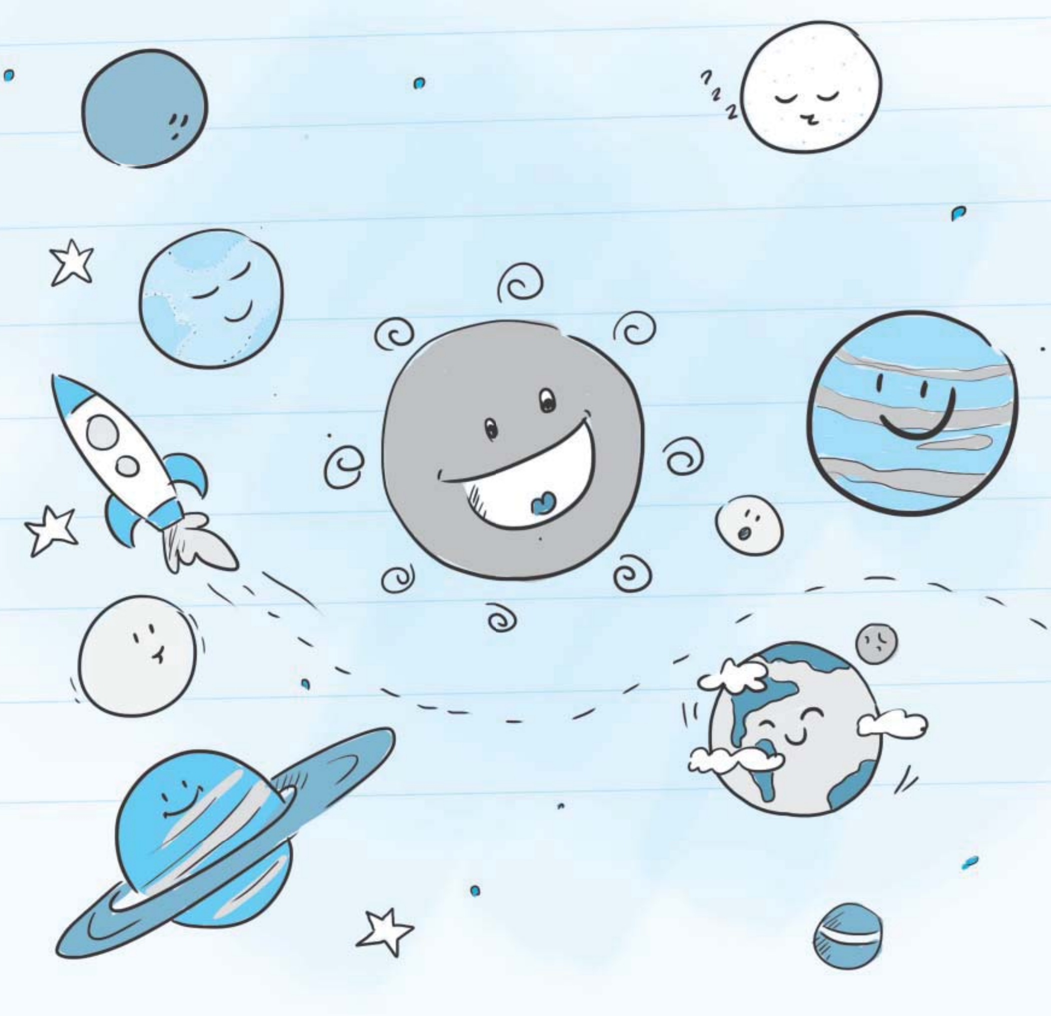
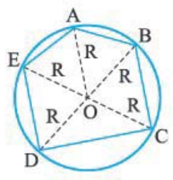
فصل ۱
دایره



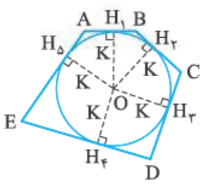
درس ۴

چندضلعی‌های محاطی و محیطی



(شکل ۱)

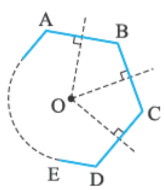
شکل‌های روبه‌رو را نگاه کنید! در شکل (۱) یک دایره از تمام رأس‌های یک شکل گذشته است، به پنج ضلعی ABCDE یک چندضلعی محاطی و به دایره هم، دایرهٔ محیطی چندضلعی گفته می‌شود. معلوم است که اگر O مرکز دایرهٔ محیطی باشد، داریم: $OA = OB = OC = \cdots$



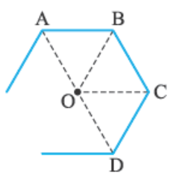
(شکل ۲)

در شکل (۲) یک دایره درون یک چندضلعی قرار دارد و بر تمام ضلع‌ها مماس شده است، به این جور چندضلعی‌ها، محیطی گفته می‌شود. دایره هم، دایرهٔ محاطی نامیده می‌شود. در این‌جا فاصلهٔ مرکز دایره از همهٔ ضلع‌ها برابر است، یعنی: $OH_1 = OH_2 = \cdots$

تذکر محیط به کجای شکل می‌گن؟! بیرونش دیگه! پس همیشه یادت باشه اون شکلی که بیرونه می‌شه محیطی و اون یکی میشه محاطی!



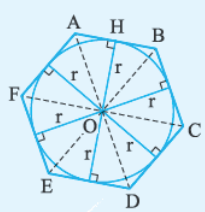
◀ برای این‌که یک چندضلعی محاطی باشد، یعنی بتوانیم دایره‌ای رسم کنیم که از تمام رئوسش عبور کند، باید عمود منصف‌های اضلاعش در یک نقطه همرس باشند، این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی است. مثلاً مثلث همیشه محاطی است! (چرا؟)



برای محیطی‌بودن یک چندضلعی هم، باید همهٔ نیمسازهای زاویه‌ها در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی است که درون چندضلعی قرار می‌گیرد.

مثال **اگر دایره‌ای به شعاع r در یک شش‌ضلعی به مساحت S و محیط ۲P، محاط شده باشد، ثابت کنید: $r = \frac{S}{P}$.**

پاسخ شکل را ببینید! اگر از مرکز دایره به رأس‌های شش‌ضلعی وصل کنیم، ۶ مثلث به وجود می‌آید که در همهٔ آن‌ها، ارتفاع برابر r است.



حالا می‌توانیم بگوییم که اگر مساحت ۶ مثلث را با هم جمع کنیم باید به مساحت کل شش‌ضلعی برسیم:

$$S = S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} + \cdots + S_{\overset{\Delta}{AOF}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r \times AB}{۲} + \frac{r \times BC}{۲} + \cdots + \frac{r \times AF}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r}{۲}(\underbrace{AB + BC + \cdots + AF}_{۲P}) \Rightarrow S = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

◀ اگر شعاع دایرهٔ محاطی یک چندضلعی محیطی r باشد، همواره داریم:

$$r = \frac{S}{P} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{مساحت چند ضلعی} \\ \rightarrow \text{نصف محیط چندضلعی} \end{array}$$

چندضلعی‌های منتظم

n ضلعی‌های منتظم هم دایرهٔ محیطی دارند هم محاطی. اگر ضلع چندضلعی a، شعاع دایرهٔ محیطی R و شعاع دایرهٔ محاطی r باشد، داریم:

۱) $a = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$

۲) $a = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$

مثال **شعاع دایرهٔ محیطی یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ را بیابید. ($\sin ۲۲/۵^\circ \simeq ۰/۴$)**

پاسخ $a=۴$ ، $n=۸$ است و R را از ما می‌خواهند:

$$a=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow ۴=۲(R)\times\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۸} \Rightarrow ۴=۲R\times\sin ۲۲/۵^\circ \Rightarrow R=\frac{۴}{۰/۸}=۵$$

تست **در یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، مساحت دایرهٔ محیطی چند برابر مساحت دایرهٔ محاطی است؟**

۱) $\frac{۳}{۴}a$ ۲) $\frac{۴}{۳}a$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ ۴** در این‌جا $n=۶$ است پس $\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ هم می‌شود: $\frac{۱۸۰^\circ}{۶}=۳۰^\circ$. برای به دست آوردن مساحت دایره فقط به شعاع آن احتیاج داریم، پس قبل از هر کاری برویم و شعاع دایره های محاطی و محیطی را به دست بیاوریم:

$$a=۲R\sin ۳۰^\circ \Rightarrow a=۲R\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow R=a$$

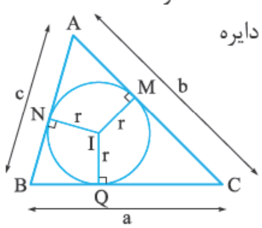
$$a=۲r\tan ۳۰^\circ \Rightarrow a=۲r\times\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

حالا نسبت مساحت‌ها را بیابیم:

$$\frac{\text{مساحت دایرهٔ محیطی}}{\text{مساحت دایرهٔ محاطی}}=\frac{\pi R^۲}{\pi r^۲}=\frac{R^۲}{r^۲}=(\frac{R}{r})^۲=\frac{(a)^۲}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)^۲} \Rightarrow \frac{a^۲}{\frac{۳}{۴}a^۲}=\frac{۴}{۳}$$

دایره‌های محاطی و محیطی مثلث

۱ دایرهٔ محاطی داخلی: می‌دانیم که نیمسازهای هر مثلثی همرس‌اند. پس دایره‌ای وجود دارد که در داخل مثلث محاط شود. به این دایره، دایرهٔ محاطی داخلی گفته می‌شود که شعاع آن را با r و مرکزش را با I نشان می‌دهیم. دربارهٔ این دایره نکات زیر را باید بلد باشیم:

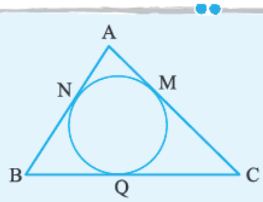


۱ $r=\frac{S}{P}$ (که S مساحت مثلث و P نصف محیط است.)

۲ $AM=AN=P-a$ و $BN=BQ=P-b$ و $CM=CQ=P-c$

۳ I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.

تست **در شکل روبه‌رو، اگر $BQ=۳$ ، $AB=۵$ و $BC=۷$ باشد، محیط مثلث کدام است؟**



۱) ۱۷ ۲) ۱۸
۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینهٔ ۲** اطلاعات مسئله را کمی راحت‌تر بنویسیم:

$$a=۷\ ,\ c=۵\ ,\ BP=۳ \Rightarrow P-b=۳$$

دو ضلع مثلث را داریم فقط باید b را پیدا کنیم که کار تمام شود:

$$P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۵+۷+b}{۲}=\frac{۱۲+b}{۲}=۶+\frac{b}{۲}$$

حالا اگر P را در رابطهٔ $BQ=P-b=۳$ جای‌گذاری کنیم داریم:

$$P-b=۳ \Rightarrow (۶+\frac{b}{۲})-b=۳ \Rightarrow ۶-\frac{b}{۲}=۳ \Rightarrow \frac{b}{۲}=۳ \Rightarrow b=۶$$

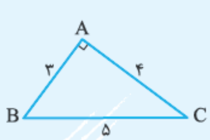
پس محیط مثلث می‌شود:

$$۵+۶+۷=۱۸$$

تست **در مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴

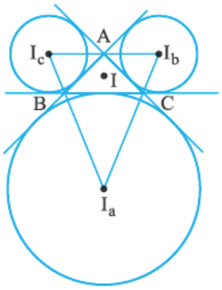
پاسخ **گزینهٔ ۱** چون $۳^۲+۴^۲=۵^۲$ پس مثلث، قائم‌الزاویه است:



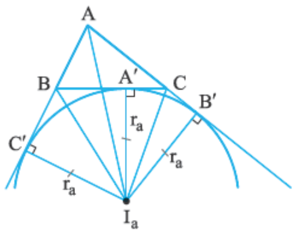
$$S=\frac{۳\times۴}{۲}=۶\ ,\ P=\frac{۵+۴+۳}{۲}=۶$$

شعاع هم که از رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$ به دست می‌آید:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۶}{۶}=۱$$



۲ دایره‌های محاطی خارجی مثلث: هر مثلث ۳تا دایره دارد که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس هستند. به این دایره‌ها محاطی خارجی گفته می‌شود. مراکز این دایره‌ها با I_a و I_b و I_c نمایش داده می‌شوند.



یکی از این دایره‌ها را به نمایندگی از بقیه بررسی می‌کنیم:

۱ مرکز این دایره محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ A و نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C است.

۲ چون روبه‌روی رأس A است، اسم مرکزش I_a شده است.

۳ شعاعش را با r_a نشان می‌دهیم که برابر است با: $r_a = \dfrac{S}{P-a}$

۴ $AB' = AC' = P$ (P نصف محیط مثلث است.)

مثال اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و r_a، r_b و r_c شعاع‌های دوایر محاطی خارجی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

پاسخ می‌دانیم که: $r=\dfrac{S}{P}$، $r_a=\dfrac{S}{P-a}$، $r_b=\dfrac{S}{P-b}$ و $r_c=\dfrac{S}{P-c}$ حالا از سمت چپ تساوی شروع می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{\frac{S}{P-a}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-b}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-c}}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}$$

$$=\frac{۳P-\overbrace{(a+b+c)}^{۲P}}{S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}$$

تست در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۸\sqrt{۳}$، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ گزینهٔ ۴ در مثلث متساوی‌الاضلاع معلوم است که r_a، r_b و r_c مساوی و همگی برابر با $\dfrac{S}{P-a}$ هستند.

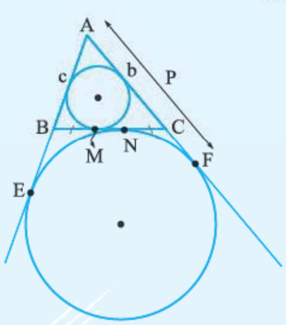
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع: $S=\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}(a)^۲=\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}(۸\sqrt{۳})^۲=\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۶۴\times ۳=۴۸\sqrt{۳}$

$\text{محیط}=۲P=۳(۸\sqrt{۳})=۲۴\sqrt{۳} \Rightarrow P=۱۲\sqrt{۳}$

$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۱۲\sqrt{۳}-۸\sqrt{۳}}=\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}}=۱۲$$

تست در مثلث ABC، $b=۸$ و $c=۶$ است. اگر M و N محل تماس دایره‌های محاطی داخلی و خارجی با ضلع BC باشند. اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



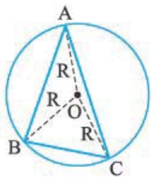
پاسخ گزینهٔ ۱ برای به دست آوردن MN می‌خواهیم CM و CN را پیدا کنیم و از هم کمشان کنیم. CM که می‌دانیم برابر است با: $CM=P-c$.

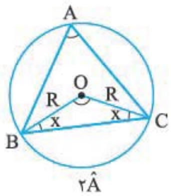
CN با CF برابر است چرا که دو مماسی هستند که از نقطهٔ C بر دایرهٔ محاطی خارجی رسم شده‌اند.

کل AF برابر P و تکهٔ AC از آن هم که همان b است پس $CF=AF-AC=P-b$. در نتیجه CN هم برابر است با: $P-b$.

خُب حالا نوبت MN شده است: $MN=CM-CN=(P-c)-(P-b)=b-c$

$b-c$ هم که می‌شود: $۸-۶=۲$





۳ دایرهٔ محیطی مثلث: عمود منصف‌های هر مثلثی همرس‌اند. این نقطه از سه رأس به یک فاصله است. اگر این فاصله را R بنامیم و مرکز پرگار را روی این نقطه قرار دهیم و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ R باز کنیم دایره‌ای رسم می‌شود که از رأس عبور می‌کند، به این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث گفته می‌شود.

دربارهٔ این مثلث باید بدانیم که:

۱ مرکزش محل همرسی عمودمنصف‌ها است.

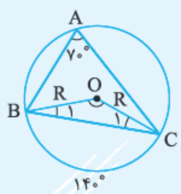
۲ $R=\dfrac{abc}{۴S}$ (S مساحت مثلث است.)

۳ $B\hat{O}C=\widehat{BC}=۲\hat{A}$

۴ و چون مثلث BOC متساوی‌الساقین است، داریم: $x=\dfrac{۱۸۰^\circ-۲\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\hat{A}$

تست در مثلث ABC، $\hat{A}=۷۰^\circ$ و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است، زاویهٔ OBC چند درجه است؟

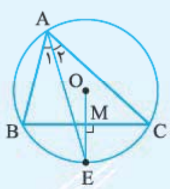
۱) ۴۰° ۲) ۲۰° ۳) ۱۰° ۴) ۳۰°



پاسخ گزینهٔ ۲ چون $\hat{A}=۷۰^\circ$ است، $\widehat{BC}=۲\hat{A}=۱۴۰^\circ$ خواهد بود. از طرفی $\hat{O}$ زاویهٔ مرکزی است بنابراین $\hat{O}=\widehat{BC}=۱۴۰^\circ$، چون $BO=CO$ است، در مثلث متساوی‌الساقین BOC داریم:

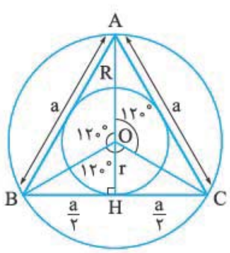
$$\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{O}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{B}_۱+۱۴۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{B}_۱=۴۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=۲۰^\circ$$

مثال ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه و عمودمنصف ضلع نظیر آن زاویه بر روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می کنند.



پاسخ چون $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ است پس $\widehat{BE}=\widehat{CE}$ یعنی E وسط کمان BC است. از طرفی عمودمنصف وتر BC از وسط کمان BC می‌گذرد، پس E که نقطه‌ای بر روی دایرهٔ محیطی مثلث است، محل تلاقی نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC است.

در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a و ارتفاع h، داریم:



۱ $R=\dfrac{۲}{۳}h=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}a$

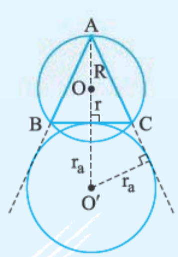
۲ $r=\dfrac{۱}{۳}h=\dfrac{\sqrt{۳}}{۶}a$

۳ $r_a=r_b=r_c=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}a$

۴ $\dfrac{r}{۱}=\dfrac{R}{۲}=\dfrac{r_a}{۳}$

تست در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

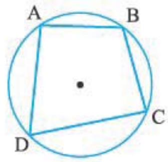


پاسخ گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، طول خط‌المرکزین برابر $OO'=r+r_a$ است، بنابراین داریم:

$$OO'=r+r_a=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a+\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

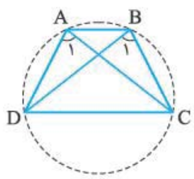
$$=\frac{\sqrt{۳}}{۶}(\sqrt{۳})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳})=\frac{۳}{۶}+\frac{۳}{۲}=۲$$

چهارضلعی‌های محیطی و محاطی



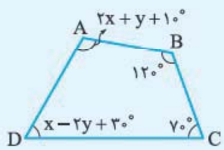
چهارضلعی محاطی: یک چهارضلعی محاطی فقط در صورتی محاطی است که زاویه‌های مقابلش مکمل باشند.

$$\text{محاطی } ABCD \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$



وقتی یک چهارضلعی محاطی است همیشه باید یک دایره (مثل هالهٔ نور!) دورش ببینیم، مثلاً در هر چهارضلعی محاطی داریم: $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$، چرا که در آن دایره‌ای که هست ولی کشیده نشده است $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}_۱$ دو زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان CD هستند پس با هم برابرند. (عکس این مطلب هم درست است یعنی اگر $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$ باشد چهارضلعی ABCD محاطی است.)

تست چهارضلعی ABCD محاطی است. y کدام است؟



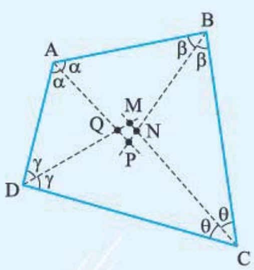
۱) ۶° ۲) ۸°

۳) ۱۰° ۴) ۱۲°

پاسخ گزینهٔ ۲ در چهارضلعی محاطی مجموع زاویه‌های روبه‌روی هم، ۱۸۰° است:

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(۲x+y+۱۰^\circ)+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ\\ (x-۲y+۳۰^\circ)+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲x+y=۱۰۰^\circ\\ x-۲y=۳۰^\circ\end{cases} \Rightarrow ۵y=۴۰^\circ \Rightarrow y=۸^\circ$$

مثال ثابت کنید: از برخورد نیمسازهای داخلی هر چهارضلعی محدب، یک چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود.



پاسخ باید ثابت کنیم $\hat{M}+\hat{P}=۱۸۰^\circ$ است، در چهارضلعی ABCD داریم:

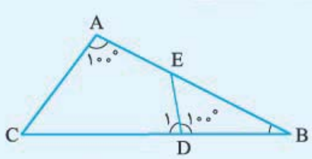
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta+۲\theta+۲\gamma=۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+\theta+\gamma=۱۸۰^\circ$$

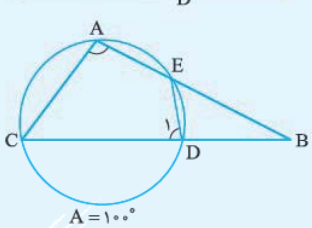
از طرفی دیگر:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{APB}:\hat{P}=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)\\ \overset{\Delta}{DMC}:\hat{M}=۱۸۰^\circ-(\theta+\gamma)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{M}+\hat{P}=۳۶۰^\circ-(\alpha+\beta+\theta+\gamma)=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

مثال در شکل مقابل، ثابت کنید: $BE \times BA = BD \times BC$.





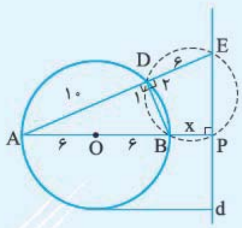
پاسخ چهارضلعی AEDC که محاطی است، چرا که در آن داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=۱۰۰^\circ\\ \hat{D}_۱=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ$$

شکل را که خوب نگاه کنید، می‌فهمید که AE و CD دو وتر از یک دایره‌اند که امتداد آن‌ها یکدیگر را در B قطع کرده است، بنابراین: $BE \times BA = BD \times BC$

تست نقطهٔ P در امتداد قطر AB از دایرهٔ $C(O,6)$ قرار دارد، خط d را در نقطهٔ P عمود بر AP رسم می‌کنیم، اگر E نقطه‌ای از خط d و D محل برخورد EA و دایره باشد، به طوری که $AD = 10$ و $DE = 6$، BP کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۱/۵

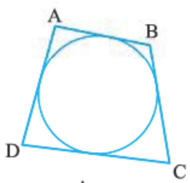


پاسخ **گزینهٔ ۳** زاویهٔ ADB محاطی و روبه‌رو به قطر AB است، پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$. در نتیجه چهارضلعی DEPB که در آن $\hat{D}_2 + \hat{P} = 180^\circ$ است، محاطی بوده و در آن قضیهٔ وترها را می‌نویسیم:

$$AD \times AE = AB \times AP \Rightarrow 10 \times 16 = 12(12 + x)$$

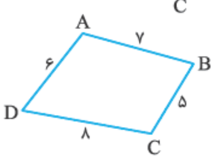
$$\Rightarrow 160 = 144 + 12x \Rightarrow 16 = 12x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

چهارضلعی محیطی: اگر یک چهارضلعی بخواهد محیطی باشد، یک راه بیشتر ندارد، راهش این است که: جمع دوتا ضلع روبه‌روی هم آن برابر با جمع آن دوتا روبه‌رویی‌های دیگر باشد، یعنی:



$$ABCD \text{ محیطی} \Leftrightarrow AB + CD = BC + AD$$

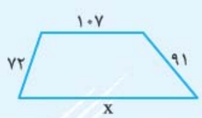
مثلاً چهارضلعی روبه‌رو محیطی نیست چرا که:



$$\begin{cases} AB + DC = 7 + 8 = 15 \\ AD + BC = 6 + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow AB + DC \neq AD + BC$$

تست نیمسازهای داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می‌گذرند، اگر اندازهٔ سه ضلع متوالی آن به ترتیب ۷۲، ۱۰۷ و ۹۱ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع چهارم کدام است؟

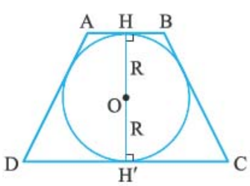
۱) ۵۶ ۲) ۸۸ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۶



پاسخ **گزینهٔ ۱** چهارضلعی که نیمسازهایش همرس باشند، محیطی است (یادتان که نرفته!) پس باید داشته باشیم:

$$107 + x = 91 + 72 \Rightarrow x = 56$$

اگر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین محیطی باشد، داریم:



۱) ارتفاع ذوزنقه برابر است با: $HH' = 2R$

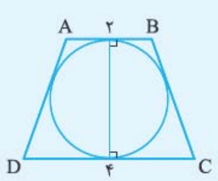
۲) $(2R)^2 = AB \times DC$

۳) $AD = BC = \frac{AB + DC}{2} \Rightarrow \text{طول ساق} = \frac{\text{مجموع قاعده‌ها}}{2}$

تست در شکل زیر، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD بر دایره محیط شده است. مساحت آن کدام است؟

(سراسری ۸۱)

۱) $6\sqrt{2}$
۲) ۶
۳) $8\sqrt{2}$
۴) ۸



پاسخ **گزینهٔ ۱** قاعده‌ها را که داریم، فقط ارتفاع را می‌خواهیم تا مساحت را حساب کنیم، ارتفاع هم که 2R است پس باید R را پیدا کنیم، در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی داریم:

$$(2R)^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

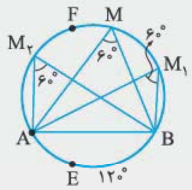
پس ارتفاع $2\sqrt{2}$ است و مساحت می‌شود:

$$S = \frac{(\text{مجموع دو قاعده}) \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times (2+4)}{2} = 6\sqrt{2}$$

در جدول زیر تمام اشکال مهم را از لحاظ محیطی و محاطی بودن بررسی کرده‌ایم:

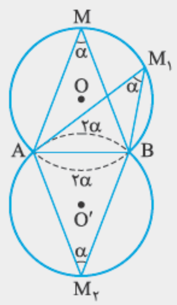
نوع \ شکل	مثلث	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین	مستطیل	لوزی	مربع	nضلعی منتظم
محیطی	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓
محاطی	✓	×	×	✓	✓	×	✓	✓

زاویهٔ دید[1]

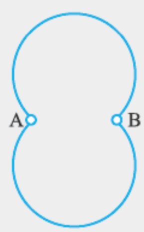


در دایرهٔ $C(O,R)$ کمان $\widehat{AEB}=۱۲۰^\circ$ و وتر AB را رسم می‌کنیم.
هر نقطهٔ دلخواه مانند M را که روی کمان دیگر $\widehat{AB}$ (روی $\widehat{AFB}$) در نظر بگیریم و از این نقطه به A و B وصل کنیم، داریم:

$$A\hat{M}B=\frac{\widehat{AEB}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$



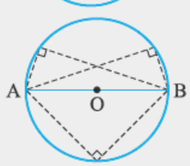
از هر نقطهٔ دیگری مانند M_1 و M_2 و ... نیز به A و B وصل می‌کردیم، زاویه‌ای که تشکیل می‌شد، نصف $\widehat{AEB}$ و همان ۶۰° بود. یعنی هر نقطه از کمان $\widehat{AFB}$ رأس زاویه‌ای برابر ۶۰° است که ضلع‌هایش از A و B می‌گذرند.
به بیان دیگر تمام نقاط روی کمان $\widehat{AFB}$، پاره‌خط AB را با زاویهٔ ۶۰° می‌بینند.
به کمان $\widehat{AFB}$، کمان‌درخور یا کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره خط AB گفته می شود. به صورت کلی‌تر: مجموعه نقاطی از صفحه که پاره‌خط AB را با زاویهٔ α می‌بینند، کمان‌هایی از دو دایرهٔ مساوی هستند که از B و A می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر ۲α است. به شکل حاصل کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌گویند.



تذکر۱ مفهوم این قضیه این است که تمام نقاطی که پاره‌خط ثابت AB را با زاویهٔ مشخص α می‌بینند، با هم یک شکل (مکان هندسی) را تشکیل می‌دهند. که این شکل دو کمان از دو دایرهٔ مساوی است، چون خود A و B جزء مکان هندسی نیستند، این شکل به صورت ساده‌تر به صورت مقابل است:

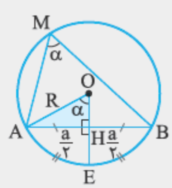
تذکر۲ در شکل قضیه، نقاط روی دو کمان کوچک‌تر $\widehat{AB}$، پاره‌خط AB را با زاویهٔ $۱۸۰^\circ-\alpha$ می‌بینند.

تذکر۳ اندازهٔ کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB، برابر با $۳۶۰^\circ-۲\alpha$ است، یعنی: $\widehat{AMB}=۳۶۰^\circ-۲\alpha$



تذکر۴ مجموعهٔ نقاطی که پاره‌خط AB را با زاویهٔ ۹۰° می‌بینند، دایره‌ای به قطر AB است. (دقت کنید که خود A و B هیچ وقت جزء شکل حاصل نیستند).

دو رابطهٔ مهم در کمان‌درخور



کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط $AB=a$، بخشی از یک دایره است، اگر شعاع این دایره را R در نظر بگیریم، با توجه به شکل مقابل داریم:
از O عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا AB را در H و کمان $\widehat{AB}$ را در E نصف کند، در نتیجه $A\hat{O}H=\widehat{AE}=\widehat{EB}=\alpha$ خواهد بود و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:

$$①\ \overset{\Delta}{OAH}:\hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{AH}{OA}=\frac{\frac{a}{۲}}{R}\Rightarrow R=\frac{a}{۲\sin\alpha}$$

$$②\ \overset{\Delta}{OAH}:\hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow |\tan\alpha|=\frac{AH}{OH}=\frac{\frac{a}{۲}}{OH}\Rightarrow OH=\frac{a}{۲|\tan\alpha|}$$

دقت کنید که OH فاصلهٔ مرکز دایره تا پاره‌خط AB است.

تذکر در واقع این دایره همان دایرهٔ محیطی مثلث MAB است.

۱- سلام دوست خوبم، این قسمت از درسنامه را ترام‌دار کردیم به خاطر این که در کتاب درسی تحت عنوان مجلهٔ ریاضی آمده و این یعنی لازم نیست آن را بخوانید ولی ما آن را به خاطر آدم‌های علاقه‌مند به ریاضی (به قول خارجی‌ها)، برای برای آدم‌های دیوانهٔ ریاضی (به قول خودمان) آوردیم. همین!

مثال **نقطهٔ M پاره‌خط AB به طول $۳\sqrt{۲}$ را با زاویهٔ ۴۵° می‌بیند، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث MAB و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.**

پاسخ با توجه به نتایجی که به دست آوردیم، با جای‌گذاری $\alpha = ۴۵^\circ$ و $a = ۳\sqrt{۲}$ داریم:

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲\sin ۴۵^\circ} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = ۳$$

و

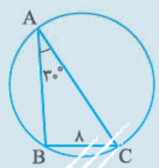
$$OH = \frac{a}{۲|\tan\alpha|} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(۱)} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

تست **در مثلث ABC طول ضلع $BC = ۸$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$، شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟**

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** دایرهٔ محیطی مثلث ABC همان دایره‌ای است که کمان‌درخور زاویهٔ ۳۰° روبه‌رو به ضلع $BC = ۸$، بخشی از آن دایره است، پس شعاع آن برابر است با:

$$R = \frac{a}{۲\sin\hat{A}} = \frac{۸}{۲(\frac{۱}{۲})} = ۸$$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

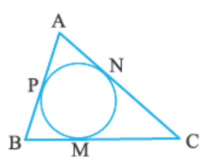
۱۸۹- در مثلثی به اضلاع ۱۵، ۱۲ و ۹، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۰- در مثلثی مساحت از نظر عددی ۲ برابر محیط است. مساحت دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

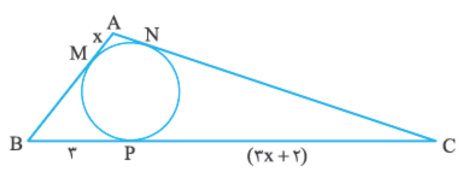
۱) ۸π ۲) ۱۶π ۳) ۴π ۴) π

۱۹۱- در شکل روبه‌رو اگر $BM = ۳$، $AB = ۵$ و $BC = ۷$ باشد، محیط مثلث کدام است؟



۱) ۱۹ ۲) ۲۰
۳) ۱۸ ۴) ۱۷

۱۹۲- در شکل مقابل، اگر محیط مثلث برابر ۳۴ باشد، x کدام است؟

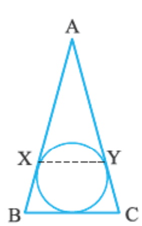


۱) ۳ ۲) ۱/۵
۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

۱۹۳- دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به اضلاع ۵، ۷ و ۸، ضلع بزرگ را در محل تماس به دو تکه به اندازه‌های x و y تقسیم می‌کند، اگر $x > y$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۹۴- در شکل مقابل، $AB = AC = ۲BC$ و محیط مثلث برابر ۴۰ است. محیط مثلث AXY کدام است؟

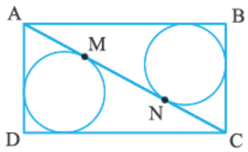


۱) ۲۸
۲) ۳۰
۳) ۲۶
۴) ۳۴

۱۹۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، r شعاع دایرهٔ محاطی است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $r = \frac{S}{P}$ ۲) $۲r = b + c - a$ ۳) $r = \frac{ab}{P}$ ۴) $۲r = \frac{bc}{P}$

۱۹۶- چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است. مطابق شکل، قطر AC را رسم نموده و دایره‌های محاطی دو مثلث ایجادشده را کشیده‌ایم. اگر اضلاع مستطیل ۵ و ۳ باشند، طول MN کدام است؟



۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۹۷- (عمران) در مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اندازهٔ شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABH و ACH به ترتیب $r_۱$ و $r_۲$ و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است. اگر $r_۱ = ۶$ و $r_۲ = ۸$ باشد، r کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۱۹۸- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶، $r + r_a$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲+۳\sqrt{۳}$ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) $۴+۳\sqrt{۳}$

۱۹۹- اضلاع مثلثی ۱۳، ۱۴ و ۱۵ و مساحت آن ۸۴ است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی که مماس بر ضلع متوسط باشد، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

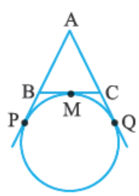
۲۰۰- در مثلث با اضلاع $a = ۵$، $b = ۱۲$ و $c = ۱۳$، شعاع بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۳

۲۰۱- در مثلث ABC که $BC > AC > AB$ کدام صحیح است؟

۱) $r_a > r_b > r_c$ ۲) $r_a > r_c > r_b$ ۳) $r_c > r_b > r_a$ ۴) $r_b > r_c > r_a$

۲۰۲- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC برابر ۲۰ است. اندازه ی AP کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۱۲
۴) ۱۰

۲۰۳- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟ (ریاضی ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۲۰۴- در مثلث ABC، $b = ۵$ و $c = ۲$ است. اگر M و N محل تماس دایره‌های محاطی داخلی و خارجی با ضلع BC باشند، اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۵- در مثلث ABC، $r_a = ۳$، $r_b = ۴$ و $r_c = ۱۲$ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۲۰۶- اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی دایره‌ای ۱/۵ و اندازهٔ دو ارتفاع مثلث ۶ و ۴ باشد، اندازهٔ ارتفاع سوم مثلث کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۷- در مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

۲۰۸- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ داریم: $a = ۱۲$ و $b = ۲c$، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۰۹- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایرهٔ محاطی داخلی ۳ است. شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۱۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت دایرهٔ محیطی چند برابر مساحت دایرهٔ محاطی داخلی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

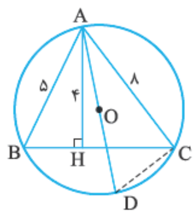
۲۱۱- در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۱۲- در مثلث ABC، حاصل‌ضرب اضلاع ۱۲۰ و مساحت مثلث ۶ است. شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

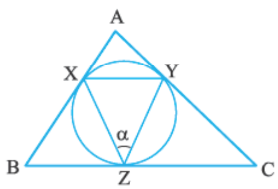
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۱۳- در مثلث ABC، $AB = ۵$ ، $AC = ۸$ و $AH = ۴$ است. قطر دایرهٔ محیطی کدام است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۲۱۴- در شکل مقابل مقدار α کدام است؟



۱) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ۲) $۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$

۳) $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ ۴) به طور دقیق نمی‌توان تعیین کرد.

۲۱۵- در متوازی‌الاضلاع ABCD، دایرهٔ محیطی مثلث ACD، امتداد ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. مثلثABM، همواره از کدام نوع است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) متشابه با مثلث ACD ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه

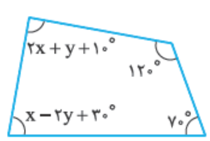
۲۱۶- نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و نقطهٔ O' قرینهٔ آن نسبت به ضلع BC است. اگر $OO' = BC$ باشد، زاویهٔ A کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۲۱۷- می‌توان ثابت کرد که در هر مثلث دلخواه ABC، قرینهٔ مرکز ارتفاعی (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازهٔ زاویهٔ DCB برابر است با:

۱) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ۲) $\frac{\hat{B}}{۲}$ ۳) $۹۰^\circ - \hat{A}$ ۴) $۹۰^\circ - \hat{B}$

۲۱۸- در شکل مقابل ABCD چهارضلعی محاطی است. y کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) ۱۶°

۳) ۱۰° ۴) ۸°

۲۱۹- دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است؛ قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر چه‌قدر است؟

۱) ۲۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۳۰°

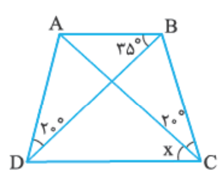
۲۲۰- نیمسازهای زاویه‌های یک ذوزنقه را رسم می‌کنیم و از برخوردشان یک چهارضلعی به دست می‌آید، این چهارضلعی .... *(ریاضی ۸۱)*

۱) مربع است. ۲) مستطیل است. ۳) لوزی است. ۴) محاطی است.

۲۲۱- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟ *(ریاضی ۸۸)*

۱) مستطیل ۲) لوزی ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) محاطی

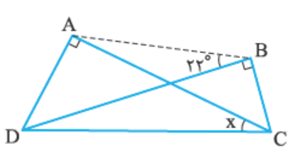
۲۲۲- در شکل مقابل، زاویهٔ x کدام است؟



۱) ۵۵° ۲) ۴۰°

۳) ۳۵° ۴) ۳۰°

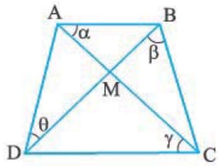
۲۲۳- در شکل مقابل، x چند درجه است؟



۱) ۲۲° ۲) ۴۶°

۳) ۶۸° ۴) ۴۴°

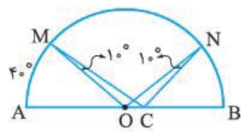
۲۲۴- در شکل مقابل، ABCD محاطی است، $\alpha+\beta+\gamma+\theta$ چند درجه است؟



۱) 180° ۲) 240°

۳) 270° ۴) غیرقابل تعیین

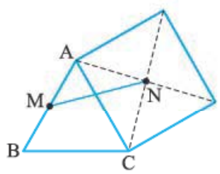
عمران **۲۲۵- در نیم‌دایرهٔ روبه‌رو اگر O مرکز نیم‌دایره بوده و $\hat{M}=\hat{N}=10^\circ$ و $\widehat{AM}=40^\circ$ باشند، اندازهٔ کمان BN کدام است؟**



۱) 10° ۲) 20°

۳) 30° ۴) 40°

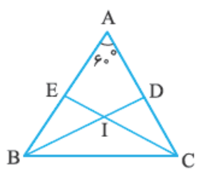
عمران **۲۲۶- بر روی ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مربعی بنا می‌کنیم. مرکز مربع را N و وسط ضلع AB را M می‌نامیم. اندازهٔ زاویهٔ AMN کدام است؟**



۱) 45° ۲) 30°

۳) 60° ۴) 75°

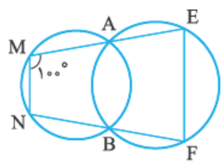
۲۲۷- در مثلث ABC، $\hat{A}=60^\circ$ است. اگر نیمسازهای BD و CE یکدیگر را در I قطع کنند و داشته باشیم $AC=8$ ، $DC=5$ و $CI=6$ اندازهٔ EC کدام است؟



۱) $8/5$ ۲) $7/5$

۳) $\frac{20}{3}$ ۴) 7

۲۲۸- در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ E کدام است؟



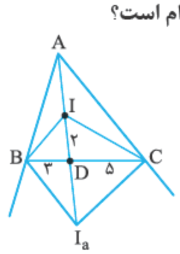
۱) 100°

۲) 90°

۳) 80°

۴) 70°

۲۲۹- در شکل مقابل، I و I_a به ترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ABC هستند. طول DI_a کدام است؟



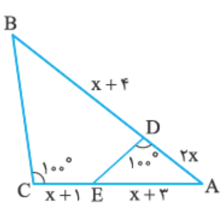
۱) 6

۲) 7

۳) $7/5$

۴) 9

۲۳۰- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



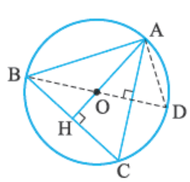
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۳۱- در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویهٔ AOD برابر کدام گزینه است؟ *(ریاضی ۹۲)*

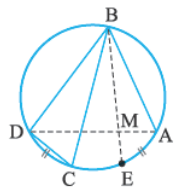


۱) $O\hat{B}C$

۲) $C\hat{A}D$

۳) $O\hat{A}C$

۴) $A\hat{D}O$

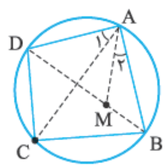


۲۳۲- در شکل مقابل، $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ ، $CD = ۳$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ است. اندازهٔ AM کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵



۲۳۳- در شکل مقابل $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ است. حاصل $AD \times BC$ برابر کدام است؟

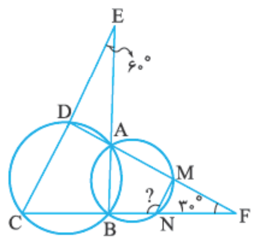
(ریاضی ۹۳)

۱) $DM \times AC$

۲) $BM \times AC$

۳) $AB \times CD$

۴) $BD \times BM$



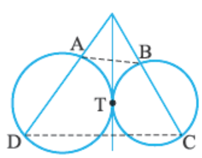
عمران **۲۳۴- در شکل مقابل، اگر $A\hat{F}B = ۳۰^\circ$ و $A\hat{E}D = ۶۰^\circ$ باشند، MNB برابر است با:**

۱) ۱۰۵°

۲) ۱۲۰°

۳) ۱۳۵°

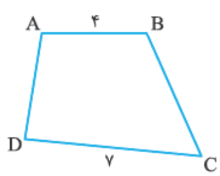
۴) ۱۵۰°



۲۳۵- در شکل مقابل چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) محیطی ۲) محاطی

۳) ذوزنقه ۴) کایت



۲۳۶- در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD محیطی است. محیط چهارضلعی کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱

۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۳۷- در چهارضلعی محیطی ABCD، $AB + CD = ۸$ است. محیط چهارضلعی کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰

۲۳۸- در یک چهارضلعی سه نیمساز داخلی همرس‌اند و اندازهٔ سه ضلع متوالی آن، ۱۱، ۱۳ و ۱۷ است. اندازهٔ ضلع چهارم کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۹

۲۳۹- اگر محیط یک چهارضلعی محیطی برابر با ۱۲ و مساحت آن ۱۸ باشد، شعاع دایرهٔ محاطی آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

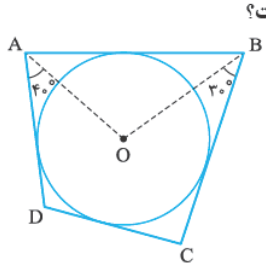
۲۴۰- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر همواره محیطی است؟

۱) متوازی الاضلاع ۲) مستطیل ۳) لوزی ۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۲۴۱- وسط اضلاع مستطیلی را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم، چهارضلعی حاصل ....

۱) محاطی است. ۲) محیطی و محاطی است.

۳) نه محیطی و نه محاطی است. ۴) محیطی است.



۲۴۲- در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی ABCD است. اندازهٔ زاویهٔ AOB کدام است؟

۱) ۷۰°

۲) ۹۰°

۳) ۱۰۰°

۴) ۱۱۰°

۲۴۳- در چهارضلعی محیطی ABCD می‌دانیم که محیط برابر ۲۸ و $\frac{AB}{DC}=\frac{۲}{۵}$ است. حاصل عبارت $\frac{AB^{۲}\times DC^{۲}}{AD+BC}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۰۰}{۷}$ ۲) $\frac{۶۰۰}{۷}$ ۳) $\frac{۸۰۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۷۲۰}{۷}$

۲۴۴- اگر شعاع دایره‌ای که در یک لوزی محاط است برابر ۲ و یکی از قطرهای لوزی ۸ باشد، مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) $\frac{۳۲}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۳۵}{\sqrt{۵}}$

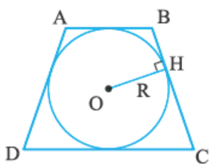
۲۴۵- طول قاعده‌های یک ذوزنقهٔ محیطی ۲ و ۸ است. ارتفاع این ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۶- یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع ۵ محیط است. اگر مساحت ذوزنقه، ۷۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۷/۵

۲۴۷- اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD $(AB \parallel DC)$ بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده باشد، کدام گزینه نادرست است؟



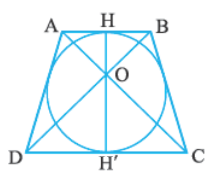
۱) ارتفاع ذوزنقه برابر است با میانگین هندسی دو قاعده.

۲) قطر دایره برابر است با میانگین هندسی دو قاعده.

۳) شعاع دایره برابر است با میانگین هندسی دو ساق.

۴) مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل‌ضرب میانگین حسابی دو قاعده در میانگین هندسی دو قاعده.

۲۴۸- اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD بر دایره به شعاع ۳ محیط باشد، به طوری که $AB=۲\sqrt{۳}$، مساحت مثلث OCD کدام است؟



۱) $\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۱۵\sqrt{۳}$

۳) $۱۸\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

۲۴۹- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{۳۲}{۳}$ واحد بر دایره‌ای محیط است. کوتاه‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا نقاط دایره، چند واحد است؟ *(ریاضی ۸۷)*

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۵۰- اگر یک پنج‌ضلعی منتظم درون یک دایره باشد و این دایره درون یک پنج‌ضلعی منتظم دیگر محاط باشد، نسبت محیط و مساحت این دو پنج‌ضلعی به ترتیب کدام است؟ $(\cos ۳۶^\circ \simeq ۰/۸)$

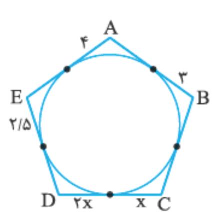
۱) ۰/۶ و ۰/۳۶ ۲) ۰/۸ و ۰/۶۴

۳) $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) بستگی به شعاع دایره دارد.

۲۵۱- شش ضلعی ABCDEF محیطی است. اگر $AB=۲۰$، $BC=۲۲$، $CD=۱۶$، $DE=۱۸$ و $EF=۲۵$، اندازهٔ ضلع AF کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۷ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰

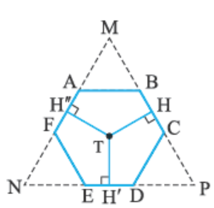
۲۵۲- در شکل مقابل اگر محیط پنج‌ضلعی برابر ۳۱ باشد، x برابر است با:



۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۳

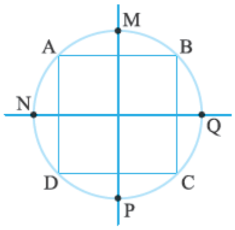
۲۵۳- در شکل مقابل شش‌ضلعی ABCDEF منتظم است. اگر T نقطهٔ دلخواهی درون شش‌ضلعی باشد و بدانیم $TH+TH'+TH''=\sqrt{۳}$ است. مساحت مثلث MNP برابر کدام گزینه می‌شود؟



۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۵۴- عمودمنصف‌های اضلاع مربعی را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مربع را در چهار نقطه قطع کند. اگر این چهار نقطه را به هم وصل کنیم مساحت چهارضلعی حاصل چند برابر مساحت مربع است؟



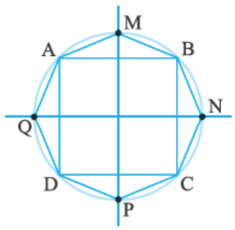
۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۵۵- عمودمنصف‌های اضلاع مربع ABCD را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مربع را در نقاط M، N، P و Q قطع کند. مساحت هشت‌ضلعی AMBNCPDQ کدام است؟ (ضلع مربع ۲ است.)



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۸\sqrt{۲}$

۲۵۶- M نقطه‌ای دلخواه درون یک هفت‌ضلعی منتظم است. اگر مجموع فاصلهٔ نقطهٔ M از اضلاع این هفت‌ضلعی برابر ۱۴ باشد، شعاع دایرهٔ محاطی این هفت‌ضلعی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) بستگی به محل نقطهٔ M دارد.

از سؤال ۲۵۷ تا ۲۷۱ مربوط است به همان درس‌نامهٔ «زاویهٔ دید» که برای علاقه‌مندان به ریاضی نوشته بودیم. می‌توانید این تست‌ها را حل نکنید.

۲۵۷- شکل مقابل کمان‌درخور کدام زاویه می‌تواند باشد؟

۱) ۷۰° ۲) ۸۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۰°

۲۵۸- دایره‌ای به شعاع ۱/۵ درون یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه محاط است. اگر یکی از زوایای ذوزنقه ۶۰° باشد، محیط آن برابر کدام است؟

۱) $۲(۳+\sqrt{۳})$ ۲) $۲(۳+۲\sqrt{۳})$ ۳) $۳(۳+\sqrt{۳})$ ۴) $۳+۲\sqrt{۳}$

۲۵۹- کمان ۱۲۰° از یک دایره، کمان‌درخور چه زاویه‌ای است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۲۶۰- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط پاره‌خط $AB = \sqrt{۲}$ به زاویهٔ ۴۵° رؤیت می‌شود، قسمتی است از:

۱) دو دایره به شعاع واحد ۲) دو دایره به شعاع $\sqrt{۲}$

۳) دو دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ ۴) دو دایره به شعاع ۲

۲۶۱- کمان‌درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط $AB = ۴$، قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۴ است. زاویهٔ α کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۲۶۲- در مثلث ABC ضلع $BC = ۶$ و زاویهٔ $\hat{A} = ۳۰^\circ$ است، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن از ضلع BC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۶۳- در مثلث ABC طول ضلع $BC = ۸$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$، شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۲۶۴- مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث‌هایی که ضلع BC در آن‌ها ثابت و $\hat{A} = ۸۰^\circ$ باشد، کدام است؟ عمران

۱) پاره‌خطی موازی BC ۲) یک دایره

۳) کمانی بزرگ‌تر از نیم‌دایره ۴) کمانی کوچک‌تر از نیم‌دایره