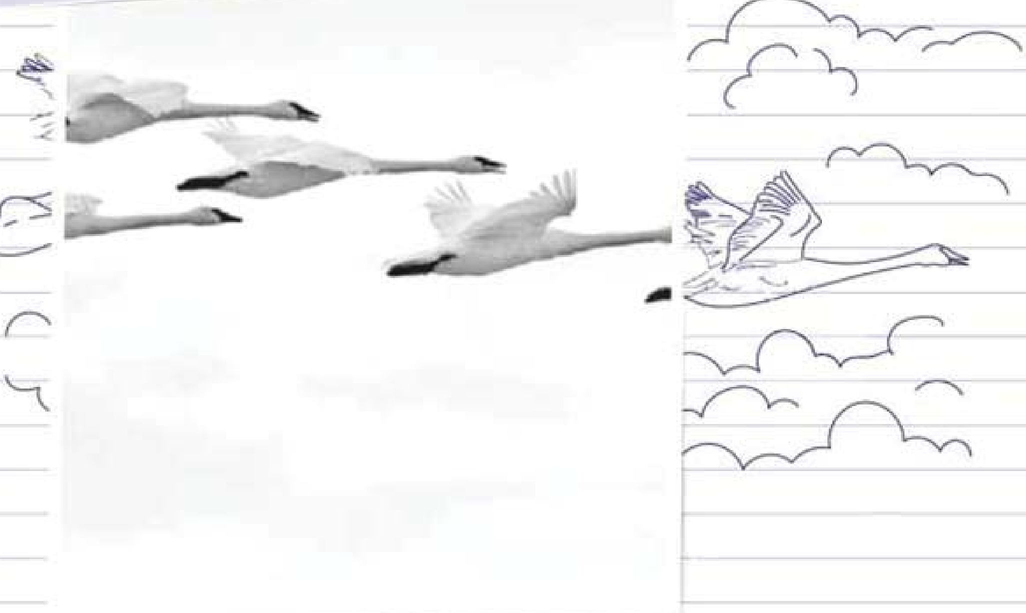
فصل یکم

آشنایی با مبانی ریاضیات



درس ۱

آشنایی با منطق ریاضی

- سورها ← عمومی ← وجودی ← نقیض سورها
- ترکیب گزاره‌ها ← فصلی و عطفی ← نقیض ← شرطی و دو شرطی ← جدول
- ارزش گزاره‌ها ← هم‌ارزی‌های منطقی
- گزاره‌نما ← دامنه ← مجموعه جواب
- گزاره

درس ۲

مجموعه - زیرمجموعه

- تساوی دو مجموعه
- اثبات با عضوگیری
- زیرمجموعه ← تعریف با نمادهای ریاضی ← تعداد

درس ۳

قوانین اعمال بین مجموعه‌ها

(جبر مجموعه‌ها)

- ضرب دکارتی ← نمودار ضرب دکارتی ← ویژگی‌های ضرب دکارتی
- افراز
- جبر مجموعه‌ها ← جابه‌جایی و توزیع‌پذیری ← دمورگان ← تفاضل به اشتراک ← قضیه‌ها

برای مطالعهٔ هر علمی اول باید زبان آن علم را به خوبی یاد بگیریم. منطق ریاضی یا منطق نمادی، دستور زبان ریاضی است که به مطالعهٔ ساختار جمله‌هایی که در ریاضی به کار می‌رود، می‌پردازد. این شاخه از ریاضی، به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند.

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

تعریف گزاره

به یک جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. گزاره‌ها را معمولاً با حروف p و q و r نمایش می‌دهیم. مثلاً جمله‌های «عدد ۴ اول نیست» و «عدد ۷ زوج است» هر کدام یک گزاره هستند.

ارزش گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا « T » و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا « F » نمایش می‌دهیم. گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد پس هر گزاره فقط یک ارزش دارد.

نکته:

۱ ممکن است گزاره‌ای جزء حدس‌های حل‌نشده ریاضی باشد، بنابراین درست یا نادرست بودن آن هنوز برای ما مشخص نیست، ولی با این حال، حدس‌ها هم فقط یک ارزش داشته و گزاره به حساب می‌آیند.

۲ جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. مثلاً جمله‌های «آیا هوا گرم است؟»، «درس بخوانید»، «چه باران لطیفی!» هیچ‌کدام گزاره نیستند.

مقدمه و نتیجهٔ استدلال

هر استدلال از چند گزاره تشکیل می‌شود. یکی از آن‌ها نتیجهٔ استدلال و بقیه، مقدمه‌های استدلال هستند. مثلاً نتیجهٔ استدلال‌های «هر عدد طبیعی زوج بر ۲ بخش‌پذیر است» و «عدد ۸ زوج است» می‌شود «عدد ۸ بر ۲ بخش‌پذیر است». دو گزارهٔ اول، مقدمه‌های استدلال هستند.

گزاره‌نما

- تعریف گزاره‌نما: هر جملهٔ خبری شامل یک یا چند متغیر که با جای‌گذاری مقادیر به جای متغیرها، تبدیل به گزاره می‌شود، گزاره‌نما می‌گوییم. گزاره‌نما برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها یک‌متغیره، دومتغیره و ... است. مثلاً عبارت « $x+1>3$ » یک گزاره‌نما است. به جای x ، هر عددی که قرار دهیم، یک گزاره به دست می‌آید که بالاخره یا درست است یا نادرست. عبارت «در پرتاب تاس $P(A)=\frac{1}{3}$ است.» نیز یک گزاره‌نما است. اگر به‌جای A ، هر پیشامدی از فضای نمونه‌ای قرار دهیم گزارهٔ حاصل درست است یا نادرست.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما، مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرها، قرار داد تا گزاره‌نما، تبدیل به گزاره شود، دامنهٔ گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با D نمایش می‌دهیم.

نکته: دامنه گزاره‌نما را معمولاً بعد از آن داخل پرانتز می‌نویسیم. مثلاً می‌نویسیم $2x^2 + x - 3 = 0$ $(D = \mathbb{R})$ یا $(-1)^n$ عددی مثبت است $(D = \mathbb{N})$. اگر دامنه گزاره‌نما نوشته نشده باشد آن را بزرگترین مجموعه ممکن در نظر می‌گیریم؛ به طوری‌که با قراردادن مقادیر به جای متغیرها، گزاره‌ای با معنی به دست آید. مثلاً اگر در گزاره‌نمای «x عددی فرد است»، دامنه ذکر نشده باشد، $D = \mathbb{Z}$ خواهد بود؛ چون زوج و فرد بودن اعداد، فقط در بین اعداد صحیح با معنی است یا در گزاره‌نمای «P عددی اول است»، دامنه را اعداد طبیعی درنظر می‌گیریم چون اعداد اول، روی اعداد طبیعی تعریف می‌شود.

مجموعه جواب گزاره‌نما

مجموعه عضوهایی از دامنهٔ متغیر را گوییم که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما، تبدیل به گزاره‌ای با ارزش و درست می‌شود. مجموعه جواب را با حرف S نمایش می‌دهیم که همواره $S \subseteq D$ است.

مثلاً مجموعه جواب گزاره‌نمای «$x^2 - 1 = 0$» که $D = \mathbb{Z}$ است؛ $S = \{1, -1\}$ می‌شود. اگر در همین گزاره $D = \mathbb{N}$ باشد؛ $S = \{1\}$ است.

ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ها را می‌توانیم به وسیلهٔ رابطه‌های گزاره‌ای، ترکیب کرده و گزاره‌های مرکب به دست آوریم.

کتاب درسی پنج نوع رابط تعریف کرده است:

1 رابط ناقض با نماد «$\sim$»: رابط $\sim$، گزارهٔ p را نقیض (منفی) می‌کند.

گزارهٔ $\sim p$ را «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

2 رابط فاصل با نماد «$\vee$»: p و q دو گزاره هستند. گزارهٔ مرکب «$p \vee q$» را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم.

گزارهٔ $p \vee q$ به صورت «p یا q» خوانده می‌شود.

3 رابط عاطف با نماد «$\wedge$»: p و q دو گزاره هستند. گزارهٔ مرکب «$p \wedge q$» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم.

گزارهٔ $p \wedge q$ به صورت «p و q» خوانده می‌شود.

4 رابط شرط با نماد «$\Rightarrow$»: p و q دو گزاره هستند. گزارهٔ مرکب $p \Rightarrow q$ را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم.

گزارهٔ $p \Rightarrow q$ به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q»، «p شرط کافی برای q» (یعنی p برای رسیدن به q کفایت می‌کند) و «q شرط لازم برای p» (یعنی اگر q نباشد، p هم نیست) خوانده می‌شود. در این ترکیب شرطی، p را مقدم یا فرض، q را تالی یا حکم می‌نامیم.

5 رابط دوشرطی با نماد «$\Leftrightarrow$»: p و q دو گزاره هستند. گزارهٔ مرکب $p \Leftrightarrow q$ را ترکیب دوشرطی p و q می‌گوییم. ترکیب $p \Leftrightarrow q$ به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q» و «p اگر و تنها اگر q» خوانده می‌شود.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره ممکن است درست یا نادرست باشد. اگر دو گزاره p و q را داشته باشیم، طبق اصل ضرب $2 \times 2 = 4$ حالت، برای ارزش این دو گزاره به وجود می‌آید که عبارت‌اند از: {(ن ، ن) ، (د ، ن) ، (ن ، د) ، (د ، د)}. جدول ارزشِ گزاره‌های مرکب در صفحهٔ بعد آمده است.

برای به دست آوردن نقیض، $\forall$ را تبدیل به $\exists$ (یا برعکس) و $p(x)$ را نقیض می‌کنیم.

مثال: نقیض گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{R}\,; (x < 0) \wedge (x^2 > 0)$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R}\,; (x<0) \wedge (x^2>0)) \equiv \forall x \in \mathbb{R}\,; \sim(\underbrace{(x<0)}_{p} \wedge \underbrace{(x^2>0)}_{q}) \equiv \forall x \in \mathbb{R}\,; \underbrace{\sim(x<0) \vee \sim(x^2>0)}_{\text{دمورگان}}$$

$$\equiv \forall x \in \mathbb{R}\,; (x \geq 0) \vee (x^2 \leq 0)$$

تمرین‌ها ◦ آشنایی با منطق ریاضی

۱) زیر یکی از کلمه‌های مناسب داخل پرانتز خط بکشید.

الف) هر گزاره فقط دارای یک (نتیجه ـ ارزش) است.

ب) جملهٔ «آتش می‌سوزاند» گزاره (است ـ نیست) اما جملهٔ «چرا آتش می‌سوزاند؟» گزاره (است ـ نیست)

پ) ارزش جملهٔ «هر معادله درجهٔ دوم دو ریشه دارد» (درست ـ نادرست) است و این جمله یک (گزاره ـ گزاره‌نما) است.

ت) مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرهای (گزاره ـ گزاره‌نما) قرار داد تا تبدیل به (گزاره ـ گزاره‌نما) شود، (دامنهٔ متغیر ـ مجموعه جواب) گزاره‌نما می‌گویند.

۲) جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

الف) درست یا نادرست بودن یک گزاره را .... می‌گوییم. یک گزاره .... هم درست و هم نادرست باشد.

ب) یک استدلال از چندین جملهٔ خبری تشکیل می‌شود که یکی از آن‌ها .... و بقیه .... هستند.

پ) مجموعه عضوهایی از دامنهٔ متغیرهای گزاره‌نما که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش .... می‌شود، .... گزاره‌نما می‌گوییم.

ت) اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش درستی گزاره‌ها دارای .... حالت خواهد بود.

۳) عبارت‌های درست با علامت ✔ و عبارت‌های نادرست را با علامت ✖ مشخص کنید.

الف) همهٔ جمله‌های امری یک گزاره به حساب می‌آیند، چون خبر از انجام امری به ما می‌دهند. ☐

ب) جملهٔ «در پرتاب سکه احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است.» گزاره‌نما است. ☐

پ) عبارت «برای هر عدد مثبت x داریم: $x^2 \geq x$» یک گزاره است. ☐

ت) «عدد π یک عدد گویا است» یک گزاره به حساب نمی‌آید. ☐

ث) ارزش جملهٔ «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت» برای ما مشخص نیست، پس این جمله یک گزاره نیست. ☐

ج) اگر دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « $a^2 > a$ » اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب، اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک خواهد بود. ☐

ج) اگر D دامنهٔ متغیر گزاره‌نما و S مجموعه جواب گزاره‌نما باشد، $S \subseteq D$. ☐

۴ نتیجهٔ استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

الف هر عدد اول، فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارد. عدد ۳۱ اول است. نتیجه:	ب مجموع دو عدد منفی، منفی است. دو عدد y و x منفی هستند. نتیجه:
پ اگر هر دو نمرهٔ ریاضی و فیزیک علی برابر ۲۰ باشد، او برای مسابقهٔ علمی انتخاب می‌شود. نمرهٔ ریاضی علی برابر ۱۹/۵ شده است. نتیجه:	ت اگر تیم والیبال ایران، برزیل را ببرد، به دور بعد صعود می‌کند. ایران به دور بعد صعود نکرده است. نتیجه:
ث بیماری فردی به علت بیماری کلیه یا بیماری کبد است. چنین نیست که بیماری فرد از کلیه باشد. نتیجه:	ج اگر هوا برفی باشد، راه بین دو شهر A و B بسته می‌شود. به احتمال زیاد فردا هوا برفی است. نتیجه:

۵ از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را تعیین کنید. (مانند نمونه)

جمله	گزاره	ارزش گزاره
۱ در پرتاب تاس، احتمال ظاهر شدن عدد اول برابر $\frac{2}{3}$ است.	✔	نادرست
۲ عجب مدیر قوی‌ای!		
۳ جمع هر دو عدد گویا، گویا است.		
۴ آیا جمع دو عدد گنگ، گنگ می‌شود؟		
۵ کسر $\frac{1}{x-1}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده است.		
۶ عدد ۱۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.		

۶ با قرار دادن مقدار متغیرها در هر گزاره‌نما، ارزش گزارهٔ حاصل را تعیین کنید.

گزاره‌نما	مقدار متغیرها	ارزش: درست	ارزش: نادرست
۱ $x^2+1\geq 5$	$x=2$	☐	☐
۲ $\frac{1}{x+1}\in\mathbb{R}$	$x=-1$	☐	☐
۳ $2^n > n^2$	$n=5$	☐	☐
۴ $1+3+5+\cdots+(2n-1)<\frac{3^n}{n}$	$n=3$	☐	☐
۵ حاصل‌ضرب دو عدد گنگ x و y عددی گویا است.	$x=\sqrt{2}\ ,\ y=\sqrt{2}$	☐	☐
۶ n^3-n بر ۶ بخش‌پذیر است.	$n=3$	☐	☐
۷ ضرب دو عدد حقیقی و منفی y و x، مثبت است.	$x=-2\ ,\ y=-4$	☐	☐

۱۴ عبارت‌های درست را با علامت ✔ و عبارت‌های نادرست را با علامت ✖ مشخص کنید.

الف ارزش گزارهٔ $p \vee q$ وقتی نادرست است که حداقل یکی از p و q نادرست باشند. ☐

ب ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ وقتی نادرست است که حداقل یکی از p و q نادرست باشند. ☐

پ اگر p درست و q نادرست باشد، ارزش گزارهٔ $p \vee q \sim$ درست است. ☐

ت همواره $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \vee \sim q$. ☐

ث $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$. ☐

ج عکس نقیض یک گزارهٔ شرطی با خود آن هم‌ارز منطقی است. ☐

چ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه شود وقتی نادرست است که جواب آن تهی باشد. ☐

۱۵ فرض کنید p گزارهٔ «درجه هوا منفی است» و q گزارهٔ «هوا بارانی است» باشد. گزاره‌های زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف $\sim p$:

ب $p \vee q$:

پ $p \wedge q$:

ت $q \vee \sim p$:

ث $\sim q \wedge p$:

۱۶ گزاره‌های « p: $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است» و « q: عدد ۳ اول نیست» را در نظر بگیرید. هر جمله را با زبان نمادها نمایش دهید.

الف عدد ۳ غیر اول است.

ب $\sqrt{۲}$ گنگ نیست یا ۳ اول نیست.

پ $\sqrt{۲}$ گنگ است و ۳ اول است.

ت $\sqrt{۲}$ گنگ نیست یا ۳ اول است.

۱۷ جدول ارزش درستی را کامل کنید. (مانند نمونه)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \wedge q$
د	د	ن	د	د	د	ن
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

۱۸ با تکمیل جدول ارزش زیر نشان دهید ارزش گزارهٔ $p \vee \sim (p \wedge q)$ همواره درست است.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
د	د	د	ن	د
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

۴۵ کدام‌یک از سورهای زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف $\forall(x, y \in \mathbb{R} \wedge x = y); x^۲ + y^۲ = ۲xy$

ب $\forall(x, y \in \mathbb{R} - \{۰\} \wedge x + y = ۱); (۱ - \frac{۱}{x})(۱ - \frac{۱}{y}) = ۱$

پ $\forall(a, b \in \mathbb{Z} \wedge a = ۲k \wedge b = ۲k'); a + b = ۲k''$ (k, k', k'' سه عدد صحیح هستند)

۴۶ سورهای زیر را به زبان فارسی بیان کرده و ارزش آن‌ها را مشخص کنید.

الف $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{N}; x \leq n$

ب $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}; x \leq n$

۴۷ گزاره‌های سوری زیر را به زبان فارسی بنویسید و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص کنید.

الف $\forall x \in \{۱, ۲, ۳, ۴\} \exists y \in \{۳, ۴, ۵\}; x + y < ۸$

ب $\exists x \in \{۱, ۲, ۳, ۴\} \forall x \in \{۳, ۴, ۵\}; x + y < ۸$

پ $\forall x \in \{۱, ۲, ۳, ۴\} \forall y \in \{۳, ۴, ۵\}; x + y < ۸$

درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه

درس دوم کتاب در مورد مجموعه‌ها است. حتماً یادتان هست که مجموعه، دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص است. تعریف مجموعه باید به گونه‌ای باشد که بتوانیم معلوم کنیم هر شیئی به آن تعلق دارد یا نه. مثلاً اعداد طبیعی یک‌رقمی مضرب ۳، به صورت $A = \{۳, ۶, ۹\}$ است. نماد $\in$ علامت عضو بودن است؛ پس $۶ \in A$ و $۵ \notin A$. نمایش ریاضی مجموعه‌ها به صورت $\{x \in U | P(x)\}$ است. این نمایش می‌گوید فقط عضوهایی از مجموعه مرجع (U) که ویژگی $P(x)$ را داشته باشند، عضو مجموعه هستند.

تذکر: فرض کنید به‌جای $x \in U$ عبارتی برحسب x مثل $Q(x)$ قرار گرفته باشد. اول x هایی که در $P(x)$ درست درمی‌آیند را به‌دست می‌آوریم و بعد آنها را در $Q(x)$ قرار می‌دهیم تا عضوهای مجموعه به‌دست آیند. مثلاً عضوهای مجموعهٔ A را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$A = \{x^۲ | \underbrace{x \in \mathbb{Z}, -۲ < x \leq ۱}_{-۱, ۰, ۱}\} = \{۱, ۰, ۱\} = \{۱, ۰\}$$

تعریف زیرمجموعه

مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B گفته و می‌نویسیم $A\subseteq B$، هرگاه هر عضو دلخواه A، عضو B هم باشد. به زبان ریاضی می‌شود: $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A\Rightarrow x\in B)$

مثلاً: اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B\{۱,۲,۵,۸\}$ باشند، A زیرمجموعهٔ B است، چون عضوهای A یعنی ۱ و ۲ عضو B هم هستند.

نکته:

۱ به تفاوت دو علامت $\in$ و $\subseteq$ توجه کنید. مثلاً مجموعهٔ $B=\{\{۱\}, \varnothing, \{\varnothing\}\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه، ۳ عضو دارد که توسط ویرگول از هم جدا می‌شوند. یعنی: $\{۱\}, \varnothing, \{\varnothing\}$ پس $\{۱\}\in B$، $\varnothing\in B$ ولی $۱\notin B$. به عبارت دیگر وقتی علامت $\in$ می‌آید، باید آن شیء، بدون هیچ کم و کاستی عضو مجموعه باشد. اما وقتی $A\subseteq B$ است، حتماً باید عضوهای داخل مجموعهٔ (داخل آکولاد) A، عضوهایی از B باشند. مثلاً اگر B همان مجموعه باشد؛ $\{\{۱\}, \varnothing\}\subseteq B$ ولی $\{۱\}\not\subseteq B$ چون $۱\notin B$.

۲ A زیرمجموعه B نیست هرگاه عضوی در A وجود داشته باشد که در B نباشد. به زبان ریاضی:

$$\sim(A\subseteq B) \Leftrightarrow \exists x\ ;\ (x\in A \wedge x\notin B)$$

۳ برای هر مجموعه دلخواه A، خود مجموعه و $\varnothing$ زیرمجموعه A هستند؛ یعنی $A\subseteq A$ و $\varnothing\subseteq A$. اولی با تعریف واضح است و دومی هم با انتفای مقدم ثابت می‌شود.

تعداد زیرمجموعه‌ها

مجموعه $\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. هر زیرمجموعه را با یک کد سه‌رقمی با ارقام ۰ و ۱ نظیر می‌کنیم. مثلاً زیرمجموعه $\{a,b\}$ با کد ۱۱۰ نظیر می‌شود. یا کد ۰۱۱ نظیر زیرمجموعه $\{b,c\}$ می‌شود.

هر رقمِ کد سه‌رقمی، دو حالت دارد پس طبق اصل ضرب $۲\times۲\times۲=۲^۳$ کد سه‌رقمی یا زیرمجموعه، به‌دست می‌آید. در حالت کلی هر مجموعهٔ n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد. اگر زیر مجموعه شامل عضو خاصی باشد، رقم نظیر در کد فقط ۱ می‌شود. بنابراین ۲^{n-1} زیرمجموعه، که همهٔ آنها عضو خاصی را داشته باشند، وجود دارد (شبیه همین ۲^{n-1} زیرمجموعه فاقد عضو خاصی وجود دارد.)

زیرمجموعه محض (سَره)

اگر $A\subseteq B$ ولی $A\neq B$، به مجموعه A زیرمجموعهٔ محضِ B می‌گوییم.

به عبارت دیگر همه زیرمجموعه‌های B به غیر از خودش، زیرمجموعهٔ محض به حساب می‌آیند. اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، $۲^n-۱$ زیرمجموعه محض دارد.

مجموعه توانی A: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی گفته و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً زیرمجموعه‌های مجموعه $\{۱,\varnothing\}$ عبارتند از: $\varnothing, \{۱\}, \{\varnothing\}, \{۱,\varnothing\}$. حالا همه آنها را در یک مجموعه (آکولاد) قرار می‌دهیم تا $P(A)$ به‌دست آید. یعنی $P(A)=\{\varnothing, \{۱\}, \{\varnothing\}, \{۱,\varnothing\}\}$. اگر A دارای n عضو باشد، مجموعه توانی، ۲^n عضو دارد.

یادآوری اعمال روی مجموعه‌ها

فرض کنید مجموعه مرجع برابر U باشد.

۱ $A\bigcup B=$ اشیایی که حداقل در یکی از A و B هستند $=$ اشیایی که در A یا در B هستند.
$=\{x\in U | x\in A \vee x\in B\}$

۲ $A\bigcap B=$ اشیای مشترک B و A $=$ اشیایی که هم در A و هم در B هستند $=\{x\in U | x\in A \wedge x\in B\}$

۳ $A-B=$ اشیایی که فقط در A هستند $=$ اشیایی که در A هستند ولی در B نیستند
$=\{x\in U | x\in A \wedge x\notin B\}$

۴ $A'=$ اشیایی که در A نیستند $=U-A=\{x\in U | x\notin A\}$

اثبات روابط زیرمجموعه بودن با عضوگیری

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم $E\subseteq F$. عضو دلخواهی مانند x در E می‌گیریم. از فرض‌های مسئله استفاده کرده و نشان می‌دهیم $x\in F$. با این کار هر عضو دلخواه E در F بوده و $E\subseteq F$ ثابت می‌شود. به زبان ریاضی:

$\forall x; x\in E \Rightarrow ... \Rightarrow x\in F$

مثال: ثابت کنید اگر $A\subseteq B'$ آن‌گاه $B\subseteq A'$.

پاسخ: به تالی (حکم) توجه کنید! می‌خواهیم ثابت کنیم $B\subset A'$. پس x دلخواهی عضو B می‌گیریم:

$\forall x; x\in B \Rightarrow x\notin B' \xrightarrow{A\subseteq B'} x\notin A \Rightarrow x\in A'$

پس از $\forall x\in B$ رسیدیم به $x\in A'$؛ بنابراین $B\subseteq A'$ ثابت می‌شود.

نکته: روابط زیر که درستی آنها با توجه به تعریف یا نمودار وِن واضح هستند، به روش عضوگیری ثابت می‌شود.

۱ $A\subseteq A\bigcup B$
۲ $A\bigcap B\subseteq A$
۳ $A\bigcap B\subseteq A\bigcup B$
۴ $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$
۵ $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$
۶ $\varnothing\subseteq A$
۷ $A\subseteq B, C\subseteq D\Rightarrow (A\bigcup C)\subseteq(B\bigcup D)$
۸ $A\subseteq B, C\subseteq D\Rightarrow (A\bigcap C\subseteq B\bigcap D)$

تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوییم هرگاه هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری باشد. به زبان ریاضی:

$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$

برای اثبات یک رابطهٔ تساوی، باید دو مطلب را ثابت کنید؛ اول طرف راست زیرمجموعه طرف چپ، دوم طرف چپ زیرمجموعه طرف راست. برای اثبات هر کدام می‌توانید از عضوگیری کمک بگیرید.

نکته: با روش عضوگیری می‌توانیم ثابت کنیم: (سعی کنید آنها را با نمودار وِن، هم درک کنید.)

۱ $A\bigcap B=B\bigcap A$
۲ $A\bigcup B=B\bigcup A$
۳ $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$
۴ $A\bigcap B=\varnothing\Rightarrow (A-B)=A \wedge (B-A)=B$
۵ $A\subseteq\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$
۶ $U\subseteq A\Rightarrow A=U$

افراز یک مجموعه

تقسیم‌بندی مجموعه به چند زیرمجموعه ناتهی است به‌طوری که زیر مجموعه‌ها، اشتراکی ندارند. مثلاً یک افراز برای یک مجموعه $\{a,b,c\}$ به‌صورت $\{a\},\{b,c\}$ است. به زبان ریاضی:

می‌گوییم مجموعه غیرتهی A به زیر مجموعه‌های $A_1,A_2,\dots,A_n$ افراز شده است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ $\forall\ 1\le i\le n\ ;\ A_i\neq\varnothing$ (یعنی زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند)

۲ $\forall\ i\neq j\ ;\ A_i\cap A_j=\varnothing$ (یعنی اشتراک دوبه‌دوی زیرمجموعه‌ها، تهی باشد)

۳ $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_n=A$ (یعنی اجتماع زیرمجموعه‌ها، برابر با A باشد)

تمرین‌ها — مجموعه - زیرمجموعه

۴۸ زیر یکی از کلمه‌های درست داخل پرانتز خط بکشید.

الف) مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{\varnothing\}$ مجموعه‌های (تک‌عضوی – تهی) در حالی که مجموعه‌های $\varnothing$ یا $\{\ \}$ (تک‌عضوی – تهی) هستند.

ب) مجموعه ۵ عضوی دارای (۳۲ - ۲۵) زیرمجموعه است.

پ) مجموعه ۶ عضوی دارای (۶۳ - ۳۵) زیرمجموعه محض است.

ت) اگر $x\in A\cup B$ آن‌گاه $(x\in A\wedge x\in B - x\in A\vee x\in B)$ و اگر $x\in A\cap B$ آن‌گاه $(x\in A\wedge x\in B - x\in A\vee x\in B)$

ث) ارزش گزاره شرطی $\forall x\in\varnothing\Rightarrow x\in A$ با (انتفای مقدم – انتفای تالی) همواره (درست – نادرست) است. بنابراین $(A\subseteq\varnothing - \varnothing\subseteq A)$.

۴۹ جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

الف) اگر هر عضو دلخواه مجموعه A .... مجموعه B هم باشد می‌گوییم A .... B بوده و می‌نویسیم ....

ب) اگر $A\nsubseteq B$ یعنی عضوی در .... وجود دارد که عضو .... نیست . به زبان ریاضی ....

پ) اگر $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$ گزاره‌ای درست باشد نتیجه می‌گیریم ....

ت) اگر $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ زیرمجموعه $\{a_1,a_2\}$ را می توانیم با کد .... مشخص کنیم.

ث) از درستی گزاره $\forall x\in A\Rightarrow x\notin B$ نتیجه می‌شود ....

۵۰ عبارت‌های درست را با علامت ✔ و عبارت‌های نادرست را با علامت ✖ مشخص کنید.

الف) مجموعه $A=\{\{2,3\}\}$ دو عضو دارد. ☐

ب) دو مجموعه $\{0/75,-8,\varnothing\}$ و $\left\{\{\ \},(-2)^3,\frac{3}{4}\right\}$ مساوی‌اند. ☐

پ) $\varnothing\nsubseteq\{\varnothing\}$ ☐

ت) اگر $A\subseteq B$ باشد، $A-B=\varnothing$ ☐

ث) مجموعه‌های $\{3\},\{1,2\},\{1\}$ افرازی برای مجموعه $\{1,2,3\}$ به حساب می‌آیند. ☐

ج) $a \in B \wedge a \notin A \Rightarrow a \in A - B$ ☐

چ) برای اثبات گزاره $A \subseteq B$ کافی است ثابت کنیم: $\forall x \notin B \Rightarrow x \notin A$ ☐

ح) اگر به عضوهای مجموعه، یکی اضافه شود تعداد زیرمجموعه‌ها دوبرابر می‌شوند. ☐

۵۱) فرض کنید $A = \{0, 2, \{2\}, \varnothing, \{\varnothing\}\}$ است. درستی یا نادرستی هر گزاره را مشخص کنید.

الف) $\{2\} \in A$ ☐

ب) $\{\ \} \in A$ ☐

پ) $\{\varnothing\} \notin A$ ☐

ت) $\{0, 2\} \in A$ ☐

ث) $\{\varnothing\} \subseteq A$ ☐

ج) $\{2, \{2\}\} \not\subseteq A$ ☐

چ) $\{\{0\}\} \not\subseteq A$ ☐

ح) $\{\varnothing, \{\{\ \}\}\} \subseteq A$ ☐

خ) $\{0, 2, \{\varnothing\}\} \subseteq A$ ☐

۵۲) درستی یا نادرستی هر گزاره را مشخص کنید.

الف) $(\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ☐

ب) $0 \in \mathbb{W} \wedge 0 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{N}$ ☐

پ) اگر $A \subseteq \varnothing$ باشد، آن‌گاه $A = \varnothing$ ☐

ت) اگر $B \in A$ باشد،آن‌گاه $B \subseteq A$ ☐

ث) $(\exists x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ ☐

ج) $\exists x \in A - B \Rightarrow A \subseteq B$ ☐

۵۳) تهی یا ناتهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید.

الف) $\{m \in \mathbb{N} \mid m^2 + m = 0\}$

ب) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 = 1) \wedge (2x = 6)\}$

پ) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 = 4) \vee 2x = 1\}$

ت) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq -1\}$

۵۴) اگر $A = \{a\}$ و $B = \{a, \{a\}\}$ و $C = \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ باشد درستی یا نادرستی هر رابطه را مشخص کنید.

الف) $A \subseteq B$ ☐

ب) $B \subseteq C$ ☐

پ) $A \in B$ ☐

ت) $B \in C$ ☐

ث) $A \cup B \subseteq C$ ☐

ج) $A \cap B \not\subseteq C$ ☐

۵۵) در هر قسمت مثال‌هایی از سه مجموعه A و B و C بیاورید که شرایط داده شده برقرار باشد.

الف) $A \subseteq B, B \in C$

ب) $A \in B, B \in C$

پ) $A \in B, C \in B, A \subseteq C$

ت) $A \in B, B \in C, A \in C$

۵۶) اعضای مجموعه‌های زیر را به دست آورید و عضوهای مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید. (مجموعه مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید.)

$A=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^2\le 2\}$ $\qquad$ $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid (x^2-x=0)\vee |x|\le 2\}$

$C=\{t\in\mathbb{Z} \mid (t^2\le 2t)\wedge 2^t\le 1\}$ $\qquad$ $D=\{x\in\mathbb{Z} \mid x+|x|=0\}$

$E=\{x+1 \mid \sqrt{x}\in\mathbb{Z}\}$ $\qquad$ $F=\{2x-1 \mid (x\in P)\wedge(1\le x\le 10)\}$

$A\cup B=$ $\qquad$ $A\cap B=$ $\qquad$ $C'=$

$A-B=$ $\qquad$ $B-A=$ $\qquad$ $A\cap B'=$

۵۷) در هریک از موارد زیر به‌جای S یکی از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}$ را طوری جایگزین کنید تا تساوی درستی حاصل شود.

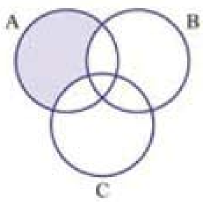
الف) $\{x\in S \mid x^2=3\}=\varnothing$ $\qquad$ $S=$ $\qquad$ یا

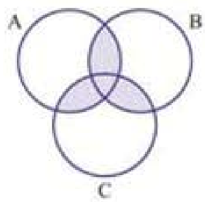
ب) $\{x\in S \mid -5\le x<2\}=\{1\}$ $\qquad$ $S=$

پ) $\{x\in S \mid 1\le x^2<5\}-\{x\in S \mid x>2\}=\{-2\}$ $\qquad$ $S=$

ت) $\{x\in S \mid 1<x\le 6\}=\{x\in S \mid x^2=4\}\cup\{x\in S \mid 9\le x^2<37\}$ $\qquad$ $S=$

۵۸) در هر نمودار، قسمت رنگی را با یک عبارت مجموعه‌ای، مشخص کنید.





۵۹) همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A=\{a,\{a\}\}$ را بنویسید.

۶۰) همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A=\{\varnothing,\{1,2\},1\}$ را بنویسید.

۶۱) اگر $A=\{1,2,\{1\},\{2\}\}$ باشد همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A-\{A\}$ را بنویسید.

۶۲) مجموعه n عضوی A، 32^{3n-14} زیرمجموعه دارد.

الف) n را به‌دست بیاورید.

ب) مجموعه A چند زیرمجموعه ناتهی دارد؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سره دارد؟

(۸۹) مجموعه $\{1,2,3,4,5,6\}$ را در نظر بگیرید. کدام حالت‌های زیر یک افراز برای A به حساب می‌آید؟

الف $\{2,4,6\},\{1,3,5\}$ ب $\{6\},\{1,2,5\},\{2,3,4\}$

پ $\{6\},\{2\},\{3,6\},\{4,5\}$ ت $\varnothing,\{1,2\},\{3,4,5,6\}$

(۹۰) همه افرازهای مجموعه ۳عضوی $\{a,b,c\}$ را بنویسید.

(۹۱) مجموعه‌های $\{x\in\mathbb{Z} \mid x(x-1)(x-2)=0\}$ ، $\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|=-x\}$ و A، اعداد صحیح را افراز می‌کنند. مجموعه A را مشخص کنید.

(۹۲) مجموعه $\{a,b,c,d\}$ را به چند حالت می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟ آن‌ها را بنویسید.

(۹۳) مجموعه $\{a,b,c,d\}$ را به چند حالت می‌توان به دو زیرمجموعه با تعداد عضوهای نابرابر، افراز کرد؟ آن‌ها را بنویسید.

درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

این درس ادامهٔ مطالب درس قبلی است. می‌خواهیم قوانین و ویژگی‌های اعمال اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم را بررسی کنیم.

۱ خاصیت جابه‌جایی اجتماع و اشتراک: $A\cup B=B\cup A \quad , \quad A\cap B=B\cap A$

۲ خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع و اشتراک: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \quad , \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

این ویژگی می‌گوید این‌که کدام دو مجموعه را ابتدا با هم بگیریم و بعد با مجموعهٔ سوم، تفاوتی ندارد.

۳ خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی) اشتراک روی اجتماع و اجتماع روی اشتراک:

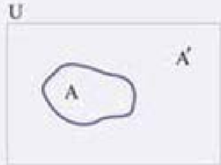
$\underline{A\cup}(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad , \quad \underline{A\cap}(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

توجه دارید اگر از سمت راست نگاه کنیم مثل این می‌ماند که از $A\cup$ یا از $A\cap$ فاکتور گرفته‌ایم.

۴ خاصیت تفاضل به اشتراک: $A-B=A\cap B'$

۵ قانون‌های دمورگان: $(A\cup B)'=A'\cap B' \quad , \quad (A\cap B)'=A'\cup B'$

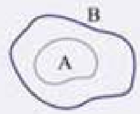
۶ قضیه‌های مقدماتی:



با توجه به شکل مقابل به سادگی درمی‌یابیم: (U مجموعه مرجع و $\cup$ علامت اجتماع است)

$$A\cap A'=\varnothing \qquad A\cup A'=U \qquad A'-A=A' \qquad A-A'=A$$

$$(A')'=A \qquad U'=\varnothing \qquad (\varnothing)'=U$$



۷ $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A \quad , \quad A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

به دو شرطی بودن دقت کنید خیلی به کارتان می‌آید.

نتیجهٔ ۱: $A\cup\varnothing=A \quad , \quad A\cap\varnothing=\varnothing \quad , \quad A\cup U=U \quad , \quad A\cap U=A$

نتیجهٔ ۲: $A\subseteq A\cup B\Rightarrow A\cap(A\cup B)=A \quad , \quad (A\cap B)\subseteq A\Rightarrow A\cup(A\cap B)=A$

روابطی که در نتیجهٔ ۲ بیان کردیم، معروف به قانون‌های جذب هستند.

۸ اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ باشد، آن‌گاه $(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$ و $(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$

نکته: تمام خواص و ویژگی‌های بالا با تعریف یا عضوگیری ثابت می‌شوند.

اثبات با جبر مجموعه‌ها

اگر از ویژگی‌ها و قوانین ۸ گانه بالا برای اثبات یک تساوی مجموعه‌ای استفاده کنیم، در اصطلاح گفته می‌شود که درستی تساوی با جبر مجموعه‌ها ثابت شده است. پس اگر مسئله، اثبات را با جبر مجموعه‌ها از شما خواسته باشد، دیگر مجاز به استفاده از روش عضوگیری نیستید.

مثال: با جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A-(A\cap B)=A-B$

پاسخ: از سمت چپ (شلوغ‌تر) شروع می‌کنیم.

$$A-(A\cap B)\overset{\text{تفاضل به اشتراک}}{=}A\cap\underbrace{(A\cap B)'}_{\text{دمورگان}}=A\cap(A'\cup B')=\underbrace{(A\cap A')\cup(A\cap B')}_{\text{پخشی }\cap\text{ روی }\cup}=\varnothing\cup(A\cap B')=A\cap B'=A-B$$

مثال: با جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A\cap B)\cup(A'\cap B)=B$

از $\cap B$ فاکتور می‌گیریم: $(A\cap\underline{B})\cup(A'\cap\underline{B})=(\underbrace{A\cup A'}_{U})\cap B=B$

مثال: نشان دهید اگر $X\subseteq A$ و $X'\subseteq A$ باشد، آن‌گاه $A=U$ است.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}X\subseteq A\\ X'\subseteq A\end{array}\right\}\Rightarrow(X\cup X')\subseteq(A\cup A)\Rightarrow U\subseteq A\xrightarrow{A\subseteq U}A=U$$

مثال: با جبر مجموعه‌ها نشان دهید اگر $A\subseteq B'$ باشد، آن‌گاه $B\subseteq A'$ است.

پاسخ: باید از ویژگی ۷ استفاده کنیم:

$$A\subseteq B'\to A\cap B'=A\xrightarrow[\text{متمم می‌گیریم.}]{\text{از دو طرف}}(A\cap B')'=A'\xrightarrow{\text{دمورگان}}(A'\cup B)=A'\xrightarrow[\text{ویژگی ۷}]{\text{از}}B\subseteq A'$$

زوج مرتب

دو شیء، مانند y و x که بین آن‌ها ترتیب قائل باشیم، زوج مرتب (x,y) می‌گوییم. x را مؤلفهٔ اول (طول) و y را مؤلفهٔ دوم (عرض) می‌گوییم. نمایش هر زوج مرتب در دستگاه به صورت یک نقطه خواهد بود. دو زوج مرتب (a,b) و (x,y) مساوی‌اند، هرگاه: $x=a \wedge y=b$

ضرب دکارتی

دو مجموعهٔ A و B داریم. ضرب دکارتی A در B، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفهٔ اول عضو A و مؤلفهٔ دوم عضو B است. به زبان ریاضی: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A \wedge y\in B\}$

نکته:

۱ در حالت کلی $A\times B$ با $B\times A$ مساوی نیست.

۲ تعداد عضوهای $A\times B$ برابر است با حاصل‌ضرب تعداد عضوهای A در تعداد عضوهای B. بنابراین تعداد عضوهای $A\times B$ با $B\times A$ مساوی بوده و داریم: $n(B\times A)=n(A\times B)=n(A).n(B)$

۳ ضرب دکارتی $A\times A$ را به صورت $A^۲$ نمایش می‌دهیم.

مثال: اگر $A=\{۲k+۱\,|\,k\in\mathbb{Z}\wedge -۲<k<۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^۲\le ۴\}$ باشند، مجموعهٔ $A\times B$ و $B\times A$ را با اعضا نمایش دهید.

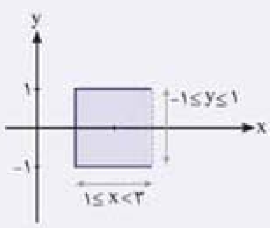
پاسخ: اول عضوهای A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A=\{۲k+۱\,|\,\overbrace{k\in\mathbb{Z}, -۲<k<۲}^{-۱,۰,۱}\}=\{-۱,۱,۳\} \quad , \quad B=\{۱,۲\}$$

$$A\times B=\{-۱,۱,۳\}\times\{۱,۲\}=\{(-۱,۱),(-۱,۲),(۱,۱),(۱,۲),(۳,۱),(۳,۲)\}$$

$$B\times A=\{۱,۲\}\times\{-۱,۱,۳\}=\{(۱,-۱),(۱,۱),(۱,۳),(۲,-۱),(۲,۱),(۲,۳)\}$$

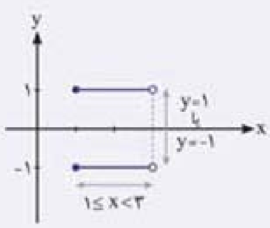
مثال: اگر $A=[۱,۳)$ و $B=[-۱,۱]$ باشند، نمودار $A\times B$ را رسم کنید.



پاسخ: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}=\{(x,y)\,|\,۱\le x<۳ \wedge -۱\le y\le ۱\}$

توجه دارید چون $x=۳$ نمی‌تواند باشد، عرض سمت راست مستطیل را به صورت نقطه‌چین رسم می‌کنیم. قسمت رنگی به همراه سه ضلع دیگر مستطیل، نمودار $A\times B$ را نشان می‌دهند. به عبارت دیگر $A\times B$ شامل این زوج مرتب‌ها خواهد بود.

مثال: اگر $A=[۱,۳)$ و $B=\{-۱,۱\}$ باشند، نمودار $A\times B$ را رسم کنید.



پاسخ: B دیگر بازه نیست و فقط دو عضو دارد.

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}=\{(x,y)\,|\,۱\le x<۳\wedge(y=-۱\vee y=۱)\}$$

پس نمودار، دو قطعه خط خواهد بود.

قضیه‌های ضرب دکارتی

۱ $\varnothing\times A=A\times\varnothing=\varnothing$.

۲ $A\times B=B\times A \Rightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B$

۳ ضرب دکارتی روی $\cup$، $\cap$ و $-$ خاصیت توزیع‌پذیری و فاکتورگیری دارد. مثلاً $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

۴ قانون حذف: $A\times C=B\times C \xrightarrow{C\neq\varnothing} A=B$

۵ $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ (این قانون برای اعمال $\cup$ و $-$ برقرار نیست)

نکته: از قضیهٔ ۵ نتیجه می‌شود: $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)=(A\cap B)^2$

اثبات همهٔ قضیه‌های فوق با روش عضوگیری انجام می‌شود.

مثال: قضیه ۴ را ثابت کنید.

پاسخ: $C\neq\varnothing$ است، پس: $\exists c\in C$. باید نشان دهیم هر عضو A در B و هر عضو B در A است.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in A\Rightarrow(x,c)\in A\times C\xrightarrow{A\times C=B\times C}(x,c)\in B\times C\Rightarrow x\in B\Rightarrow A\subseteq B\\ \forall y\in B\Rightarrow(y,c)\in B\times C\xrightarrow{B\times C=A\times C}(y,c)\in A\times C\Rightarrow y\in A\Rightarrow B\subseteq A\end{array}\right\}\Rightarrow A=B$$

تمرین‌ها ‌ قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

۹۴ زیر یکی از کلمه‌های درست داخل پرانتز خط بکشید.

الف عمل (ضرب ـ جمع) روی (ضرب ـ جمع) خاصیت توزیع‌پذیری دارد.

ب چون ترکیب (فصلی ـ عطفی) ویژگی جابه‌جایی دارد می‌توان گفت $A\cup B=B\cup A$.

پ به دلیل توزیع‌پذیری ($\wedge-\vee$) روی ($\wedge-\vee$) می‌توان نتیجه گرفت $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

۹۵ جدول‌های زیر را کامل کنید (مانند نمونه).

$\cap$	A	A'	$\varnothing$	U
A				

$\cup$	A	A'	$\varnothing$	U
A				

$-$	A	A'	$\varnothing$	U
A				$A-U=\varnothing$
A'				
$\varnothing$				
U				

۹۶ عبارت‌های درست را با علامت ✔ و عبارت‌های نادرست را با علامت ✖ مشخص کنید.

الف اگر $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq D$ آن‌گاه $A\not\subseteq C$. ☐

ب اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A'\subseteq B'$. ☐

پ اگر $A\subseteq B'$، آن‌گاه $B\subseteq A'$. ☐

ت اگر $A\cup C=B\cup C$، آن‌گاه $A=B$. ☐

ث اگر $A\cap C=B\cap C$، آن‌گاه $A=B$. ☐

ج اگر $B=A\cup C$، آن‌گاه $A=B-C$. ☐

چ اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A\cap B=B$ یا $A\cup B=A$. ☐

ح اگر $A\cup B\subseteq\varnothing$ آن‌گاه $B=\varnothing$ و $A=\varnothing$. ☐

۹۷) با استفاده از تعریف اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cup B=B\cup A$

ب) $A\cap B=B\cap A$

پ) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

ت) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

ث) $A-B=A\cap B'$

۹۸) با استفاده از روش عضوگیری، تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ب) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پ) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

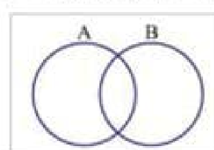
ت) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

ث) $A\cap B\subseteq C' \quad , \quad A\cup C\subseteq B \Rightarrow A\cap C=\varnothing$

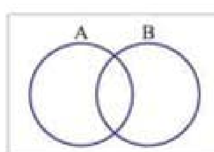
ج) $A\subseteq B\cup C \Rightarrow A\cap B'\subseteq C$

۹۹) روی هر شکل، بخشی را که به صورت توصیفی نوشته شده است هاشور بزنید.

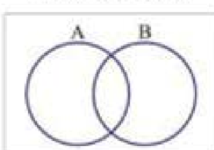
اشیایی که عضو هیچ‌کدام از دو مجموعه نیستند یا عضو هر دو مجموعه هستند.



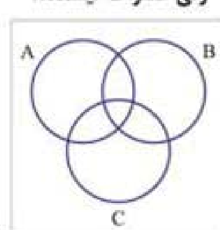
اشیایی که فقط عضو B هستند.



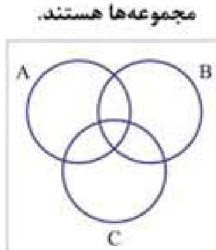
اشیایی که فقط عضو یکی از مجموعه‌ها هستند.



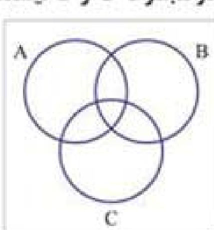
اشیایی که عضو A یا C هستند ولی عضو B نیستند.



اشیایی که فقط عضو دوتا از مجموعه‌ها هستند.



اشیایی که در A هستند ولی عضو هر دو مجموعهٔ C و B نیستند.



آزمون نیمسال اول

درس: آمار و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: دی‌ماه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**جای خالی را کامل کنید.** الف) درست یا نادرست بودن یک گزاره را .... می‌گوییم. ب) اگر $A=\{۱,\{۱\},\phi\}$ باشد، A .... $\{\{۱\}\}$. پ) شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های معلوم در علم .... مورد بررسی قرار می‌گیرد. ت) اگر برای دو پیشامد A,B داشته باشیم $A\cap B\neq\phi$ آن‌گاه A,B را .... می‌گوییم.	۱
۲	**جدول ارزش گزاره $p\vee\sim q\Rightarrow q$ را تشکیل دهید.**	۱
۳	**نقیض گزاره زیر را بنویسید.** **«عدد ۷ مربع کامل است و عدد ۶ اول نیست»**	۰/۵
۴	**a عددی صحیح است. عکس نقیض گزاره «اگر $a^۲$ زوج باشد آن‌گاه a هم زوج است» را نوشته و سپس آن را ثابت کنید.**	۱
۵	**درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.** الف) $(۱+۱=۲)\vee(۲\times۲=۵)$ ب) $(۱+۱=۲)\wedge(۲\times۲=۵)$ پ) $۲\times۲=۵\Rightarrow۱+۱=۲$ ت) $\sim(۲\times۲)=۵\Rightarrow۱+۱=۲$	۱
۶	**ارزش و نقیض گزاره سوری مقابل را بنویسید.** $\forall x\in\mathbb{R}\,;x<۰\vee x^۲\geq۰$	۱
۷	**با حذف ۳ عضو از عضوهای یک مجموعه تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸ تا کم می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟**	۱
۸	**فرض کنید $A\subseteq B$ به روش عضوگیری ثابت کنید $B'\subseteq A'$.**	۱
۹	**ثابت کنید $\varnothing$ زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.**	۰/۵
۱۰	**همه افرازهای مجموعه $\{a,b,c,d\}$ به دو زیرمجموعه را بنویسید.**	۱
۱۱	**با استفاده از جبر مجموعه‌ها احکام زیر را ثابت کنید.** الف) $(B\subseteq A)\wedge(B\subseteq A')\Rightarrow B=\varnothing$ ب) $(A\cap B)-(B\cup C)=(A-B)-C$	۲
۱۲	**اگر $A=\{۴^x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge-۱\leq x\leq۱\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge x^۲\leq۳\}$ باشد، عضوهای مجموعه $A\times B-A^۲$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.**	۱
۱۳	**اگر $A=(-۱,۲]$ و $B=\{-۱,۱\}$ باشد، نمودار $A\times B$ را رسم و آن را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.**	۱/۵

جواب آخر تمرینات محاسباتی

در این بخش برای اینکه از پاسخی که به آن رسیده‌اید اطمینان پیدا کنید و اگر به جواب صحیح نرسیده‌اید بیشتر تلاش کنید تا به این پاسخ دست یابید، جواب آخر تمرین‌هایی که راه‌حل محاسباتی دارند آورده‌ایم.

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

62) الف) $n = ۵$ ب) ۳۱ پ) ۳۱

63) $n = ۲$

64) ۶ عضو

65) ۱۰ عضو

66) $k = ۸$

67) $n(B) = ۵\ ,\ n(A) = ۹$

69) ۴

70) ۸

71) الف) ۵۱۲ ب) ۶۳ پ) ۱۵ ت) ۳۲ ث) ۴۴۸ ج) ۸ مجموعه چ) ۶۴ مجموعه

72) الف) ۱۲۶ ب) ۵۶ پ) ۷۰ ت) ۳۵ ث) ۲۵۶

73) ۲۵۶

85) $x = \frac{۳}{۲}$

114) الف) $x = -۲, y = \pm\sqrt{۲}$ ب) $x = ۴, y = ۱$ پ) $x = ۵, y = ۳$ ت) $x = \frac{۵}{۳}, y = ۱$

122) $x = ۴, y = ۷$

132) الف) ۴ عضو ب) ۸ عضو پ) ۲۴ عضو ت) ۱۲ عضو

فصل دوم: احتمال

16) ۰/۶

17) الف) $\frac{۱۳}{۱۵}$ ب) $\frac{۱}{۵}$

18) $P(B) = \frac{۷}{۱۵}$ $P(A) = \frac{۸}{۱۵}$

19) ۰/۳

20) $\frac{۱}{۶}$

21) $\frac{۲}{۵}$

22) ۰/۶

23) ۰/۶

24) ۰/۲۸

31) الف) ۰/۰۵ ب) ۰/۱۵ پ) ۰/۳۳ ت) ۰/۶۲

32) $\frac{۱۹}{۶۰}$

33) $\frac{۱}{۳}$

34) $\frac{۹}{۲۰}$

35) الف) $\frac{۱}{۱۴}$ ب) $\frac{۱۳}{۱۴}$ پ) $\frac{۱}{۱۴}$

36) ۰/۲۸

7) الف) ۰/۴۶۷ ب) ۰/۲۶۷ پ) ۰/۵۳۳

38) الف) ۰/۲۸۴ ب) ۰/۱۱۶ پ) ۰/۲۶ ت) ۰/۲۶

42) $P(a) = \frac{۱}{۲}$ $P(b) = \frac{۱}{۴}$

43) $p(a') = \frac{۲}{۳}$ $p(b) = \frac{۱}{۶}$

44) $p(a) = \frac{۱}{۶}$

45) $P(b) = \frac{۱}{۱۲}$

46) $P(۱) = \frac{۱۲}{۲۵}$

47) $a = \frac{۱}{۲}$

$P(۲) = \frac{۱}{۴}$

پاسخ تشریحی تعدادی از تمرین‌های دشوار

در این بخش می‌توانید پاسخ تشریحی سؤال‌های دشواری را که با علامت مشخص شده‌اند ببینید.

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

9 الف حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی زوج است چون یکی زوج و دیگری فرد است پس به ازای هر عدد صحیح x داریم $x(x+۱)\in E$، بنابراین مجموعه جواب برابر $\mathbb{Z}$ است.

24 ب

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

یکان

27 الف

$$\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\underset{\text{دمورگان}}{\equiv}(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv$$

$$\sim p\wedge(\overbrace{\sim q\vee q}^{T})\equiv\sim p$$

39 ب **عکس نقیض:** اگر n مضرب ۵ نباشد آن‌گاه $n^۲$ مضرب ۵ نیست. وقتی n بر ۵ بخش‌پذیر نباشد پس در تقسیم بر ۵ باقیمانده‌ای غیرصفر مثل r دارد و $n=۵q+r$ ، $r\in\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $r^۲\in\{۱,۴,۹,۱۶\}$

$$n^۲=(۵q+r)^۲=۲۵q^۲+۱۰qr+r^۲$$

$$=۵(\underbrace{۵q^۲+۲qr}_{q'})+r^۲=۵q'+r^۲$$

بنابراین $n^۲$ مضرب ۵ نیست.

44 ج نقیض:

$$\sim(\forall x\in\mathbb{Z};(\frac{x+۱}{۳}=۰)\wedge(x^۲=۱))$$

$$\equiv\exists x\in\mathbb{Z};\sim(\frac{x+۱}{۳}=۰)\vee\sim(x^۲=۱)$$

$$\equiv\exists x\in\mathbb{Z};(\frac{x+۱}{۳}\neq۰)\vee(x^۲\neq۱)$$

ارزش گزاره: خود گزاره نادرست است چون به ازای هر عدد صحیحی مثل x، دو شرط برقرار نیست. مثلاً اگر $x=۱$ باشد $\frac{x+۱}{۳}\neq۰$. نقیض گزاره درست است.

56 ب

$$x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=۰\vee x=\pm۱\ ,$$

$$|x|\le۲\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=-۲,-۱,۰,۱,۲$$

$$B=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

82 ب

$$\begin{cases}B'\subseteq A\cup B' & (۱)\\ \forall x\in A\cup B'\Rightarrow\begin{cases}x\in A\xrightarrow{A\cap B=\phi}x\notin B\Rightarrow x\in B'\\ \vee\\ x\in B'\end{cases}\\ \Rightarrow A\cup B'\subseteq B' & (۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{۱,۲}A\cup B'=B'$$

87

$$\left.\begin{array}{l}A_۱=\{x\in\mathbb{Z}\,|-۱\le x\wedge ۲^x\le۱\}=\{-۱,۰\}\\ A_۲=\{x\in\mathbb{Z}\,|-۲\le x\wedge ۲^x\le۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱\}\\ A_۳=\{x\in\mathbb{Z}\,|-۳\le x\wedge ۲^x\le۳\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}\\ A_۴=\{x\in\mathbb{Z}\,|-۴\le x\wedge ۲^x\le۴\}=\{-۴,-۳,\dots,۲\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\bigcup_{i=۱}^{۴}A_i=\{-۴,-۳,\dots,۲\}=A_۴\ ,\ \bigcap_{i=۱}^{۴}A_i=\{-۱,۰\}=A_۱$$

97 الف

$$A\cup B=\{x\in U\,|\,x\in A\vee x\in B\}$$

$$=\{x\in U\,|\,x\in B\vee x\in A\}=B\cup A$$

101

پ طبق قضیه $A\cap A\subseteq B\cap B'\to A\subseteq\varnothing\xrightarrow{\varnothing\subseteq A}A=\varnothing$

102 الف

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow(A\cup B)'=B'$$

$$\Rightarrow A'\cap B'=B'\Rightarrow B'\subseteq A'$$

104 ت

$$(A-B)\cup(A\cup B)'=(A\cap B')\cup(A'\cap B')$$

$$=(A\cup A')\cap B'=U\cap B'=B'$$

106 ب

$$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'=A\cap(B'\cap C')$$

$$=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$$

118 الف

$$A=\{k^۲\,|\,\underbrace{k\in\mathbb{N}\,,\,k\le۲}_{۱,۲}\}=\{۱,۴\}$$

$$B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\wedge x^۲=x\}=\{۰,۱\}$$

ب $A\times A=\{(۱,۱),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\}$

$$A\times B=\{(۱,۰),(۱,۱),(۴,۰),(۴,۱)\}$$

$$A\times B-B\times B=$$

$$\{(۱,۰),(۱,۱),(۴,۰),(۴,۱)\}-\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$$

$$=\{(۴,۰),(۴,۱)\}$$

پ $A\times B$ ۴عضو دارد پس $۲^۴=۱۶$ زیرمجموعه دارد.