فهرست

فصل ۱

مقدماتی از هندسه و استدلال

فصل ۱
مقدماتی از هندسه و استدلال

پیش‌دانسته‌ها (یادآوری مطالب گذشته)

یادآوری چند تعریف

۱- زاویه حاده (تُند): هر زاویه کوچکتر از ۹۰° درجه را زاویه حاده می‌گوییم.

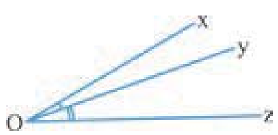
۲- زاویه منفرجه (باز): هر زاویه بزرگتر از ۹۰° درجه را زاویه منفرجه می‌گوییم.

۳- زاویه قائمه: به زاویه‌ای که برابر ۹۰° درجه باشد، زاویه قائمه می‌گوییم.

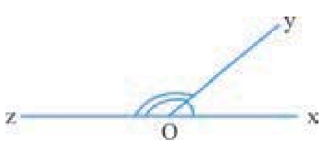
۴- زاویه نیم صفحه: به زاویه‌ای که برابر ۱۸۰° درجه باشد، زاویه نیم‌صفحه می‌گوییم.

۵- دو زاویه متمم: به دو زاویه‌ای که مجموعشان برابر با ۹۰° درجه باشد دو زاویه متمم می‌گوییم.

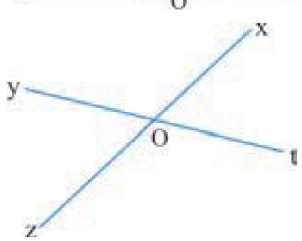
۶- دو زاویه مکمل: به دو زاویه‌ای که مجموعشان برابر با ۱۸۰° درجه باشد دو زاویه مکمل می‌گوییم.



۷- دو زاویه مجاور: به دو زاویه‌ای که در رأس و یک ضلع مشترک بوده و اضلاع غیرمشترکشان در طرفین ضلع مشترک باشند، دو زاویه مجاور می‌گوییم. به‌عنوان مثال دو زاویه $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ دو زاویه مجاورند.

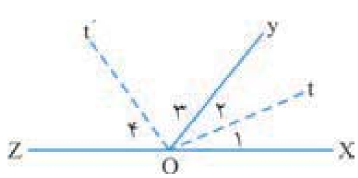


۸- دو زاویه مجانب: به دو زاویه مجاور که مکمل نیز باشند، دو زاویه مجانب می‌گوییم. دو زاویه $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ در شکل مقابل، مجانبند.



۹- دو زاویه متقابل به رأس: دو زاویه که رأس مشترک داشته باشند واضلاع آن‌ها دوبه‌دو در امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند، دو زاویه متقابل به رأس می‌گوییم. مانند دو زاویه $x\hat{O}t$ و $y\hat{O}z$ در شکل مقابل.

نکته ۱: نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند.



فرض	ot و ot' نیمساز
حکم	$t\hat{O}t' = ۹۰^\circ$

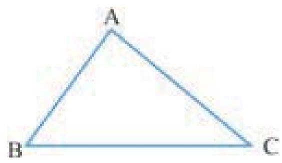
حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۴=۱۸۰^\circ\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲,\hat{O}_۳=\hat{O}_۴\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\hat{O}_۲+۲\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۹۰^\circ\Rightarrow t\hat{O}t'=۹۰^\circ$$

نکته ۲: نیمسازهای دو زاویه متقابل به رأس در یک امتدادند.

حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

مثلث



سه خط که دوبه‌دو یکدیگر را در سه نقطه متمایز قطع می‌کنند، شکلی به‌وجود می‌آورند که مثلث می‌نامیم. به سه پاره‌خط ایجادشده (AB، AC و BC) اضلاع و به نقاط A، B و C رأس‌های مثلث می‌گوییم. مثلث مقابل را به‌صورت $\overset{\Delta}{ABC}$ بیان می‌کنیم و می‌خوانیم مثلث ABC.

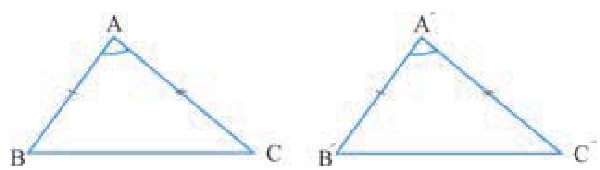
> **تذکر مهم:** در مثلث، به اضلاع و زوایا «اجزای اصلی» و به ارتفاع، میانه و نیمساز و (عمود منصف) «اجزای فرعی» مثلث می‌گوییم.

دو مثلث همنهشت (دو مثلث برابر)

دو مثلث را همنهشت می‌گوییم هرگاه قابل انطباق باشند و کاملاً یکدیگر را بپوشانند.

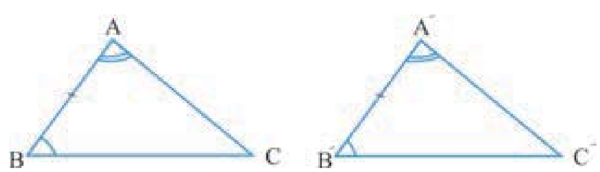
حالت‌های همنهشتی دو مثلث

الف) حالت دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)



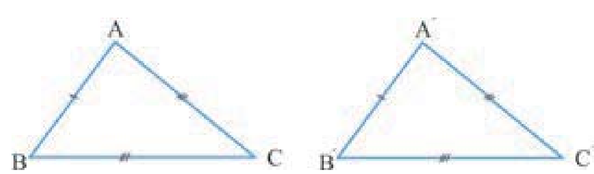
$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \hat{A}' &= \hat{A}' \\ AC &= A'C' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

ب) حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)



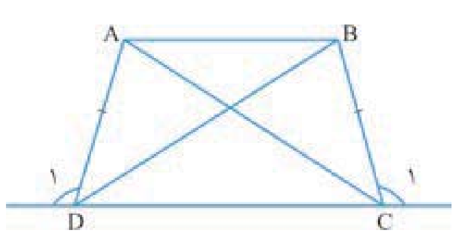
$$\left.\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ AB &= A'B' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

پ) حالت سه ضلع (ض ض ض)



$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ BC &= B'C' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال ۱: در شکل مقابل $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$ و $AD = BC$. ثابت کنید: $AC = BD$



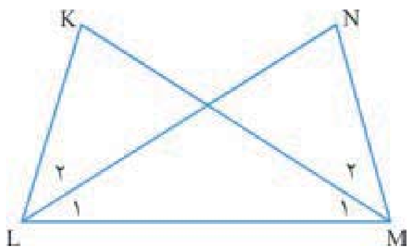
حل:

فرض	$AD = BC, \hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$
حکم	$AC = BD$

$\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱ \Rightarrow A\hat{D}C = B\hat{C}D$ (مکمل دو زاویه برابر با هم برابرند)

$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{ADC} \\ \div \\ \overset{\Delta}{BDC} \end{matrix} \left\{\begin{aligned} AD &= BC \\ A\hat{D}C &= B\hat{C}D \\ DC &= DC \ \text{(مشترک)} \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta \cong \Delta \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AC = BD$$

مثال ۲: در شکل مقابل $\hat{M}_1 = \hat{L}_1$ و $\hat{M}_2 = \hat{L}_2$. ثابت کنید: $KL = NM$



حل:

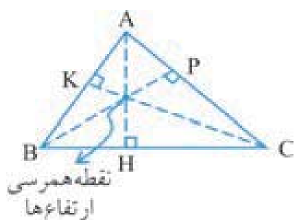
حکم	$KL = NM$
فرض	$\hat{M}_1 = \hat{L}_1, \hat{M}_2 = \hat{L}_2$

$$\begin{matrix} \hat{M}_1 = \hat{L}_1 \\ \hat{M}_2 = \hat{L}_2 \end{matrix} \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \Rightarrow \hat{M} = \hat{L}$$

$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{KLM} \\ \overset{\Delta}{NLM} \end{matrix} \begin{cases} \hat{M} = \hat{L} \\ LM = LM \\ \hat{M}_1 = \hat{L}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta \cong \Delta \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} KL = NM$$

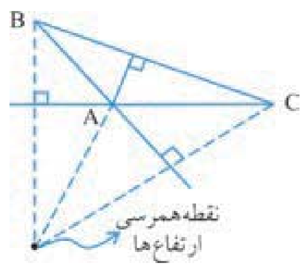
اجزای فرعی مثلث

۱- ارتفاع‌های مثلث: ارتفاع مثلث، پاره‌خطی است که از یک رأس بگذرد و بر ضلع مقابل آن رأس عمود می‌شود.

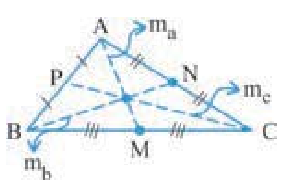


* هر مثلث سه ارتفاع دارد. در مثلث ABC، ارتفاع‌ها وارد بر اضلاع BC، AC و AB را به‌ترتیب با h_a، h_b و h_c نمایش می‌دهیم. ارتفاع‌های هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

تذکر ۱: اگر یکی از زوایای مثلثی، منفرجه باشد، آنگاه دو ارتفاع از مثلث، خارج مثلث قرار می‌گیرد.

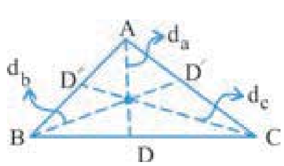


۲- میانه‌های مثلث: میانه مثلث، پاره‌خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می‌کند.



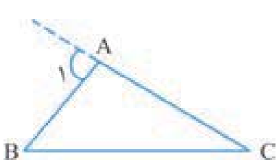
*هر مثلث سه میانه دارد و همگی در یک نقطه به‌نام «مرکز ثقل مثلث» یکدیگر را قطع می‌کنند. میانه‌های مثلث ABC را با m_a، m_b و m_c نمایش می‌دهیم.

۳- نیمسازهای داخلی مثلث: نیمساز داخلی هر زاویه مثلث، پاره‌خطی است که آن زاویه را نصف می‌کند.

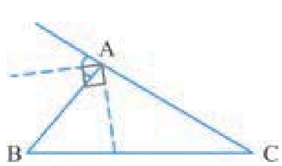


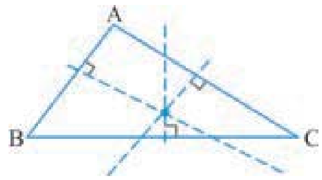
* هر مثلث سه نیمساز داخلی دارد که همگی در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. نیمسازهای داخلی مثلث ABC را با d_a، d_b و d_c نمایش می‌دهیم.

تذکر ۲: در مثلث، به زاویه‌ای که از امتداد یکی از اضلاع زاویه داخلی مثلث، پدید می‌آید، زاویه خارجی نظیر آن زاویه می‌گوییم. در شکل مقابل $\hat{A}_1$ زاویه خارجی نظیر زاویه A است. به نیمساز زاویه $\hat{A}_1$، نیمساز خارجی نظیر رأس A می‌گوییم.



نکته ۳: در هر مثلث، هر زاویه داخلی، با زاویه خارجی نظیرش، مجانب می‌باشد. بنابراین نیمساز داخلی همواره بر نیمساز خارجی نظیرش، در مثلث عمود می‌باشد.





۴- عمودمنصف‌های اضلاع مثلث: عمودمنصف هر ضلع مثلث، خطی است که از وسط آن ضلع می‌گذرد و بر آن ضلع عمود می‌شود.

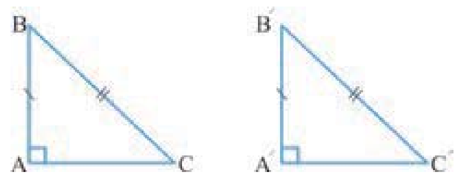
* هر مثلث سه عمودمنصف دارد که همگی در یک نقطه همرسند (از یک نقطه می‌گذرند)

حالت‌های همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه

علاوه‌بر سه حالت همنهشتی که برای هر مثلث بیان شد، دو حالت زیر نیز برای مثلث‌های قائم‌الزاویه قابل استفاده می‌باشد.

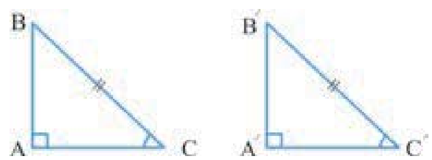
الف) حالت وتر و یک ضلع:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'=۹۰^\circ\\ BC=B'C'\\ AB=A'B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$



ب) حالت وتر و یک زاویه حاده:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'=۹۰^\circ\\ BC=B'C'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$



نکته مهم: **(قضیه خطوط موازی و مورب): اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند، زوایای حاده با هم برابرند. (عکس قضیه نیز برقرار است)**

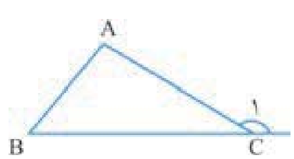
حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

> **تذکر مهم:** (قضیه مجموع زوایای داخلی مثلث): مجموع زوایای داخلی هر مثلث، ۱۸۰° می‌باشد. (مجموع زوایای خارجی هر مثلث، ۳۶۰° است).
>
> **حل:** در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

نکته ۴: در هر مثلث، هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش.

حل:

ف	زاویه خارجی $\hat{C}_1$
ح	$\hat{C}_1=\hat{A}+\hat{B}$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{C}_1=۱۸۰^\circ\end{array}\right.=\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}}=\cancel{\hat{C}}+\hat{C}_1\Rightarrow\hat{C}_1=\hat{A}+\hat{B}$$

چند نکته مهم:

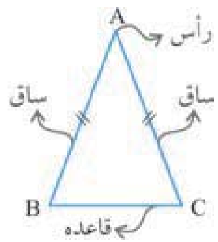
۱- در هر مثلث زاویه بین نیمسازهای دو زاویه داخلی برابر است با: $۹۰+\dfrac{\text{زاویه سوم}}{۲}$.

۲- در هر مثلث زاویه بین نیمسازهای دو زاویه خارجی برابر است با: $۹۰-\dfrac{\text{زاویه سوم}}{۲}$

۳- در هر مثلث زاویه بین نیمساز یک زاویه داخلی با نیمساز یک زاویه خارجی، برابر است با: $\dfrac{\text{زاویه سوم}}{۲}$.

حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

مثلث متساوی‌الساقین



مثلثی را که در آن دو ضلع مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین می‌گوییم. هر یک از دو ضلع مساوی را ساق و ضلع سوم را قاعده و به محل برخورد دو ساق، رأس مثلث می‌گوییم.

ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین

۱- در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبرو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲- مثلثی که دو زاویه برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین می‌باشد.

۳- در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس و ارتفاع و میانه وارد بر قاعده و عمودمنصف قاعده برهم منطبق‌اند.

۴- مثلثی که میانه و ارتفاع نظیر یک ضلع آن بر هم منطبق باشند، متساوی‌الساقین است.

۵- مثلثی که ارتفاع نظیر یک ضلع آن، نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع هم باشد، متساوی‌الساقین است.

۶- مثلثی که میانه نظیر یک ضلع آن، نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع هم باشد، متساوی‌الساقین است.

۷- در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای داخلی زوایای مقابل به ساق‌ها با هم برابرند.

۸- مثلثی که دو نیمساز داخلی‌اش برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۹- در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.

۱۰- مثلثی که دو ارتفاع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

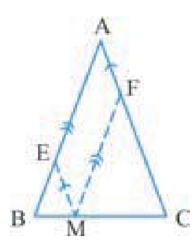
۱۱- در مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.

۱۲- مثلثی که دو میانه برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۱۳- در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز خارجی نظیر رأس با قاعده موازی است.

۱۴- اگر در مثلثی، نیمساز خارجی یکی از زوایا با ضلع روبرویش موازی باشد در این صورت مثلث متساوی‌الساقین است.

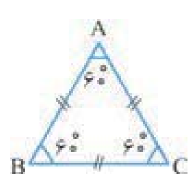
نکته مهم: در مثلث متساوی‌الساقین اگر از نقطه‌ای دلخواه روی قاعده خطوطی به موازات دو ساق رسم کنیم در این صورت مجموع این دو خط با طول ساق مثلث برابر خواهد بود.



$$ME + MF = AB \text{ یا } AC$$

حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل مطرح شده است.

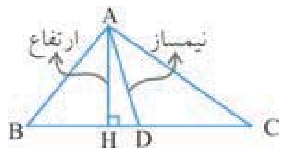
مثلث متساوی‌الاضلاع



مثلثی را که در آن سه ضلع مساوی باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع می‌گوییم. کاملاً بدیهی است که زوایای داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابر و هر کدام 60° می‌باشد.

تذکر مهم: با توجه به اینکه مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین نیز می‌باشد، ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع به‌راحتی قابل بررسی است!

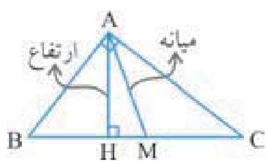
نکته ۵: در هر مثلث زاویه بین نیمساز داخلی و ارتفاع یک رأس برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر.



حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

$$H\hat{A}D = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$$

نکته ۶: در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر است با قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر



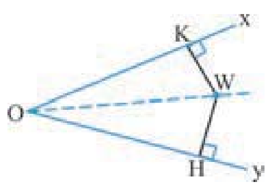
حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است

$$H\hat{A}M = |\hat{B} - \hat{C}|$$

ترسیمات هندسی

ترسیمات هندسی یعنی رسم یا ساختن شکل‌های هندسی به کمک خط‌کش و پرگار. این ترسیمات، مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکل‌های هندسی هستند و بهتر از هر وسیله دیگری، زمینه را برای فراگیری حل مسائل ریاضی فراهم می‌کنند.

تعریف نیمساز (یادآوری): نیمساز هر زاویه، نیم‌خطی است که آن زاویه را نصف می‌کند.

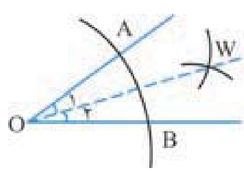


نکته ۷: (ویژگی نیمساز): هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

$$\boxed{W \text{ روی نیمساز است } \Leftrightarrow WK = WH}$$

حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل مطرح شده است.

مثال ۳: طریقه رسم نیمساز یک زاویه داده شده را به کمک خط‌کش و پرگار توضیح دهید.



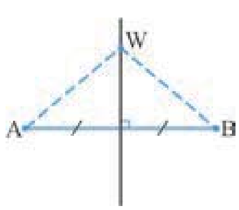
حل: دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز می‌کنیم و به مرکز O کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطه A و B قطع کند. سپس به مراکز A و B و به شعاع یکسان (بیش از نصف طول AB) دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در W قطع کنند از O به W وصل می‌کنیم OW نیمساز زاویه موردنظر است.

(مثلث‌های OAW و OBW به حالت سه ضلع همنهشت و بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$)

تذکر ۳: روش دیگر برای رسم نیمساز یک زاویه در سؤال ۵ سؤالات تشریحی بیان شده است.

تعریف عمودمنصف (یادآوری): عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط آن پاره‌خط بر آن عمود می‌شود.

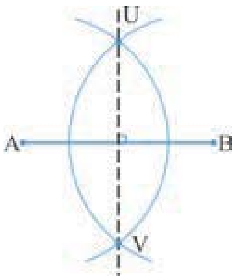
نکته ۸: (ویژگی عمودمنصف): هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.



$$\boxed{W \text{ روی عمودمنصف است } \Leftrightarrow AW = BW}$$

حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

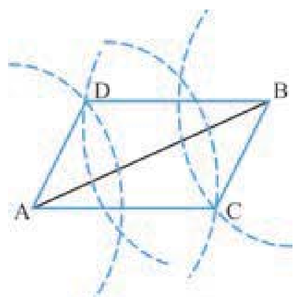
مثال ۴: طریقه رسم عمودمنصف پاره‌خط AB را به کمک خط‌کش و پرگار توضیح دهید.



حل: به مراکز A و B و شعاع یکسان (بیش از نصف طول AB) دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در دو نقطه U و V قطع کنند از U به V وصل می‌کنیم. UV بخشی از عمودمنصف پاره‌خط AB است. (زیرا U از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و همچنین V).

نکته مهم: برای رسم یک چهارضلعی خاص مانند مربع، لوزی، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، ذوزنقه و... از ویژگی‌های آن استفاده می‌کنیم. (برای درک بهتر این ویژگی‌ها به فصل ۳ مراجعه کنید)

مثال ۵: متوازی‌الاضلاع رسم کنید که طول اضلاعش ۳ و ۵ باشد و طول قطر آن ۶ باشد.



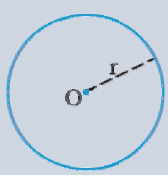
حل: ابتدا پاره‌خط AB را به طول ۶ رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع‌های ۳ و ۵ دو کمان رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B با همان شعاع‌های ۳ و ۵ دو کمان دیگر رسم می‌کنیم. مانند شکل دو تا از نقاط برخورد کمان‌ها را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع موردنظر است زیرا اضلاع روبرویش دو به دو با هم برابرند.

تذکر مهم: در هر مثلث، سه نیمساز داخلی، سه عمودمنصف و سه ارتفاع همرسند و نقطه همرسی نیمسازهای داخلی از سه رأس مثلث به یک اندازه است و نقطه همرسی عمودمنصف‌ها از اضلاع مثلث به یک فاصله است.

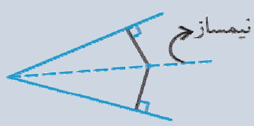
حل: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

تذکر مهم: در بحث ترسیمات هندسی توجه به مطالب زیر ضروری است.

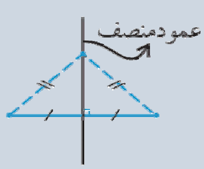
۱) مجموعه نقاطی که همگی فاصله‌شان از نقطه O برابر r باشد، محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌باشد.



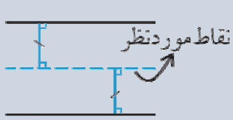
۲) مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع (اضلاع زاویه) به یک فاصله باشند، نقاط روی نیمساز زاویه می‌باشد.



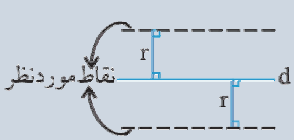
۳) مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز (از دو سر پاره‌خط) به یک اندازه باشند، نقاط روی عمودمنصف پاره‌خط می‌باشد.

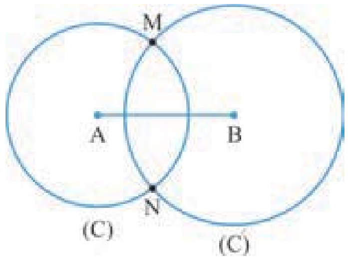


۴) مجموعه نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، نقاط روی خطی است موازی با دو خط، در بین آن‌ها و به یک فاصله از هر یک.



۵) مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله r باشند، نقاط روی دو خط موازی با d در طرفین d و به فاصله r از آن می‌باشد.





مثال ۶: دو نقطه مانند A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید و نقاطی بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

حل: مجموعه نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند نقاط روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ (دایره C) و مجموعه نقاطی که از B به فاصله ۲/۵ سانتی‌متر باشند، نقاط روی محیط دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲/۵ (دایره C′) می‌باشند، بنابراین محل تقاطع این دو دایره، نقاطی هستند که از A، فاصله‌شان ۲ و از B فاصله‌شان ۲/۵ سانتی‌متر است (دو نقطه M و N).

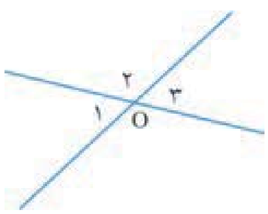
استدلال

استدلال استقرایی: به روش نتیجه‌گیری کلی براساس تجربه، آزمایش و مشاهده (مثال) را استدلال استقرایی می‌گوییم. (از جزء به کل)

استدلال استنتاجی: به روش نتیجه‌گیری کلی برمبنای حقایقی (تعاریف، اصول، قضایا، تعریف نشده‌ها) که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی می‌گوییم.

استدلال تمثیلی: اگر حکمی را که در مورد یک چیز صادق است را به چیز دیگری که از جهاتی با هم شباهت دارند، نتیجه بگیریم، از استدلال تمثیلی کمک گرفته‌ایم. (از جزء به جزء)

تذکر مهم: در هندسه با استدلال استقرایی، فقط حدس می‌زنیم که می‌تواند درست و یا نادرست باشد ولی برای اثبات درستی این حدس از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم. به‌عبارت دیگر در هندسه تنها راه اثبات، استدلال استنتاجی است.



مثال ۷: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت می‌کنیم، دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند.

$$\begin{matrix}\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ\end{matrix}\Rightarrow \hat{O}_۱+\cancel{\hat{O}_۲}=\cancel{\hat{O}_۲}+\hat{O}_۳\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۳$$

گزاره: به یک جمله خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد، گزاره گفته می‌شود. هرچند درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره ساده: اگر گزاره تنها یک خبر را اعلام کند، به آن گزاره ساده می‌گوییم. (مثال: فردا هوا بارانی است)

گزاره مرکب: گزاره‌ای که بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد، گزاره مرکب نامیده می‌شود. (مثال: فردا هوا بارانی است و پانزده یک عدد اول است).

نقیض یک گزاره: هر گزاره می‌دانیم یا درست است و یا نادرست، نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش (درستی یا نادرستی) آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است. (به‌عنوان مثال نقیض گزاره «مجموع زوایای داخلی مثلث °۱۸۰ است» به‌صورت «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی مثلث °۱۸۰ است» و یا به‌صورت «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن °۱۸۰ نیست» می‌باشد).

تذکر ۴: در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود. مثلاً «اگر باران ببارد مسابقه برگزار نمی‌شود» و یا «اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، دو زاویه برابر دارد». به چنین گزاره‌هایی **گزاره‌های شرطی** گفته می‌شود.

استدلال برهان غیرمستقیم (برهان خُلف): یکی از روش‌های استدلال استنتاجی می‌باشد، بدین صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (فرض خُلف) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.

مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی، نادرست است مثال نقض می‌گوییم.

تذکر ۵: مثال نقض برای رد احکام کلی است بنابراین درستی مطلبی را نمی‌توان با مثال نقض ثابت کرد.

تذکر ۶: اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نتوانیم بیابیم، نمی‌توان در مورد درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

مثال ۸: مثال نقض برای حکم کلی «هر چهارضلعی که چهارضلع برابر داشته باشد، مربع است» می‌تواند لوزی باشد.

تذکر ۷: هر گزاره (عبارتی) که با استفاده از استدلال استنتاجی، درستی‌اش ثابت شود، قضیه نامیده می‌شود. به عبارت دیگر به گزاره همواره درست، قضیه می‌گوییم.

تذکر ۸: در یک مسأله، به اطلاعات داده شده، فرض و به مطلب (مطالبی) که درستی‌اش باید ثابت شود، حکم می‌گوییم.

تذکر ۹: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

قضیه دوشرطی: اگر عکس یک قضیه نیز درست (قضیه) باشد، قضیه را دوشرطی می‌گوییم. مانند: قضیه زیر

تذکر ۱۰: قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (که می‌خوانیم اگر و تنها اگر) بیان نمود. به‌عنوان مثال قضیه زیر که دوشرطی است به این صورت بیان می‌شود. فرض می‌کنیم ABC مثلث دلخواهی باشد.

$$\mathrm{AC} > \mathrm{AB} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} > \hat{\mathrm{C}}$$

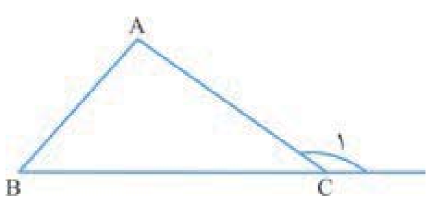
مثال ۹: در یک مثلث دو ضلع برابرند اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با هم برابر باشند.

نکته ۹: هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگتر است.

حل:

فرض	$\hat{\mathrm{C}}_1$ (زاویه خارجی)
حکم	$\hat{\mathrm{C}}_1 > \hat{\mathrm{A}}\ ,\ \hat{\mathrm{C}}_1 > \hat{\mathrm{B}}$

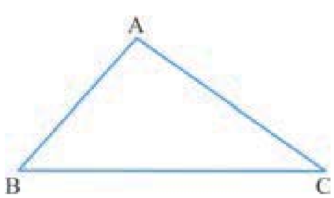
می‌دانیم: $\hat{\mathrm{C}}_1 = \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathrm{C}}_1 > \hat{\mathrm{A}} \\ \hat{\mathrm{C}}_1 > \hat{\mathrm{B}} \end{cases}$



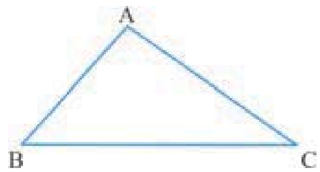
نکته (قضیه): اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر.

فرض	$\mathrm{AC} > \mathrm{AB}$
حکم	$\hat{\mathrm{B}} > \hat{\mathrm{C}}$

اثبات: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.

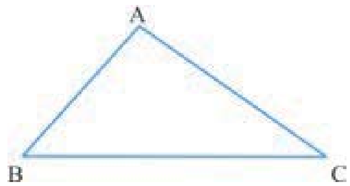


نکته (عکس قضیه): اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچکتر.



$\hat{B} > \hat{C}$	فرض
$AC > AB$	حکم

اثبات: در سؤالات تشریحی انتهای فصل بیان شده است.



مثال ۱۰: اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، BC بزرگترین ضلع باشد، ثابت کنید: $\hat{A} > 60°$.

BC بزرگترین ضلع	فرض
$\hat{A} > 60°$	حکم

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \\ BC > AC \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} \end{array}\right\} \oplus \Rightarrow 2A > \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow 2\hat{A} > 180 - \hat{A}$$

$$\Rightarrow 3\hat{A} > 180$$

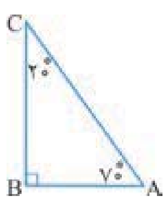
$$\Rightarrow \hat{A} > 60°$$

نکته تکمیلی:

۱) اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، BC بزرگترین ضلع باشد آنگاه $\hat{A} > 60°$.

۲) اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، BC کوچکترین ضلع باشد آنگاه $\hat{A} < 60°$. (اثبات در سؤالات تشریحی انتهای فصل)

تذکر!!: عکس دو مطلب مطرح شده در نکته تکمیلی فوق برقرار نیست! زیرا در مثلث مقابل $\hat{A} > 60°$ می‌باشد ولی ضلع BC بزرگترین ضلع نیست (در مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگترین ضلع است).



سؤالات تشریحی

سطح ۱

۱- مثلثی به طول اضلاع ۴، ۵ و ۶ رسم کنید (طریقه رسم را توضیح دهید)

۲- جاهای خالی را به گونه‌ای تکمیل کنید که

الف) مسئله زیر دو جواب داشته باشد

ب) مسئله زیر یک جواب داشته باشد.

پ) مسئله زیر جواب نداشته باشد

نقاط A و B به فاصله .... از هم هستند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر .... و از نقطه B برابر .... باشد.

۳- نشان دهید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از اضلاع زاویه به یک فاصله است.

۴- نشان دهید هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه است.

۵- دو ضلع یک زاویه را درنظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه موردنظر را رسم کنید.

۶- نشان دهید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۷- نشان دهید هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۸- طریقه رسم یک خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن را به کمک خط‌کش و پرگار توضیح دهید.

۹- طریقه رسم یک خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن را به کمک خط‌کش و پرگار توضیح دهید.

۱۰- طریقه رسم خطی موازی یک خط از یک نقطه خارج آن را به کمک خط‌کش و پرگار توضیح دهید.

۱۱- می‌دانیم چندضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۱۲- می‌دانیم چندضلعی که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ باشد.

۱۳- مستطیلی رسم کنید که:

الف) طول اضلاع آن ۳ و ۵ باشد.

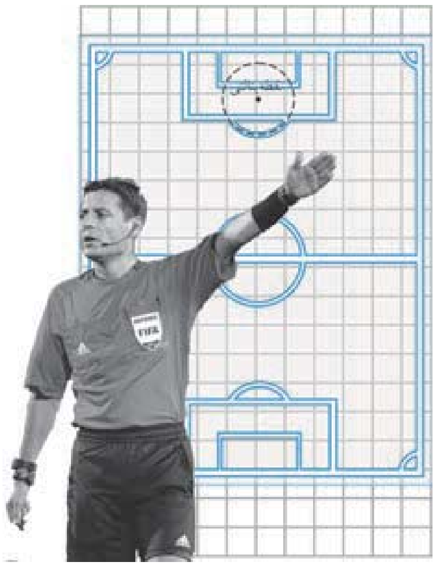
ب) طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۵ باشد.

۱۴- با توجه به اینکه برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند.

الف) لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

ب) لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

۱۵- وتر مانند AB از یک دایره درنظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



۱۶- از هندسه در پایه‌های قبل می‌دانیم که:

در یک دایره، قطری که از وسط یک وتر عبور می‌کند بر آن وتر عمود است، همچنین قطری که بر یک وتر عمود باشد، از وسط آن وتر عبور می‌کند و نیز می‌دانیم که محل برخورد دو قطر از یک دایره، مرکز آن دایره است.

آیا می دانستید که نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی نقطهٔ پنالتی کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او ابزارهای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.

۱۷- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۱۸- می‌دانیم از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۱۹- با استفاده از برهان خُلف ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.