مهروماه

به نام پروردگار مهربان

کنکور جدید | رشته ریاضی

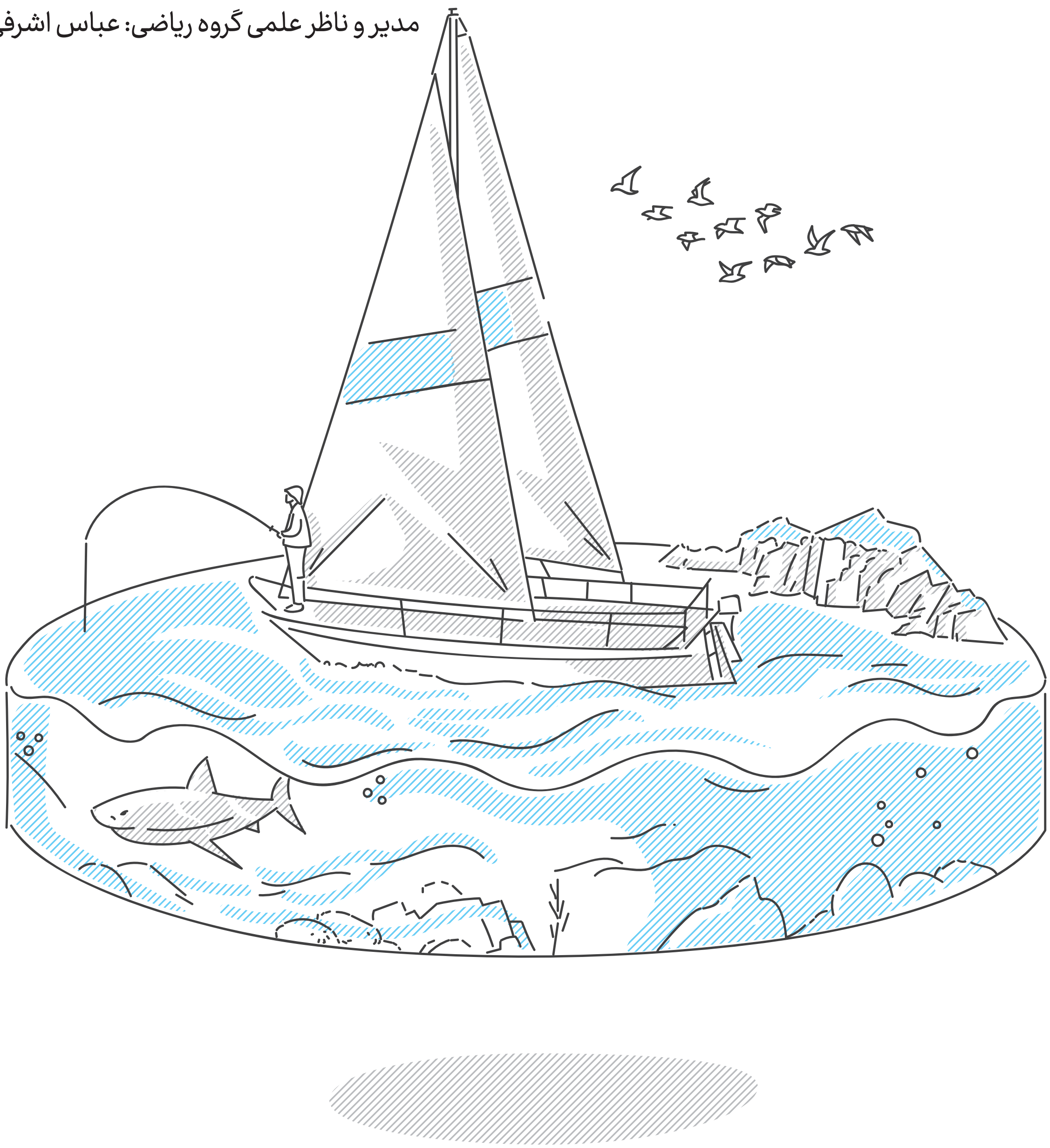
ریاضیات پایه

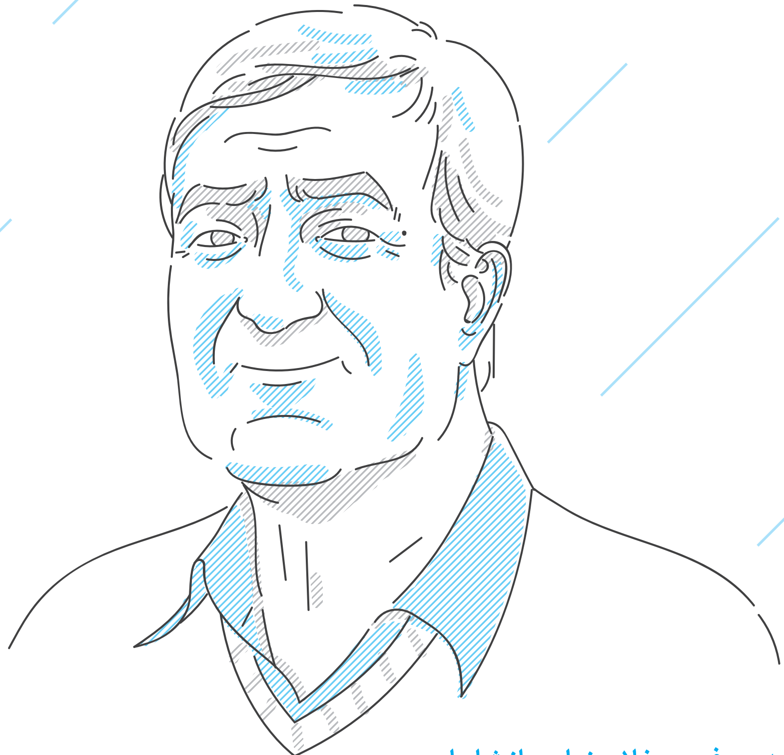
ریاضی ۱ | حسابان ۱ | پایه دهم و یازدهم

▪عباس اشرفی ▪وهاب تقی‌زاده ▪علیرضا نداف‌زاده

همکار تألیف: محمدامین مولایی آرپناهی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی





تقدیم به پروفسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفسـور غلامرضا جهانشـاهلو در روز ۲۷ اسـفند سال ۱۳۲۲ در روسـتای سـمقاور از توابع کمیجان در استان اراک چشـم بـه دنیا گشـود. وی مدرک ششـم ابتدایی خـود را در سـال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرسـتانی تا فاصلهٔ صد کیلومتری سـمقاور وجود نداشـت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشـاورزی پرداخت. در سـال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز از دبیرسـتانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سـپس برای تحصیل در مقطع کارشناسـی رشـتهٔ ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسـی در مؤسسـهٔ ریاضیات که توسـط «پروفسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شـد. مؤسسـهٔ ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران اسـت که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسـیس شده بود اسـتاد جهانشاهلو دورهٔ ۲۷ ماههٔ بسیار سنگین مؤسسـهٔ ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسـانده و به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز در دانشسـرای عالی (دانشـگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شـغل مقدس معلمی در دانشـگاه مشـغول شد. ایشـان در سـال ۱۳۵۱ برای ادامهٔ تحصیل عازم انگلستان شـد، ابتدا مدرک کارشناسـی ارشـد دیگری در رشـتهٔ تحقیق در عملیات از دانشـگاه سـاوت‌همپتون دریافت نمود، سـپس برای دورهٔ دکتری در زمینهٔ الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشـگاه برونل رفت و در اردیبهشـت سـال ۱۳۵۵ از رسالهٔ خود دفاع کرد و به ایران بازگشـت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبهٔ استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ ماحصـل زندگـی وی چاپ بیسـت و دو جلد کتاب و چاپ بیـش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبـر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشـجوی دکتری و بیش از ۲۰۰ دانشـجوی کارشناسـی ارشـد و بیش از هـزار دبیر ریاضی اسـت. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششـی داده‌های ایران» همچون پدری دلسـوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشـنگر راه کسـانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مقدمه

بالاخره کنکوری شدی!

وقتی پنجم ابتدایی بودی و می‌خواستی بری اول راهنمایی همه چی عوض شد و همهٔ تغییرات با تو شروع شد؛ خلاصه به هر سالی که پا می‌گذاشتی همهٔ کتاب‌ها عوض می‌شد!

مثل هری پاتر با چوب جادویی به هر کتابی می‌زدی، اون کتاب عوض می‌شد و همهٔ درس‌ها جدید می‌شدن، معلوم نبود امتحان‌ها نهایی هستن یا نه؟ معلوم نبود کنکور حذف می‌شه یا نه؟

بعضی وقت‌ها که سر کلاس حرف پیش میاد، بچه‌ها میگن از شانس بد ماست، همهٔ بلاها سر ما میاد. ولی یادت باشه، پیشرفت زادهٔ تغییره!

تو اولین کسی هستی که می‌خواد توی این نظام آموزشی جدید کنکور بده! اولین کسی هستی که این کتاب‌ها رو می‌خونه! اولین کسی که ...

دیدن این همه تغییر باعث شد تا درس خوندن خسته‌کننده نباشه!

کلی مطلب تازه توی کتاب‌های درسی جدید هست که دانش‌آموزهای قبل از تو اون‌ها رو ندیدن؛ پس بیا کاری کنیم که این تغییرات به جای ترسوندنت یه راهی برای رسیدن به موفقیت باشن.

حالا بذار بگم ما در درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.

هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم:

قسمت اول: درسنامه

- توی این قسمت یه درسنامهٔ مفصل آوردیم که تمام مباحث رو مو به مو بهت یاد میده که پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست داشتنیه؛ خلاصه این قسمت کُل کتابه.

توی حل تست‌های آموزشی یه روش تکنیکی برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی!

مُهِم یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات مهر مهم زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

هر جا دیدیم بیشتر بچه‌ها راه‌حل رو اشتباه میرن برات هشدار گذاشتیم.

اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره یک‌گام فراتر گذاشتیم.

از همه مهم‌تر!!! یه راه‌حل‌هایی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم فرمول ممنوع، این دیگه آخرشه، بدون این‌که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی.

نکته، دقت کنید و تذکر هم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

■ یه سری تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدوم از این مؤلف‌ها، یه وزنه‌ای هستن تو ریاضی!

استاد نداف‌زاده مدرس دبیرستان‌های علامه حلی تهران و استاد تقی‌زاده مدرس دبیرستان ماندگار تهران؛ وقت گرفتن ازشون خیلی سخت بود ولی خوشبختانه جور شد.

راستی یه سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستن رو برات تو این قسمت آوردیم.

تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندیم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!

یه سری هم تست‌هایی اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزنن و برای همه لازم نیست.

و در آخر ۱ و یا ۲ آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجی

قسمت سوم: پاسخنامهٔ تشریحی

■ خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به‌کار نرفتن.

به همهٔ همکارها توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن چون همهٔ اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این‌طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه.

تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

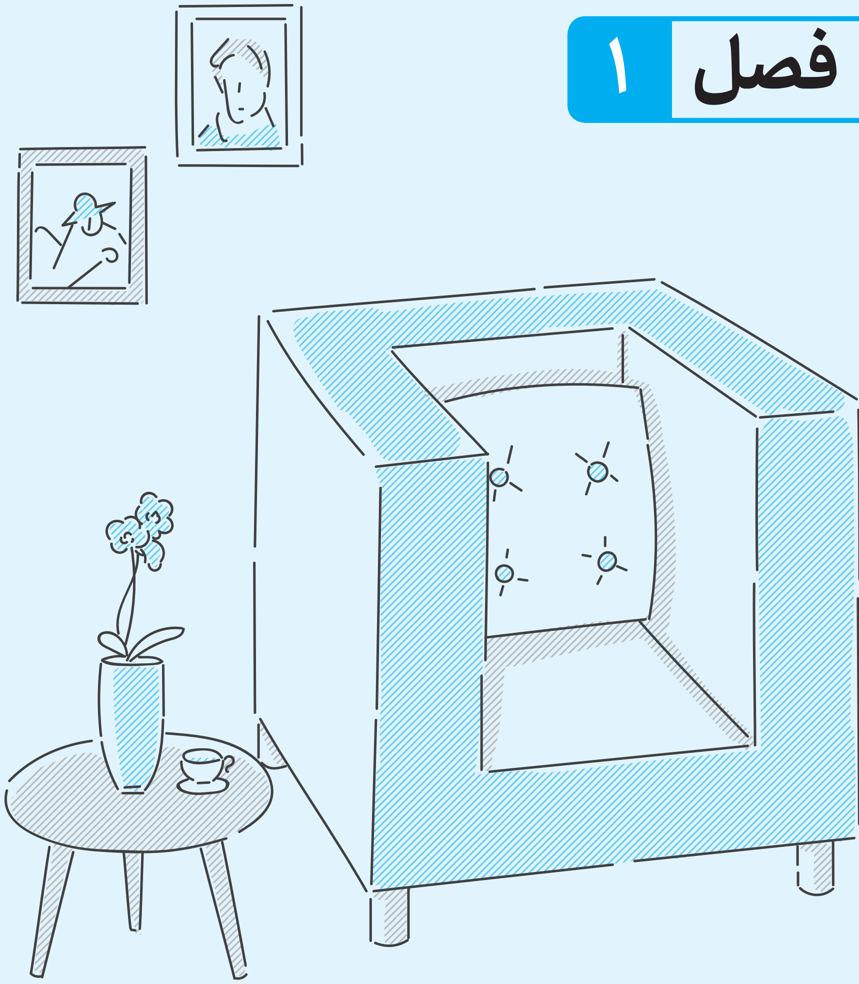
توی تهیهٔ این کتاب خیلی‌ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

- آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.
- استاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.
- آقای عباس گودرزی مدیر فروش پرتوان انتشارات که باعث دلگرمی ما هستند.
- سرکار خانم حجازیان و آقایان رامین احمدیان، محمد اسدالهی، علیرضا بحری، سیدمحسن جلال‌زاده، علی‌حق‌شناس، امین خانی، امیر سمیعیان، مسعود عظیمی، بهنام قدردوست، حسن محمدی، احمد میربلند و احمد میری از مشاوران به‌نام و کاربلد عرصهٔ کنکور که خیلی قوی در شیوهٔ ارائهٔ مطلب راهنماییمون کردن.
- از خانم سنور حریری مسئول ویراستاری، خانم‌ها ندا دهقانی و دنیا سلیمی و آقایان احسان لعل و حامد شفیعی که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.
- از گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات خانم الهام اسلامی و آقایان حسین شیرمحمدی، حسام طلایی و محسن فرهادی که با طراحی‌های زیباشون روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.
- از آقای امیر انوشه مدیر سایت، خانم فرزانه قنبری مدیر روابط عمومی، خانم سمیه جباری مدیر تولید، خانم الهام پیلوایه مدیر فنی و خانم سمیه امیدی صفحه‌آرای کتاب خیلی ممنونم.
- از رسام محترم مرتضی ضیایی و حروفچین‌های محترم آقای امیر ماهر و خانم ربابه موسوی کمال تشکر رو دارم.

عباس اشرفی

فهرست

فصل ۱



عبارت‌های جبری (اتحادها)

این فصل یکی از مطالب پایه‌ای ریاضی و پیش نیاز همهٔ فصل‌های دیگر است. در این فصل مطالبی مانند اتحادها، تجزیهٔ عبارت‌های جبری و مخرج مشترک‌گیری از عبارت‌های گویا را می‌آموزید.

این فصل در بودجه‌بندی سؤال‌های کنکورهای قبل نبود و از آن تستی مطرح نشده بود.

برآورد ما این است که از این فصل «۲» تست در کنکورهای جدید مطرح شود.

اتحادها

به جدول اتحادهای زیر توجه کنید:

ردیف	نام یا شهرت	اتحادها	مثال
1	مربع مجموع دوجمله‌ای	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(x+2)^2=x^2+4x+4$
2	مربع تفاضل دوجمله‌ای	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(\sqrt{x}-y)^2=x-2\sqrt{x}\,y+y^2$
3	مزدوج	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$(x^3-y^3)(x^3+y^3)=x^6-y^6$
4	جمله مشترک	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	$(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$
5	مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	$(x+y-2z)^2=x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz$
6	مکعب مجموع دوجمله‌ای	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$
7	مکعب تفاضل دوجمله‌ای	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$
8	مجموع مکعب دوجمله‌ای	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$
9	تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر)	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$27x^3-y^3=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

ردیف	نام یا شهرت	اتحادهای فرعی	مثال
10	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$	$(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=4$
11	اتحاد فرعی مکعب مجموع دوجمله‌ای	$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$	$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$
12	اتحاد فرعی مکعب تفاضل دوجمله‌ای	$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$	$x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})^3+3(x-\frac{1}{x})$
13	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$	$9y^2+4=(3y+2)^2-12y$
14	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$	$9y^2+4=(3y-2)^2+12y$

مثال: اگر $4x^2+4xy+y^2=0$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ (با شرط $y\neq 0$) را بیابید.

پاسخ: روش اول عبارت $4x^2+4xy+y^2$ مربع مجموع دوجمله‌ای است.

$$4x^2+4xy+y^2=0 \Rightarrow (2x+y)^2=0 \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow 2x=-y$$

طرفین را بر $2y$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2x}{2y}=\frac{-y}{2y} \Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$$

روش دوم بعد از به‌دست آوردن رابطهٔ بین x و y یعنی $y=-2x$، خواستهٔ مسئله را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x}{y}=\frac{\cancel{x}}{-2\cancel{x}}=-\frac{1}{2}$$

دقت کنید که چون y مخالف صفر است، پس مقدار x نیز مخالف صفر بوده و می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد.

تست: اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، آن‌گاه $x^3+\frac{1}{x^3}$ کدام است؟

16 (1 17 (2 18 (3 19 (4

پاسخ: گزینه ۳ **روش اول** این تست، یکی از مشهورترین سؤالات در مورد اتحادهاست. در این‌گونه سؤالات معمولاً حاصل‌ضرب دو جملهٔ عبارت داده شده، مقدار ثابتی است به عنوان مثال در این سؤال $x(\frac{1}{x})=1$ است. این سؤالات را معمولاً به کمک اتحادهای فرعی حل می‌کنیم:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\times\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

به جای $x+\frac{1}{x}$ مقدار عددی آن، یعنی 3 را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(3)^3-3(3)=18$$

روش دوم اگر فرمول مربوط به اتحاد فرعی را به خاطر نداشتید می‌توانید از این روش استفاده کنید. با توجه به این‌که در خواستهٔ مسئله x و $\frac{1}{x}$ هر دو دارای توان 3 هستند، پس طرفین معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=3$ را به توان 3 می‌رسانیم:

$$(x+\frac{1}{x})^3=3^3\longrightarrow x^3+3x^2(\frac{1}{x})+3x(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^3}=27$$

$$x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=27\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=27-3(\overset{3}{\cancel{x+\frac{1}{x}}})=18$$

اگر $x^2+y^2+0/25z^2-2x+2y-z+3=0$ باشد، مقدار عددی $x+y+z$ کدام است؟

1 (1 2 (2 3 (3 4 (4

پاسخ: گزینه ۲ این عبارت حتماً به صورت مجموع چند مربع کامل درمی‌آید.

$$(x^2-2x)+(y^2+2y)+(0/25z^2-z)+3=0$$

هر کدام از پرانتزها برای مربع کامل شدن به عدد 1 نیاز دارند. عدد 3 را به صورت 1+1+1 می‌نویسیم و هر کدام را وارد یکی از پرانتزها می‌کنیم:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)+(0/25z^2-z+1)=0\Rightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+(0/5z-1)^2=0$$

مجموع چند عبارت نامنفی، برابر صفر است، پس هر کدام از عبارت‌ها باید صفر شوند.

$$(x-1)^2=0\Rightarrow x=1\ ,\ (y+1)^2=0\Rightarrow y=-1\ ,\ (0/5z-1)=0\Rightarrow z=2$$

$$x+y+z=2$$

حاصل عبارت $\dfrac{(x^3+\frac{1}{x^3})(x^6+\frac{1}{x^6})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{x^3-\frac{1}{x^3}}$ به ازای $x=\sqrt[6]{2}$ کدام است؟

$\frac{85}{8}$ (1 $\frac{85}{16}$ (2 $\frac{255}{8}$ (3 $\frac{255}{16}$ (4

پاسخ: گزینه ۳ صورت و مخرج را در $x^3-\frac{1}{x^3}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر تبدیل به اتحادهای مزدوج زنجیره‌ای شود:

$$\frac{(x^3-\frac{1}{x^3})(x^3+\frac{1}{x^3})(x^6+\frac{1}{x^6})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{(x^3-\frac{1}{x^3})(x^3-\frac{1}{x^3})}=\frac{(x^6-\frac{1}{x^6})(x^6+\frac{1}{x^6})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}$$

$$=\frac{(x^{12}-\frac{1}{x^{12}})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}=\frac{x^{24}-\frac{1}{x^{24}}}{x^6+\frac{1}{x^6}-2}$$

حال به جای x مقدار $\sqrt[6]{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{(\sqrt[6]{2})^{24}-\frac{1}{(\sqrt[6]{2})^{24}}}{(\sqrt[6]{2})^6+\frac{1}{(\sqrt[6]{2})^6}-2}=\frac{2^4-\frac{1}{2^4}}{2+\frac{1}{2}-2}=\frac{16-\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{255}{8}$$

تست: اگر $x=(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ باشد، حاصل $x(x^2-3)$ کدام است؟

1) $2\sqrt{2}$ 2) $-2\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱ چون $x(x^2-3)=x^3-3x$، پس باید حاصل x^3 را محاسبه کنیم. اگر دقت کنید دو عدد $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ معکوس هم هستند (ضرب آن‌ها برابر 1 است).

با فرض این‌که $a=(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}$ و $\frac{1}{a}=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ باشند، طرفین معادله را به توان 3 می‌رسانیم:

$$x=a+\frac{1}{a}\Rightarrow x^3=a^3+3a^2(\frac{1}{a})+3a(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{a})^3\Rightarrow x^3=a^3+(\frac{1}{a})^3+3(a+\frac{1}{a})$$

توجه کنید که $a+\frac{1}{a}$ همان x است.

$$x^3=a^3+(\frac{1}{a})^3+3x\Rightarrow x^3-3x=a^3+\frac{1}{a^3}$$

به جای a و $\frac{1}{a}$ به ترتیب $(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}$ و $(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^3-3x=x(x^2-3)=((\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}})^3+((\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}})^3=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$$

اتحاد اویلر عبارت است از:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

همین‌طور می‌توان ثابت نمود که:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2)$$

بنابراین اتحاد اویلر را به صورت روبه‌رو نیز می‌توان نوشت: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\times\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2)$

در اتحاد اویلر اگر $x+y+z=0$ باشد، آن‌گاه $x^3+y^3+z^3=3xyz$ است.

تست: حاصل عبارت $(2+\sqrt{3})^3-(2\sqrt{3})^3-(2-\sqrt{3})^3$ کدام است؟

1) $-3\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{3}$ 3) $-6\sqrt{3}$ 4) $6\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۴ عبارت را به صورت اتحاد اویلر درمی‌آوریم: $(2+\sqrt{3})^3+(-2\sqrt{3})^3+(-2+\sqrt{3})^3$

همان‌طور که می‌بینید مجموع $2+\sqrt{3}$ ، $-2\sqrt{3}$ و $-2+\sqrt{3}$ برابر صفر است، پس طبق نتیجهٔ گرفته شده از اتحاد اویلر داریم:

$$(2+\sqrt{3})^3+(-2\sqrt{3})^3+(-2+\sqrt{3})^3=3(2+\sqrt{3})(-2\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})=3(2+\sqrt{3})(2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$$
$$=6\sqrt{3}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=6\sqrt{3}(4-3)=6\sqrt{3}$$

تجزیه

شمارنده‌های یک عدد: اعدادی هستند که عدد فرض‌شده بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد، به عنوان نمونه اعداد $\{1,2,3,6\}$ شمارنده‌های عدد 6 می‌باشند.

مضارب یک عدد: حاصل‌ضرب آن عدد در سایر اعداد صحیح می‌باشد، به عنوان نمونه عدد 20 یکی از مضارب 5 است.

تجزیه: هرگاه عبارتی را به صورت حاصل‌ضرب شمارنده‌هایش بنویسیم آن را تجزیه کرده‌ایم.

در این مبحث، به تعدادی از روش‌های مرسوم در تجزیه اشاره می‌کنیم.

۱ استفاده از فاکتورگیری ساده

یکی از **ساده‌ترین** روش‌های تجزیه، **فاکتور گرفتن** از عامل مشترک چند عبارت است، مانند $x^3-2x^2=x^2(x-2)$. یادتان باشد زمانی از این روش استفاده می‌کنیم که عبارت مقدار ثابت نداشته باشد (تجزیه به شکل $x^3-2x^2+1=x^2(x-2)+1$ ارزشی ندارد).

۲ استفاده از اتحاد مزدوج

در سؤالاتی که **تفاضل دو مربع کامل** را داشته باشیم، بهترین کار استفاده از **اتحاد مزدوج** است.

تست: در تجزیهٔ عبارت $16x^4-y^4$ کدام عامل وجود ندارد؟

$2x^2+y^2$ (1 $\quad$ $2x-y$ (2 $\quad$ $2x+y$ (3 $\quad$ $4x^2+y^2$ (4

پاسخ: گزینه ۱ برای تجزیه، ابتدا عبارت را به توان دو تبدیل می‌کنیم: $16x^4-y^4=(4x^2)^2-(y^2)^2=(4x^2-y^2)(4x^2+y^2)$

مجدداً عبارت $4x^2-y^2$ تفاضل دوجملهٔ مربع کامل است، پس: $4x^2-y^2=(2x)^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$

بنابراین تجزیهٔ کامل $16x^4-y^4$ عبارت است از: $(2x-y)(2x+y)(4x^2+y^2)$

۳) استفاده از اتحاد جمله مشترک

معمولاً در سه‌جمله‌ای‌هایی که درجهٔ دوم باشند از اتحاد $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ کمک می‌گیریم، مانند:

$$x^2+5x+4=x^2+(4+1)x+1\times4=(x+1)(x+4)$$

تست: کدام عامل در تجزیهٔ $x^2-xy-6y^2$ وجود دارد؟

$x+4y$ (1 $\quad$ $x+3y$ (2 $\quad$ $x-2y$ (3 $\quad$ $x+2y$ (4

پاسخ: گزینه ۴ عبارت $x^2-xy-6y^2$ را می‌توان به‌صورت $x^2+(2y-3y)x+(2y)(-3y)$ نوشت و بعد آن را به کمک اتحاد جمله مشترک به صورت $(x+2y)(x-3y)$ تجزیه نمود.

در این تجزیه این سؤال پیش می‌آید که چطور فهمیدید که دو عبارت، قابل تجزیه به $2y$ و $-3y$ است؟

اتحاد جمله مشترک به‌صورت (حاصل‌ضرب $x+$ (مجموع) x^2+) می‌باشد، پس در این سؤال $-6y^2$ حاصل‌ضرب دو جمله است، پس این دو عدد $(2y$ و $-3y)$ یا $(-2y$ و $3y)$ و $(-y$ و $6y)$ یا $(y$ و $-6y)$ می‌باشند. اگر این زوج‌ها را با هم جمع کنیم، فقط دو زوج $2y$ و $-3y$ هستند که مجموع آن‌ها $-y$ می‌شود که در عبارت اولیه ضریب x است.

۴) استفاده از اتحادهای چاق و لاغر

در تفاضل و مجموع دو مکعب می‌توانیم از این اتحادها کمک بگیریم: $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

تست: کدام عامل در تجزیهٔ x^6-64y^6 موجود نیست؟

$x-2y$ (1 $\quad$ $x+2y$ (2 $\quad$ $x^2-2xy+4y^2$ (3 $\quad$ $x^2-4xy+4y^2$ (4

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا به‌کمک اتحاد مزدوج توان 6 را به توان 3 تبدیل می‌کنیم:

$$x^6-64y^6=(x^3)^2-(8y^3)^2=(x^3-8y^3)(x^3+8y^3)$$

حال می‌توان به کمک اتحادهای چاق و لاغر هر پرانتز را جداگانه تجزیه کرد:

$$(x^3-(2y)^3)(x^3+(2y)^3)=[(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)]\times[(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)]$$

۵) استفاده از تجزیه به کمک فاکتورگیری مضاعف

معمولاً برای تجزیهٔ چهارجمله‌ای‌ها از این روش استفاده می‌کنیم به این ترتیب که آن‌ها را دو تا دو تا کنار هم می‌گذاریم و از عامل مشترک آن‌ها فاکتور می‌گیریم تا در هر دو زوج به عوامل یکسانی دست پیدا کنیم. در نهایت با فاکتورگیری دوم از این عوامل یکسان، عبارت را تجزیه می‌کنیم.

تست: عامل درجهٔ اول عبارت $x^3-6x^2+6x-36$ ، پس از تجزیهٔ کامل کدام است؟

$x-6$ (1 $\quad$ $x+6$ (2 $\quad$ $x-3$ (3 $\quad$ $x+3$ (4

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا چهارجمله‌ای را دو به دو دسته‌بندی می‌کنیم:

$$x^3-6x^2+6x-36=(x^3-6x^2)+(6x-36)=x^2(x-6)+6(x-6)=(x-6)(x^2+6)$$

گاهی سؤال می‌شود که چرا زوج‌ها را این‌طور انتخاب کردید، مثلاً در این سؤال x^3 و $6x$ را با هم زوج نگرفتید. بگذارید این‌ها را زوج بگیریم و ببینیم چه می‌شود: $(x^3+6x)-(6x^2+36)=x(x^2+6)-6(x^2+6)=(x^2+6)(x-6)$

می‌بینید که باز هم، همان شد. آیا این اتفاق همیشه می‌افتد؟

خیر، گاهی از طریق آزمون و خطا باید بفهمیم که زوج انتخابی درست است یا خیر.

۶ استفاده از تجزیهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ 3

در این تجزیه‌ها باید یکی از جملات را به‌گونه‌ای بشکنیم که با تبدیل سه جمله به چهار جمله، بتوانیم از تجزیه به روش «فاکتورگیری مضاعف» کمک بگیریم.

تست: در تجزیهٔ کامل x^3-3x+2، یک عبارت مربع کامل وجود دارد، آن عبارت کدام است؟

1) $(x+1)^2$ 2) $(x-1)^2$ 3) $(x+2)^2$ 4) $(x-2)^2$

پاسخ: گزینه ۲ $-3x$ را به $(-2x+(-x))$ تبدیل می‌کنیم و x^3 و $-x$ را با هم و همین‌طور $-2x$ و 2 را با هم زوج در نظر می‌گیریم. با کمک روش «فاکتورگیری مضاعف» عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=(x^3-x)-(2x-2)=x(x^2-1)-2(x-1)$$
$$=x(x-1)(x+1)-2(x-1)=(x-1)[x(x+1)-2]=(x-1)[x^2+x-2]=(x-1)[(x+2)(x-1)]=(x-1)^2(x+2)$$

۷ استفاده از روش اضافه و کم‌کردن

از این روش معمولاً زمانی استفاده می‌کنیم که عبارت، شبیه به مربع کامل باشد و با کم و زیاد کردن عبارتی، آن را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه را انجام می‌دهیم.

تست: تجزیهٔ $x^4+x^2y^2+y^4$ به‌صورت $(x^2+y^2+xy)\times A$ می‌باشد. A کدام است؟

1) x^2+y^2-xy 2) x^2+y^2+xy 3) x^2+y^2+2xy 4) x^2+y^2-2xy

پاسخ: گزینه ۱ این مثال بسیار شبیه مربع کامل است و با اضافه کردن x^2y^2 آن را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=[(x^2+y^2)-xy][(x^2+y^2)+xy]$$

۸ استفاده از روش تقسیم

هرگاه عبارتی به ازای $x=a$ برابر صفر شود حتماً بر $x-a$ بخش‌پذیر است، پس می‌توان آن را بر $x-a$ تقسیم کرد.

تست: حاصل تجزیهٔ x^3-4x^2+x+6 کدام است؟

1) $(x-2)(x-1)(x+3)$ 2) $(x-2)(x-1)(x-3)$

3) $(x+2)(x+1)(x+3)$ 4) $(x-2)(x+1)(x-3)$

پاسخ: گزینه ۴ با چند جای‌گذاری ساده می‌توان فهمید که این چندجمله‌ای به ازای $x=2$ برابر صفر است: $2^3-4(2)^2+2+6=0$

پس عبارت را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+x+6 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2 & x^2-2x-3 \\ \cline{1-1} -2x^2+x+6 & \\ 2x^2-4x & \\ \cline{1-1} -3x+6 & \\ 3x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

بنابراین تجزیهٔ x^3-4x^2+x+6 عبارت است از $(x-2)(x^2-2x-3)$ ولی یادمان باشد عبارت x^2-2x-3 خود قابل تجزیه به $(x-3)(x+1)$ است
بنابراین تجزیهٔ نهایی عبارت به‌صورت $(x-2)(x+1)(x-3)$ است.

مخرج مشترک

برای مخرج مشترک‌گیری از کسرها، باید ابتدا مخرج‌های آن‌ها را تا حد امکان تجزیه کنیم، سپس مخرج مشترک را با ضرب عوامل غیرمشترک در عوامل مشترک با توان بیشتر (ساختن ک.م.م) به‌دست آوریم.

تست: **حاصل عبارت $\frac{1}{x^4+2x^2-3}+\frac{1}{x^4-1}$ به‌صورت کسر $\frac{A}{B}$ درآمده است که قابل ساده کردن نیست، مقدار A به ازای $x=1$ کدام است؟**

1) 6 2) 2 3) 3 4) 4

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا هر یک از مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$x^4+2x^2-3=(x^2)^2+2(x^2)-3=(x^2+3)(x^2-1)=(x^2+3)(x-1)(x+1)$$

برای ساختن مخرج مشترک، عوامل مشترک با توان بیشتر را در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

عوامل مشترک: $(x-1),(x+1)$ و عوامل غیرمشترک: $(x^2+3),(x^2+1)$

مخرج مشترک: $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+3)$

بنابراین:

$$\frac{1}{x^4-1}+\frac{1}{x^4+2x^2-3}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}$$

حال مخرج مشترک می‌گیریم:

$$=\frac{1\times(x^2+3)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)}+\frac{1\times(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)}$$

در نتیجه کسر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$=\frac{(x^2+3)+(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)}$$

صورت کسر برابر $2x^2+4$ است و به‌ازای $x=1$ برابر 6 می‌شود.

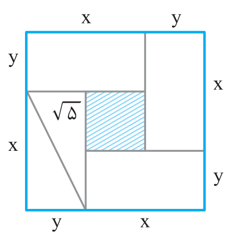
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

اتحادها

1. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای 34 واحد و طول وتر آن 15 واحد است. مساحت آن کدام است؟

1) 32   2) 34   3) 36   4) 40

2. در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟



1) $(x-y)^2$
2) $(x-2y)^2$
3) $(x+y)^2$
4) $(x+2y)^2$

3. درصورتی‌که حاصل 999995^2 را به‌صورت 10^m-10^n+25 بنویسیم، مقدار $m+n$ کدام است؟

1) 17   2) 19   3) 21   4) 23

4. حاصل عبارت $(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2-(a+b+c)^2$ برابر است با:

1) $a^2+b^2+c^2$ 2) $ab+bc+ac$ 3) $(a+b+c)^2$ 4) $2(ab+bc+ac)$

5. اگر $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ باشد، حاصل $x^2-2x+\frac{3}{2}$ کدام است؟

1) 2   2) $\sqrt{2}$ 3) 1   4) -1

6. اگر $x=2+\sqrt{3}$ باشد، حاصل x^2-4x کدام است؟

1) -2 2) -1   3) 1   4) 2

7. عبارت $4x^2+Ax+\frac{9}{4}$ مربع کامل است. A کدام می‌تواند باشد؟

1) 8   2) 12   3) 3   4) 6

8. به عبارت $4x^2-10x+9$ کدام جمله افزوده شود تا حاصل به‌صورت مربع کامل دوجمله‌ای باشد؟

1) $2x$ 2) $4x$ 3) $-4x$ 4) $-2x$

9. با افزودن کدام عدد به سه جمله‌ای $4x^2+6x+2$ حاصل به‌صورت مجذور دوجمله‌ای نوشته می‌شود؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) 2   4) 7

10. اگر $a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$ باشد، مقدار a کدام است؟

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

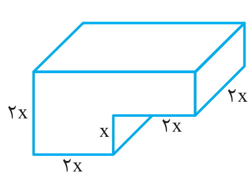
11. از رابطهٔ $a^2+5b^2-4ab-2b+1=0$، مقدار a کدام است؟

1) -2   2) -1   3) 1   4) 2

12. اگر $a^2+b^2=2a+2b-2$ باشد، حاصل $(a+b)^3$ کدام است؟

1) 9   2) 8   3) 16   4) 32

13. در شکل مقابل یک منبع آب به گنجایش 1500 لیتر رسم شده است. x چند متر است؟



1) 0/05
2) 0/04
3) 0/5
4) 0/6

14. حاصل 998^2 و 71×69 به ترتیب برابر است با: (تمرین کتاب درسی)

1) 997004 ، 4899 2) 996004، 4999 3) 997004، 4999 4) 996004، 4899

15. حاصل عبارت $(1-x)(1+x)(x^2+2)$ کدام است؟

1) $-x^4-3x^2+2$ 2) $-x^4-x^2+2$ 3) x^4+3x^2-2 4) x^4+x^2-2

16. حاصل $(x-\frac{1}{2})(8x^2+2)(2x+1)$ کدام است؟

1) $4x^2-1$ 2) $\frac{1}{2}(16x^4-1)$ 3) $64x^4-1$ 4) $16x^4-1$

17. اگر $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-7}=5$ باشد، حاصل $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-7}$ کدام است؟

1) 1 2) $\frac{8}{5}$ 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

18. حاصل $(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})+\frac{1}{81\times 81}$ کدام است؟

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) 1 4) $\frac{4}{3}$

19. حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})(1+\frac{1}{2^{16}})$

1) $2-2^{31}$ 2) $\frac{1}{2^{31}}-2$ 3) $2^{31}-2$ 4) $2-2^{-31}$

20. حاصل عبارت $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{64}+1)$ برابر است با:

1) $2^{256}+1$ 2) $2^{128}+1$ 3) $2^{256}-1$ 4) $2^{128}-1$

21. اگر $\alpha=\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta=\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ باشند، حاصل $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

1) 6 2) 8 3) $6\sqrt{2}$ 4) $7\sqrt{2}$

22. حاصل عبارت جبری $(2x+1)(4x^2-2x+1)$ به‌ازای $x=\sqrt[3]{2}$ کدام است؟

1) 7 2) 14 3) 17 4) 21

23. حاصل عبارت $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$ کدام است؟

1) $(x-1)^2$ 2) $(x-1)^3(x^3+1)$ 3) x^3-1 4) x^6-1

24. حاصل $(x+1)(-x+x^2+1)-(x-1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

1) صفر 2) -2 3) $2x^3$ 4) 2

25. حاصل عبارت $(a^2-1)(a^{12}+1)(a^6+1)(a^4+a^2+1)$ برابر است با:

1) a^4-1 2) a^8-1 3) $a^{16}-1$ 4) $a^{24}-1$

26. حاصل عبارت $\dfrac{(x^3+\frac{1}{x^3})(x^6+\frac{1}{x^6})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{x^3-\frac{1}{x^3}}$ به ازای $x=\sqrt[6]{2}$ کدام است؟

1) $\frac{85}{8}$ 2) $\frac{85}{16}$ 3) $\frac{255}{8}$ 4) $\frac{255}{16}$

27. اگر $x^2+\frac{1}{x^2}=\sqrt{8}$ باشد، حاصل $x^6-\frac{1}{x^6}$ کدام می‌تواند باشد؟

1) 12 2) 14 3) 16 4) 18

28. حاصل عبارت $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3yxz}{x+y+z}$ به شرط $x+y+z\neq 0$ برابر کدام است؟

1) $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2$ 2) $\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(x-z)^2}{2}+\frac{(y-z)^2}{2}$

3) $(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2$ 4) $\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+z)^2}{2}+\frac{(y+z)^2}{2}$

29. حاصل $(2+\sqrt{3})^3-(2\sqrt{3})^3-(2-\sqrt{3})^3$ کدام است؟

1) $-3\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{3}$ 3) $-6\sqrt{3}$ 4) $6\sqrt{3}$

30. حاصل عبارت $(a-2)(a-1)a(a+1)+1$ کدام است؟

1) $(a^2+a+1)^2$ 2) $(a^2-a-1)^2$ 3) $(a^2+3a-1)^2$ 4) $(a^2-3a+1)^2$

31. حاصل عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ کدام است؟

1) $(a+1)^4$ 2) $(a^2+3a+1)^2$ 3) $(a^2+1)^2$ 4) $(a^2+a+1)^2$

تجزیه

32. اگر $A^2-B^2=91$ و $A+B=7$ باشند، حال عدد $A\times B$ کدام است؟

1) -30 2) -18 3) 12 4) 20

33. اگر $4a^2-b^2=91$ و $2a+b=7$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

34. اگر $\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}=a-\frac{1}{a}$ باشد، حاصل عبارت $a+\frac{1}{a}$ کدام است؟ $(a>0, a\neq 1)$

1) 3 2) $\sqrt{3}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

35. در عبارت $(1-x^{16})\div(\ldots)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ به جای نقطه‌چین کدام عامل قرار می‌گیرد؟

1) $1-x$ 2) $1-x^2$ 3) $1-x^4$ 4) $1-x^8$

36. حاصل $(\sqrt{3}+x)^3$ کدام است؟

1) $3\sqrt{3}-9x+3x^2-x^3$ 2) $3\sqrt{3}+9x+3x^2+x^3$

3) $3\sqrt{3}+9x+3\sqrt{3}x^2+x^3$ 4) $3\sqrt{3}-9x+3\sqrt{3}x^2-x^3$

37. حاصل 99^3 کدام است؟

1) 972999 2) 970299 3) 972990 4) 997029

38. اگر $x=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل x^3-2x کدام است؟

1) $6-7\sqrt{2}$ 2) $2+3\sqrt{2}$ 3) $6+7\sqrt{2}$ 4) $5-3\sqrt{2}$

39. اگر $x=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل x^3-5x کدام است؟

1) 1 2) $\sqrt{3}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) 2

40. اگر $xy=-72$ و $x+y=6$ باشد، حاصل x^3+y^3 کدام است؟

1) 1215 2) 1416 3) 1512 4) 1614

41. اگر داشته باشیم $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$، مقدار x^3+y^3 کدام است؟

1) 370 2) 360 3) 385 4) 358

42. حاصل عبارت $A=(x-\sqrt[3]{2})^2(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})^2$ به‌ازای $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+2}$ کدام است؟

1) $\sqrt{2}+2$ 2) 4 3) $\sqrt{2}+4$ 4) 2

43. کدام دو جمله‌ای در تجزیهٔ عبارت $2x^3+2x^2-4x$ وجود ندارد؟

1) $x+1$ 2) $x-1$ 3) $x+2$ 3) x^2-x

44. در تجزیهٔ عبارت $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6, x\neq 0$ کدام عامل وجود دارد؟

1) $\frac{1}{x}+1$ 2) $\frac{1}{x}-3$ 3) $\frac{1}{x}-1$ 4) $\frac{1}{x}+3$

45. کدام عامل در تجزیهٔ عبارت جبری x^5-81x وجود <u>ندارد</u>؟

1) x^2+9 2) $x-9$ 3) $x+3$ 4) $x-3$

46. در تجزیهٔ عبارت $4x^3-6x^2+2x$، کدام عامل وجود دارد؟

1) $2x+1$ 2) $2x-1$ 3) $x+1$ 4) $x+2$

47. چندجمله‌ای x^4+x^3+x+1 بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

1) x^2+x 2) x^2-x+1 3) x^2+x+1 4) x^2-1

48. در تجزیهٔ عبارت $2x^3-x^2-8x+4$ به عوامل اول، کدام دوجمله‌ای وجود <u>ندارد</u>؟

1) $x-2$ 2) $2x-1$ 3) $x+2$ 4) $2x+1$

49. یکی از عامل‌های حاصل از تجزیهٔ x^4+3x^2-4 کدام عبارت است؟

1) x^2+4 2) $x+3$ 3) x^2+1 4) $x+2$

50. یکی از عامل‌های y^4-3y^2+1 در کدام گزینه آمده است؟

1) y^2+y-1 2) y^2+y+1 3) y^2-2y-1 4) y^2+2y+1

51. در تجزیهٔ y^5+2y^3-24y کدام عامل وجود <u>ندارد</u>؟

1) y^2+6 2) $y-2$ 3) $y+2$ 4) $y-4$

52. در تجزیهٔ $a^2-c^2+b^2-2ab$ کدام عامل وجود دارد؟

1) $a+b+c$ 2) $a-b-c$ 3) $a-c+b$ 4) $c-a-b$

53. در تجزیهٔ $4a^2-4a-b^2-4b-3$، کدام عامل وجود دارد؟

1) $2a+b+3$ 2) $2a-b+1$ 3) $2a+b-3$ 4) $2a+b+1$

54. در تجزیهٔ عبارت $x^3-2xy+x^2y-2y^2$ کدام عامل وجود دارد؟

1) x^2+2y 2) $x-y$ 3) x^2-2y 4) $2x+y^2$

55. عدد $(97)^3+(63)^3$ الزاماً بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

1) 34 2) 102 3) 140 4) 160

56. مقدار $A=\dfrac{99^3-1}{99^2+100}\times\dfrac{99^3+1}{99^2-98}$ برابر عدد کدام گزینه است؟

1) 9600 2) 9800 3) 2000 4) 2020

57. در تجزیهٔ $8a^9-a^6b^3+8a^3b^3-b^6$ کدام عامل وجود <u>ندارد</u>؟

1) a^6+b^3 2) $4a^2+2ab+b^2$ 3) $2a-b$ 4) $2a+b$

58. اگر $a^3+b^3=2$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{b^2+b+1}{a^2+a+1}$ برابر کدام است؟ $(a,b\neq 1)$

1) $\dfrac{1-a}{b-1}$ 2) $\dfrac{b-1}{a-1}$ 3) $\dfrac{a-1}{b-1}$ 4) $\dfrac{1-b}{a-1}$

59. اگر $x+1$ یکی از عامل‌های $2x^3-x^2-5x-2$ باشد، دو عامل دیگر در کدام گزینه آمده است؟

1) $(2x-1),(x-2)$ 2) $(2x-1),(x+2)$ 3) $(2x+1),(x+2)$ 4) $(2x+1),(x-2)$

60. عبارت $6x^2+5x+1$ یک عامل $6x^4+5x^3-5x^2-5x-1$ است. اگر عامل دیگر به‌صورت $(x+a)(x+b)$ باشد، $a-b$ کدام است؟

1) صفر 2) 1 3) 2 4) 3

61. در تجزیهٔ عبارت $4x^4+4x^3+x^2-1$ کدام عامل وجود <u>ندارد</u>؟

1) $2x^2+x+1$ 2) $2x^2+x-1$ 3) $4x^3+x+1$ 4) $4x^3+x-1$

62. در تجزیهٔ عبارت $x^2+8xy+16y^2-3x-12y-4=(x+A-4)(x+B+1)$، حاصل $A+B$ کدام است؟

1) صفر 2) $4y$ 3) 4 4) $8y$

63. در تجزیهٔ عبارت $a(a-3)(a-4)-12a+36$، کدام عامل ضرب وجود <u>ندارد</u>؟

1) $a-6$ 2) $a-3$ 3) $a-2$ 4) $a+2$

64. در حاصل عبارت $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

1) $x^2+14x+61$ 2) $x^2-7x+11$ 3) $-x^2-14x-61$ 4) $x^2+7x+11$

65. سادهٔ شدهٔ عبارت $A=\dfrac{xy^3+y^2+y+1-x}{y^2+y+1}$ کدام است؟

1) xy^2-1 2) y^2-x 3) $xy-x+1$ 4) $y-x$

مخرج مشترک

66. حاصل $\dfrac{a-2}{a-3}+\dfrac{a-8}{a^2-a-6}$ کدام است؟

1) $\dfrac{a-4}{a-3}$ 2) $\dfrac{a-2}{a-3}$ 3) $\dfrac{a+3}{a+2}$ 4) $\dfrac{a+4}{a+2}$

67. حاصل $\dfrac{5x-16}{4-x}+\dfrac{x^2-3x}{x-4}$ برابر کدام گزینه است؟

1) $2-x$ 2) $4-x$ 3) $x-4$ 4) $x-2$

68. حاصل عبارت $\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{3x(x-1)}{x^2-x-2}$ کدام است؟

1) $\dfrac{2x}{x-2}$ 2) $\dfrac{x}{x-2}$ 3) $\dfrac{x}{x+1}$ 4) $\dfrac{2x}{x+1}$

69. اگر $\dfrac{4-3x}{9x^2+3x-2}=\dfrac{b}{3x+2}+\dfrac{a}{3x-1}$ برقرار باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

1) -1 2) -2 3) 1 4) 2

70. حاصل $\dfrac{x+7}{x^2+10x+21}+\dfrac{x-3}{x^2-9}$ کدام است؟

1) $\dfrac{2}{x+3}$ 2) $\dfrac{1}{2}(x-3)$ 3) $\dfrac{x-3}{x+3}$ 4) $\dfrac{x+3}{x-7}$

71. حاصل عبارت $\dfrac{1}{a^4+8}-\dfrac{1}{a^4-8}$ کدام است؟

1) $\dfrac{16}{a^{16}-64}$ 2) $\dfrac{-16}{a^{16}-64}$ 3) $\dfrac{16}{a^8-64}$ 4) $\dfrac{-16}{a^8-64}$

72. حاصل عبارت $\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2}{3x-3}$ کدام است؟

1) $\dfrac{1}{6(x^2-1)}$ 2) $\dfrac{x}{6(x^2-1)}$ 3) $\dfrac{1}{6(x-1)}$ 4) $\dfrac{1}{6x+6}$

73. حاصل عبارت $\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}-\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}$ برابر است با:

1) $-\dfrac{a+b}{a}$ 2) $-\dfrac{a+b}{b}$ 3) $\dfrac{a+b}{a}$ 4) $\dfrac{a+b}{b}$

74. حاصل عبارت $\dfrac{2}{2-y}-\dfrac{y+2}{y^2-4y+4}-\dfrac{y-3}{y^2-4}$ کدام است؟

1) $\dfrac{2y^2-9y-6}{(y-2)^2(y+2)}$ 2) $\dfrac{y-9}{(y-2)(y+3)}$ 3) $\dfrac{2y^2+9y+6}{(y-2)^2(y+2)}$ 4) $\dfrac{y+9}{(y-2)(y+2)}$

75. حاصل $\dfrac{2x^2y}{x^2-y^2}-\dfrac{y^2}{x+y}-\dfrac{x^2}{x-y}$ کدام است؟

1) $x+y$ 2) xy 3) $x-y$ 4) $\dfrac{x}{y}$

76. حاصل $\left(\dfrac{9-x^2}{5x^2+7x-30}\right)\left(\dfrac{5}{3-x}-\dfrac{x+2}{x^2-9}-\dfrac{x+3}{x^2-6x+9}\right)$ کدام است؟

1) $\dfrac{1}{3-x}$ 2) $3-x$ 3) $\dfrac{1}{3+x}$ 4) $3+x$

77. برای یکی کردن مخرج کسرهای $A=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ و $B=\frac{2x+5}{(x^2-1)(x^3+3x^2)}$ صورت و مخرج کسر A در کدام عبارت باید ضرب شود؟

1) x^3+4x^2+3x 2) x^2+4x+3 3) $x^4+4x^3+3x^2$ 4) $(3x-1)(x^3+4x^2+3x)$

78. اگر تساوی $\frac{c}{x+1}+\frac{ax+b}{x^2-x+1}=\frac{1}{x^3+1}$ با شرط $x\neq -1$ یک اتحاد باشد، $a-b+2c$ کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $-\frac{2}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

برای ۱۰۰٪

79. اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ و $x+y+z=6$ باشند، مقدار xyz کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 4 4) 8

80. اگر $x=(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ باشد، حاصل $x(x^2-3)$ کدام است؟

1) $2\sqrt{2}$ 2) $-2\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) $-\sqrt{2}$

81. اتحاد $(ax-y)^2+(bx+cy)^2=65x^2+5y^2+20xy$، برای سه عدد a، b و c که $b<c<0$ برقرار است. مقدار a کدام است؟

1) 4 2) 5 3) 6 4) 2

82. اگر بدانیم $a+b-c=1$ است، آن‌گاه از روابط زیر چند مورد صحیح است؟

الف) $a^2+b^2-c^2=1-2ab+2c$

ب) $a^2-b^2+c^2=1+2ac-2b$

پ) $a^2+b^2+c^2=1-2ab+2bc+2ca$

ت) $a^2+b^2-c^2=-1-2ab+2a+2b$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

83. اگر $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\frac{x^2}{x^4+1}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{25}$ 2) $\frac{1}{24}$ 3) $\frac{1}{23}$ 4) $\frac{1}{22}$

84. حاصل عبارت $\frac{(1-x)^{-1}(1-\sqrt{x})^{-1}(1-\sqrt[4]{x})^{-1}}{(1+\sqrt{x})^2(1+\sqrt[4]{x})}$ کدام است؟ $(x\geq 0, x\neq 1)$

1) $1-x$ 2) $(1-x)^{-3}$ 3) $(1-\sqrt{x})^{-3}$ 4) $1-\sqrt{x}$

85. اگر $a+b+c=0$ باشد که در آن $abc\neq 0$ است، حاصل L کدام است؟

$$L=\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

1) صفر 2) 1 3) abc 4) $a^2+b^2+c^2$

86. چند مورد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

الف) $(x^2+2y+1)(x^4+4y^2+4x^2y-x^2-2y+1)=(x^2+2y)^3+1$

ب) $(x^2-2y+1)(x^4+4y^2+2x^2y-x^2-4y+1)=x^6-(2y-1)^3$

پ) $(x^2-2y-1)(x^4+4y^2+2x^2y-2x^2-2y+1)=(x^2-1)^3-8y^3$

1) صفر 2) 1 3) 2 4) 3

87. حاصل $(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$ به ازای $x\geq 0$ کدام است؟

1) $x+1$ 2) $x-1$ 3) x^2-1 4) x^2+1

88. اگر $1+x+2x^2-x^3=3+a(x-2)+b(x-2)^2-(x-2)^3$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

1) -7 2) -5 3) 5 4) 7

آزمون فصل

1. حاصل $\frac{1}{x^4-1}-\frac{x^2}{x^6-1}$ به ازای $x \neq \pm 1$ برابر کدام است؟

1) $\frac{-1}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}$
2) $\frac{1}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}$
3) $\frac{-1}{(x^4-1)(x^4+x^2+1)}$
4) $\frac{1}{(x^4-1)(x^4+x^2+1)}$

2. با افزودن کدام عدد بر سه‌جمله‌ای $4x^2-6x+\frac{1}{4}$ مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

1) 2
2) $\frac{15}{4}$
3) 6
4) 12

3. در تجزیهٔ کامل عبارت $x^4+x^2y^2-2y^4$ چند عامل ضرب وجود دارد؟

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

4. حاصل $(\sqrt{2}+1)^3+(\sqrt{2}-1)^3$ کدام است؟

1) 10
2) 12
3) $10\sqrt{2}$
4) $12\sqrt{2}$

5. اگر بدانیم $a+\frac{1}{a}=5$ است، حاصل $a^6+\frac{1}{a^6}$ کدام است؟

1) 12094
2) 12096
3) 12098
4) 12100

6. اگر $x^2-x-10=0$ باشد، حاصل $\frac{x^3+1}{5x+5}$ کدام است؟

1) $\frac{9}{5}$
2) $\frac{11}{5}$
3) $\frac{13}{5}$
4) 3

7. حاصل $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^{998}(\sqrt{6}-\sqrt{5})^{1000}$ کدام است؟

1) $11-\sqrt{30}$
2) $11+\sqrt{30}$
3) $11+2\sqrt{30}$
4) $11-2\sqrt{30}$

8. حاصل عبارت $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ کدام است؟

1) $a^4+b^4-a^4b^4$
2) $a^4+b^4+a^4b^4$
3) $a^4+b^4-a^2b^2$
4) $a^4+b^4+a^2b^2$

9. اگر $x^2+y^2+2-2x-2y=0$ باشد، حاصل $x+y$ کدام است؟

1) 4
2) 3
3) 2
4) 1

10. حاصل $(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})$ به ازای y و x های نامنفی کدام است؟

1) $x-y$
2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$
3) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$
4) $x+y$

برای مشاهدهٔ پاسخ‌نامه کلیدی به صفحهٔ بعد مراجعه نمائید و برای دریافت پاسخ‌نامهٔ تشریحی رمزینهٔ مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید یا به سایت مهروماه، صفحه مربوط به این کتاب مراجعه نمایید.

پاسخ‌های کلیدی

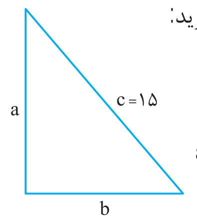
شماره	گزینه
1	۲
2	۱
3	۲
4	۱
5	۳
6	۲
7	۴
8	۴
9	۱
10	۱
11	۴
12	۲
13	۳
14	۴
15	۱
16	۱
17	۲
18	۴
19	۳
20	۱
21	۳
22	۴
23	۴
24	۱
25	۴
26	۳
27	۲
28	۴
29	۴
30	۳
31	۴
32	۳
33	۱
34	۴
35	۴
36	۴
37	۳
38	۲
39	۲
40	۴
41	۱
42	۲
43	۲
44	۲
45	۲
46	۴
47	۱
48	۱
49	۴
50	۲
51	۴
52	۳
53	۴
54	۲
55	۴
56	۱
57	۴
58	۳
59	۳
60	۴
61	۳
62	۲
63	۲
64	۴
65	۳
66	۴
67	۳
68	۴
69	۱
70	۱
71	۳
72	۳
73	۲
74	۱
75	۳
76	۱
77	۱
78	۲
79	۴
80	۱
81	۱
82	۴
83	۳
84	۲
85	۱
86	۴
87	۲
88	۱

پاسخ آزمون

شماره	گزینه
1	۳
2	۱
3	۲
4	۳
5	۳
6	۲
7	۴
8	۴
9	۳
10	۱

پاسخ‌های تشریحی

1. گزینه ۲ مثلث قائم‌الزاویه زیر را در نظر بگیرید:



محیط مثلث 34 است، بنابراین:

$a+b+15=34 \Rightarrow a+b=19$

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم: $a^2+b^2=15^2 \Rightarrow a^2+b^2=225$

با استفاده از اتحاد مربع کامل می‌توان حاصل ab را یافت.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \Rightarrow 19^2=225+2ab$

$\Rightarrow 361=225+2ab \Rightarrow ab=68$

مساحت این مثلث $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(68)=34$ است.

2. گزینه ۱

½jn¼i n¼{lÀ Selv¶ = Í|o¶®¨ Selv¶ $-4($®ÅõTv¶ Selv¶$)$

طول ضلع مربع بزرگ $x+y$ است.

½jn¼i n¼{lÀ Selv¶ $=(x+y)^2-4(x\times y)$

$=x^2+2xy+y^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

3. گزینه ۲ برای تبدیل عدد به توان‌های 10، بهتر است آن را به شکل زیر بنویسیم:

$(999995)^2=(1000000-5)^2=(10^6-5)^2$

$=(10^6)^2-2(10^6)(5)+5^2$

$=10^{12}-10(10^6)+25=10^{12}-10^7+25 \Rightarrow m=12\,,\ n=7$

$\Rightarrow m+n=19$

4. گزینه ۱ سه پرانتز اول با اتحاد مربع دوجمله‌ای ساده می‌شوند و پرانتز چهارم با اتحاد مربع سه‌جمله‌ای ساده می‌شود.

$(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2-(a+b+c)^2$

$=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+a^2+2ac+c^2$

$-(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)=a^2+b^2+c^2$

5. گزینه ۳ قبل از این‌که مستقیماً مقدار $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ را به‌جای xهای عبارت $x^2-2x+\frac{3}{2}$ قرار دهیم بهتر است عبارت را تبدیل به مربع کامل کنیم. به این روش، محاسبهٔ کمتری داریم.

$x^2-2x+\frac{3}{2}=(x^2-2x+1)-1+\frac{3}{2}$

$=(x-1)^2-1+\frac{3}{2}=(x-1)^2+\frac{1}{2}$

اکنون به‌جای x مقدار $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$(x-1)^2+\frac{1}{2}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=1$

یادآوری: برای مربع نمودن یک عبارت درجهٔ دوم ابتدا ضریب x^2 را از جمله‌های دارای x فاکتور می‌گیریم، سپس ضریب x را نصف می‌کنیم و به توان 2 می‌رسانیم. عدد حاصل را به عبارت کم و زیاد می‌کنیم و اتحاد را می‌سازیم. به مثال زیر دقت کنید.

$2x^2+5x+1=2(x^2+\frac{5}{2}x)+1$

$=2(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16})+1=2\left((x+\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16}\right)+1$

$=2(x+\frac{5}{4})^2-\frac{25}{8}+1=2(x+\frac{5}{4})^2-\frac{17}{8}$

6. گزینه ۲ **روش اول** به‌جای **x** در عبارت x^2-4x، مقدار آن را جای‌گذاری می‌کنیم:

$x^2-4x=(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})$

$=4+\cancel{4\sqrt{3}}+3-8-\cancel{4\sqrt{3}}=-1$

روش دوم با تبدیل نمودن عبارت x^2-4x به مربع کامل، داریم:

$x^2-4x+4-4=(x-2)^2-4$

مقدار x را در عبارت جای‌گذاری می‌کنیم:

$(x-2)^2-4=((\cancel{2}+\sqrt{3})\cancel{-2})^2-4=(\sqrt{3})^2-4=3-4=-1$

7. گزینه ۴ عبارت $4x^2+Ax+\frac{9}{4}$ مربع کامل است، یعنی به‌صورت $a^2\pm 2ab+b^2$ است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}4x^2=a^2 \Rightarrow a=2x\\ b^2=\frac{9}{4} \Rightarrow b=\frac{3}{2}\\ Ax=\pm 2ab\end{array}\right\} \Rightarrow Ax=\pm 2(2x)(\frac{3}{2})$$

$\Rightarrow Ax=\pm 6x \Rightarrow A=\pm 6$

8. گزینه ۴ برای تبدیل نمودن عبارت $4x^2-10x+9$ به اتحاد تفاضل مربع دوجمله‌ای با توجه به گزینه‌ها که همه ضریبی از x هستند، باید ببینیم با افزودن چه عبارتی به $-10x$ تبدیل به مربع کامل می‌شود.

با توجه به این که مربع کامل به‌صورت $a^2\pm 2ab+b^2$ است باید $4x^2$ با a^2 و 9 با b^2 برابر باشد، پس:

$a^2=4x^2 \Rightarrow a=2x$

$b^2=9 \Rightarrow b=3$

اتحاد موردنظر به‌صورت زیر است:

$a^2-2ab+b^2=4x^2-12x+9$

بنابراین با افزودن $-2x$ به عبارت $4x^2-10x+9$، مربع کامل حاصل می‌شود.

9. گزینه ۱ باید ببینیم در عبارت $4x^2+6x+2$ به عدد 2 چه مقداری افزوده شود، تا مربع (مجذور) دوجمله‌ای حاصل شود.

مربع دوجمله‌ای به‌صورت $a^2\pm 2ab+b^2$ است، باید a^2 با $4x^2$ و 2ab با 6x برابر باشند، پس:

$a^2=4x^2 \Rightarrow a=2x$

$2ab=6x \xrightarrow{a=2x} 2(2x)b=6x \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

مربع دوجمله‌ای حاصل به‌صورت زیر است:

$4x^2+6x+\frac{9}{4}=(2x+\frac{3}{2})^2$

بنابراین با افزودن عدد $\frac{1}{4}$ به عبارت $4x^2+6x+2$، مجذور دوجمله‌ای حاصل می‌شود.

10. **گزینه ۱** همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی می‌بریم:

$$a^2+b^2+c^2+3=2a+2b+2c$$
$$\Rightarrow a^2-2a+b^2-2b+c^2-2c+3=0$$

با وجود a^2 و $2a$، b^2 و $2b$ و همچنین c^2 و $2c$ به یاد اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌افتیم که برای کامل کردن این اتحادها عدد 3 را به‌صورت سه تا 1 می‌نویسیم: $a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1=0$

$$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

هر عبارت با توان زوج همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است، بنابراین جمع آن‌ها زمانی صفر می‌شود که تمام آن‌ها صفر باشند:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1\ ,\ b-1=0 \Rightarrow b=1\ ,\ c-1=0 \Rightarrow c=1$$

11. **گزینه ۴** معادله را به‌صورت مجموع دو مربع کامل درمی‌آوریم:

$$a^2+5b^2-4ab-2b+1=(a^2+4b^2-4ab)+(b^2-2b+1)=0$$
$$\Rightarrow (a-2b)^2+(b-1)^2=0$$

مجموع دو عبارت نامنفی صفر است، پس هردوی آن‌ها برابر صفر هستند.

$$\begin{cases}a-2b=0\\ b-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$$

12. **گزینه ۲** همهٔ جمله‌های موجود در تساوی را به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

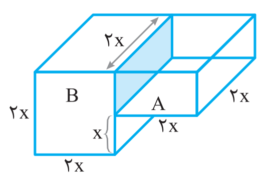
$$a^2+b^2-2a-2b+2=0 \Rightarrow a^2+b^2-2a-2b+1+1=0$$
$$\Rightarrow (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0 \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0$$

مجموع دو مقدار نامنفی برابر صفر است، پس هر دو برابر صفر هستند.

$$a=1, b=1$$

حال حاصل $(a+b)^3$ را می‌یابیم: $(a+b)^3=(1+1)^3=8$

13. **گزینه ۳** حجم را به دو مکعب مستطیل مجزا تفکیک می‌کنیم:



مکعب A به اضلاع $2x$، $2x$ و x حجمی برابر $x(2x)(2x)=4x^3$ دارد.

مکعب B به اضلاع $2x$، $2x$ و $2x$ حجمی برابر $(2x)(2x)(2x)=8x^3$ دارد.

حجم کل برابر است با $4x^3+8x^3$ یعنی $12x^3$ که برابر 1500 لیتر است.

هر لیتر $\frac{1}{1000}$ متر مکعب است، پس حجم برابر $1500\times\frac{1}{1000}$ متر مکعب است.

$$12x^3=\frac{1500}{1000} \Rightarrow 12x^3=1/5 \Rightarrow x^3=0/125 \Rightarrow x=0/5$$

14. **گزینه ۴** به کمک اتحادها می‌توان گفت:

$$(998)^2=(1000-2)^2=1000^2-4000+4=1000000-3996$$
$$\Rightarrow 998^2=996004$$

همچنین: $71\times69=(70+1)(70-1)=70^2-1=4900-1=4899$

15. **گزینه ۲** **روش اول** ابتدا حاصل‌ضرب دو پرانتز اول را که معرف اتحاد مزدوج هستند، به‌دست می‌آوریم:

$$(1-x)(1+x)(x^2+2)=(1-x^2)(x^2+2)$$

اگر در پرانتز اول از منفی فاکتور بگیریم، پرانتز اول و دوم تشکیل اتحاد جمله مشترک می‌دهند، پس:

$$-(x^2-1)(x^2+2)=-((x^2)^2+(2-1)(x^2)+(-1)(2))$$
$$=-(x^4+x^2-2)=-x^4-x^2+2$$

روش دوم **فرمول ممنوع:** بـه x عـدد دلخـواهی مانند $x=2$ می‌دهیم:

$$(1-x)(1+x)(x^2+2)\overset{x=2}{=\!=}(-1)(3)(6)=-18$$

به xهای گزینه‌ها نیز 2 می‌دهیم، گزینه‌ای درست است که حاصل آن 18- شود.

«1» گزینهٔ: $-(2)^4-3(2)^2+2=-26$ ✗

«2» گزینهٔ: $-(2)^4-(2)^2+2=-18$ ✓

«3» گزینهٔ: $(2)^4+3(2)^2-2=26$ ✗

«4» گزینهٔ: $(2)^4+(2)^2-2=18$ ✗

16. **گزینه ۴** **روش اول** عبارت را در 2 ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\times2(x-\frac{1}{2})(8x^2+2)(2x+1)$$

با ضرب 2 در پرانتز اول، عبارت‌های اول و سوم تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$\frac{1}{2}(2x-1)(8x^2+2)(2x+1)=\frac{1}{2}(2x-1)(2x+1)(8x^2+2)$$
$$=\frac{1}{2}(4x^2-1)(8x^2+2)$$

با فاکتور گرفتن 2 از پرانتز دوم، عبارت‌ها مجدداً تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$\frac{1}{2}\times2(4x^2+1)(4x^2-1)=(4x^2+1)(4x^2-1)=16x^4-1$$

روش دوم **فرمول ممنوع:** به x عـددی دلخـواه مانـند 1 می‌دهیم:

$$(x-\frac{1}{2})(8x^2+2)(2x+1)$$
$$\xrightarrow{x=1}(1-\frac{1}{2})(8(1)^2+2)(2(1)+1)=15$$

حال به‌جای همهٔ xها در گزینه‌ها 1 جای‌گذاری می‌کنیم:

«1» گزینهٔ: $4(1)^2-1=3$

«2» گزینهٔ: $\frac{1}{2}(16(1)^2-1)=\frac{15}{2}$

«3» گزینهٔ: $64(1)^2-1=63$

«4» گزینهٔ: $16(1)^4-1=15$

حاصل عبارت در گزینهٔ «4» با مقدار به‌دست آمده از جای‌گذاری $x=1$ در عبارت صورت سؤال برابر است، بنابراین گزینهٔ «4» درست است.

17. **گزینه ۳** فـرض کنیـد $A=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-7}$ بـدین ترتیـب می‌توان گفت:

$$(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-7})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-7})=x+3-(x-7)$$
$$\Rightarrow 5A=10 \Rightarrow A=2$$

18. **گزینه ۳** دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند، بنابراین:

$$(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})+\frac{1}{81\times81}$$
$$=(1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})+\frac{1}{81\times81}$$

دوباره دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و این عملیات تکرار می‌شود:

$$(1-\frac{1}{81})(1+\frac{1}{81})+\frac{1}{81\times81}=(1-\frac{1}{81\times81})+\frac{1}{81\times81}=1$$

19. **گزینه ۴** عبارت را در $(1-\frac{1}{2})$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})(1+\frac{1}{2^{16}})}{(1-\frac{1}{2})}$$

دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$\frac{(1-\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})(1+\frac{1}{2^{16}})}{(1-\frac{1}{2})}$$

مجدداً دو پرانتز اول با هم تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و این عملیات تکرار می‌شود:

$$\frac{(1-\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})(1+\frac{1}{2^{16}})}{1-\frac{1}{2}}=\frac{(1-\frac{1}{2^8})(1+\frac{1}{2^8})(1+\frac{1}{2^{16}})}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(1-\frac{1}{2^{16}})(1+\frac{1}{2^{16}})}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^{32}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-2^{-32}}{\frac{1}{2}}=2-2^{-31}$$

20. گزینهٔ ۴ اگر با دقت به عبارت A نگاه کنیم متوجه می‌شویم که با ضرب عبارت $(2-1)$ که خود برابر 1 است در آن دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند، پس:

$$(\overset{1}{\cancel{2-1}})A=\underbrace{(2-1)(2+1)}(2^2+1)(2^4+1)...(2^{64}+1)$$

$$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{64}+1)$$

دوباره دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$=(2^4-1)(2^4+1)...(2^{64}+1)$$

به همین ترتیب عبارت ساده می‌شوند تا به حالت زیر می‌رسیم:

$$=(2^{64}-1)(2^{64}+1)=(2^{64})^2-(1)^2=2^{128}-1$$

21. گزینهٔ ۴ حاصل‌ضرب دو پرانتز $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ تشکیل اتحاد مزدوج به‌صورت زیر می‌دهند:

$$(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$$

حال مقادیر α و β را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4})^4+(\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4})^4+(\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}\times\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4})^2$$

$$=(3\sqrt{2}\cancel{-4})+(3\sqrt{2}\cancel{+4})+(\sqrt[4]{(3\sqrt{2})^2-4^2})^2$$

$$=6\sqrt{2}+(\sqrt[4]{18-16})^2=6\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}=6\sqrt{2}+\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

22. گزینهٔ ۳ حاصل‌ضرب دو پرانتز را به کمک اتحاد چاق و لاغر به دست می‌آوریم و مقدار $\sqrt[3]{2}$ را به جای x جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(2x+1)(4x^2-2x+1)=(2x)^3+(1)^3$$

$$=8x^3+1\overset{x=\sqrt[3]{2}}{=}8(\sqrt[3]{2})^3+1=8(2)+1=17$$

23. گزینهٔ ۴ روش اول دو پرانتز اول تشکیل اتحاد چاق و لاغر می‌دهند.

$$(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)=(x^3-1)(x^3+1)$$

این دو پرانتز نیز تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند.

$$=(x^3)^2-(1)^2=x^6-1$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به x عدد دلخواهی مانند $x=2$ می‌دهیم:

$$(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)\overset{x=2}{=}(2-1)((2)^2+(2)+1)((2)^3+1)$$

$$=1(7)(9)=63$$

حال به x های گزینه‌ها نیز 2 می‌دهیم:

گزینهٔ «1»: $(x-1)^2\overset{x=2}{=}(2-1)^2=1$ ✗

گزینهٔ «2»: $(x-1)^3(x^3+1)\overset{x=2}{=}(2-1)^3((2)^3+1)=9$ ✗

گزینهٔ «3»: $x^3-1\overset{x=2}{=}(2)^3-1=7$ ✗

گزینهٔ «4»: $x^6-1\overset{x=2}{=}(2)^6-1=63$ ✓

24. گزینهٔ ۴ روش اول پرانتز دوم را مرتب می‌کنیم (از توان بزرگ به کوچک) می‌توان نوشت:

$$(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$$

حال هر جفت پرانتز کنار هم تشکیل اتحاد چاق و لاغر را می‌دهند:

$$(\cancel{x^3}+1)-(\cancel{x^3}-1)=2$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به x عدد دلخواهی مانند $x=-1$ می‌دهیم:

$$(x+1)(-x+x^2+1)-(x-1)(x^2+x+1)\overset{x=-1}{=}2$$

تنها گزینه «4» به‌ازای $x=-1$ برابر 2 است، پس این گزینه درست است. دقت کنید در این سؤال به x هر مقداری بدهیم باز هم حاصل برابر 2 می‌شود می‌توانید اعداد دیگر را هم امتحان کنید.

25. گزینهٔ ۴ ابتدا پرانتزها را برحسب توان عبارت‌ها از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: $(a^2-1)(a^4+a^2+1)(a^6+1)(a^{12}+1)$

دو پرانتز اول تشکیل اتحاد چاق و لاغر می‌دهند، پس:

$$(a^6-1)(a^6+1)(a^{12}+1)$$

دو پرانتز (a^6-1) و (a^6+1) تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند، پس:

$$(a^{12}-1)(a^{12}+1)=a^{24}-1$$

توجه کنید در این سؤال از روش فرمول ممنوع استفاده نمی‌کنیم زیرا به‌ازای $a=1$ ($a=-1$ یا) حاصل تمامی گزینه‌ها برابر می‌شوند و برای اعداد دیگر محاسبهٔ a^{12} دشوار است.

26. گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\overbrace{(x^3-\frac{1}{x^3})(x^3+\frac{1}{x^3})}(x^6+\frac{1}{x^6})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}$$

$$=\frac{\overbrace{(x^6-\frac{1}{x^6})(x^6+\frac{1}{x^6})}(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}$$

$$=\frac{\overbrace{(x^{12}-\frac{1}{x^{12}})(x^{12}+\frac{1}{x^{12}})}}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}=\frac{x^{24}-\frac{1}{x^{24}}}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}$$

از آن‌جایی که $x=\sqrt[6]{2}$ می‌باشد، پس $x^3=\sqrt{2}$ و $x^6=2$ است.

بنابراین:

$$\frac{x^{24}-\frac{1}{x^{24}}}{(x^3-\frac{1}{x^3})^2}=\frac{(x^6)^4-\frac{1}{(x^6)^4}}{(\frac{x^6-1}{x^3})^2}=\frac{2^4-\frac{1}{2^4}}{(\frac{2-1}{\sqrt{2}})^2}=\frac{16-\frac{1}{16}}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$=\frac{\frac{16^2-1}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{256-1}{\cancel{16}_8}}{\frac{1}{\cancel{2}}}=\frac{255}{8}$$

27. گزینه ۲ عبارت $x^6-\frac{1}{x^6}$ را به‌صورت $(x^2)^3-\frac{1}{(x^2)^3}$ درنظر می‌گیریم.

با استفاده از اتحاد فرعی $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$(x^2)^3-(\frac{1}{x^2})^3=(x^2-\frac{1}{x^2})^3+3x^2\frac{1}{x^2}(x^2-\frac{1}{x^2})$$

$$=(x^2-\frac{1}{x^2})^3+3(x^2-\frac{1}{x^2}) \quad (1)$$

برای یافتن $x^2-\frac{1}{x^2}$ از روی $x^2+\frac{1}{x^2}$ نیز از اتحاد فرعی زیر استفاده می‌کنیم:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\Rightarrow(x^2+\frac{1}{x^2})^2-(x^2-\frac{1}{x^2})^2 \quad (2)$$

$$=4x^2\frac{1}{x^2}\Rightarrow(x^2+\frac{1}{x^2})^2-(x^2-\frac{1}{x^2})^2=4$$

$$\Rightarrow(\sqrt{8})^2-(x^2-\frac{1}{x^2})^2=4\Rightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=\pm2$$

با جای‌گذاری مقدار $x^2-\frac{1}{x^2}$ در عبارت شمارهٔ (1) حاصل خواسته شده را می‌یابیم:

$$(x^2)^3-(\frac{1}{x^2})^3=(x^2-\frac{1}{x^2})^3+3(x^2-\frac{1}{x^2})=(\pm2)^3+3(\pm2)$$

$=14$ یا -14

28. گزینه ۲

راهبرد: اتحاد اویلر: براساس اتحاد اویلر می‌توان مجموع مکعبات سه جمله را به صورت زیر نوشت:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

از طرفی عبارت $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$ با اثبات زیر برابر $\frac{1}{2}\left[(x-z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2\right]$ است:

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$$
$$=\frac{2}{2}(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$
$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)$$
$$=\frac{1}{2}((x^2+y^2-2xy)+(x^2+z^2-2xz)+(y^2+z^2-2yz))$$
$$=\frac{1}{2}((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2)$$

بنابراین اتحاد اویلر را می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)\times\frac{1}{2}((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2)$$

به کمک اتحاد اویلر:

کاملاً واضح است که $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}$ برابر $\frac{1}{2}((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2)$ است.

29. گزینه ۴ اول عبارت را به $(2+\sqrt{3})^3+(-2\sqrt{3})^3+(-2+\sqrt{3})^3$ تبدیل می‌کنیم.

حالا دقت کنید که مجموع سه عبارت برابر صفر است:

$$(2+\sqrt{3})+(-2\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=0$$

بنابراین طبق نتیجهٔ اتحاد اویلر داریم:

$$(2+\sqrt{3})^3+(-2\sqrt{3})^3+(-2+\sqrt{3})^3$$
$$=3(2+\sqrt{3})(-2\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})$$

از پرانتز آخر، یک منفی فاکتور می‌گیریم تا با پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج دهد:

$$3(2+\sqrt{3})\times(-2\sqrt{3})\times-(2-\sqrt{3})$$

$$=6\sqrt{3}(2^2-(\sqrt{3})^2)=6\sqrt{3}(4-3)=6\sqrt{3}$$

30. گزینه ۲ **روش اول** عبارت‌ها را به ترتیب نشان داده شده در هم ضرب می‌کنیم:

$$(a-2)(a-1)a(a+1)+1=(a^2-a-2)(a^2-a)+1$$

a^2-a را t فرض می‌کنیم:

$$(t-2)t+1=t^2-2t+1=(t-1)^2$$

حال به جای t مقدار a^2-a را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(t-1)^2=(a^2-a-1)^2$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به جای a در عبارت صورت سؤال و گزینه‌ها عدد دلخواه 2- را جای‌گذاری می‌کنیم.

توجه کنید بهتر است عددی را انتخاب کنیم که عبارت $(a-2)(a-1)a(a+1)$ را صفر نکند.

$$(a-2)(a-1)a(a+1)+1=(-4\times-3\times-2\times-1)+1=25$$

حال به جای a در گزینه‌ها 2- قرار می‌دهیم:

گزینهٔ «1»: $(a^2+a+1)^2=9$

گزینهٔ «2»: $(a^2-a-1)^2=25$

گزینهٔ «3»: $(a^2+3a-1)^2=9$

گزینهٔ «4»: $(a^2-3a+1)=121$

بنابراین فقط گزینهٔ «2» می‌تواند درست باشد.

31. گزینه ۲ **روش اول** بهتر است عبارت‌ها را به شیوهٔ زیر در هم ضرب کنیم:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$$

حال عبارت a^2+3a را t در نظر می‌گیریم:

$$t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$$

به جای t عبارت a^2+3a را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(t+1)^2=(a^2+3a+1)^2$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به جای a در عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ عدد 1 جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=1(2)(3)(4)+1=25$$

اکنون به جای همهٔ a ها در گزینه‌ها 1 قرار می‌دهیم.

گزینهٔ «1»: $(a+1)^4=(1+1)^4=16$

گزینهٔ «2»: $(a^2+3a+1)^2=(1+3+1)^2=25$

گزینهٔ «3»: $(a^2+1)^2=(1+1)^2=4$

گزینهٔ «4»: $(a^2+a+1)^2=(1+1+1)^2=9$

تنها گزینه‌ای که حاصل آن 25 است گزینهٔ «2» است.

32. **گزینه ۱** در تساوی $A^2-B^2=91$ با توجه به اتحاد مزدوج داریم:

$$A^2-B^2=91\Rightarrow (A-B)(A+B)=91$$

با توجه به این‌که $A+B=7$ است، بنابراین:

$$(A-B)(7)=91\Rightarrow A-B=13$$

با تشکیل دستگاه، مقادیر A و B را می‌یابیم:

$$\begin{cases}A+B=7\\A-B=13\end{cases}$$
$$2A=20 \Rightarrow A=10$$
$$\Rightarrow (10)+B=7\Rightarrow B=-3$$

با به‌دست آوردن مقادیر A و B حاصل $A\times B$ را می‌یابیم:

$$A\times B=(10)\times(-3)=-30$$

33. **گزینه ۱** عبارت $4a^2-b^2$ را با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$4a^2-b^2=91\Rightarrow (2a-b)(2a+b)=91$$

مقدار $2a+b$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(2a-b)(2a+b)=91\Rightarrow (2a-b)\times 7=91\Rightarrow 2a-b=13$$

با تشکیل دستگاه به کمک $2a+b=7$ و $2a-b=13$ مقادیر a و b را می‌یابیم.

$$\begin{cases}2a+b=7\\2a-b=13\end{cases}$$
$$4a=20\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}$$

حاصل $a+b$ برابر 2 است.

34. **گزینه ۱** با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت $a-\frac{1}{a}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$a-\frac{1}{a}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\Rightarrow(\sqrt{a})^2-(\frac{1}{\sqrt{a}})^2=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$$
$$\Rightarrow(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}})=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$$

با توجه به این‌که $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ نمی‌تواند صفر شود، آن را از طرفین تساوی ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=1$$

طرفین را به توان 2 می‌رسانیم:

$$(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^2=1\Rightarrow a+\frac{1}{a}-2=1\Rightarrow a+\frac{1}{a}=3$$

35. **گزینه ۱** عبارت نقطه‌چین را A فرض می‌کنیم و تساوی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1-x^{16}}{A}=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

حال $1-x^{16}$ را با استفاده از اتحاد مزدوج تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$1-x^{16}=(1-x^8)(1+x^8)=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)$$
$$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$
$$=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

با مقایسهٔ حاصل به‌دست آمده با عبارت سمت راست مشخص می‌شود که $A=1-x$ است.

36. **گزینه ۳** **روش اول** با توجه به اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای داریم:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$\Rightarrow(\sqrt{3}+x)^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2(x)+3\sqrt{3}(x)^2+(x)^3$$
$$=3\sqrt{3}+9x+3\sqrt{3}x^2+x^3$$

روش دوم

فرمول ممنوع: اگر در عبارت $(\sqrt{3}+x)^3$ به x عدد $-\sqrt{3}$ بدهیم:

$$(\sqrt{3}+x)^3\xrightarrow{x=-\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{3})^3=0$$

به x های گزینه‌ها $-\sqrt{3}$ می‌دهیم گزینه‌ای درست است که حاصل آن صفر شود.

گزینهٔ «1»: $3\sqrt{3}-9x+3x^2-x^3\xrightarrow{x=-\sqrt{3}}9+15\sqrt{3}$ ⊗

گزینهٔ «2»: $3\sqrt{3}+9x+3x^2+x^3\xrightarrow{x=-\sqrt{3}}9-9\sqrt{3}$ ⊗

گزینهٔ «3»: $3\sqrt{3}+9x+3\sqrt{3}x^2+x^3\xrightarrow{x=-\sqrt{3}}0$ ✓

گزینهٔ «4»: $3\sqrt{3}-9x+3\sqrt{3}x^2-x^3\xrightarrow{x=-\sqrt{3}}24\sqrt{3}$ ⊗

37. **گزینه ۲** عدد 99^3 را به‌صورت $(100-1)^3$ می‌نویسیم و حاصل را به کمک اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$\Rightarrow(100-1)^3=(100)^3-3(100)^2(1)+3(100)(1)^2-(1)^3$$
$$=1000000-30000+300-1=970299$$

38. **گزینه ۴** ابتدا مخرج x را گویا می‌کنیم:

$$x=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

به‌جای x در عبارت x^3-2x مقدار آن یعنی $1-\sqrt{2}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^3-2x=(1-\sqrt{2})^3-2(1-\sqrt{2})$$

پرانتز اول را به کمک اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای ساده می‌نماییم:

$$\Rightarrow(1)^3-3(1)^2(\sqrt{2})+3(1)(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3-2+2\sqrt{2}$$
$$=1-3\sqrt{2}+6-\cancel{2\sqrt{2}}-2+\cancel{2\sqrt{2}}=5-3\sqrt{2}$$

39. **گزینه ۴** x را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$x=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

حال مقدار x را در عبارت x^3-5x جای‌گذاری می‌کنیم:

$x^3-5x=(1-\sqrt{2})^3-5(1-\sqrt{2})$

حاصل $(1-\sqrt{2})^3$ را با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای می‌یابیم:

$$(1-\sqrt{2})^3-5(1-\sqrt{2})$$
$$=((1)^3-3(1)^2(\sqrt{2})+3(1)(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3)-5(1-\sqrt{2})$$
$$=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}-5+5\sqrt{2}=2$$

40. گزینه ۳ عبارت x^3+y^3 را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ (1)

با به توان 2 رساندن طرفین تساوی $x+y=6$ داریم:

$x+y=6\Rightarrow x^2+y^2+2xy=36\xrightarrow{xy=-72}x^2+y^2=180$

مقادیر x^2+y^2، xy و $x+y$ را در رابطهٔ (1) جای‌گذاری می‌کنیم:

$6\times(180-(-72))=6(252)=1512$

41. گزینه ۱ به کمک اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای عبارت x^2+y^2 را ساده می‌کنیم:

$x^2+y^2=58\Rightarrow(x+y)^2-2xy=58$

با توجه به این‌که $x+y=10$ است، داریم:

$(10)^2-2xy=58\Rightarrow 2xy=42\Rightarrow xy=21$

عبارت خواسته‌شده x^3+y^3 اتحاد چاق و لاغر است، پس:

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

مقادیر به‌دست آمده را در عبارت جای‌گذاری می‌کنیم:

$(x+y)(x^2+y^2-xy)=(10)((58)-(21))=370$

42. گزینه ۴ توان 2 را به‌صورت مشترک در نظر می‌گیریم:

$$A=(x-\sqrt[3]{2})^2(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4})^2$$
$$=((x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2^2}))^2$$

با استفاده از اتحاد چاق ولاغر، عبارت را ساده می‌کنیم:

$A=(x^3-(\sqrt[3]{2})^3)^2=(x^3-2)^2$

مقدار x را جای‌گذاری می‌کنیم:

$A=((\sqrt[3]{\sqrt{2}+2})^3-2)^2=(\sqrt{2}+2-2)^2=(\sqrt{2})^2=2$

43. گزینه ۱ روش اول از 2x فاکتور می‌گیریم:

$2x^3+2x^2-4x=2x(x^2+x-2)=2x(x+2)(x-1)$

دوجمله‌ای‌های $x+2$، $x-1$ و x^2-x در تجزیهٔ این عبارت وجود دارند.

روش دوم

فرمول ممنوع: گزینه‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم. عبارتی در تجزیه وجود ندارد که با جای‌گذاری ریشهٔ آن در عبارت صورت سؤال، مقدار آن صفر نشود.

«1» گزینهٔ: $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow 2x^3+2x^2-4x$
$=2(-1)^3+2(-1)^2-4(-1)=4\neq 0$ ✓

«2» گزینهٔ: $x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow 2x^3+2x^2-4x$
$=2(1)^3+2(1)^2-4(1)=0$ ⊗

«3» گزینهٔ: $x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow 2x^3+2x^2-4x$
$=2(-2)^3+2(-2)^2-4(-2)=0$ ⊗

«4» گزینهٔ: $x^2-x=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow 2x^3+2x^2-4x=2(0)^3+2(0)^2-4(0)=0\\ x=1\Rightarrow 2x^3+2x^2-4x=2(1)^3+2(1)^2-4(1)=0\end{cases}$$ ⊗

فقط ریشهٔ گزینهٔ «1»، عبارت را صفر نمی‌کند.

44. گزینه ۲ ابتدا به جای $\frac{1}{x}$ متغیر t را قرار می‌دهیم، یعنی:

$(\frac{1}{x})^2-(\frac{1}{x})-6=t^2-t-6=(t-3)(t+2)$

حال به جای t مقدار $\frac{1}{x}$ را جای‌گذاری می‌کنیم: $(\frac{1}{x}-3)(\frac{1}{x}+2)$

45. گزینه ۲ عبارت x^5-81x را تجزیه می‌کنیم. ابتدا از x که در هر دو جمله وجود دارد فاکتور می‌گیریم: $x^5-81x=x\underbrace{(x^4-81)}_{\text{Z»jq¶jIdUH}}$

به کمک اتحاد مزدوج عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$=x\underbrace{(x^2-9)}_{\text{Z»jq¶jIdUH}}(x^2+9)=x(x-3)(x+3)(x^2+9)$

46. گزینه ۲ روش اول ابتدا از x فاکتور می‌گیریم:

$4x^3-6x^2+2x=x(4x^2-6x+2)$

عبارت $4x^2-6x+2$ را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم. با توجه به $4x^2$ می‌توان فهمید جملهٔ مشترک 2x است.

$4x^2-6x+2=(2x)^2-3(2x)+2$

باید دو عدد بیابیم که ضرب آن‌ها +2 و مجموع آن‌ها -3 باشد، به کمک اتحاد جمله مشترک داریم: $(2x-2)(2x-1)$

بنابراین عبارت $4x^3-6x^2+2x$ به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$4x^3-6x^2+2x=x(2x-2)(2x-1)$

روش دوم

فرمول ممنوع: در این‌گونه سؤالات، عبارت‌های گزینه‌ها را برابر صفر می‌گذاریم و ریشهٔ آن‌ها را می‌یابیم. اگر این ریشه‌ها چندجمله‌ای صورت سؤال را صفر کنند آن گزینه جزء عوامل تجزیه است و در غیر این صورت جزء عوامل تجزیه نیست.

«1» گزینهٔ: $2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 4x^3-6x^2+2x$
$=4(-\frac{1}{8})-6(\frac{1}{4})+2(-\frac{1}{2})=-3$ ⊗

«2» گزینهٔ: $2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x^3-6x^2+2x$
$=4(\frac{1}{8})-6(\frac{1}{4})+2(\frac{1}{2})=0$ ✓

«3» گزینهٔ: $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow 4x^3-6x^2+2x$
$=4(-1)^3-6(-1)^2+2(-1)=-12$ ⊗

«4» گزینهٔ: $x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow 4x^3-6x^2+2x$
$=4(-2)^3-6(-2)^2+2(-2)=-60$ ⊗

47. گزینه ۲ با فاکتورگیری x^3 از دو جملهٔ اول داریم:

$x^4+x^3+x+1=x^3(x+1)+(x+1)$

از $(x+1)$ فاکتور می‌گیریم: $=(x+1)(x^3+1)$

x^3+1 را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$(x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

(x^2-x+1) به عنوان یکی از عوامل تجزیه در گزینهٔ «2» وجود دارد.

.48 گزینه۴ **روش اول** برای تجزیهٔ 4 جمله‌ای‌ها، بهتر است آن‌ها را دو به دو دسته‌بندی کنیم، مثلاً:

$$(2x^3-x^2)+(-8x+4)=x^2(2x-1)-4(2x-1)$$
$$=(2x-1)(x^2-4)=(2x-1)(x+2)(x-2)$$

دقت کنید: شیوهٔ دسته‌بندی ممکن است در تجزیه تأثیری نداشته باشد برای نمونه در این سؤال می‌توانیم به شیوهٔ دیگری نیز عمل کنیم.

$$(2x^3-8x)+(-x^2+4)=2x(x^2-4)-(x^2-4)$$
$$=(x^2-4)(2x-1)=(x-2)(x+2)(2x-1)$$

روش دوم

فرمول ممنوع:

گزینهٔ «1»: $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 2x^3-x^2-8x+4$
$=16-4-16+4=0$ ✓

گزینهٔ «2»: $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^3-x^2-8x+4$
$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-4+4=0$ ✓

گزینهٔ «3»: $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow 2x^3-x^2-8x+4$
$=-16-4+16+4=0$ ✓

گزینهٔ «4»: $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^3-x^2-8x+4$
$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+4+4\neq 0$ ⊗

.49 گزینه۱ عبارت را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$x^4+3x^2-4=(x^2)^2+3(x^2)-4$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک آن را تجزیه می‌کنیم:

$$(x^2)^2+3(x^2)-4=(x^2+4)(x^2-1)=(x^2+4)(x-1)(x+1)$$

.50 گزینه۱ **روش اول** این تست یکی از تست‌های دشوار تجزیه است. برای حل آن باید $-3y^2$ را به‌صورت $-2y^2-y^2$ بنویسیم:

$$y^4-3y^2+1=y^4-2y^2+1-y^2=(y^2-1)^2-y^2$$

حال با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$(y^2-1)^2-y^2=(y^2-1-y)(y^2-1+y)$$

سه‌جمله‌ای‌های y^2+y-1 و y^2-y-1 عامل‌های y^4-3y^2+1 هستند.

روش دوم

فرمول ممنوع: اگر یکی از گزینه‌ها، عاملی از y^4-3y^2+1 باشد، باید به‌ازای هر y دلخواه حاصل y^4-3y^2+1 بر آن گزینه بخش‌پذیر باشد. به‌عنوان نمونه به جای y عدد 2 را قرار می‌دهیم:

$$y^4-3y^2+1=16-12+1=5$$

گزینهٔ «1»: $y^2+y-1=5$

گزینهٔ «2»: $y^2+y+1=7$

گزینهٔ «3»: $y^2-2y-1=-1$

گزینهٔ «4»: $y^2+2y+1=9$

حاصل y^4-3y^2+1 بر حاصل گزینه‌های «1» و «3» بخش‌پذیر است بنابراین گزینه‌های «2» و «4» نادرست هستند.

مجدداً به y عدد -2 را قرار می‌دهیم:

$$y^4-3y^2+1=16-12+1=5$$

گزینهٔ «1»: $y^2+y-1=1$

گزینهٔ «3»: $y^2-2y-1=7$

حاصل y^4-3y^2+1 بر حاصل y^2+y-1 بخش‌پذیر است.

.51 گزینه۴ عملیات تجزیه را با فاکتورگیری y آغاز می‌کنیم:

$$y^5+2y^3-24y=y(y^4+2y^2-24)$$

با تبدیل y^4 به $(y^2)^2$ تجزیه را به کمک اتحاد جمله مشترک ادامه می‌دهیم:

$$y((y^2)^2+2(y^2)-24)=y(y^2+6)(y^2-4)$$

با تجزیه (y^2-4) به $y-2$ و $y+2$ مراحل عملیات تکمیل می‌شود.

$$y(y^2+6)(y+2)(y-2)$$

.52 گزینه۲ جمله‌های a^2, b^2 و $-2ab$ را با هم در نظر می‌گیریم:

$$a^2-c^2+b^2-2ab=(a^2+b^2-2ab)-c^2=(a-b)^2-c^2$$

با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$(a-b)^2-c^2=((a-b)-c)((a-b)+c)=(a-b-c)(a-b+c)$$

.53 گزینه۴ در عبارت $4a^2-4a-b^2-4b-3$ دو جملهٔ اول با افزودن عدد 1 به آن تبدیل به اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای می‌شوند.

$$4a^2-4a+1=(2a-1)^2$$

بنابراین در عبارت داده شده، عدد 1 را کم و زیاد می‌کنیم:

$$4a^2-4a+1-b^2-4b-3-1=(4a^2-4a+1)-(b^2+4b+4)$$

هر دو پرانتز اتحاد مربع دوجمله‌ای هستند، پس:

$$(2a-1)^2-(b+2)^2$$

به کمک اتحاد مزدوج عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$((2a-1)-(b+2))((2a-1)+(b+2))=(2a-b-3)(2a+b+1)$$

بنابراین $(2a+b+1)$ و $(2a-b-3)$ عوامل سازندهٔ عبارت اصلی هستند.

.54 گزینه۳ جمله‌های عبارت را دوبه‌دو دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(x^3-2xy)+(x^2y-2y^2)=x(x^2-2y)+y(x^2-2y)$$
$$=(x^2-2y)(x+y)$$

دقت کنید: در این سؤال جمله‌ها را به‌گونهٔ دیگری نیز می‌توانیم دسته‌بندی کنیم:

$$(x^3+x^2y)+(-2xy-2y^2)=x^2(x+y)-2y(x+y)$$
$$=(x+y)(x^2-2y)$$

.55 گزینه۴ با توجه به عبارت (97^3+63^3) می‌توانیم حاصل را به کمک اتحاد چاق و لاغر به‌دست آوریم:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$\Rightarrow 97^3+63^3=(97+63)(97^2-(97)(63)+63^2)$$

در پرانتز اول چون عدد 160 را داریم، بنابراین عدد حاصل حتماً بر 160بخش‌پذیر است و نیازی به محاسبهٔ پرانتز دوم نیست.

56. **گزینه ۲** با استفاده از اتحاد چاق و لاغر صورت‌های کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$A=\frac{99^3-1}{99^2+100}\times\frac{99^3+1}{99^2-98}$$
$$=\frac{(99-1)(99^2+99(1)+1^2)}{99^2+100}\times\frac{(99+1)(99^2-99(1)+1^2)}{99^2-98}$$
$$=\frac{98\cancel{(99^2+100)}}{\cancel{99^2+100}}\times\frac{100\cancel{(99^2-98)}}{\cancel{99^2-98}}=98\times100=9800$$

57. **گزینه ۴** جمله‌ها را دوبه‌دو دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(8a^9+8a^3b^3)+(-a^6b^3-b^6)$$
$$=8a^3(a^6+b^3)-b^3(a^6+b^3)(a^6+b^3)\Rightarrow(8a^3-b^3)$$

عبارت $8a^3-b^3$ را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$(a^6+b^3)(8a^3-b^3)=(a^6+b^3)((2a)^3-b^3)$$
$$=(a^6+b^3)(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$$

در تجزیهٔ این عبارت $2a+b$ وجود ندارد.

58. **گزینه ۱** تساوی $a^3+b^3=2$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$a^3+b^3=1+1\Rightarrow a^3-1=1-b^3$$

در دو طرف تساوی با استفاده از اتحاد چاق و لاغر عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$(a-1)(a^2+a+1)=(1-b)(1+b+b^2)$$

طرفین تساوی را بر a^2+a+1 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=\frac{(1-b)(1+b+b^2)}{1+a+a^2}$$
$$\Rightarrow a-1=(1-b)\frac{1+b+b^2}{1+a+a^2}$$

با تقسیم مجدد طرفین بر $1-b$ مقدار خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$\frac{a-1}{1-b}=\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1}\Rightarrow\frac{1-a}{b-1}=\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1}$$

59. **گزینه ۴** یکی از عامل‌های $2x^3-x^2-5x-2$ برابر $x+1$ است، پس عبارت بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3-x^2-5x-2 & x+1\\
\cline{2-2}
-2x^3\pm 2x^2\qquad\quad & 2x^2-3x-2\\
\hline
-3x^2-5x-2 & \\
\mp3x^2\mp3x\quad & \\
\hline
-2x-2 & \\
\mp2x\mp2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

سایر عوامل تجزیه در عبارت $2x^2-3x-2$ قرار دارند و این عبارت را با استفاده از راهبرد زیر تجزیه می‌کنیم.

راهبرد: تجزیهٔ جمله مشترک با عامل درجهٔ دوم ضریب‌دار:

در تجزیهٔ سه‌جمله‌ای‌هایی که عبارت توان دوم آن‌ها، ضریب دارند، مانند مثال زیر عمل می‌کنیم.

می‌خواهیم $3x^2-5x+2$ را تجزیه کنیم. ابتدا ضریب x^2 را معکوس می‌کنیم در دو پرانتز با جملهٔ مشترک $3x$ ضرب می‌کنیم یعنی:

$$\frac{1}{3}(3x\quad)(3x\quad)$$

سپس ضریب درجهٔ دوم را در عدد ثابت ضرب می‌کنیم:

$$3\times2=6$$
$$3x^2-5x+2$$

دنبال دو عدد می‌گردیم که جمع آن‌ها -5 و ضرب آن‌ها 6 باشد آن دو عدد -3 و -2 هستند.

حال آن دو عدد را درون پرانتزها و کنار $3x$ها قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{3}(3x-3)(3x-2)$$

کافی است با فاکتورگیری، عبارت را ساده کنیم:

$$\frac{1}{3}3(x-1)(3x-2)=(x-1)(3x-2)$$

پس به کمک راهبرد بالا داریم:

$$2x^2-3x-2=\frac{1}{2}(2x-4)(2x+1)=(x-2)(2x+1)$$

دقت کنید: هرگاه یکی از عوامل تجزیهٔ عبارتی را داشته باشیم، برای تجزیهٔ کامل آن عبارت، کافی است خارج‌قسمت تقسیم آن بر عامل داده شده را تجزیه کنیم.

60. **گزینه ۳** عبارت $6x^4+5x^3-5x^2-5x-1$ را بر $6x^2+5x+1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4+5x^3-5x^2-5x-1 & 6x^2+5x+1\\
\cline{2-2}
\pm6x^4\pm5x^3\pm x^2\qquad\qquad & x^2-1\\
\hline
-6x^2-5x-1 & \\
\mp6x^2\mp5x\mp1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

بنابراین $(x+a)(x+b)$ برابر خارج قسمت تقسیم، یعنی x^2-1 است.

$$(x^2-1)=(x+1)(x-1)=(x+a)(x+b)\Rightarrow\begin{cases}a=+1\\b=-1\end{cases}$$
$$\Rightarrow a-b=2$$

61. **گزینه ۳** جملات عبارت را دوبه‌دو دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(4x^4+4x^3)+(x^2-1)=4x^3(x+1)+(x-1)(x+1)$$

از عامل مشترک یعنی $x+1$ فاکتور می‌گیریم: $(x+1)(4x^3+x-1)$

برای تجزیهٔ $4x^3+x-1$ باید -1 را به‌صورت $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ بنویسیم:

$$4x^3+x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=(4x^3-\frac{1}{2})+(x-\frac{1}{2})=4(x^3-\frac{1}{8})+(x-\frac{1}{2})$$

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، $x^3-\frac{1}{8}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$4(x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})+(x-\frac{1}{2})$$
$$=(x-\frac{1}{2})(4x^2+2x+2)=2(x-\frac{1}{2})(2x^2+x+1)$$
$$=(2x-1)(2x^2+x+1)$$

در نتیجه تجزیهٔ کلی عبارت به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$4x^4+4x^3+x^2-1=\underbrace{(x+1)(2x-1)}_{2x^2+x-1}(2x^2+x+1)$$

62. گزینه ۴ عبارت را با دسته‌بندی مناسب تجزیه می‌کنیم:

$$x^2+8xy+16y^2-3x-12y-4$$
$$=x^2+(8y-3)x+16y^2-12y-4$$

عبارت را به‌صورت اتحاد جمله مشترک در آورده‌ایم.

حال باید دو عبارت بیابیم که مجموع آن‌ها $8y-3$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $16y^2-12y-4$ شود. برای انجام این کار بهتر است $16y^2-12y-4$ را تجزیه کنیم:

$$16y^2-12y-4=(4y-4)(4y+1)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید مجموع این دو عبارت $8y-3$ است و در تجزیهٔ نهایی داریم:

$$x^2+(8y-3)x+(16y^2-12y-4)=(x+4y-4)(x+4y+1)$$
$$=(x+A-4)(x+B+1)\Rightarrow A=4y,B=4y\Rightarrow A+B=8y$$

63. گزینه ۳ **روش اول** عبارت را با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها تجزیه می‌کنیم:

$$a(a-3)(a-4)-12a+36=a(a-3)(a-4)-12(a-3)$$

با فاکتورگیری عبارت $(a-3)$ داریم:

$$(a-3)(a(a-4)-12)=(a-3)(a^2-4a-12)$$

عبارت $a^2-4a-12$ را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$(a-3)(a-6)(a+2)$$

روش دوم

فرمول ممنوع: هر یک از گزینه‌ها را برابر صفر می‌گذاریم و ریشهٔ آن‌ها را می‌یابیم، اگر این ریشه‌ها چندجمله‌ای صورت سؤال را صفر کنند آن گزینه، جزء عوامل تجزیه است، در غیر این صورت جزء عوامل نیست.

گزینهٔ «1»: $a-6=0\Rightarrow a=6\Rightarrow a(a-3)(a-4)-12a+36$
$=6(3)(2)-12(6)+36=0$ ✓

گزینهٔ «2»: $a-3=0\Rightarrow a=3\Rightarrow a(a-3)(a-4)-12a+36$
$=3(0)(-1)-12(3)+36=0$ ✓

گزینهٔ «3»: $a-2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow a(a-3)(a-4)-12a+36$
$=2(-1)(-2)-12(2)+36=16$ ⊗

گزینهٔ «4»: $a+2=0\Rightarrow a=-2\Rightarrow a(a-3)(a-4)-12a+36$
$=-2(-5)(-6)-12(-2)+36=0$ ✓

64. گزینه ۴ با اتحاد جمله مشترک، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم.

دو پرانتز $(x+2)$ و $(x+5)$ و دو پرانتز $(x+3)$ و $(x+4)$ را با هم اتحاد جمله مشترک می‌گیریم (زیرا مجموع عامل‌های غیرمشترک در هر دو 7 می‌شود.)

$$(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)+1=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+1$$

اگر $x^2+7x=t$ فرض کنیم: $(t+10)(t+12)+1$

عبارت، تشکیل اتحاد جمله مشترک می‌دهد، حاصل آن را می‌یابیم:

$$(t^2+22t+120)+1=t^2+22t+121=(t+11)^2$$

اگر به جای t، x^2+7x را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(x^2+7x+11)^2$$

عامل ضرب، $x^2+7x+11$ است.

65. گزینه ۳ **روش اول** با دسته‌بندی مناسب، صورت کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$A=\frac{(xy^3-x)+y^2+y+1}{y^2+y+1}=\frac{x(y^3-1)+(y^2+y+1)}{y^2+y+1}$$
$$=\frac{x(y-1)(y^2+y+1)+(y^2+y+1)}{y^2+y+1}$$

از سه‌جمله‌ای y^2+y+1 فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\cancel{(y^2+y+1)}[x(y-1)+1]}{\cancel{y^2+y+1}}=xy-x+1$$

روش دوم

فرمول ممنوع: در A به جای x و y دو مقدار دلخواه به‌ترتیب مانند 3 و 1 جای‌گذاری کنیم:

$$x=3,y=1\Rightarrow A=\frac{3(1)^3+(1)^2+(1)+1-3}{(1)^2+(1)+(1)}=\frac{3}{3}=1$$

این اعداد را به جای x و y گزینه‌ها نیز قرار می‌دهیم:

گزینهٔ «1»: $y^2-x=-2$ گزینهٔ «2»: $xy^2-1=2$

گزینهٔ «3»: $y-x=-2$ گزینهٔ «4»: $xy-x+1=1$

حاصل گزینهٔ «3» با مقدار به‌دست آمده از A برابر است.

66. گزینه ۴ **روش اول** مخرج کسر اول را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{a-8}{(a-3)(a+2)}+\frac{a-2}{a-3}$$

مخرج مشترک دو کسر، $(a-3)(a+2)$ است:

$$\frac{(a-8)+(a-2)(a+2)}{(a-3)(a+2)}=\frac{a-8+a^2-4}{(a-3)(a+2)}=\frac{a^2+a-12}{(a-3)(a+2)}$$

حال صورت کسر را تجزیه می‌کنیم، پس:

$$\frac{(a+4)\cancel{(a-3)}}{\cancel{(a-3)}(a+2)}=\frac{a+4}{a+2}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به a عددی دلخواه مانند صفر می‌دهیم:

$$\frac{a-8}{a^2-a-6}+\frac{a-2}{a-3}\overset{a=0}{=}\frac{-8}{-6}+\frac{-2}{-3}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$$

به جای a در گزینه‌ها صفر قرار می‌دهیم، گزینه‌ای درست است که حاصل آن برابر 2 شود: $\frac{a+4}{a+2}=\frac{0+4}{0+2}=2$

67. گزینه ۳

$$\frac{x^2-3x}{x-4}+\frac{5x-16}{4-x}=\frac{x^2-3x}{x-4}-\frac{5x-16}{x-4}$$
$$=\frac{x^2-3x-5x+16}{x-4}=\frac{x^2-8x+16}{x-4}=\frac{(x-4)^2}{x-4}=x-4$$

68. گزینه ۴ **روش اول** مخرج کسر اول را تجزیه می‌کنیم و مخرج مشترک دو کسر را می‌یابیم:

$$\frac{3x(x-1)}{x^2-x-2}+\frac{x}{2-x}=\frac{3x(x-1)}{(x-2)(x+1)}-\frac{x}{x-2}$$

$$= \frac{3x(x-1)-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{3x^2-3x-x^2-x}{(x-2)(x+1)} = \frac{2x^2-4x}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{2x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{2x}{x+1}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به x عدد دلخواهی مانند $x=1$ می‌دهیم:

$$\frac{3x(x-1)}{x^2-x-2}+\frac{x}{2-x} \overset{x=1}{=} 1$$

به xهای گزینه‌ها نیز 1 می‌دهیم. گزینه‌ای درست است که حاصل آن 1 شود.

«گزینهٔ 1»: $\frac{2x}{x-2} \overset{x=1}{=} \frac{2}{-1}=-2$ ⊗

«گزینهٔ 2»: $\frac{x}{x-2} \overset{x=1}{=} \frac{1}{1-2}=-1$ ⊗

«گزینهٔ 3»: $\frac{x}{x+1} \overset{x=1}{=} \frac{1}{2}$ ⊗

«گزینهٔ 4»: $\frac{2x}{x+1} \overset{x=1}{=} \frac{2}{2}=1$ ✓

.69 **گزینهٔ 1** مخرج مشترک دو عبارت $3x-1$ و $3x+2$ به صورت زیر است: $(3x-1)(3x+2)=9x^2+3x-2$

$$\frac{a\quad(3x+2)}{(3x-1)(3x+2)}+\frac{b\quad(3x-1)}{(3x+2)(3x-1)} = \frac{(3ax+2a)+(3bx-b)}{9x^2+3x-2}$$

$$= \frac{(3ax+3bx)+(2a-b)}{9x^2+3x-2} = \frac{(3a+3b)x+(2a-b)}{9x^2+3x-2}$$

صورت کسر برابر $-3x+4$ است، پس:

$$(3a+3b)x+(2a-b)=-3x+4 \Rightarrow \begin{cases}3a+3b=-3\\ 2a-b=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases} \Rightarrow a+b=-1$$

.70 **گزینهٔ 1** **روش اول** برای جمع کردن دو کسر باید بین آن‌ها مخرج مشترک بگیریم، بنابراین ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم، مخرج کسر اول را به کمک اتحاد مزدوج و مخرج کسر دوم را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم، مخرج کسرها با صورت‌هایشان ساده می‌شوند.

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+7}{x^2+10x+21} = \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}+\frac{\cancel{(x+7)}}{(x+3)\cancel{(x+7)}}$$

$$= \frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به x عدد دلخواهی مانند $x=1$ می‌دهیم:

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+7}{x^2+10x+21} \overset{x=1}{=} \frac{-2}{-8}+\frac{8}{32}=\frac{1}{2}$$

به xهای گزینه‌ها نیز 1 می‌دهیم. گزینه‌ای درست است که حاصل آن $\frac{1}{2}$ باشد:

«گزینهٔ 1»: $\frac{2}{x+3} \overset{x=1}{=} \frac{1}{2}$ ✓

«گزینهٔ 2»: $\frac{1}{2}(x-3) \overset{x=1}{=} \frac{1}{2}(-2)=-1$ ⊗

«گزینهٔ 3»: $\frac{x-3}{x+3} \overset{x=1}{=} \frac{-1}{2}$ ⊗

«گزینهٔ 4»: $\frac{x+3}{x-7} \overset{x=1}{=} \frac{4}{-6}=\frac{-2}{3}$ ⊗

.71 **گزینهٔ 3** **روش اول** با مخرج مشترک‌گیری بین دو کسر آن‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a^4-8}-\frac{1}{a^4+8} = \frac{(\cancel{a^4}+8)-(\cancel{a^4}-8)}{(a^4-8)(a^4+8)} = \frac{16}{(a^4-8)(a^4+8)}$$ مد

در مخرج کسر به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{16}{(a^4)^2-(8)^2} = \frac{16}{a^8-64}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به جای a عدد مناسبی مانند $\sqrt[4]{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{a^4-8}-\frac{1}{a^4+8} \overset{x=\sqrt[4]{2}}{=} \frac{1}{(\sqrt[4]{2})^4-8}-\frac{1}{(\sqrt[4]{2})^4+8} = \frac{-16}{60}$$

به جای a در گزینه‌ها $\sqrt[4]{2}$ را قرار می‌دهیم، گزینه‌ای درست است که حاصل آن $\frac{-16}{60}$ شود:

«گزینهٔ 1»: $\frac{16}{a^{16}-64} \overset{a=\sqrt[4]{2}}{=} \frac{16}{16-64} = \frac{-16}{48}$ ⊗

«گزینهٔ 2»: $\frac{-16}{a^{16}-64} \overset{a=\sqrt[4]{2}}{=} \frac{16}{48}$ ⊗

«گزینهٔ 3»: $\frac{16}{a^8-64} \overset{a=\sqrt[4]{2}}{=} \frac{16}{4-64} = \frac{-16}{60}$ ✓

«گزینهٔ 4»: $\frac{-16}{a^8-64} \overset{a=\sqrt[4]{2}}{=} \frac{16}{60}$ ⊗

.72 **گزینهٔ 3** **روش اول** مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم و بین سه کسر مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2}{3(x-1)}-\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)} = \frac{4(x+1)-6x+3(x-1)}{6(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{x+1}}{6(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{6(x-1)}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به x عدد دلخواهی مانند $x=2$ می‌دهیم:

$$\frac{2}{3x-3}-\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2x+2} \overset{x=2}{=} \frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

به xهای گزینه‌ها نیز مقدار 2 می‌دهیم. گزینه‌ای درست است که حاصل آن $\frac{1}{6}$ باشد.

«گزینهٔ 1»: $\frac{1}{6(x^2-1)} \overset{x=2}{=} \frac{1}{6(4-1)} = \frac{1}{18}$ ⊗

«گزینهٔ 2»: $\frac{x}{6(x^2-1)} \overset{x=2}{=} \frac{2}{6(4-1)} = \frac{1}{9}$ ⊗

«گزینهٔ 3»: $\frac{1}{6(x-1)} \overset{x=2}{=} \frac{1}{6(1)} = \frac{1}{6}$ ✓

«گزینهٔ 4»: $\frac{1}{6x+6} \overset{x=2}{=} \frac{1}{18}$ ⊗

.73 **گزینهٔ 2**

روش اول با فاکتورگیری از صورت و مخرج کسرها داریم:

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab}-\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3} = \frac{a(a+b)}{a(a-b)}-\frac{a(a^2+2ab+b^2)}{b(a^2-b^2)}$$

در صورت کسر دوم اتحاد مربع دوجمله‌ای و در مخرج آن اتحاد مزدوج داریم، با مخرج مشترک‌گیری بین دو کسر می‌توان نوشت:

$$\frac{\cancel{a}(a+b)}{\cancel{a}(a-b)}-\frac{a\,\cancel{(a+b)^2}^{(a+b)}}{b(a-b)\,\cancel{(a+b)}}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a(a+b)}{b(a-b)}$$

$$=\frac{b(a+b)-a(a+b)}{b(a-b)}$$

با فاکتورگیری از عامل $(a+b)$ در صورت داریم:

$$\frac{(b-a)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{-\cancel{(a-b)}(a+b)}{b\cancel{(a-b)}}=-\frac{a+b}{b}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: اگر به a و b اعداد دلخواهی مانند $a=1$ و $b=2$ بدهیم، داریم:

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab}-\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}\xrightarrow[b=2]{a=1}\frac{1+2}{1-2}-\frac{1+2(2)+(2)^2}{2-(2)^3}$$

$$=-3-\frac{9}{-6}=-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

اگر مقادیر $a=1$ و $b=2$ را در گزینهٔ «2» قرار دهیم، خواهیم داشت: $-\frac{1+2}{2}=-\frac{3}{2}$

74. گزینه ۱ مخرج مشترک سه کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{J»I ov¨ Zoh¶}=y^2-4=(y-2)(y+2)\\ \text{³»j ov¨ Zoh¶}=y^2-4y+4=(y-2)^2\\ \text{³¼W ov¨ Zoh¶}=(2-y)=-(y-2)\end{array}\right\}\text{ov¨ ¾W ¥oTz¶ Zoh¶}$$

$$=(y-2)^2(y+2)$$

با مخرج مشترک‌گیری سه کسر را جمع و تفریق می‌کنیم:

$$\frac{y-3}{(y-2)(y+2)}-\frac{y+2}{(y-2)^2}+\frac{2}{(y-2)}$$

$$=\frac{(y-3)(y-2)-(y+2)^2+2(y-2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)}$$

حاصل اتحادهای صورت کسر را به‌دست می‌آوریم و با ساده نمودن آن داریم:

$$=\frac{y^2-5y+6-(y^2+4y+4)+2(y^2-4)}{(y-2)^2(y+2)}=\frac{2y^2-9y-6}{(y-2)^2(y+2)}$$

75. گزینه ۳

$$\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{x+y}-\frac{2x^2y}{x^2-y^2}=\frac{x^2(x+y)-y^2(x-y)-2x^2y}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^3+x^2y-xy^2+y^3-2x^2y}{x^2-y^2}=\frac{x^3-x^2y-xy^2+y^3}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2(x-y)-(x-y)y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=x-y$$

76. گزینه ۱ **روش اول** ابتدا پرانتز اول را با تجزیه و مخرج مشترک‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x+3}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{5}{3-x}$$

$$=\frac{x+3}{(x-3)^2}-\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}-\frac{5}{-(x-3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)-(x+2)(x-3)+5(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+6x+9-(x^2-x-6)+5(x^2-9)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{5x^2+7x-30}{(x-3)^2(x+3)}$$

با جای‌گذاری این عبارت به جای پرانتز اول داریم:

$$\frac{\cancel{(5x^2+7x-30)}}{(x-3)^2(x+3)}\times\frac{9-x^2}{\cancel{(5x^2+7x-30)}}=\frac{9-x^2}{(x-3)^2(x+3)}$$

با تجزیهٔ صورت کسر و ساده نمودن آن می‌توان نوشت:

$$\frac{-(x^2-9)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{-\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-3)^2}_{(x-3)}\,\cancel{(x+3)}}=\frac{-1}{x-3}=\frac{1}{3-x}$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به x عدد دلخواهی مانند $x=1$ می‌دهیم:

$$\left(\frac{x+3}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{5}{3-x}\right)\left(\frac{9-x^2}{5x^2+7x-30}\right)\overset{x=1}{=}\frac{1}{2}$$

به xهای گزینه‌ها نیز مقدار 2 می‌دهیم گزینه‌ای درست است که حاصل آن $\frac{1}{2}$ شود.

گزینهٔ «1»: $\frac{1}{3-x}\overset{x=1}{=}\frac{1}{2}$ ✓ گزینهٔ «2»: $3-x\overset{x=1}{=}2$ ⊗

گزینهٔ «3»: $\frac{1}{3+x}\overset{x=1}{=}\frac{1}{4}$ ⊗ گزینهٔ «4»: $3+x\overset{x=1}{=}4$ ⊗

77. گزینه ۱ مخرج کسر B را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم:

$$(x^2-1)(x^3+3x^2)=(x-1)(x+1)x^2(x+3)$$

ک.م.م مخرج‌های دو کسر برابر است با: $x^2(x-1)(x+1)(x+3)$

بنابراین صورت و مخرج کسر A باید در عبارت $x(x+1)(x+3)$ ضرب شوند. $x(x+1)(x+3)=x(x^2+4x+3)=x^3+4x^2+3x$

78. گزینه ۲ در عبارت سمت راست تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{ax+b}{x^2-x+1}+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

مخرج کسر اتحاد چاق و لاغر است آن را ساده می‌نماییم، در صورت کسر با ضرب پرانتزها در هم داریم:

$$\frac{ax^2+(a+b)x+b+cx^2-cx+c}{x^3+1}$$

$$=\frac{(a+c)x^2+(a+b-c)x+b+c}{x^3+1}$$

با جای‌گذاری این عبارت به جای عبارت اصلی، داریم:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{(a+c)x^2+(a+b-c)x+b+c}{x^3+1}$$

از برابر بودن مخرج دو کسر نتیجه می‌گیریم که صورت‌های آن‌ها با هم برابر است، یعنی: $1=(a+c)x^2+(a+b-c)x+b+c$

برای برقراری این تساوی باید ضریب x و x^2 برابر صفر مجموع b و c برابر 1 باشند، بنابراین:

$a+c=0 \Rightarrow a=-c$ (۱)

$a+b-c=0 \xrightarrow{(1)} -c+b-c=0 \Rightarrow b=2c$ (۲)

$b+c=1 \xrightarrow{(2)} 2c+c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{3}$

با توجه به روابط (۱) و (۲) مقادیر b و a را می‌یابیم:

$a=-c \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$b=2c \Rightarrow b=\frac{2}{3}$

حاصل عبارت $a-b+2c$ را می‌یابیم:

$a-b+2c=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+2(\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}$

79. گزینه ۴ از آن‌جایی‌که $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ است، بنابر نتیجهٔ اتحاد اویلر داریم:

$(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3+(\sqrt[3]{z})^3=3(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{z})$

$\Rightarrow x+y+z=3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 6=3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 2=\sqrt[3]{xyz}$

$\Rightarrow 2^3=xyz \Rightarrow xyz=8$

80. گزینه ۱ اول طرفین عبارت را به توان 3 می‌رسانیم:

$x=(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow x^3=\left[(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}\right]^3$

با توجه به اتحاد: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$x^3=(\sqrt{2}\cancel{+1})+(\sqrt{2}\cancel{-1})+3\underbrace{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}}$

$\times\left[\underbrace{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}}\right]$

$x^3=2\sqrt{2}+3((\sqrt{2})^2-1^2)^{\frac{1}{3}}x \Rightarrow x^3=2\sqrt{2}+3(2-1)^{\frac{1}{3}}x$

$x^3=2\sqrt{2}+3x \Rightarrow x^3-3x=x(x^2-3)=2\sqrt{2}$

81. گزینه ۱ ابتدا اتحادهای سمت چپ را باز می‌کنیم:

$(ax-y)^2+(bx+cy)^2$

$=(a^2x^2-2axy+y^2)+(b^2x^2+c^2y^2+2bcxy)$

$=(a^2x^2+b^2x^2)+(c^2y^2+y^2)+(2bcxy-2axy)$

$=(a^2+b^2)x^2+(c^2+1)y^2+(2bc-2a)xy$

$=65x^2+5y^2+20xy$

بنابراین $a^2+b^2=65$ ، $c^2+1=5$ و $2bc-2a=20$ است.

$c^2+1=5 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=\pm 2 \xrightarrow[c<0]{} c=-2$

$2bc-2a=20 \Rightarrow bc-a=10 \xrightarrow{c=-2} -2b-a=10$

$\Rightarrow a=-10-2b$

از طرفی هم می‌دانیم: $a^2+b^2=65 \Rightarrow (-10-2b)^2+b^2=65$

$\Rightarrow 100+4b^2+40b+b^2=65$

طرفین را به 5 تقسیم می‌کنیم:

$\Rightarrow 5b^2+40b+100-65=0 \Rightarrow 5b^2+40b+35=0$

$\Rightarrow b^2+8b+7=0 \Rightarrow (b+1)(b+7)=0 \Rightarrow b=-1, b=-7$

ازآن‌جایی‌که $b<c<0$ است و $c=-2$ است، پس $b=-7$ می‌باشد و $a=-10-2b$ یعنی $a=-10-2(-7)=4$ است.

82. گزینه ۴

الف) $a+b-c=1 \Rightarrow a+b=c+1$

$\xrightarrow{2} a^2+2ab+b^2=c^2+2c+1$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=1-2ab+2c$ ✓

ب) $a+b-c=1 \Rightarrow a-c=1-b$

$\xrightarrow{2} a^2-2ac+c^2=1+b^2-2b$

$a^2-b^2+c^2=1+2ac-2b$ ✓

پ) $a+b-c=1 \xrightarrow{2} (a+b-c)^2=1^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-2ac+2ab-2bc=1$

$a^2+b^2+c^2=1-2ab+2bc+2ca$ ✓

ت) از قسمت (الف) داریم: $a+b-c=1 \Rightarrow a+b=c+1$

$\Rightarrow a^2+b^2+2ab=c^2+2c+1$

$a^2+b^2-c^2=-2ab+2c+1$

از طرفی $a+b-1=c$ است، بنابراین:

$a^2+b^2-c^2=-2ab+2(a+b-1)+1$

$=-2ab+2a+2b-2+1$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab+2a+2b-1$ ✓

83. گزینه ۳ این سؤال با تغییری کوچک تبدیل به یک سؤال آشنا می‌گردد.

کافی است طرفین تساوی $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{5}$ را معکوس کنیم و صورت آن را تفکیک کنیم:

$\frac{x^2+1}{x}=5 \Rightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=5 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=5$

حالا طرفین را به توان 2 می‌رسانیم:

$x^2+\frac{1}{x^2}+2x\frac{1}{x}=25 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=23$

$\Rightarrow \frac{x^4+1}{x^2}=23 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{23}$

84. گزینه ۲

نکته: توان منفی در کسرها یعنی اگر در صورتی، برو مخرج و اگر در مخرجی، برو صورت! ☺

به عنوان نمونه $\frac{(1-x)^{-1}}{(1+x)^{-1}}$ با $\frac{1+x}{1-x}$ برابر است.

به روش گفته‌شده در نکته، اول تمام توان‌های منفی را از بین می‌بریم:

$\frac{(1-x)^{-1}(1-\sqrt{x})^{-1}(1-\sqrt[4]{x})^{-1}}{(1+\sqrt{x})^2(1+\sqrt[4]{x})}$

$=\frac{1}{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[4]{x})(1+\sqrt{x})^2(1+\sqrt[4]{x})}$

$$=\frac{1}{(1-x)(1^2-(\sqrt{x})^2)\times(1+\sqrt{x})(1-(\sqrt[4]{x})^2)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x)\underbrace{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}_{\text{Z»J q¶}}}=\frac{1}{(1-x)(1-x)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}=(1-x)^{-3}$$

85. گزینه ۱ **روش اول** ازآن‌جایی‌که $a+b+c=0$ است، می‌توان نوشت:

$$a+b=-c\xrightarrow{\text{2 · H¼U ¾M}}(a+b)^2=c^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab=c^2\Rightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab$$
$$a+c=-b\xrightarrow{\text{2 · H¼U ¾M}}(a+c)^2=b^2$$
$$\Rightarrow a^2+c^2+2ac=b^2\Rightarrow a^2+c^2-b^2=-2ac$$
$$b+c=-a\xrightarrow{\text{2 · H¼U ¾M}}(b+c)^2=a^2$$
$$\Rightarrow b^2+c^2+2bc=a^2\Rightarrow b^2+c^2-a^2=-2bc$$
$$L=\frac{b+c}{\cancel{bc}}(-2\cancel{bc})+\frac{a+c}{\cancel{ac}}(-2\cancel{ac})+\frac{a+b}{\cancel{ab}}(-2\cancel{ab})$$
$$L=-2(b+c)-2(a+c)-2(a+b)$$
$$=-2b-2c-2a-2c-2a-2b=-4a-4b-4c$$
$$-4(a+b+c)=0$$

روش دوم

فرمول ممنوع: در این روش می‌توان سه عدد مثال زد که جمع آن‌ها برابر صفر است.
مثلاً $2+(-1)+(-1)=0$ یعنی $a=2, b=-1, c=-1$.
این اعداد را در L جای‌گذاری می‌کنیم:

$$L=\frac{(-1)+(-1)}{(-1)(-1)}((-1)^2+(-1)^2-2^2)+\frac{2+(-1)}{2(-1)}(2^2+(-1)^2-(-1)^2)+\frac{2+(-1)}{2(-1)}(2^2+(-1)^2-(-1)^2)$$

$$L=-2(1+1-4)+\frac{-1}{2}(4)+\frac{-1}{2}(4)=-4+4=0$$

همین اعداد را در گزینه‌ها جای‌گذاری می‌کنیم.
هیچ‌یک از گزینه‌ها برابر صفر نمی‌شوند و فقط گزینهٔ «1» برابر صفر است.

86. گزینه ۴ برای حل این سؤال باید در قسمت لاغر دو تا از سه جمله را با هم جفت در نظر بگیریم مثلاً در قسمت (الف) می‌توان $(x^2+2y)+1$ و یا $x^2+(2y+1)$ را به عنوان قسمت لاغر در نظر گرفت.

حال اگر $(x^2+2y)+1$ را قسمت لاغر در نظر بگیریم، قسمت چاق آن عبارت است از:

$$\left[(x^2+2y)+1\right]\left[(x^2+2y)^2-(x^2+2y)\times1+1^2\right]$$
$$=(x^2+2y+1)(x^4+4y^2+4x^2y-x^2-2y+1)$$
$$=(x^2+2y)^3+1^3$$

همین‌طور برای قسمت (ب) اگر $x^2-(2y-1)$ را قسمت لاغر در نظر بگیریم، داریم:

$$\left[x^2-(2y-1)\right]\left[(x^2)^2+x^2(2y-1)+(2y-1)^2\right]$$
$$=(x^2-2y+1)(x^4+2x^2y-x^2+4y^2-4y+1)$$
$$=(x^2)^3-(2y-1)^3=x^6-(2y-1)^3$$

در قسمت (پ) هم برای یافتن قسمت چاق مورد نظر باید $(x^2-1)-2y$ را قسمت لاغر در نظر گرفت:

$$[\overbrace{(x^2-1)-2y}^{x^2-2y-1}]\left[(x^2-1)^2+(x^2-1)2y+(2y)^2\right]$$
$$=(x^2-1-2y)(x^4-2x^2+1+2x^2y-2y+4y^2)$$
$$=(x^2-1)^3-(2y)^3=(x^2-1)^3-8y^3$$

بنابراین هر سه عبارت می‌توانند به اتحادهای چاق و لاغر تبدیل شوند.

87. گزینه ۲ دو پرانتز اول اتحاد مزدوج‌اند، یعنی:

$$(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)=(\sqrt[6]{x})^2-1^2=\sqrt[3]{x}-1$$

حال حاصل $\sqrt[3]{x}-1$ با پرانتز آخر، تشکیل اتحاد چاق و لاغر می‌دهد:

$$(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=(\sqrt[3]{x})^3-1^3=x-1$$

88. گزینه ۱ **روش اول** باید تمام اتحادها را باز کنیم:

$$3+a(x-2)+b(x-2)^2-(x-2)^3$$
$$=3+ax-2a+b(x^2-4x+4)-(x^3-6x^2+12x-8)$$
$$=3+ax-2a+bx^2-4bx+4b-x^3+6x^2-12x+8$$
$$\Rightarrow\underline{(11+4b-2a)}+\underline{(a-4b-12)}x+\underline{(b+6)}x^2-x^3=1+x+2x^2-x^3$$

ضرایب طرفین باید با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}b+6=2\Rightarrow b=-4\\ a-4b-12=1\Rightarrow a-4(-4)-12=1\Rightarrow a=-3\\ 11+4b-2a=1\end{cases}$$

$$a+b=-7$$

روش دوم

فرمول ممنوع: برای پیدا کردن $a+b$ فقط کافی است به جای x عدد 3 را جای‌گذاری کنیم:

$$3+a(3-2)+b(3-2)^2-(3-2)^2=1+3+2(3)^2-3^3$$
$$\Rightarrow3+a+b-1=4+18-27\Rightarrow a+b=-7$$