فهرست

فصل ۱: ترکیبیات (آنالیز ترکیبی) ۷

فصل ۲: احتمال ۱۵

فصل ۳: دنباله‌های حسابی و هندسی ۴۴

فصل ۴: جزءصحیح و قدرمطلق ۵۷

فصل ۵: توابع نمایی و لگاریتم ۷۱

فصل ۶: مثلثات ۸۲

فصل ۷: تابع ۱۰۷

فصل ۸: معادله، نامعادله و تعیین‌علامت ۱۳۱

فصل ۹: حد و پیوستگی ۱۵۲

فصل ۱۰: دنباله ۱۷۰

فصل ۱۱: مجانب ۱۷۸

فصل ۱۲: مشتق ۱۸۶

فصل ۱۳: کاربرد مشتق ۲۱۵

فصل ۱۴: هندسه‌ی مختصاتی (دستگاه معادلات خطی) ۲۴۸

فصل ۱۵: منحنی‌های درجه دوم (مقاطع مخروطی) ۲۶۰

فصل ۱۶: انتگرال ۲۸۹

فصل ۱۷: ماتریس ۳۰۹

فصل ۱۸: آمار و مدل‌سازی ۳۱۷

فصل ۱۹: هندسه و استدلال ۳۴۰

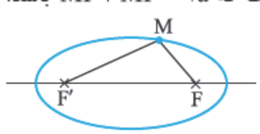
فصل ۲۰: مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس ۳۴۹

فصل ۲۱: تشابه و قضیه‌ی تالس ۳۶۶

فصل ۲۲: شکل‌های فضایی ۳۷۶

۲- بیضی

تعریف بیضی: بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که جمع فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد. دو نقطه‌ی ثابت را F و F' و مقدار ثابت را $۲a$ می‌نامیم. پس نقطه‌ی M در صورتی روی بیضی است که $MF+MF'=۲a$ باشد.



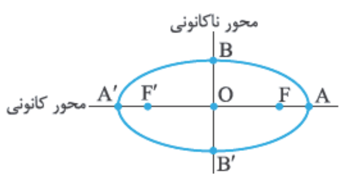
$$MF+MF'=۲a$$

F و F' را کانون‌های بیضی می‌نامیم.

برای رسم بیضی نخی به طول $۲a$ را در نقاط F و F' محکم می‌کنیم و سپس قلم را می‌چرخانیم.

ویژگی‌های بیضی

با F، F' و مقدار $۲a$ آشنا شدیم. هر بیضی دو محور تقارن دارد. محور کانونی (که هر دو کانون روی آن هستند) و محور غیرکانونی. در محل برخورد دو محور با هم، مرکز بیضی قرار دارد و در محل برخورد بیضی با محورها، رأس‌ها را داریم.



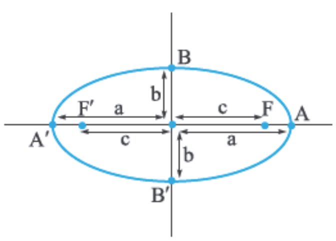
A و A': رئوس کانونی

B و B': رأس‌های ناکانونی

F و F': کانون

O: مرکز

مقادیر فاصله‌ها را هم باید بلد باشیم:



$$OF=OF'=c \qquad OA=OA'=a \qquad OB=OB'=b$$

فاصله‌ی $F'F=۲c$ را فاصله‌ی کانونی می‌نامند. $B'B=۲b$ را قطر کوچک می‌نامیم. قطر بزرگ $AA'=۲a$ همان طول نخ یا ثابت بیضی است. البته AA' طول بلندترین وتر و بیشترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی بیضی است.

میزان کشیدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز تعیین می‌شود. خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

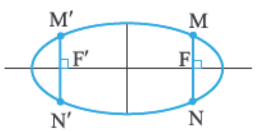
حاصل e عددی بین صفر و یک است و هر چه e بیشتر باشد، بیضی کشیده‌تر است.

وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی را وتر کانونی می‌نامیم. طول این وتر $MN = M'N' = \frac{2b^2}{a}$ است.

فرمول دیگری برای MN به صورت $MN = 2b\sqrt{1-e^2}$ هم داریم.

وتر کانونی را ببینید:

$$MN = \frac{2b^2}{a} = 2b\sqrt{1-e^2} = M'N'$$

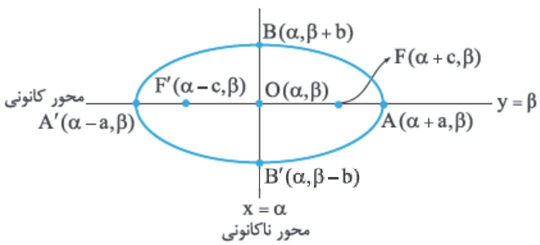


در بیضی بین a، b و c رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $a^2 = b^2 + c^2$

و بنابراین: فاصله‌ی رأس ناکانونی از کانون $= FB = a$

انواع قرارگیری بیضی درصفحه

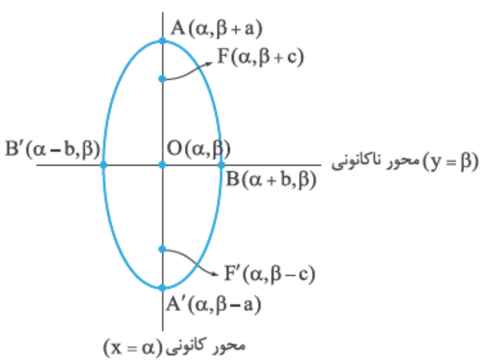
(الف) در بیضی افقی، محور کانونی افقی (موازی محور x ها) است. در صورت تست گفته بودند «هر دو کانون روی خطی موازی محور x ها قرار دارند». معادله‌ی محور کانونی $y = \beta$ و معادله‌ی محور ناکانونی $x = \alpha$ است. در این بیضی، مرکز و رأس‌های کانونی و کانون‌ها، عرض مساوی دارند.



در این بیضی‌ها: $\alpha - a \le x \le \alpha + a$ و $\beta - b \le y \le \beta + b$. معادله‌ی خط‌های مماس بر بیضی در رئوس کانونی $x = \alpha \pm a$ است. معادله‌ی خطوط مماس در رئوس ناکانونی به صورت $y = \beta \pm b$ است.

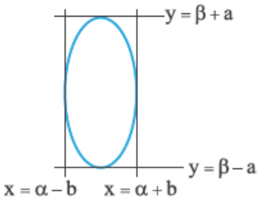
(ب) در بیضی قائم، محور کانونی موازی محور y ها است و رأس‌های کانونی و کانون‌ها و مرکز، دارای یک طول هستند. در این بیضی‌ها داریم:

$$\alpha - b \le x \le \alpha + b$$
$$\beta - a \le y \le \beta + a$$



در محل رئوس، خط‌های مماس بر بیضی را می‌بینیم:

مساحت مستطیل برابر 4ab است.



معادله‌ی بیضی

معادله‌ی بیضی به مرکز $O(\alpha, \beta)$ به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{\quad} + \frac{(y-\beta)^2}{\quad} = 1$ نوشته می‌شود و در مخرج‌ها باید a^2 و b^2 قرار دهیم.

با توجه به رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ در بیضی، همیشه $a^2 > b^2$ است. قانون انتخاب مخرج‌ها خیلی ساده است: در بیضی افقی، مخرج بزرگ‌تر (یعنی a^2) را برای x می‌گذاریم و در بیضی قائم، مخرج بزرگ‌تر را برای کسر y می‌گذاریم.

مثلاً در بیضی $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$ داریم:

(الف) مرکز بیضی $O(-3, 2)$ است.

(ب) چون مخرج x^2 بیشتر است بیضی افقی می‌شود.

(ج) $a^2 = 16$ و $b^2 = 12$ است؛ بنابراین $a = 4$ و $b = 2\sqrt{3}$

(د) پس طول قطر بزرگ یا مجموع فواصل هر نقطه‌ی بیضی از دو کانون یا بلندترین وتر $MF + MF' = 2a = 8$ است.

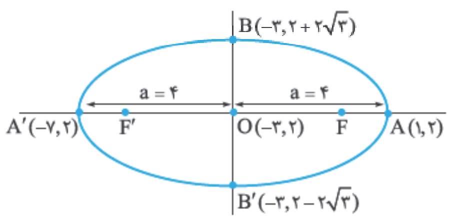
(سراسری ۸۶ و سنجش ۹۴)

(هـ) مساحت محدود به مماس‌ها در رئوس، $S = 4ab = 32\sqrt{3}$ است. *(خارج ۹۰)*

(و) طول وتر گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، $MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 12}{4} = 6$ است. *(سراسری ۸۷ و ۹۰)*

(ز) با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس $c^2 = a^2 - b^2 = 4$ است. پس $c = 2$ و مقدار خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ است. مختصات کانون‌ها هم به صورت $F(-1, 2)$ و $F'(-5, 2)$ است.

(ح) مختصات رئوس را ببینید:



$$-7 \le x \le 1$$
$$2 - 2\sqrt{3} \le y \le 2 + 2\sqrt{3}$$

رئوس A و A' دورترین نقاط بیضی تا مرکز هستند. *(خارج ۸۶)*

(ط) بیشترین و کم‌ترین فواصل نقاط بیضی تا کانون برابر $AF' = a + c = 6$ و $AF = a - c = 2$ هستند. *(سنجش ۹۳)*

(ی) بیشترین فاصله‌ی نقاط بیضی از محور yها یعنی بیشترین مقدار $|x|$ در این بیضی برابر ۷ است. *(سنجش ۹۳)*

استفاده از معادله‌ی گسترده‌ی بیضی

در معادله‌ی گسترده‌ی بیضی جملات x^2 و y^2 داریم که ضریب آن‌ها مساوی نیست اما هم‌علامت است. مثلاً $2x^2 + 3y^2 - 6x + y = 1$ معادله‌ی یک بیضی است.

بعد از مربع کامل کردن، باید طرف راست عددی مثبت باشد.

(الف) مرکز بیضی را با مشتق نسبت به x و نسبت به y به دست می‌آوریم. مثلاً مرکز بیضی به معادله‌ی $4x^2 + y^2 - 8x + 6y = 3$ به صورت روبه‌رو پیدا می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f'_y &= 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow O(1, -3)$$

(ب) اگر ضریب x^2 کم‌تر باشد، بیضی افقی است و برعکس. پس مثلاً در بیضی بالا (چون ضریب x^2 بیشتر است) شکل قائم داریم.

ج) خروج از مرکز بیضی همیشه برابر است با:

$$e=\sqrt{۱-\frac{\text{ضریب‌کم‌تر بین } x^۲ \text{ و } y^۲}{\text{ضریب‌بیشتر بین } x^۲ \text{ و } y^۲}}$$

پس خروج از مرکز بیضی موردنظر $e=\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵- اگر مرکز یک بیضی افقی در نقطه‌ی $(-۴\,,-۱)$، خروج از مرکز $\frac{۴}{۵}$ و طول یک رأس کانونی آن ۱ باشد، آن‌گاه مجموع طول قطرها و فاصله‌ی کانونی بیضی چه‌قدر است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

۱۶- مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(۳\,,۶)$ و $(۳\,,-۲)$ و خروج از مرکز آن $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. این بیضی محور xها را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ *(خارج ۹۲)*

۱) $-۱\,,۵$ ۲) $-۱\,,۷$ ۳) $۰\,,۶$ ۴) $۱\,,۵$

۱۷- مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-۱\,,۳)$ و $(-۱\,,-۱)$ است. این بیضی از نقطه‌ی $(-۴\,,۲)$ می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۸- کانون‌های یک بیضی در نقاط $F(۱+\sqrt{۵}\,,-۱)$ و $F'(۱-\sqrt{۵}\,,-۱)$ قرار دارند. اگر اندازه‌ی وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی بیضی $\frac{۸}{۳}$ باشد، فاصله‌ی یک کانون از رأس ناکانونی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$

۱۹- بیضی به معادله‌ی $x^۲+۴y^۲+ay+bx+c=۰$، در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور xها مماس است و از نقطه‌ی $(-۱\,,-۲)$ می‌گذرد. عرض مرکز آن کدام است؟ *(خارج ۹۴)*

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۸}$

۲۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادله‌ی $۳x^۲+y^۲-۶x+ay+a+۶=۰$ نمایش یک بیضی است؟ *(سنجش ۹۳ و ۹۴)*

۱) $-۲<a<۶$ ۲) $-۶<a<۲$

۳) $a>۶$ یا $a<-۲$ ۴) $a>۲$ یا $a<-۶$

۲۱- کانون‌های بیضی به معادله‌ی $۲x^۲+۷y^۲-۴x=۱۲$ دو سر قطری از دایره‌اند. این دایره نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

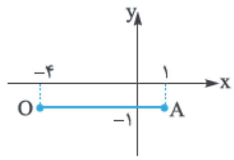
۱) ۲ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۲۲- نقطه‌ی M بر روی یک منحنی طوری حرکت می‌کند که فاصله‌ی آن از خط $x=۸$ دو برابر فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $(۲\,,۰)$ است. اندازه‌ی بزرگ‌ترین وتر این منحنی کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) ۸ ۴) $۸\sqrt{۵}$

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

۱۵- گزینه‌ی «۲» شکل را ببینید:

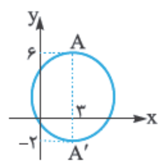


فاصله‌ی OA یعنی a برابر $۵=(-۴)-۱$ است. پس با تعریف خروج از مرکز داریم:
$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{c}{۵} \Rightarrow c=۴$$

و طبق رابطه‌ی فیثاغورس: $b=۳$، پس داریم: $۲a+۲b+۲c=$ جمع قطرها و فاصله‌ی کانونی

$$\Rightarrow ۲(a+b+c)=۲(۵+۳+۴)=۲۴$$

۱۶- گزینه‌ی «۳» شکل را ببینید:



از $A(۳,۶)$ و $A'(۳,-۲)$ سه نتیجه می‌گیریم:

اولاً بیضی قائم است، ثانیاً $AA'=۲a=۸$، ثالثاً $O=\frac{A+A'}{۲}=(۳,۲)$.

حالا با کمک خروج از مرکز، مقدار b را حساب کنیم:

$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}} \xrightarrow[a=۴]{e=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{۱۶}} \Rightarrow ۱-\frac{b^۲}{۱۶}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{b^۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow b^۲=۱۲$$

حالا معادله‌ی بیضی قائم را می‌نویسیم:
$$\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}=۱ \xrightarrow[b^۲=۱۲\ ,\ a^۲=۱۶]{O(۳,۲)} \frac{(x-۳)^۲}{۱۲}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۶}=۱$$

$$\xrightarrow[y=۰]{\text{محور xها را قطع کند}} \frac{(x-۳)^۲}{۱۲}+\frac{(۰-۲)^۲}{۱۶}=۱ \Rightarrow \frac{(x-۳)^۲}{۱۲}=۱-\frac{۴}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲=۹ \Rightarrow x-۳=\pm۳ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } ۶$$

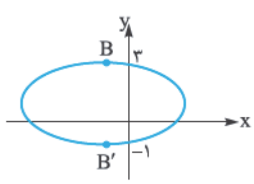
پس می‌توان گفت این بیضی وتری به طول ۶ روی محور x ها می‌سازد. (دوباره به شکل بیضی نگاه کنید)

۱۷- گزینه‌ی «۳» مرکز بیضی در وسط قطر کوچک قرار دارد. یعنی: $O=\frac{B+B'}{۲}=(-۱,۱)$

مقدار b هم برابر فاصله‌ی BO است: $b=BO=۳-۱=۲$

از طرفی چون B و B′ طول مساوی دارند، قطر کوچک بیضی موازی محور y ها است، پس بیضی افقی است.

نگاهی به شکل داشته باشید:



معادله‌ی بیضی افقی به مرکز $O(-۱,۱)$ و با دانستن $b=۲$ به صورت زیر است:
$$\frac{(x+۱)^۲}{a^۲}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱$$

حالا سؤال گفته این بیضی از $(-۴,۲)$ می‌گذرد:

$$\xrightarrow{(-۴,۲)} \frac{(-۴+۱)^۲}{a^۲}+\frac{(۲-۱)^۲}{۴}=۱ \Rightarrow \frac{۹}{a^۲}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow a^۲=۱۲$$

خروج از مرکز برابر است با:
$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{۴}{۱۲}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

نقطه‌ی داده‌شده روی محورهای تقارن بیضی نبود پس ویژگی خاصی نداشت جز این‌که در معادله صدق می‌کرد.

فاصله‌ی کانونی این بیضی $FF'=۲c=۴\sqrt{۲}$ هم می‌تواند مورد سؤال قرار گیرد.

۱۸- گزینه‌ی «۲» جای کانون‌ها (عرض مساوی دارند) نشان می‌دهد بیضی افقی است. مرکز بیضی در وسط آن‌ها یعنی $O(1,-1)$ است و فاصله‌ی کانونی هم $2c=FF'=2\sqrt{5}$ است. پس داریم: $c=\sqrt{5}$

از طرفی طول وتر کانونی را در صورت سؤال داده: $MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a}=\frac{4}{3}$

با توجه به فیثاغورس و مقدار c هم می‌نویسیم: $c^2=a^2-b^2=5$، پس باید a و b را از معادلات زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} a^2-b^2=5 \\ \frac{b^2}{a}=\frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow[\text{را قرار می‌دهیم } \frac{4}{3}a]{\text{از پایین به جای } b^2 \text{ عبارت}} a^2-\frac{4}{3}a=5 \Rightarrow 3a^2-4a-15=0$$

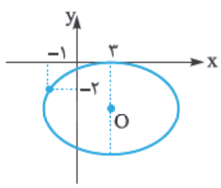
$$\xrightarrow[a>0]{\text{حل معادله}} a=3 \Rightarrow b=2$$

فاصله‌ی کانون از رأس ناکانونی را می‌خواهیم: $FB=a=3$

۱۹- گزینه‌ی «۱» در تست خارج ۹۴، خروج از مرکز این بیضی را می‌خواستند که بدون حل و بدون محاسبه‌ی a، b و c از رابطه‌ی $e=\sqrt{1-\frac{\min(A,B)}{\max(A,B)}}$ به دست می‌آمد. (جوابش $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بود)

اما حل این سؤال: اولاً بیضی افقی است. (چون ضریب x^2 کم‌تر است)

ثانیاً در $(3,0)$ بر محور xها مماس است. پس با توجه به شکل، باید طول مرکز ۳ باشد:



در واقع $(3,0)$ یک رأس ناکانونی بیضی است.

$$f'_x=2x+b=0 \xrightarrow{x_O=3} 2\times3+b=0 \Rightarrow b=-6$$

$$\xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{(3,0)} 9+0+0+\underbrace{(-6)}_{b}(3)+c=0 \Rightarrow c=9$$

$$\xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{(-1,-2)} (-1)^2+4(-2)^2+a(-2)+(-6)(-1)+9=0 \Rightarrow 1+16-2a+15=0 \Rightarrow a=16$$

پس عرض مرکز برابر است با: $f'_y=0 \Rightarrow 8y+\underbrace{a}_{16}=0 \Rightarrow y_O=\frac{-16}{8}=-2$

وقتی منحنی در $(3,0)$ بر محور xها مماس است باید با قراردادن $y=0$، به عبارتی برسیم که ریشه‌ی مضاعف آن $x=3$ است.

$$x^2+4y^2+ay+bx+c=0 \xrightarrow{y=0} x^2+bx+c=0$$

$$\xrightarrow[x=3]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} x^2+bx+c=(x-3)^2 \Rightarrow b=-6,\ c=9$$

حالا نقطه‌ی $(-1,-2)$ را صدق می‌دهیم: $\xrightarrow{(-1,-2)} 1+16+a(-2)+(-6)(-1)+9=0 \Rightarrow a=16 \Rightarrow y_O=-2$

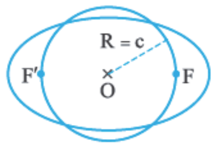
۲۰- گزینه‌ی «۳» در معادله‌ی گسترده‌ی بیضی، ضرایب x^2 و y^2 هم‌علامت هستند و برابر نیستند. هم‌چنین باید پس از مربع کامل شدن، عدد سمت راست مثبت باشد: $3x^2-6x+y^2+ay+a+6=0$

$$\Rightarrow 3(x^2-2x+1)+(y^2+ay+(\frac{a}{2})^2)=-a-6+3+\frac{a^2}{4} \Rightarrow 3(x-1)^2+(y+\frac{a}{2})^2=-a-6+3\times1+\frac{a^2}{4}$$

پس باید $\frac{a^2}{4}-a-3$ مثبت باشد: $\frac{a^2}{4}-a-3>0 \xrightarrow{\times 4} a^2-4a-12>0 \Rightarrow (a-6)(a+2)>0$

چون خارج دو ریشه موافق علامت ضریب درجه دوم است پس: $a<-2$ یا $a>6$

۲۱- گزینه‌ی «۱» وقتی کانون‌های بیضی دو سر قطر دایره باشند، مرکز بیضی همان مرکز دایره است و شعاع دایره برابر c بیضی خواهد بود:



پس باید مرکز و اندازه‌ی c در بیضی را بیابیم. $۲x^۲+۷y^۲-۴x=۱۲ \Rightarrow ۲(x^۲-۲x+۱)+۷y^۲=۱۲+۲$

$$\Rightarrow ۲(x-۱)^۲+۷y^۲=\underbrace{۱۲+۲\times۱}_{۱۴} \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۷}+\frac{y^۲}{۲}=۱ \Rightarrow O(۱,۰),\ c^۲=a^۲-b^۲=۷-۲=۵$$

بنابراین مرکز و شعاع دایره، به ترتیب $(۱,۰)$ و $\sqrt{۵}$ هستند و معادله‌ی آن $(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=۵$ خواهد بود. برای تلاقی با نیمساز ناحیه‌ی اول، $y=x$ را قرار می‌دهیم و داریم: $(x-۱)^۲+x^۲=۵$ که با کمی دقت $x=۲$ می‌خورد.

۲۲- گزینه‌ی «۳» صورت سؤال می‌گوید: (فاصله‌ی $M(x,y)$ از $F(۲,۰)$) $\times ۲ =$ (فاصله‌ی $M(x,y)$ از $x=۸$)

$$\Rightarrow |x-۸|=۲\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۰)^۲} \xrightarrow[|a|^۲=a^۲]{\text{به‌توان ۲}} x^۲-۱۶x+۶۴=۴\underbrace{(x-۲)^۲}_{x^۲-۴x+۴}+۴y^۲$$

حواستان هست که ضریب ۲ مال کل عبارت بود؟!

$$x^۲-۱۶x+۶۴=۴x^۲-۱۶x+۱۶+۴y^۲ \Rightarrow ۴۸=۳x^۲+۴y^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{\underbrace{۱۶}_{a^۲}}+\frac{y^۲}{۱۲}=۱ \Rightarrow AA'=۲a=۲\times۴=۸$$

نقطه‌ی $(۲,۰)$ یک کانون و خط $x=۸$ خط هادی این بیضی است. خروج از مرکز آن هم $\frac{۱}{۲}$ است. (چرا؟)