحسب n به‌صورت زیر نوشت:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

اگر دقت کنید جملهٔ عمومی یک دنباله حسابی از درجه یک $(a_n = a_1 + (n-1)d)$ است و S_n از درجه دو؛ درنتیجه هر دنباله با جمله عمومی درجه اول یک دنباله حسابی است و همچنین معمولاً S_n با درجه دوم مجموع جملات یک دنباله حسابی است. (چرا معمولاً؟)

مثال ۱۷. در یک دنباله حساب مجموع ۱۲ جملهٔ اول ۱۳۸ و جملهٔ ششم آن برابر ۱۰ است. جمله دوم این دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

$$a_6 = a_1 + 5d = 10 \ (1)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2a_1 + 11d\right] = 6\left[2a_1 + 11d\right] = 138 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 23 \ (2)$$

$$\xrightarrow{1,2} \begin{cases} a_1 + 5d = 10 \\ 2a_1 + 11d = 23 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -5 \Rightarrow a_2 = a_1 + d = -2$$

مثال ۱۸. در یک دنباله‌حسابی مجموع جملات هفتم و شانزدهم ۲۰ است. مجموع ۲۲ جملهٔ نخست را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$a_7 + a_{16} = a_1 + 6d + a_1 + 15d = 2a_1 + 21d = 20 \ *$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}\left[2a_1 + 21d\right] \overset{*}{=} 11 \times 20 = 220$$

تذکر: $a_7 + a_{16} = a_1 + a_{22}$

مثال ۱۹. در یک دنباله حسابی شامل ۳۰ جمله، مجموع ۴ جملهٔ اول ۲۷ و مجموع ۴ جملهٔ آخر ۷۳ است. مجموع تمام جملات را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم: $a_1 + a_{30} = a_2 + a_{29} = a_3 + a_{28} = a_4 + a_{27}$

درنتیجه مجموع ۴ جمله اول و ۴ جمله آخر، ۴ برابر مجموع جملهٔ اول و آخر است:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 27 \\ a_{30} + a_{29} + a_{28} + a_{27} = 73 \end{cases} \Rightarrow 4(a_1 + a_{30}) = 100$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{30} = 25 \Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}\left[a_1 + a_{30}\right] = 15 \times 25 = 375$$

مثال ۲۰. اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته مربع کامل باشد:
$(1) , (2, 3, 4) , (5, 6, 7, 8, 9) , \ldots$ مجموع جملات در دسته دهم را به دست آورید.

پاسخ:

$$\underbrace{(1)}_{\text{دسته اول}} , (2, 3, \underset{\downarrow}{4}) , \underbrace{(5, 6, 7, 8, \underset{\downarrow}{9})}_{\text{دسته سوم}} , \ldots \underbrace{(82, 83, \ldots, 99, \underset{\downarrow}{100})}_{\text{دسته دهم}}$$

$$1^2 \qquad 2^2 \qquad 3^2 \qquad 10^2$$

$$\Rightarrow 82 + 83 + \ldots + 100 = \frac{19}{2}\left[82 + 100\right] = 1729$$

◄ دنبالهٔ هندسی

تعریف: دنباله‌ای که هر جملهٔ آن (غیر ازجمله اول) با ضرب یک مقدار ثابت غیر صفر در جملهٔ قبلی به دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی می‌نامند و به این مقدار ثابت قدرنسبت دنبالهٔ هندسی می‌گویند.

به‌عنوان‌مثال دنبالهٔ روبه‌رو را در نظر بگیرید:

در این دنباله هر جمله (غیر از جملهٔ اول) سه برابر جملهٔ قبلی خود است؛ درنتیجه این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ میباشد. به‌عبارت‌دیگر می‌توان گفت هر دنباله‌ای را که حاصل تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی (غیر از جملهٔ اول) مقدار ثابتی (غیر صفر) باشد، یک دنبالهٔ هندسی است. بر این اساس اگر جملهٔ اول را a و قدرنسبت را q بنامیم، می‌توانیم با نمادهای ریاضی دنباله را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف دنبالهٔ هندسی با نمادهای ریاضی: $\begin{cases} a_1 = a \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n>1) \quad q \neq 0 \end{cases}$ (طبق قرارداد قدرنسبت صفر نیست)

دنبالهٔ هندسی نیز مانند دنبالهٔ حسابی یک دنبالهٔ بازگشتی است.

طبق تعریف، مثلاً دنبالهٔ ۶، ۴، ۲، ۱ یک دنبالهٔ هندسی نیست، زیرا حاصل تقسیم جملهٔ دوم به جملهٔ اول برابر ۲ است؛ اما حاصل تقسیم جملهٔ چهارم به جملهٔ سوم برابر $\frac{3}{2}$ است.

جملات یک دنبالهٔ هندسی را برحسب جملهٔ اول آن (a) و قدرنسبت آن (q) می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , \ \dots \ , & a_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ a & , & aq & , & aq^2 & , & aq^3 & , \ \dots \ , & aq^{n-1} \end{array}$$

$\times q \quad \times q \quad \times q \quad \times q^2 \quad \times q^3 \quad \times q^{n-1}$

درواقع جملهٔ دوم q برابر جملهٔ اول، جملهٔ سوم q^2 برابر جملهٔ اول و جملهٔ nاُم، q^{n-1} برابر جملهٔ اول است؛ درنتیجه جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \ \ (q \neq 0) \longleftrightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$$

مثال ۲۱. کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌تواند یک دنبالهٔ هندسی باشد. درصورتی‌که یک دنبالهٔ هندسی باشد، جملهٔ عمومی آن را بنویسید.

الف) $1, \sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25$

ب) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{81}$

پ) $1, -1, 1, -1$

پاسخ: با توجه به تعریف دنبالهٔ هندسی باید حاصل تقسیم هر جمله (غیر ازجمله اول) بر جملهٔ قبلی مقدار ثابت باشد:

الف)

$$1 \ , \ \sqrt{5} \ , \ 5 \ , \ 5\sqrt{5} \ , \ 25 \quad \xrightarrow{\text{دنباله هندسی است}} \begin{cases} q = \sqrt{5} \\ a_1 = \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \times \left(\sqrt{5}\right)^{n-1}$$

$\times\sqrt{5} \quad \times\sqrt{5} \quad \times\sqrt{5} \quad \times\sqrt{5}$

ب)

زیراحاصل تقسیم جملهٔ چهارم بر جملهٔ سوم $\frac{۱}{۹}$ است

ولی حاصل تقسیم جملهٔ دوم بر جملهٔ اول برابر $\frac{۱}{۳}$است

$۲ , \frac{۲}{۳} , \frac{۲}{۹} , \frac{۲}{۸۱}$ $\frac{a_۲}{a_۱} \neq \frac{a_۴}{a_۳}$ دنباله هندسی نیست

پ)

$۱ , -۱ , ۱ , -۱ , ۱$ دنباله هندسی است $\begin{cases} q=-۱ \\ a_۱=۱ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۱\times(-۱)^{n-۱}$

مثال ۲۲. جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی برابر ۶- و جملهٔ ششم آن ۴۸ است.

الف) قدرنسبت را بیابید.

ب) جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید و ۴ جملهٔ اول این دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: الف) برای محاسبهٔ قدرنسبت، جملهٔ ششم و جملهٔ سوم را می‌نویسیم و برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_۶ = a_۱q^۵ \\ a_۳ = a_۱q^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a_۶}{a_۳} = \frac{a_۱q^۵}{a_۱q^۲} = q^۳$$

پس نسبت جملهٔ ششم به جملهٔ سوم، توان سوم قدرنسبت است:

$$\frac{a_۶}{a_۳} = \frac{۴۸}{-۶} = q^۳ = -۸ \Rightarrow q = -۲$$

$a_۱, a_۲, a_۳ , a_۴ , a_۵ , a_۶ \Rightarrow \frac{a_۶}{a_۳}q^۳$

$\times q \ \times q \ \times q$

$\times q^۳$

$$\begin{cases} q=-۲ \\ a_۳ = a_۱q^۲ = -۶ \end{cases} \Rightarrow a_۱\times(-۲)^۲ = -۶ \Rightarrow a_۱ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a_n = -\frac{۳}{۲}\times(-۲)^{n-۱}$$

ازآنجاکه قدرنسبت برابر ۲- و جملهٔ اول برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، جملهٔ دوم ۲- برابر جملهٔ اول، جملهٔ سوم ۲- برابر جملهٔ دوم و جملهٔ چهارم ۲- برابر جملهٔ سوم است:

$-\frac{۳}{۲} , ۳ , -۶ , ۱۲$

$\times -۲ \ \times -۲ \ \times -۲$

اگر در یک دنبالهٔ هندسی دو جملهٔ متمایز a_m و a_n را داشته باشیم، در این صورت رابطهٔ زیر بین این دو جمله برقرار است:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_۱q^{m-۱}}{a_۱q^{n-۱}} = \frac{q^m}{q^n} = q^{m-n} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$$

اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند (سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند)، حاصل‌ضرب a و c برابر توان دوم b است.

$\div q \ \times q$

a , b , c دنباله هندسی $ac = b^۲$

اثبات:

$$\begin{cases} a=\dfrac{b}{q} \\ c=bq \end{cases} \Rightarrow a\times c=\frac{b}{q}\times bq=b^{۲} \Rightarrow ac=b^{۲}$$

در این رابطه b را واسطه هندسی a و c و یا میانگین هندسی a و c گویند.

اگر b دارای فاصلهٔ مساوی از c و a (ازنظر شمارهٔ جمله) باشد، همچنان رابطهٔ $ac=b^{۲}$ برقرار است. به شکل زیر توجه کنید:

$$a\ ,\ d\ ,\ e\ ,\ b\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ c$$

$$\begin{cases} b^{۲}=ac \\ b^{۲}=ef \\ b^{۲}=dg \end{cases} \Rightarrow$$

یعنی b میانگین هندسی (d)،(g)،(e) و f، (a) و c است.

مثال ۲۳. x را طوری بیابید که سه عدد $x+۱$، x و $۱-x$ تشکیل یک دنبالهٔ هندسی دهند. سپس این سه عدد را بیابید (مسئله چند جواب دارد؟)

پاسخ: اگر a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، داریم:

$$\underbrace{۱-x}_{a}\ ,\ \underbrace{x}_{b}\ ,\ \underbrace{۱+x}_{c} \Rightarrow (۱-x)(۱+x)=x^{۲} \Rightarrow ۱-x^{۲}=x^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}=۱$$

$$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ازآنجاکه برای x دو مقدار به دست آوردیم، مسئله دارای ۲ جواب است:

$$\text{اگر } x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\begin{cases} a=۱-x=۱+\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ b=x=-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ c=۱+x=۱-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$$

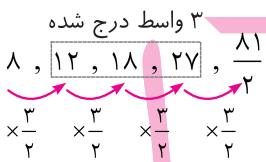
$$\text{اگر } x=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} a=۱-x=۱-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ b=x=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ c=۱+x=۱+\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۲۴. بین دو عدد ۸ و $\frac{۸۱}{۲}$ سه عدد قرار داده تا این پنج عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند (جملات دنباله در حال افزایش هستند).

پاسخ: راه اول: ازآنجاکه بین این دو عدد ۳ واسطه قرار داده‌ایم، این دنباله دارای ۵ جمله است که جملهٔ اول آن ۸ و جملهٔ پنجم آن $\frac{۸۱}{۲}$ است. درنتیجه از تقسیم جملهٔ پنجم به جملهٔ اول قدرنسبت را محاسبه می‌کنیم:

$$a_۵ = a_۱q^۴ \Rightarrow \frac{a_۵}{a_۱} = q^۴ \Rightarrow \frac{\frac{۸۱}{۲}}{۸} = \frac{۸۱}{۱۶} = q^۴ \Rightarrow q = \pm\frac{۳}{۲}$$

ازآنجاکه در صورت سؤال گفته شده است که جملات دنباله در حال افزایش‌اند، پس قدرنسبت نمی‌تواند منفی باشد، زیرا جملات دنباله را یک‌درمیان منفی و مثبت می‌کند؛ درنتیجه $q = \frac{۳}{۲}$ است و بنابراین دنبالهٔ زیر را خواهیم داشت:



راه دوم: به دنبالهٔ روبه‌رو توجه کنید:

$$۸ , a , b , c , \frac{۸۱}{۲}$$

عدد b دارای فاصلهٔ مساوی از $\frac{۸۱}{۲}$ و ۸ است، پس واسطهٔ هندسی ۸ و $\frac{۸۱}{۲}$ است:

$$b^۲ = ۸\times\frac{۸۱}{۲} \Rightarrow b^۲ = ۴\times۸۱ \Rightarrow b = \pm۱۸ \xrightarrow{\text{چون جملات دنباله در حال افزایش اند}} b = ۱۸$$

عدد a بین ۸ و b قرار دارد، پس واسطهٔ هندسی این دو عدد است:

$$a^۲ = ۸b \Rightarrow a^۲ = ۸\times۱۸ \Rightarrow a^۲ = ۱۴۴$$
$$\Rightarrow a = \pm۱۲ \xrightarrow{\text{چون جملات دنباله در حال افزایش اند}} a = ۱۲$$

عدد c بین b و $\frac{۸۱}{۲}$ است، پس واسطهٔ هندسی این دو عدد است:

$$c^۲ = \frac{۸۱}{۲}b \Rightarrow c^۲ = \frac{۸۱}{۲}\times۱۸ \Rightarrow c^۲ = ۸۱\times۹ = ۳^۶$$
$$\Rightarrow c = \pm۲۷ \xrightarrow{\text{چون جملات دنباله در حال افزایش اند}} c = ۲۷$$

◄ مجموع جملات دنباله هندسی

فرض کنید می‌خواهیم مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی را به کمک ماشین‌حساب، به دست آوریم. مثلاً مجموع ۱۰۰ جملهٔ ابتدایی دنباله هندسی زیر:

$$۳ , ۶ , ۱۲ , \ldots , ۳\times۲^{۹۹}$$

قطعاً اگر با زهم روش شما جمع تک‌تک جملات پشت سرهم جمع است، کار سختی پیشرو دارید!

راه‌حلی برای محاسبه سریع مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی ارائه دهید.

فرض کنید مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی را با حرف S نشان دهیم. با ضرب q در کل عبارت مطابق زیر داریم:

$$S_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1}$$
$$-\begin{cases} qs_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^n \\ s_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1} \end{cases}$$

$$qs_n - s_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow s_n(q-1) = a_1(q^n-1) \Rightarrow s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

مثال ۲۵. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع ۸ جملهٔ اول $\frac{5}{4}$ مجموع ۴ جمله اول آن است. قدرنسبت را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} s_8 = \frac{a_1(q^8-1)}{(q-1)} \\ s_4 = \frac{a_1(q^4-1)}{(q-1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{s_8}{s_4} = \frac{\frac{a_1(q^8-1)}{(q-1)}}{\frac{a_1(q^4-1)}{(q-1)}} = \frac{q^8-1}{q^4-1} = \frac{(q^4-1)(q^4+1)}{(q^4-1)} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow q^4+1 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲۶. مجموع چه تعداد از جمله‌های ابتدایی دنبالهٔ هندسی روبرو برابر ۱۰۲۶ است؟ $6, -12, 24, \ldots$

پاسخ:

$$s_n = \frac{6((-2)^n-1)}{-2-1} = 1026 \Rightarrow \frac{6((-2)^n-1)}{-3} = 1026 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -513$$
$$\Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

مثال ۲۷. مربعی با ضلع واحد را در نظر بگیرید. در مرحلهٔ اول نیمی از مساحت آن، در مرحله دوم نصف مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. بعد از حداقل چند مرحله بیش از ۹۹٪ مساحت مربع رنگ‌آمیزی می‌شود؟

پاسخ: در مرحله اول $\frac{1}{2}$ مساحت مربع، در مرحله دوم $\frac{1}{4}$ مساحت مربع و در مرحله nاُم $(\frac{1}{2})^n$ از مساحت مربع رنگ‌آمیزی می‌شود؛ درنتیجه باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$s_n = \frac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n-1)}{1-\frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n-1)}{\frac{1}{2}} > \frac{99}{100}$$
$$\Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n > \frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

درنتیجه حداقل ۷ مرحله لازم است تا بیش از ۹۹٪ مربع رنگ شود.

راه‌حل ۲: می‌توانستیم بگوییم در مرحله nاُم $(\frac{1}{2})^n$ از مساحت مربع باقی‌مانده است که باید کمتر از $\frac{1}{100}$ شود تا بیش از ۹۹٪ مربع رنگ شود:

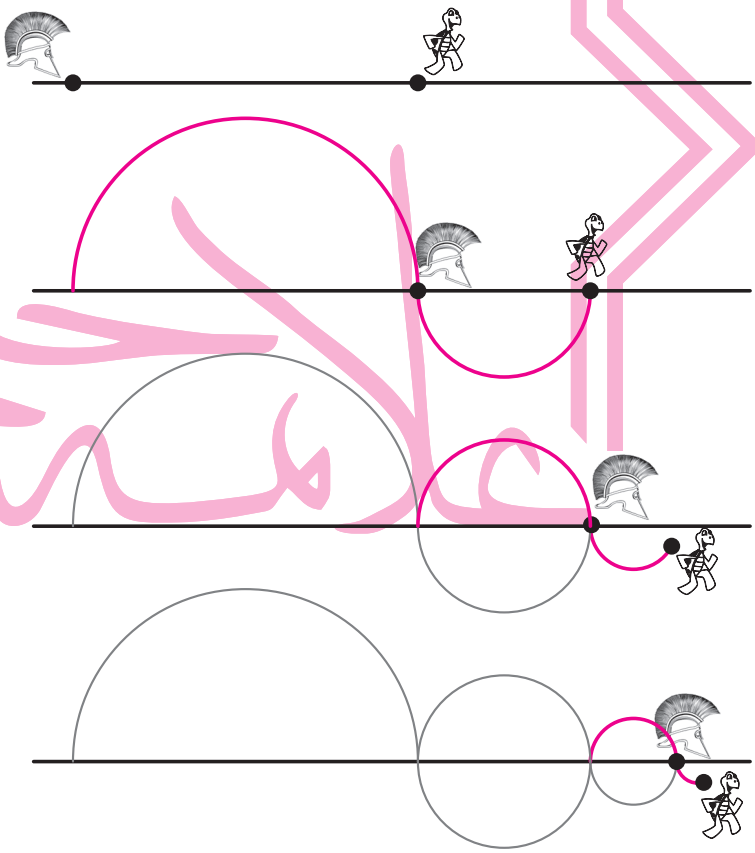
$$(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{100} \Rightarrow n \geq 7$$

جالب است بدانی

چالش بی‌نهایت – پارادوکس زنون

زنون، فیلسوف یونانی، ۴۵۰ سال پیش از میلاد مسیح سناریویی طراحی کرد تا نشان دهد حرکت تناقض‌آمیز و محال است. او می‌خواست نشان دهد که جهان منزلگاه سکون است و مشاهده حرکت ناشی از توهم است. پارادوکس او تحت عنوان "مسابقه آشیل و لاک‌پشت " به شکل زیر مطرح می‌شود:

آشیل، قهرمان یونانی، که به‌سرعت و چالاکی شناخته شده است و یک لاک‌پشت تصمیم به مسابقه دو در یک فاصله طولانی می‌گیرند. آشیل به سبب روحیه پهلوانی اجازه می‌دهد که لاک‌پشت مسابقه را از چند قدمی جلوتر از او آغاز کند. زنون ادعا می‌کند که اگر حرکت واقعی باشد لاک‌پشت باید آشیل را به سبب همین فاصله مقدماتی شکست دهد. استدلال او به این ترتیب است که فرض کنید در لحظه آغاز مسابقه، آشیل در نقطه O و لاک‌پشت در نقطه A است. در مدتی که طول می‌کشد تا آشیل از نقطه O به نقطه A برسد، لاک‌پشت هم کمی پیش رفته است و از نقطه A به نقطه B رسیده است. حالا آشیل در نقطه A و لاک‌پشت در نقطه B است و لاک‌پشت به اندازه AB از آشیل جلوتر است. در مرحله بعد آشیل باید از نقطه A به نقطه B برسد و در این مدت بازهم لاک‌پشت کمی جلو می‌رود و از نقطه B به نقطه C می‌رسد. به‌این‌ترتیب لاک‌پشت بازهم به اندازه BC از آشیل جلوتر است. زنون توضیح می‌دهد که بنابراین لاک‌پشت همواره و در هر مرحله باید قدری (هرچند اندک) از آشیل جلوتر باشد و درنهایت برنده مسابقه شود، بنابراین اگر در عمل مشاهده می‌کنیم که آشیل پیروز می‌شود دچار توهمی هستیم که ما را به خطا انداخته است. در شکل ۱ سناریوی رقابت آشیل و لاک‌پشت و جلوتر بودن لاک‌پشت نمایش داده شده است.



شکل ۱ - رقابت آشیل و لاک‌پشت که بنا بر استدلال زنون باید با پیروزی لاک‌پشت به اتمام برسد.

حال ببینیم که فیزیک نیوتونی چنین مسئله‌ای را به چه ترتیب حل می‌کند. برای سادگی به کمیت‌های فاصله اولیه لاک‌پشت و آشیل و سرعت هر یک عددی نسبت می‌دهیم. فرض می‌کنیم که لاک‌پشت از ۲ متر جلوتر مسابقه را آغاز کند و سرعتش ۱ متر بر ثانیه باشد، درحالی‌که سرعت آشیل ۲ متر بر ثانیه است. معادله مکان-زمان آشیل با فرض مبدأ در نظر گرفتن مکان اولیه او مطابق معادله زیر در SI است:

$$x = ۲t$$

جالب است بدانی

همچنین معادله مکان-زمان لاک‌پشت به شکل زیر قابل‌نوشتن است: $x = t + ۲$

با مساوی قرار دادن معادله مکان دو شی، زمانی که این دو متحرک به هم می‌رسند قابل محاسبه است، بنابراین برای به دست آوردن زمان و محل تلاقی دو متحرک معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$۲t = t + ۲$$
$$t = ۲$$

به‌این‌ترتیب فیزیک نیوتونی به‌سادگی استدلال می‌کند که دو متحرک ظرف ۲ ثانیه و(با جاگذاری ۲ ثانیه در یکی از دو معادله حرکت) در ۴ متری مبدأ به هم می‌رسند و پس‌ازآن آشیل از لاک‌پشت جلو می‌زند.

حالا سعی کنیم به سناریوی زنون وفادار بمانیم و با تکیه به آن، زمان رسیدن آشیل به لاک‌پشت را حساب کنیم. فرض کنید که در لحظه اول آشیل در نقطه O و لاک‌پشت در نقطه A است. سرعت‌ها و فاصله اولیه آشیل و لاک‌پشت را مطابق با اطلاعات مسئله بالا در نظر می‌گیریم، بنابراین نقطه A در ۲ متری مبدأ است.

در مرحله اول آشیل با سرعت ۲ متر بر ثانیه، ۱ ثانیه وقت لازم دارد تا از نقطه O به A برسد. در این مدت لاک‌پشت با سرعت ۱ متر بر ثانیه‌ای یک متر به پیش رفته است و به نقطه B در ۳ متری مبدأ رسیده است. در مرحله بعد برای اینکه آشیل از نقطه A به B برسد با سرعت ۲ متر بر ثانیه به ۰/۵ ثانیه زمان احتیاج دارد. در این مدت لاک‌پشت ۰/۵ متر از نقطه B حرکت کرده است و به نقطه C در ۳/۵ متری مبدأ رسیده است. با ادامه این روند یک دنباله زمانی ناشی از مراحل متفاوتی که آشیل در تعقیب لاک‌پشت است مطابق شکل زیر تشکیل می‌شود:

$$۱, ۰/۵, ۰/۲۵, ۰/۱۲۵, \cdots$$

به همین ترتیب دنباله فاصله لاک‌پشت و آشیل مطابق الگوی زیر قابل‌نوشتن است:

$$۲, ۱, ۰/۵, ۰/۲۵, \cdots$$

واضح است که هر یک از این دو دنباله نشان‌دهنده یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۰/۵ است. با توجه به اینکه اندازه قدرنسبت از ۱ کوچک‌تر است مجموع سری بی‌نهایت کل زمانی که آشیل در تعقیب لاک‌پشت است (دنباله اول) و سری بی‌نهایت کل مسافتی که آشیل باید طی کند تا به لاک‌پشت برسد همگرا و قابل محاسبه است:

$$S = \frac{a_۱}{۱ - q}$$

برای دنباله زمانی:

$$S = \frac{۱}{۱ - ۰/۵} = ۲$$

یعنی دو متحرک پس از ۲ ثانیه به هم می‌رسند. این نتیجه با تحلیل مکانیک نیوتونی مطابقت دارد.

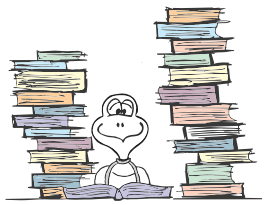
$$S = \frac{۲}{۱ - ۰/۵} = ۴$$

یعنی آشیل در ۴ متری مبدأ به لاک‌پشت می‌رسد. این نتیجه هم با توضیح مکانیک نیوتونی تطبیق دارد.

باوجود تمامی تحلیل‌های انجام‌شده در بالا و مشاهده تجربی رسیدن متحرک سریع‌تر به متحرک کندتر، زنون ممکن است ادعا کند که پاسخی به چالش اصلی او داده نشده است. زنون مدعی نبود که در عمل مشاهده نمی‌کنیم که آشیل به لاک‌پشت می‌رسد بلکه دقیقاً مشکل اینجاست که چرا همیشه آشیل به لاک‌پشت می‌رسد و همین موضوع در نظر او تناقض‌آمیز است. بازهم به سناریوی مطرح‌شده از پارادوکس بازگردید و به شکل ۱ توجه کنید. در چه مرحله‌ای و چگونه آشیل از لاک‌پشت جلو می‌زند؟ مگر نه این است که در مدتی که آشیل لازم دارد تا به‌جای قبلی لاک‌پشت برسد، لاک‌پشت کمی جلو می‌رود؟ چطور می‌توان تصور کرد که آشیل به لاک‌پشت برسد؟

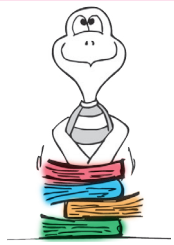
به نظر می‌رسد تناقض ظاهری ایجادشده ناشی از عدم داشتن درک و شهود مناسب از مفهوم بی‌نهایت باشد. گویا محرک اصلی زنون برای طرح چنین تناقضی هم همین موضوع بوده است: اینکه چگونه ممکن است مجموع بی‌نهایت عدد مثبت بی‌نهایت نشود. پارادوکس زنون به ما یادآوری می‌کند که به چه اندازه مفهوم بی‌نهایت برای ما نامأنوس و غیرقابل درک است.

لغت‌نامه



ترجمه	واژه علمی	ترجمه	واژه علمی
اعداد زوج	*even numbers*	صحیح	*Integer*
اعداد فرد	*odd numbers*	طبیعی	*Natural*
تصاعد حسابی	*Arithmetic progression*	عدد حقیقی	*Real number*
تصاعد هندسی	*geometric progression*	گویا	*Rational*
دنباله	*series*	مجموعه	*Set*
زیرمجموعه	*Subset*	مجموعه مرجع (جهانی)	*Universal set*
		نظریه مجموعه	*Set theory*

جمع‌بندی کن



جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱. حاصل $[-۱,۳)\cap(-\infty,۲]-\{-۱\}$ به‌صورت بازهٔ ..... قابل‌نمایش است.

۲. مجموعهٔ $[-۱,۲)$ ازلحاظ متناهی و نامتناهی بودن مجموعه است .....

۳. اگر $A=[-۳,۵]$ و $B=(-۲,۷]$ حاصل $A\cup B'$ به‌صورت ..... است.

۴. اگر بدانیم $A\cup B=A$ حاصل $A'-B'$ مجموعهٔ ..... است.

۵. ساده‌شدهٔ مجموعهٔ $\left[A'\cup(A\cap B)\right]\cap A'$ مجموعهٔ ..... است.

۶. اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۲ و قدرنسبت آن ۳ باشد، جملهٔ دهم آن ..... است. ۲۹

۷. اگر جملهٔ سوم و پنجم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب ۱۷ و ۲۱ باشد، قدرنسبت دنباله ..... است. ۲

۸. بین ۳ و ۳۳ نه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت دنباله برابر با ..... است.(جملهٔ اول دنباله ۳ است) ۳

۹. جملهٔ سوم و هفتم دنباله‌ای حسابی به ترتیب ۱۳ و ۲۱ است. مجموع ۲۰ جملهٔ ابتدایی دنباله برابر است با ۵۶۰

۱۰. در دنبالهٔ هندسی $a_۱,۳,۶,...$ جملهٔ ششم برابر است با ۴۸

۱۱. اگر جملات سوم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۲ و ۵۴ باشند، جمله دهم این دنباله برابر است با ..... ۲×۳^{۷}

۱۲. اگر $m+۳$ ، $m+۱$ ، $۲\sqrt{۲m}$ سه جمله متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند مقدار M برابر است با ..... ۱ یا $-\frac{۳}{۷}$

۱۳. در دنبالهٔ هندسی $-۱,۲,-۴,...$ مجموع ۱۴جملهٔ اول ..... برابر مجموع ۷ جملهٔ اول است. -۱۲۷

تمرین‌ها

۱. درستی و نادرستی موارد زیر را بنویسید.

۱) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

۲) $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$

۳) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

۴) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}$

۵) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$

۶) $\mathbb{R} \cap \mathbb{W} = \mathbb{R}$

۷) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

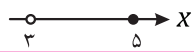
۸) $\varnothing \subset \{\ \}$

۹) $\varnothing \subset A$

۱۰) $\{\{\ \}\} = \{\varnothing\}$

۱۱) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$

۲. جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش به صورت مجموعه	نمایش با بازه	نوع بازه
		$(۲,۷)$	
	$\{x \mid x \in R, ۲ < x \leq ۳\}$		
		$(-\infty, ۳]$	
		$[۲,۴)$	
			

۳. مجموعهٔ $\mathbb{R} - [۲,۵)$ را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید و روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

۴. مجموعهٔ $A\left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, -۲ < \frac{x+۱}{۲} \leq ۳\right\}$ را به‌صورت بازه نمایش دهید.

۵. اگر $A = [-۳,۶)$ و $B = [۱,+\infty)$ و $C = (-\infty,۴)$ مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه نمایش دهید.

الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A - B$

ت) $B \cap C$ ث) $A \cap B \cap C$ ج) $(A - C) \cap B$

۶. دو بازه مانند A و B مثال بزنید که $A \cap B = [-۱,۱)$ باشد.

۷. دو بازه مانند A و B مثال بزنید که $A\cap B=\{-۱\}$ باشد.

۸. در هر مورد متناهی و نامتناهی بودن هر مجموعهٔ داده شده را مشخص کنید.

۱) مجموعهٔ حیوانات روی کرهٔ زمین.

۲) مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۵.

۳) بازهٔ $[-۱,۵)$.

۴) $\left\{\frac{۱}{x}\middle| x\in\mathbb{Z},-۵\le x\le ۱۰۰\right\}$

۵) $\left\{\frac{۱}{x}\middle|\frac{۱}{x}\in\mathbb{N},۰<x\le ۲\right\}$

۹. الف) مجموعه‌ای متناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ و کوچک‌ترین عضو آن ۳- باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ و کوچک‌ترین عضو آن ۳- باشد.

ج) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۶ باشد.

د) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۶ باشد و کوچک‌ترین عضو برای آن تعریف نشده باشد ولی همه اعضای آن مجموعه از ۱- بزرگ‌تر باشند.

۱۰. اگر $A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ و $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $C=\{۲,۳,۵,۷\}$ و $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ باشد و بدانیم مجموعهٔ M مجموعه مرجع است، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۱) $A'=$

۲) $B'=$

۳) $C'=$

۴) $A\cup B=$

۵) $A\cap B=$

۶) $A\cup C=$

۷) $A\cap C=$

۸) $B\cup C=$

۹) $B\cap C=$

۱۰) $(B\cap C)'=$

۱۱) $A\cup(B\cap C)=$

۱۲) $(A\cup B)\cap(B\cup C)=$

۱۳) $(A'\cap B)\cap C'=$

۱۴) $A'\cap B'\cap C'=$

۱۵) $(A'\cup B')\cap C=$

۱۶) $M\cap(A'\cap C)=$

۱۱. اگر $A=\{x \mid x \in \mathbb{N}, ۴ < x \leq ۱۰\}$ و $B=\{۲x-۱ \mid x \in \mathbb{Z}, ۲ \leq x < ۷\}$ و $C=\{۲,۳,۶,۷,۱۳\}$ باشد، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۱) $A-B=$

۲) $B-C=$

۳) $(B-A)-C=$

۴) $(A \cup B)-(A \cap B)=$

۵) $B-(A-C)=$

۶) $(B-C) \cap A=$

۷) $[(A \cup C)-B] \cap (C-B)=$

۱۲. اگر $M=\mathbb{N}$ باشد و $(A')'=\{۹,۱۰,۱۱,\ldots\}$ باشد، A' چند زیرمجموعه دارد؟

۱۳. اگر N مجموعه مرجع و $A'=\{x \mid x \geq ۲\}$ و $B'=\{x \mid x \geq ۵\}$ در این صورت $A \cup B$ را بنویسید.

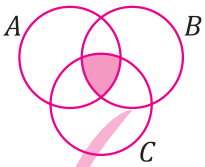
۱۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را با کمک نمودار وِن نمایش دهید.

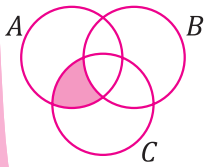
۱) $A' \cap (B' \cup C)$

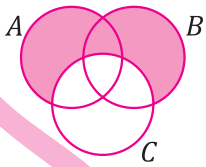
۲) $A \cup (B' \cap C)$

۳) $(A \cup B) \cap (B' \cap C)'$

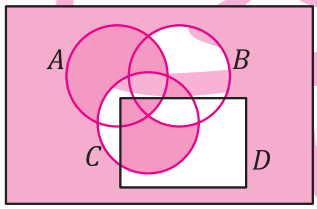
۱۵. قسمت‌های سایه‌دار را با عملیات مجموعه‌ها توصیف کنید.







۱۶. عملیاتی بنویسید که نمودار ون زیر را نشان دهد.



۱۷. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

۱) $M'=$

۲) $\varnothing'=$

۳) $(A')'=$

۴) $A \cap M=$

۵) $A \cup M=$

۶) $\varnothing \cap A=$

۷) $\varnothing \cup A=$

۸) $A \cup A'=$

۹) $A \cap A'=$

۱۰) $A \cap (A \cup B)=$

۱۱) $A \cup (A \cap B)=$

۱۸. با استفاده از عملیات مجموعه‌ها ثابت کنید:

۱) $A' \cap (A \cap B) = \varnothing$

۲) $A \cup (A' \cap B) = A \cap B$

۳) $(A \cup B')' \cap A = \varnothing$

۴) $(A - B) - B' = \varnothing$

۱۹. با استفاده از عملیات مجموعه‌ها هر یک از موارد زیر ثابت کنید.

۱) $(A \cap M')' \cap (\varnothing' \cup A)' = \varnothing$

2) $(A' \cup B') \cap (A' \cup B) = A'$

۳) $(A' \cap B) \cup (A \cup B') = M$

۲۰. اثبات کنید: $A \cap (A \cup B) = A$

۲۱. اثبات کنید: $A \cup (A \cap B) = A$

۲۲. با استفاده از عملیات مجموعه‌ها هر یک از موارد زیر ثابت کنید.

۱) $(A \cap B \cap C) \cup (A - B) \cup (A \cap B) = A$

۲) $(A - B) \cap (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

۳) $[(A \cap M) \cup (A \cap B')] \cap [(A' \cap M) \cup (A' \cap B)] = \varnothing$

۴) $[(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)] = A$

۵) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

۶) $(A - B) \cup [B \cap (A \cup B)] = A \cup B$

۲۳. فرض کنید:

$$\begin{cases} E \cap \{۳,۵,۸,۱۱\} = \{۵,۸\} \\ E \cup \{۴,۵,۱۱,۱۳\} = \{۴,۵,۷,۸,۱۱,۱۳\} \\ E \subset \{۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۳\} \\ ۱۳ \in E \end{cases}$$

در این صورت E چند عضو دارد؟

۲۴. اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,\ldots,۳۰\}$ و $B = \{x \mid ۳n+۱, n \in \mathbb{N}\}$ باشد، حاصل عبارت زیر چقدر است؟ ($n(A \cup B)$ یعنی تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$)

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) =$$

۲۵. اعداد طبیعی یک‌رقمی مجموعه مرجع و A مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی و B مجموعه اعداد فرد یک‌رقمی بوده، $A' \cup B$ دارای چند عضو است؟

۲۶. اگر $n(A) = ۱۱$ ، $n(A \cup B) = ۲۰$ و $n(A \cap B) = ۷$ تعداد عضوهای مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ و B را به دست آورید.

۲۷. اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,\ldots,۳۰\}$ و $B = \{x \mid ۴n-۱, n \in A\}$ و $B \subset A$ مجموعه B چند عضو دارد.

۲۸. در یک مهمانی ۱۸ نفر چای و ۱۷ نفر قهوه خورده‌اند که از بین آن‌ها ۷ نفر هم چای و هم قهوه خورده‌اند. اگر تعداد کل افراد ۳۰ نفر باشد، چند نفر نه چای خورده‌اند نه قهوه؟

۲۹. در یک کلاس ۶۰ نفری، ۲۸ نفر والیبال، ۲۶ نفر بسکتبال و عده‌ای هم فوتبال بازی می‌کنند. از این میان ۱۰ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر والیبال و بسکتبال و ۹ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند به‌طوری‌که ۷ نفر در هر سه رشته بازی می‌کنند. در این کلاس چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۳۰. در کلاسی با ۳۷ نفر دانش‌آموز، ۱۲ نفر به موسیقی علاقه دارند و ۲۴ نفر به ورزش و ۶ نفر به هیچ‌کدام علاقه ندارند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) هم به موسیقی و هم به ورزش علاقه دارند.

ب) فقط به ورزش علاقه دارند.

ج) فقط به ورزش یا فقط به موسیقی علاقه دارند.

۳۱. در یک مدرسه از ۸۰ دانش‌آموز سال اولی، ۳۰ نفر مجله A و ۴۵ نفر مجله B و ۱۲ نفر هیچ‌یک از دو مجله را نمی‌خوانند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) چند نفر هر دو مجله را می‌خوانند؟

ب) چند نفر فقط مجله A را می‌خوانند؟

ج) چند نفر فقط یک مجله را می‌خوانند؟

د) چند نفر دست‌کم یک مجله را می‌خوانند؟

هـ) چند نفر حداکثر یک مجله را می‌خوانند؟

۳۲. در یک کلاس با ۳۰ نفر دانش‌آموز، ۱۲ نفر در شیمی، ۱۴ نفر در فیزیک و ۹ نفر در زیست‌شناسی نمرهٔ ۲۰ گرفته‌اند. اگر ۹ نفر هم در شیمی و هم در فیزیک، ۷ نفر هم در شیمی و هم در زیست‌شناسی و ۵ نفر نیز هم در فیزیک و هم در زیست‌شناسی نمرهٔ ۲۰ گرفته باشند و بدانیم ۱۲ نفر در هیچ‌یک از این درس‌ها ۲۰ نگرفته‌اند، آنگاه چند نفر در هر سه درس ۲۰ گرفته‌اند؟

۳۳. ظاهراً در پایهٔ اول، اگر خوب بگردید، چند نفر علاقه‌مند به علم می‌توانید پیدا کنید. تعدادشان ازاین‌قرار است: ۱۸ نفر علاقه‌مند به فیزیک، ۲۱ نفر علاقه‌مند به ریاضی و ۱۴ نفر علاقه‌مند به زیست‌شناسی. نکتهٔ عجیب‌تر این‌که ۹ نفر هم به فیزیک و هم به ریاضی علاقه‌مند هستند، ۶ نفر هم علاقه‌مند به زیست و فیزیک. حال تعداد علاقه‌مندان به زیست و ریاضی حداکثر چند نفر خواهند بود؟ علاقه‌مندان به هر سه شاخه چطور؟

۳۴. برای سه مجموعهٔ A و B و C می‌دانیم تعداد اعضای $A-B$ و $B-C$ و $B-A$ و $C-A$ و $C-B$ به ترتیب ۳ و ۲ و ۲ و ۴ و ۵ است. تعداد اعضای $A-C$ را به دست آورید.

۳۵. یک کارخانهٔ سازندهٔ خودرو قبل از تحویل خودرو به مشتریان، ۱۰۰ تا از خودروها را به‌طور تصادفی انتخاب کرده و مورد بازدید فنی قرار می‌دهد. در این بررسی ملاحظه می‌شود از ۴۲ خودرو فاقد نقص فنی، ۲۳ خودرو نقص فرمان، ۲۶ خودرو نقص چراغ، ۳۲ خودرو نقص موتور، ۹ خودرو نقص فرمان و چراغ، ۱۰ خودرو نقص فرمان و موتور و ۱۲ خودرو نقص چراغ و موتور دارند.

الف) تعداد خودروهایی که هر سه نقص را دارند، مشخص کنید.

ب) تعداد خودروهایی را که فقط یک نقص دارند، بیابید.

مسائل دنباله

۳۶. چهار جملهٔ اول هریک از دنباله‌های زیر که جملهٔ عمومی آن‌ها داده شده است را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$ ب) $a_n = ۳n^۲ - \frac{۱}{n}$ ج) $a_n = ۲^n - n^۲$

۳۷. جملهٔ پنجم دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{(-۱)^n}{۲n-۱}$ چند برابر جملهٔ چهاردهم آن است؟

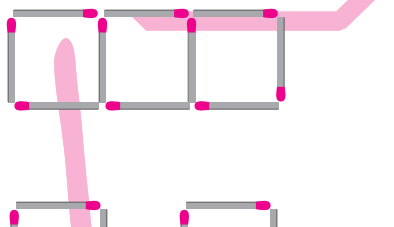
۳۸. یک جملهٔ عمومی برای هریک از دنباله‌های داده‌شده پیشنهاد کنید.

الف) ..... ، ۱۱ ، ۹ ، ۷ ، ۵ ب) $..., \frac{۱۶}{۵}, \frac{۸}{۴}, \frac{۴}{۳}, ۱$ پ) $..., ۱۶, -۹, ۴, -۱$

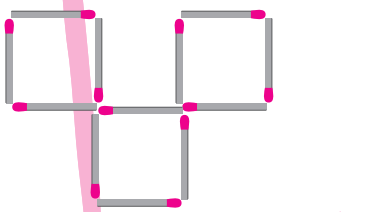
ت) $..., \frac{۱}{۲۰}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۲}$ ث) $..., ۹۹۹۹, ۹۹۹, ۹۹, ۹$

۳۹. در هریک از شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در مرحلهٔ nاُم را حدس بزنید.

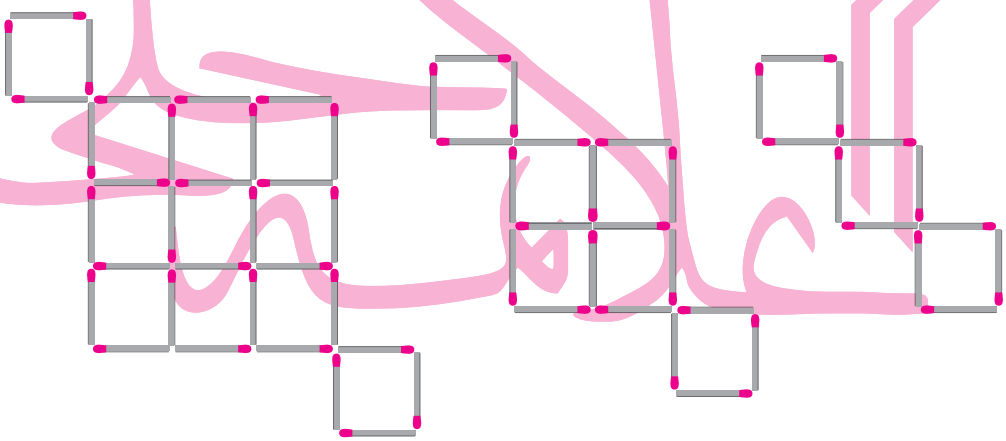
الف)



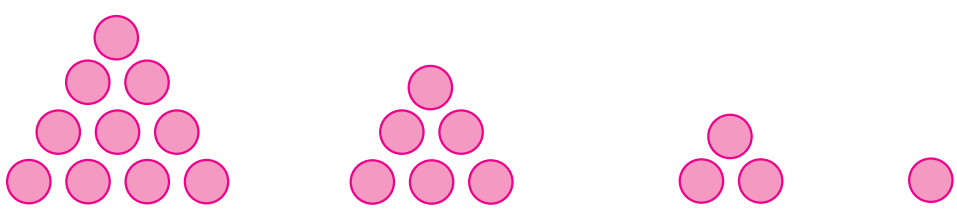
ب)



پ)



۴۰. در شکل زیر، جملهٔ عمومی تعداد توپ‌های به‌کاررفته در هر مرحله را حدس بزنید.



۴۱. جملهٔ چندم دنبالهٔ $a_n = \frac{۲n^۲ - ۴n}{n+۱۰}$ عدد ۳ است؟

۴۲. اگر در یک دنباله جملهٔ $(۲n+۱)$اُم، از رابطهٔ $۲n^۲ - n + ۱$ محاسبه گردد، جملات پنجم و هفتم را به دست آورید.

۴۳. اگر بدانیم $a_{۳n+۲} = \frac{n+۱}{n+۵}$، جملات پنجم، هشتم و هفدهم دنبالهٔ a_nرا بنویسید.

۴۴. در هر قسمت یک دنبالهٔ بازگشتی داده شده است. در هر مورد پنج جملهٔ اول دنباله را بنویسید.

الف) $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \quad , \quad a_۱ = a_۲ = ۲ \quad (n \geq ۳)$ ب) $a_۱ = ۱ \quad , \quad a = ۲a_{n-۱} + ۳ \quad (n \geq ۲)$

۴۵. رضا اول هفته ۱۶۰۰ تومان پول‌توجیبی می‌گیرد و در کشوی میز خود قرار می‌دهد و تا آخر هفته نیمی از پول داخل کشو را خرج می‌کند. اگر از قبل، پولی در کشو نباشد، رضا در پایان هفتهٔ اول چقدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفتهٔ دوم چقدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفتهٔ سوم چقدر پول در کشو دارد؟ پول‌های رضا در پایان هر هفته را به‌صورت یک دنباله در نظر بگیرید و چهار جملهٔ اول این دنباله را بنویسید. بین جملهٔ nاُم و $(n+۱)$اُم این دنباله چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۴۶. مجموع ۳۵ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = \frac{۱}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}}$

۴۷. مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = \frac{۱}{n(n+۱)}$ را به دست آورید.

۴۸. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌تواند یک دنبالهٔ حسابی باشد و سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را بنویسید

الف) $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \ldots$ ب) $-۱۵, -۱۸, -۲۱, -۲۴, \ldots$

پ) $۰, \sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \ldots$ ت) $-۲, -۲, -۲, -۲ \ldots$

۴۹. در هر مورد مشخص کنید آیا جملهٔ عمومی داده‌شده متعلق به یک دنبالهٔ حسابی است؟ درصورتی‌که دنباله حسابی است قدرنسبت را تعیین کنید.

الف) $a_n = ۳n - ۲$ ب) $a_n = \frac{۱}{n} + n$

پ) $a_n = ۵ + \frac{n}{۲}$ ت) $a_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}$

۵۰. اگر بدانیم دنبالهٔ روبه‌رو، یک دنباله حسابی است: ۳ ،۸ ،۱۳ ،۱۸ ،...

الف) جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) جملهٔ بیستم را مشخص کنید.

پ) عدد ۱۳۹۳ جملهٔ چندم این دنباله است؟

ت) آیا عدد ۱۰۲ متعلق به این دنباله است؟

۵۱. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی $a_n = ۷n - ۳$ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

۵۲. در دنباله‌ای داریم $a_{n+۱} = a_n + ۳$ و $a_۱ = ۴$. جملهٔ عمومی این دنباله را برحسب n مشخص کنید.

۵۳. یک بازیکن فوتبال در هنگام بازی صدمه می‌بیند و مجبور می‌شود زانوی خود را عمل کند. بعد از عمل، پزشک معالج به او پیشنهاد می‌دهد که در هفتهٔ اول روزی ۱۲ دقیقه و هر هفته ۳ دقیقه به زمان دویدن خود اضافه کند. هنگامی‌که زمان دویدن او به ۱۳۸ دقیقه برسد می‌تواند برای تیم خود بازی کند و مشخص کنید بعد از چند هفته می‌تواند برای تیم خود بازی کند.

۵۴. ماشینی با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتربرساعت حرکت می‌کند و در حال دور شدن از شهر کرمان است. این ماشین در شروع حرکت ۱۵ کیلومتر از کرمان فاصله دارد. فاصله این ماشین از کرمان پس از ۹ ساعت چقدر است؟ جملهٔ عمومی فاصلهٔ این

ماشین از شهر کرمان را برحسب بنویسید.

۵۵. شیر آبی در هر دقیقه ۳/۵ لیتر آب وارد حوض می‌کند. اگر این حوض آب ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض پس از گذشت چند دقیقه ۱۰۲ لیتر می‌شود؟

۵۶. شمعی که دارای ارتفاع ۲۵ سانتی‌متر است را روشن کرده‌ایم. اگر بدانیم این شمع در هر دقیقه ۲ میلی‌لیتر کوتاه می‌شود:

الف) بعد از گذشت چه مدت زمانی طول شمع ۱۷ سانتی‌متر خواهد شد؟

ب) بعد از گذشت چه زمانی شمع کاملاً آب خواهد شد؟

۵۷. در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ هشتم برابر ۳۱ و جملهٔ یازدهم برابر ۴۳ است. قدرنسبت و جملهٔ پنجم را حساب کنید.

۵۸. جملهٔ هفتم یک دنبالهٔ حسابی ۳۱ و جملهٔ نوزدهم آن ۷۹ است. جملهٔ بیست و پنجم آن را بیابید.

۵۹. الف) اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی را با یک عدد ثابت جمع کنیم، آیا دنبالهٔ جدید نیز حسابی خواهد بود؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، قدرنسبت دنبالهٔ جدید چه رابطه‌ای با قدرنسبت دنبالهٔ اولیه دارد؟

ب) اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی را در یک عدد ثابت ضرب کنیم، آیا دنبالهٔ جدید نیز حسابی خواهد بود؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، قدرنسبت دنبالهٔ جدید چه رابطه‌ای با قدرنسبت دنبالهٔ اولیه دارد؟

پ) اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی را به توان ۲ برسانیم، آیا دنبالهٔ جدید نیز حسابی خواهد بود؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، قدرنسبت دنبالهٔ جدید چه رابطه‌ای با قدرنسبت دنبالهٔ اولیه دارد؟

۶۰. بین دو عدد ۲۱ و ۳۹ پنج عدد قرار دهید که این ۷ عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند (دنباله صعودی است.)

۶۱. دنبالهٔ زیر به ازای چه مقادیری از x یک دنبالهٔ حسابی خواهد بود؟

$$۱-x\ ,\ ۲+x\ ,\ ۱+۲x$$

۶۲. اگر دنبالهٔ روبه‌رو، یک دنبالهٔ حسابی باشد، جملهٔ دهم آن را بیابید. $a-۱۲, ۲a-۱۱, ۳۵-۶a, \ldots$

۶۳. اگر زوایای مثلثی باهم تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند، اندازهٔ زاویهٔ متوسط را بیابید.

۶۴. مجموع ۳ عدد که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند ۲۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۳۱ است. این سه عدد را بیابید.

۶۵. دریک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر محیط آن ۴۸ باشد، اندازهٔ اضلاع را به دست آورید.

۶۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول اضلاع آن دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند:

الف) اگر طول ضلع کوچک‌تر ۱ سانتی‌متر باشد، طول بقیهٔ اضلاع را حساب کنید.

ب) اگر طول ضلع کوچک‌تر a باشد، طول بقیهٔ اضلاع را برحسب a حساب کنید.

۶۷. در یک دنبالهٔ حسابی تعداد جملات ۵ و مجموع این جملات ۳۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۴۹۵ است. این دنباله را مشخص کنید.

۶۸. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات پنجم و دوازدهم برابر ۱۷ است. مجموع جملات هفتم و دهم چقدر است؟

۶۹. مجموع جملات ششم، هشتم، چهاردهم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۱۸ است. جملهٔ یازدهم این دنباله را به دست آورید.

۷۰. مجموع بیست جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۷ چقدر از مجموع بیست جملهٔ دوم آن کمتر است؟

۷۱. دنبالهٔ حسابی روبه‌رو چند جملهٔ مثبت دارد؟ $\ldots , ۱۳۸ , a , ۱۴۸$

۷۲. چند عدد مضرب ۷، بین دو عدد ۴۷ و ۵۳۷ وجود دارد؟

۷۳. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع سه جمله ابتدایی ۱۵ و مجموع سه جمله بعدی ۶۰ است. جمله دوازدهم را بیابید.

۷۴. ثابت کنید که اگر $a^۲ , b^۲ , c^۲$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند، اعداد زیر نیز تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

$$\frac{۱}{a+b} , \frac{۱}{a+c} , \frac{۱}{b+c}$$

۷۵. اگر $a_n . \ldots , a_۲ , a_۱$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۱}+\sqrt{a_۲}}+\frac{۱}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۳}}+\ldots .+\frac{۱}{\sqrt{a_{n-۱}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-۱}{\sqrt{a_۱}+\sqrt{a_n}}$$

۷۶. ثابت کنید اگر $a_n , \ldots , a_۲ , a_۱$ جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند داریم:

$$\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\ldots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_n}=\frac{n-۱}{a_۱a_n}$$

۷۷. در یک دنباله حسابی $a_۵ + a_۹ = ۵۰$ مجموع سیزده جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

۷۸. مجموع ۲۰ جمله اول از دنبالهٔ حسابی را با شرط $a_۶ + a_۹ + a_{۱۲} + a_{۱۵} = ۲۰$ پیدا کنید.

۷۹. جملهٔ پنجم و پانزدهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۱۹ و ۹۹ است، مجموع ۲۰ جملهٔ اول این دنباله را حساب کنید.

۸۰. مجموع ۲۱ جمله اول یک دنباله حسابی ۶۵۱ و جملهٔ هفتم ۲۷ است. مجموع ۴۰ جملهٔ اول آن چقدر است؟

۸۱. در یک دنباله حسابی مجموع ۱۰ جملهٔ اول ۲۲۰ و تفاضل جملهٔ اول و آخر ۳۶ است. دنباله را مشخص کنید.

۸۲. مجموع چهار جملهٔ اول یک دنباله عددی ۴ و مجموع ۴ جملهٔ بعدی ۱۰۰ است. مجموع جملات نهم و دهم را حساب کنید.

۸۳. مجموع هفت جملهٔ نخست از یک دنباله حسابی ۴۹ و مجموع ۱۷ جملهٔ نخست آن ۲۸۹ است. مطلوب است مجموع n جملهٔ اول دنباله.

۸۴. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ برابر ۲۱ و مجموع $۲n$ جمله اول آن ۷۸ است. جمله اول این دنباله را محاسبه کنید.

۸۵. در یک دنباله حسابی $S_m = S_n , (m \neq n)$. ثابت کنید $S_{m+n} = ۰$.

۸۶. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌تواند یک دنبالهٔ هندسی باشد و سپس جملهٔ عمومی دنباله‌هایی که هندسی‌اند را بنویسید.

الف) ..... ۵، ۵، ۵، ۵، ۵

ب) .... ۱۶-، ۸، ۴-، ۲، ۱-

پ) ..... ۸، ۶، ۴، ۲

ت) .... $, (۱-\pi^۲)(۱+\pi) , ۱-\pi^۲ , ۱-\pi$

۸۷. در هر مورد مشخص کنید آیا جملهٔ عمومی داده‌شده متعلق به یک دنبالهٔ هندسی است؟ در دنباله‌های هندسی قدرنسبت را تعیین کنید.

الف) $a_n = ۳(\frac{۲}{۵})^{n-۱}$ ب) $b_n = ۳n - ۱$ پ) $c_n = \frac{۷}{۲^n}$

۸۸. اگر بدانیم دنبالهٔ a_n یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت مقابل است: $\frac{۳}{۴}, \frac{۳}{۲}, \ldots$

الف) جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

ب) جملهٔ دهم دنباله را بنویسید.

پ) عدد ۹۶ جملهٔ چندم این دنباله است؟

ت) آیا عدد ۱۰۲ متعلق به این دنباله است؟

۸۹. در یک دنباله داریم: $a_۱ = ۲ , a_n = ۵a_{n-۱}$:

الف) جملهٔ عمومی این دنباله را برحسب n بنویسید.

ب) جملهٔ دهم چند برابر جمله هفتم است؟

۹۰. یک ورق کاغذ بزرگ و ضخیم در اختیار داریم. اگر ضخامت ورق برابر ۱ میلی‌متر باشد، ضخامت ورق بعد از ۱۰ بار تا زدن چقدر است؟

۹۱. اگر مساحت یک دایره به شعاع R را برابر $S_۱$ بنامیم، داخل آن دو دایره را به شکل زیر رسم کنیم، مجموع مساحت آن دو دایره را $S_۲$ بنامیم و با تکرار این عملیات دنبالهٔ $S_۱ , S_۲ , S_۳ , \ldots . S_n, \ldots .$ را بسازیم، نوع دنباله و جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

۹۲. وقتی می‌گوییم در یک کشور نرخ رشد جمعیت ۳ درصد است یعنی جمعیت آن کشور در هر سال ۳ درصد بیشتر از سال قبل است. فرض کنید جمعیت یک کشور ۵۰ میلیون نفر است و نرخ رشد جمعیت ۳ درصد است.

الف) دنبالهٔ جمعیت این کشور در هر سال دنبالهٔ حسابی است یا هندسی؟ چرا؟

ب) جمعیت این کشور پس از n سال از چه رابطه‌ای محاسبه می‌شود؟

۹۳. در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ دهم ۳۶ و جملهٔ سیزدهم ۹۷۲- است. قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

۹۴. در یک دنبالهٔ هندسی قدرنسبت $-\frac{۳}{۲}$ و جملهٔ سوم $-\frac{۹}{۴}$ است. جملهٔ چندم این دنباله $-\frac{۷۲۹}{۶۴}$ است؟

۹۵. در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب جملهٔ دوم و جمله چهارم ۱۶ و حاصل‌ضرب جملهٔ پنجم و جملهٔ سوم ۶۴ است. جملهٔ اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

۹۶. بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$ شش عدد چنان درج کرده‌ایم که این هشت عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند (۲ جملهٔ اول است).

الف) قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

ب) مجموع این شش جمله را حساب کنید.

۹۷. اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی a و قدرنسبت آن q باشد. درستی و نادرستی هر یک از مواد زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) اگر $a > ۰$ باشد، هر جمله دنباله (غیر ازجمله اول) از جملهٔ قبلی خود بزرگ‌تر است.

ب) اگر $a < ۰$ باشد، هر جملهٔ دنباله (غیر ازجمله اول) از جملهٔ قبلی خود کوچک‌تر است.

پ) اگر $a > ۰$ و $q < ۰$ باشد، هر جملهٔ دنباله (غیر ازجمله اول) از جملهٔ قبلی خود کوچک‌تر است.

۹۸. الف) دنباله‌ای هندسی مثال بزنید که هر جملهٔ آن بزرگ‌تر از جملهٔ قبلی باشد (غیر از جملهٔ اول).

ب) دنباله‌ای هندسی مثال بزنید که هر جملهٔ آن کوچک‌تر از جملهٔ قبلی باشد (غیر ازجمله اول).

پ) دنباله‌ای هندسی مثال بزنید که جملات دنباله نه افزایشی باشد و نه کاهشی.

ت) دنباله‌ای مثال بزنید که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۹۹. الف) اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی را در عددی ضرب کنیم، آیا دنبالهٔ جدید نیز یک دنبالهٔ هندسی است؟ درصورتی‌که دنبالهٔ حاصل هندسی است، قدرنسبت آن نسبت به دنبالهٔ قبلی چه تغییری می‌کند؟

ب) اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی را به توان ۲ برسانیم، آیا دنبالهٔ جدید نیز هندسی است؟ درصورتی‌که دنباله حاصل هندسی است، قدرنسبت آن نسبت به دنباله قبلی چه تغییری می‌کند؟

پ) اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی را با عدد ثابتی جمع کنیم، آیا دنبالهٔ جدید نیز یک دنباله هندسی است؟

۱۰۰. اگر جملات تصاعد هندسی روبه‌رو را به توان ۲ برسانیم، جملهٔ دهم چند برابر جملهٔ هفتم می‌شود؟

3 ،-6 ،12 ،....

۱۰۱. اگر بدانیم دنباله‌های زیر دنباله‌هایی هندسی‌اند، مقدار x و قدرنسبت را بیابید.

الف) $x\ ,\ -۱\ ,\ ۵$

ب) $۵x+۱۱\ ,\ ۲x+۲\ ,\ x-۱$

۱۰۲. مجموع سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی ۳۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰۰۰ است. این دنباله را مشخص کنید.

۱۰۳. اگر در یک دنباله هندسی داشته باشیم $\frac{a_۴+a_۵}{a_۳}$، قدرنسبت دنباله را حساب کنید.

۱۰۴. در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n، اگر $a_۳-a_۱=۶$ و $a_۵-a_۱=۳۰$ باشد، جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

۱۰۵. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع دو جملهٔ اول و چهارم ۵۶ و مجموع دو جملهٔ دوم و سوم ۲۴ است. قدرنسبت دنباله را حساب کنید.

۱۰۶. توپی را از ارتفاع ۲۵۰ سانتی‌متری زمین رها می‌کنیم. می‌دانیم این توپ پس از برخورد به زمین مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد و به اندازهٔ ۶۰ درصد ارتفاع قبلی بالا می‌آید:

الف) این توپ پس از ۴ بار برخورد به زمین تا چه ارتفاعی بالا خواهد آمد؟

ب) این توپ پس از حداقل چند بار برخورد با زمین تا ارتفاعی کم‌تر از ۲۰ سانتی‌متری زمین بالا می‌آید؟

۱۰۷. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات اول و سوم $\frac{۴}{۵}$ مجموع جملات دوم و چهارم است. قدرنسبت دنباله را حساب کنید.

۱۰۸. بین دو عدد a و $a+۸$ سه واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم. a را چنان بیابید که مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $۸\sqrt{۲}$ باشد.

۱۰۹. اعداد $۳\ ,\ b\ ,\ c$ به ترتیب تشکیل دنباله حسابی و اعداد $۳\ ,\ b-۱\ ,\ c+۱$ به ترتیب تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله حسابی چند برابر قدرنسبت دنباله هندسی است؟

۱۱۰. جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.

۱۱۱. جملات دوم و سوم از یک دنباله حسابی به ترتیب ۱۴ و ۱۶ است. مجموع سه جمله‌ای اول از یک دنباله هندسی با مجموع سه جمله اول این دنباله حسابی برابر است. اگر قدرنسبت هر دو دنباله برابر باشند، جمله اول دنباله هندسی را بیابید.

۱۱۲. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱۱۳. اگر a، b و c جملات پنجم، هفدهم و سی‌وهفتم یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی باشند، ثابت کنید:
$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = ۱$.

۱۱۴. مجموع چند جمله از دنبالهٔ هندسی $۶, -۱۲, ۲۴, \ldots$ برابر ۱۰۲۶ است؟

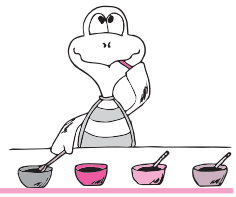
۱۱۵. اگر جمله سوم یک دنباله هندسی ۱۸ و قدرنسبت آن ۳ باشد، مجموع چند جمله آن ۷۲۸ است؟

۱۱۶. حاصل عبارت $\left(۱+x+x^۲+\ldots+x^۸\right)\left(۱-x+x^۲-\ldots+x^۸\right)$ را به ازای $x=\sqrt{۲}$ به دست آورید.

۱۱۷. بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$ شش عدد چنان درج کردیم که هشت عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند. مجموع این ۸ عدد را به دست آورید.

۱۱۸. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱۱۹. نسبت مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی به مجموع سه جمله اول همان دنباله ۲۸ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مجموعه‌ها

۱. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R},2\le x<6\}$ و $A\cap B=(3,6)$ و $A\cup B=[2,7]$ باشند، مجموعهٔ B کدام است؟

۱) $(3,7)$ ۲) $(3,7]$ ۳) $[3,7]$ ۴) $(2,7)$

۲. اگر $A=[1,4]$ و $B=(-2,3]$ و $C=[1,5)$ حاصل $B\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $(-2,3]$ ۲) $(-2,4]$ ۳) $(-2,5]$ ۴) $[1,3]$

۳. عدد ۳ در بازهٔ $(m+1,2m+5)$ قرار دارد . حدود m کدام است؟

۱) $m>-4$ ۲) $-1<m<2$ ۳) $m<2$ ۴) $-4<m<2$

۴. مجموعهٔ $\{x\mid x\in\mathbb{R},x^2\le 4,x-1>2\}$ بیانگر کدام بازه است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(-1,2]$ ۴) $[-1,2]$

۵. اگر $A=[-3,4)$ و $B=\{x|-x\in A\}$ آنگاه مجموعهٔ $A-B$ کدام بازه است؟

۱) $(3,4)$ ۲) $(-4,-3)$ ۳) $(-3,3)$ ۴) $(-4,4)$

۶. اگر $A\cap B=\{1,2\}$ و $A\cap B'=\{3,4\}$ باشند،آنگاه مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\{1,2\}$ ۲) $\{3,4\}$ ۳) ϕ ۴) $\{1,2,3,4\}$

۷. اگر $A\subset B$ و $C'\subset B'$ باشد، آنگاه:

۱) $A\subset C$ ۲) $C\subset A$ ۳) $C\subset B$ ۴) $B\subset A$

۸. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند، حاصل مجموعهٔ زیر برابر کدام است؟

$$[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]$$

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$ ۳) A' ۴) $\varnothing$

۹. اگر A و B دو مجموعه باشند، $A'-B$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A-B'$ ۲) $A'\cap B$ ۳) $A\cup B'$ ۴) $B'-A$

۱۰. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $(A'-B)'$ برابر کدام است؟

۱) $A\cup B'$ ۲) $A'\cup B$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

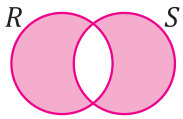
۱۱. اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعهٔ $A'\cap[(B\cup A)\cup B]$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A'\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A'\cap B'$

۱۲. مجموعهٔ $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

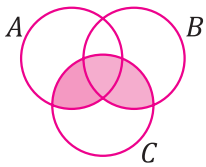
۱۳. قسمت هاشور زده در شکل مقابل تصویر ون مربوط به کدام مجموعه نیست؟



۱) $(R\cup S)\cap(S'\cup R')$ ۲) $(R\cup S)-(R\cap S)$

۳) $(R-S)\cup(S-R)$ ۴) $(R-S)\cap(S-R)$

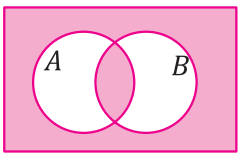
۱۴. قسمت هاشور خوردهٔ شکل زیر، تصویر ون کدام مجموعه است؟



۱) $A\cap(B\cup C)$ ۲) $(A\cap B)\cup C$

۳) $A\cup(B\cap C)$ ۴) $(A\cup B)\cap C$

۱۵. در شکل مقابل، مجموعهٔ سایه زده شده، با کدام مجموعه برابر است؟ (M مجموعهٔ مرجع است)



۱) $(A\cap B')\cup(B\cap A')$ ۲) $(A-B)\cup(B-A)$

۳) $(A\cup B)-(B\cap A)$ ۴) $(A\cup B')\cap(B\cup A')$

۱۶. اگر $A\cup B=A-B$ باشد، آنگاه کدام درست است؟

۱) $B=M$ **۲)** $B=\varnothing$ ۳) $A=M$ ۴) $A=\varnothing$

۱۷. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند و $A-B=B-A$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=B'$ ۳) $A\subseteq B'$ ۴) $B'\subseteq A$

۱۸. اگر به ازای هر دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $(A\cup B)\subset(A\cap B')$ آنگاه همواره:

۱) $A=B'$ ۲) $A=\varnothing$ **۳)** $B=\varnothing$ ۴) $A'=B$

۱۹. اگر $A\cup(B-A)=B$ باشد، آنگاه:

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $B=\varnothing$

۲۰. A و B دو مجموعهٔ غیر تهی هستند. اگر $(A\cup B)\subset B$ باشد، آنگاه:

۱) $B\subset A$ ۲) $A\cap B=\varnothing$ ۳) $A\cap B=B$ **۴)** $A\cap B=A$

۲۱. اگر $A\subseteq B'$ باشد، آنگاه حاصل $\big[(A'-B)\cup(B\cap A)\big]$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) B ۳) A ۴) $A\cup B$

۲۲. اگر $A-(B\cup C)=(A\cap C')\cup(B\cap C)$ باشد، در حالت کلی کدام‌یک نتیجه می‌شود؟

۱) $B\subseteq A$ ۲) $B\subseteq C$ **۳)** $B\cap(A\cup C)=\varnothing$ ۴) $A\cap C=\varnothing$

۲۳. A و B و C مجموعه‌هایی هستند که $A\subset(B\cap C)$ است. حاصل $(A-B)\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ **۲)** A ۳) $B-C$ ۴) $C-B$

۲۴. اگر $A-B'=B'$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $B-(A\cap B)$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A ۲) A' ۳) B' **۴)** B

۲۵. اگر $A\cap B'=A\cap C'$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A\neq\varnothing$ ۲) $B=C=\varnothing$ ۳) $A'\cap B'=A'\cap C'$ ۴) $A'\cup B'=A'\cup C'$

۲۶. اگر داشته باشیم: $A-B=B\cap(C-A)$ آنگاه کدام‌یک همواره نتیجه می‌شود؟

۱) $B\subseteq C$ **۲)** $A\subseteq B$ ۳) $A\subseteq C$ ۴) $A\cap C=\varnothing$

۲۷. اگر $A\cup(B-C)=C\cap(A\cup B)$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $B\subseteq A$ ۲) $C\subseteq A\cup B$ ۳) $C\cap B=\varnothing$ ۴) $C\cap A=\varnothing$

۲۸. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند و $(B-A)\cup A=A$ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $B\subset B-A$ ۲) $A-B=\varnothing$ ۳) $B-A=\varnothing$ ۴) $B-A=B$

۲۹. مجموعهٔ A دارای ۱۴ و مجموعهٔ B دارای ۱۷ و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۵ عضو است. مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۳۰. ۲۷ نفر از ساکنین یک روستا در دو کارگاه ریسندگی و بافندگی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۱۵ نفر در کارگاه ریسندگی و ۱۹ نفر در بافندگی شرکت کرده باشند، چند نفر فقط ریسندگی را انتخاب کرده‌اند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۱. ۲۳ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در رشتهٔ فوتبال، و ۲۹ نفر در رشتهٔ والیبال فعالیت می‌کنند. اگر ۴۰ نفر در فوتبال یا والیبال فعالیت کنند، چند نفر در هر دو رشته بازی می‌کنند؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

۳۲. اگر مجموعه‌های A و B چنان باشند که $(A-B)\cup(B-A)$ دارای ۱۷ عضو و A دارای ۱۲ عضو باشد، آنگاه مجموعهٔ B چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۳. اگر A و B و C به ترتیب دارای ۱۲، ۱۹ و ۲۷ عضو و $A\cap B\cap C$ نیز دارای ۷ عضو باشد، آنگاه $(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$ حداکثر دارای چند عضو است؟

۱) ۵۱ ۲) ۴۴ ۳) ۳۷ ۴) ۳۰

دنباله‌ها

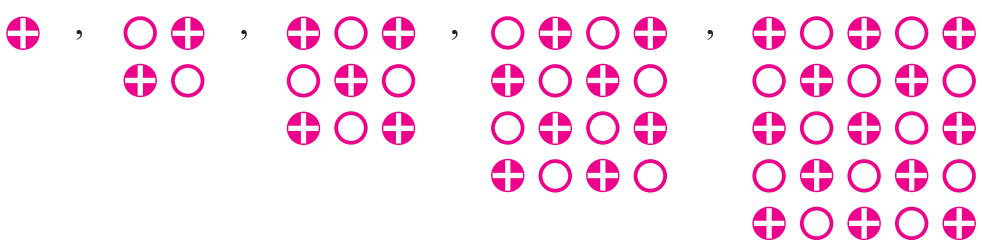
۳۴. رابطهٔ $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $U_1=U_2=1$ جمله نهم دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۲

۳۵. جملهٔ $2n+1$ ام یک دنباله به‌صورت $\frac{4n^2+1}{2n-1}$ است، مقدار جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

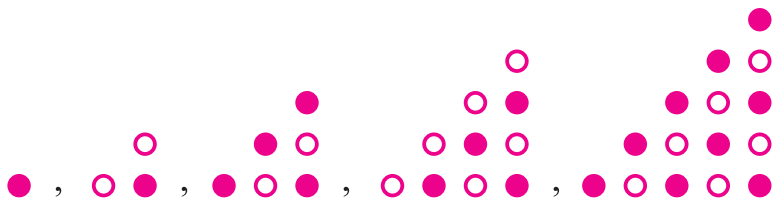
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۶. در آرایهٔ زیر تعداد دوایر توخالی در جمله سیزدهم چه تعداد است؟



۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

۳۷. با توجه به شکل در پانزدهمین شکل چند نقطهٔ توپر بکار رفته است؟



۱) ۳۶ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۰

۳۸. دنبالهٔ $a_n=(-1)^n\frac{3n-4}{2n-19}$ چند جمله منفی دارد؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

دنبالهٔ حسابی

۳۹. در دنبالهٔ حسابی $a_1=1$ و $a_2=\frac{5}{3}$، حاصل $\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}$ کدام است؟

۱) $\frac{35}{71}$ ۲) $\frac{105}{71}$ ۳) $\frac{7}{17}$ ۴) $\frac{21}{17}$

۴۰. در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم (a_5+a_6) برابر ۱۱ است. جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۳

۴۱. تفاضل جملهٔ دهم ازجملهٔ دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی، ۵ و مجموع دو جملهٔ دهم و دوازدهم، ۲۵ است، جملهٔ بیست و یکم این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۴۲. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات اول، دوم و سوم برابر ۱۲ و مجموع جملات هفتم، هشتم و نهم برابر ۴۸است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۳. چند جمله از دنبالهٔ حسابی $a_1=170$ و $a_2=161$ مثبت است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

۴۴. دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۶۳ و قدرنسبت (-4)، چند جملهٔ مثبت دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۴۵. اعداد $\ldots,\frac{5}{2},y,x,1$، چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی‌اند، مجموع پانزده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۴۶. اعداد $2p+3,3p+4,5p-1$ سه جمله متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدرنسبت این تصاعد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۷. در دنبالهٔ حسابی به صورت‌های $2,7,12,\ldots$ و $8,11,14,\ldots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۱) ۵۸ ۲) ۵۹ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

مجموع جملات دنباله حسابی

۴۸. در دنبالهٔ حسابی $a_۱ = ۳ + \sqrt{۲}$ و $a_۲ = ۵ + \sqrt{۲}$، مجموع چهار جمله چهارم چقدر از مجموع چهار جمله دوم بیش‌تر است؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۴۹. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع چهار جملهٔ اول ۱۵ و مجموع پنج جملهٔ بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جملهٔ یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۵۰. در یک دنبالهٔ عددی جملهٔ nام به‌صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۵۱. در دنبالهٔ $a_n = n^۲ - (n+۱)^۲$، مجموع ۱۹ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۳۹۹ ۳) ۴۰۱ ۴) −۴۰۰

۵۲. در یک دنبالهٔ عددی جملهٔ پنجم برابر ۳ و هر جمله ازجملهٔ ماقبل خود به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۲۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۵۳. در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد، جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۴. در یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول $a_۱$ اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چقدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۵۵. در یک تصاعد عددی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۵۶. اگر مجموع هشت جمله از تصاعد حسابی $a_۱ = ۱ + ۲p$ و $a_۲ = p - ۱$ برابر ۶۰ باشد $(S_۸ = ۶۰)$ قدرنسبت تصاعد چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) −۹ ۴) −۷

۵۷. در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است، مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله، صفر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۵۸. مجموع چند جمله از دنبالهٔ عددی ۲,۶,۱۰,... برابر جملهٔ سیزدهم است؟

۱) ۱۰ جمله ۲) ۶ جمله ۳) ۵ جمله ۴) جمله

۵۹. مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۹ کدام است؟

۱) ۱۱۹۰ ۲) ۵۸۵ ۳) ۴۹۵ ۴) ۹۹۰

۶۰. مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

۶۱. اعداد طبیعی را به‌گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته مربع کامل باشد ،

۶۲. $(۱),(۲,۳,۴),(۵,۶,۷,۸,۹),\ldots$. مجموع جملات دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۶۳. اعداد طبیعی فرد را به‌گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته ، برابر شمارهٔ آن دسته باشد. $(۱),(۳,۵),(۷,۹,۱۱),\ldots$ مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ ۳۰ کدام است؟

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

دنبالهٔ هندسی

۶۴. در یک دنبالهٔ هندسی $a_۲a_۴ = ۲a_۵$، جملهٔ اول کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۶۵. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۶. در یک دنبالهٔ هندسی صعودی جملهٔ سوم ۱۰ و جملهٔ هفتم ۴۰ است. جملهٔ اول کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۲۵ ۳) ۵ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۶۷. در یک دنبالهٔ عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶۸. اعداد ۲^a، $۴\sqrt{۲}$ و ۲^b سه جمله متوالی از دنباله هندسی‌اند، واسطهٔ عددی بین a و b کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{۲}$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

۶۹. در دنبالهٔ هندسی $۲,x,\frac{۱}{۲},\ldots$ غیر نزولی است، مجموع شش جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

۷۰. حاصل $A=(۱+x+x^۲+\cdots+x^۸)(۱-x+x^۲-\cdots+x^۸)$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۷۱. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۳ می‌باشد، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۷۲. بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند، مجموع این هشت عدد کدام است؟

۱) $۳۰(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $۴۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۰(\sqrt{۲}+۱)$ ۴) $۳۶(\sqrt{۲}+۱)$

۷۳. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموعه سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ است. جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۷۴. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع هشت جملهٔ اول $\frac{۵}{۴}$ مجموع چهار جملهٔ اول آن است. جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۵. در دنبالهٔ هندسی $۱,۲,۴,\ldots$، مجموع چهارده جملهٔ اول، چند برابر مجموع هفت جملهٔ اول آن است؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۳ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۹

۷۶. در یک تصاعد هندسی، مجموعه جملات اول و سوم برابر ۱ و مجوعهٔ چهار جملهٔ اول آن ۳ می‌باشد. مجموع ۶ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

◄ المپیاد

۱. بیماری کشندهٔ ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به‌علاوه هر بار که C به A تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز می‌خورد!

اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟

۱) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار ۲) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون

۳) بین ۱ تا ۵ میلیون ۴) بین ۵ تا ۱۰ میلیون

۵) بیش از ۱۰ میلیون

۲. در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به‌ازای خانهٔ اول شطرنج یک دانه گندم، به‌ازای خانهٔ دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانهٔ قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحهٔ شطرنج مانند شکل روبه‌رو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم به‌ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟

۱) ۰/۳۳ ۲) ۰/۵۰ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۷۵

۵) هیچ‌کدام

۳. A، B و C سه زیر مجموعهٔ دلخواه مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعهٔ مختلف می‌توان ساخت؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲۸ ۵) ۲۵۶

۴. $A، B، C$ و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط روبه‌رو صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = (B \cap C) \cup D \end{cases}$$

۱) $D = \varnothing$
۲) $C \quad D$
۳) $A \subseteq B$
۴) $A = B \cup D$
۵) $D = A \cap B$

۵. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

۱) دست کم یکی از $a^۲$ و -۱ $a^۴$ گنگ است.
۲) درست کم یکی از $a^۳ - ۱$ و $a^۶$ گنگ است.
۳) دست کم یکی از $a^۲$, $a^۳$ و $a^۵$ گویا است.
۴) $a^۲$ و $a^۳ - ۱$ گنگ هستند.
۵) حداکثر یکی از $a^۳ + ۱$ و $a^۴$ گنگ است.

۶. سه مجموعهٔ $A، B$ و C را در نظر بگیرید. کدام‌یک از گزینه‌ها، برابر مجموعهٔ اعضایی است که دست کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

۱) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
۲) $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$
۳) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$
۴) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$
۵) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

۷. $A، B$ و C سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد اعضای $A - B$, $B - C$, $B - A$, $C - A$ و $C - B$ به ترتیب برابر ۳، ۲، ۲، ۴ و ۵ است. تعداد اعضای $A - C$ چند است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳
۵) ۴

۸. $A، B$ و C سه مجموعهٔ دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعهٔ بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$. کدام گزینه حتماً درست است؟

۱) $F \subseteq C$
۲) $B \subseteq F$
۳) $F \subseteq A \quad C$
۴) $A \cap C \subseteq F$
۵) $D \cap C \subseteq F$

۹. دنبالهٔ $a_۱ , a_۲ , a_۳ , \ldots$ دارای این ویژگی است که برای هر دو عدد طبیعی m و n، اگر $a_{mn} = a_m + a_n$ و $a_۶ = ۷$, $a_{۱۵} = ۹$ و $a_{۱۰۰۰} = ۳۶$ آنگاه مقدار $a_{۳۰}$ کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۱
۵) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۱۰. اگر

$$A = \{\sqrt{۲} - \frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad B = \{۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{۲n} | n \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} | x^۲ \leq ۲\} \quad , \quad D = \{\frac{m}{۲^n} | m , n \in \mathbb{N}\}$$

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر بزرگترین عضو دارد؟

۱) $C \cap D$
۲) $A \cup B$
۳) $C \cup A$
۴) $R - D$
۵) B

آزمون دورهای

۱۱. اگر $A\cap B=\phi$ ، آنگاه مجموعه $(A'\cup B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۱۲. اگر $C\subset A\cap B$ آنگاه حاصل $C\cup[A\cap(A\cup B')]$ کدام است؟

۱) C ۲) A ۳) B ۴) B'

۱۳. حاصل عبارت $(A\cap B)\cup(B\cap C')\cup C$ کدام است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cup C$ ۳) $B\cup C$ ۴) $A-C$

۱۴. اگر $A=\{۲,۴,۶,...,۱۰۲\}$ و $B=\{۳,۶,۹,۱۲,...,۱۰۲\}$ آنگاه $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضوی است؟

۱) ۸۵ ۲) ۶۸ ۳) ۵۱ ۴) ۵۹

۱۵. اگر $A-(B-C)=\phi$ کدام یک از گزینه‌های زیر همواره صحیح است؟

۱) $A\subseteq C$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $C\subseteq A$ ۴) $A\cap B=\phi$

۱۶. اگر $(A-B)-C=\phi$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A\subseteq B$ ۲) $A\subseteq(B\cup C)$ ۳) $A\subseteq C$ ۴) $A\subseteq(B\cap C)$

۱۷. حاصل $A_n=\left(-\frac{۲}{n},\frac{n-۱}{n}\right)$ آنگاه حاصل $\bigcup_{n=۱}^{\infty}A_n$ کدام است؟

۱) $(-۲,-۱)$ ۲) $\left(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $\left(-\frac{۳}{۲},-۱\right)$ ۴) $(-۲,۱)$

۱۸. مجموعه $\bigcap_{n=۲}^{۴}\left(\bigcup_{i=۲}^{n}\left[\frac{۱}{i},۱\right]\right)$ برابر است با: $(\bigcup_{i=۱}^{n}A_i=A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup...\cup A_n)$

۱) $\{۱\}$ ۲) $\left[\frac{۱}{۲},۱\right]$ ۳) $\left[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}\right]$ ۴) $\left[\frac{۱}{۴},۱\right]$

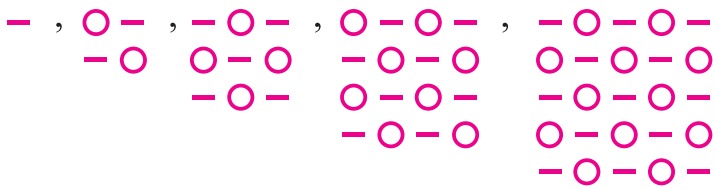
۱۹. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعه‌های نامتناهی باشند، کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $A\cap B'$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A'\cup B$ ۴) $A'\cap B$

۲۰. در دنبالهٔ حسابی مقابل چند جملهٔ مشترک کوچکتر از ۱۹۰ وجود دارد؟ $\begin{cases}۳,۷,۱۱,۱۵,...\\۲,۷,۱۲,۱۷,...\end{cases}$

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۸

۲۱. در آرایه مقابل تعداد دوایر در جملهٔ سیزدهم کدام است؟



۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

۲۲. اعداد طبیعی فرد را به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد. $(۱),(۳,۵),(۷,۹,۱۱),\ldots$ جملهٔ آخر دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۱۹ ۳) ۴۲۱ ۴) ۴۲۳

۲۳. یک دنباله‌ی حسابی، بین اعداد ۱۲ و ۸۴ تعداد ۱۱ عدد وجود دارد. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴. چند عدد دو رقمی وجود دارد که اگر دو واحد از آن‌ها کم کنیم، عدد حاصل مضرب ۳ باشد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

۲۵. اگر اعداد $۲x-۱ , ۳x , ۴x+۴$ سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند، جمله هشتم این دنباله کدام است؟

۱) ۷۶۸ ۲) ۳۸۴ ۳) ۱۹۲ ۴) ۸۱

۲۶. در یک دنباله‌ی هندسی مجموع جملات دوم و سوم برابر ۶ و مجموع جملات سوم و چهارم برابر ۱۸ است. جمله‌ی اول کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۷. بین دو عدد $-\frac{۱}{۴}$ و ۱۶- پنج عدد به گونه‌ای درج می‌کنیم که اعداد حاصل ۷ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی باشند. کوچک‌ترین عدد از این پنج عدد کدام است؟ $(q<۰)$

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۸- ۳) ۲- ۴) ۴-

۲۸. طول‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، سه جملهٔ متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. اگر مقدار عددی محیط و مساحت این مثلث با هم برابر باشند، طول بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۹. مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۶ و مجموع مکعبات این سه جمله برابر ۱۳۲ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۰. در یک دنباله‌ی هندسی مجموع ۳ جمله‌ی متوالی ۳۱ و حاصلضرب آن‌ها برابر ۱۲۵ است. در این صورت مجموع مقادیر ممکن برابر قدر نسبت چیست؟

۱) ۶/۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۶/۳

۳۱. جملات چهارم ، ششم و هفتم یک دنبالهٔ هندسی (با جملات متمایز و غیر صفر) به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابیاند. قدر نسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

محتوای تکمیلی

۳۲. در یک دنباله‌ی هندسی داریم $S_n = \frac{۲(۳^n - ۲)}{۳}$ در این صورت جمله‌ی چهارم کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲

۳۳. وسط‌های اضلاع یک مربع به ضلع ۴ سانتی‌متر را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا یک مربع و چهار مثلث به وجود آید و چهار مثلث را رنگ می‌کنیم. سپس در مربع جدید نیز وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده و مانند قبل عمل می‌کنیم. بعد از چند مرحله بیش از ۹۶ درصد مربع اولیه رنگ خواهد شد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۴. مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله عمومی a_n برابر $n^۲ - n$ است. در این صورت حاصل $a_۲ + a_۴ + \ldots + a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۵۰۵۰ ۳) ۵۵۰۰ ۴) ۵۰۰۵

۳۵. صد جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را در نظر می‌گیریم. اگر مجموع چهار جمله‌ی اول با مجموع چهار جمله‌ی آخر برابر ۶۰ باشد، مجموع این صد جمله چه‌قدر است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۷۵۰ ۳) ۹۵۰ ۴) ۱۲۵۰

۳۶. در یک دنباله‌ی حسابی با جمله عمومی a_n اگر $a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶ = ۳۸$ و $a_۴ a_۵ = ۸۸$ باشد، آن‌گاه مجموع بیست جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۷۵۰ ۳) ۵۵۰ ۴) ۴۵۰

۳۷. در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۱۲ و مجموع شش جمله‌ی اول برابر ۱۲۶ است. در این صورت جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

۳۸. در یک دنباله‌ی هندسی داریم $S_n = \frac{۲(۳^n - ۲)}{۳}$ در این صورت جمله چهارم کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲

۳۹. اگر جملات اول و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب $\frac{۷}{۳}$ و ۱۸۹ باشند، مجموع شش جمله اول آن چقدر است؟ (در دنباله جملات منفی نیز حضور دارند!)

۱) $-\frac{۱۲۴۷}{۳}$ ۲) $\frac{۲۵۴۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۲۵۴۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۲۴۷}{۳}$

۴۰. مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی ۴۰ و مجموع سه جمله بعدی آن ۵۱ است. جمله اول کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ 4) 7