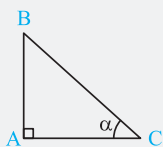


مثلثات

درسنامه ۱

نسبت‌های مثلثات

در مثلث قائم‌الزاویه ABC زیر، چهار نسبت مثلثاتی زیر را تعریف می‌کنیم:



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{سینوس آلفا}$$

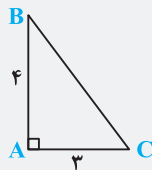
$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}, \quad \text{کسینوس آلفا}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{تانژانت آلفا}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha} = \frac{AC}{AB}, \quad \text{کوتانژانت آلفا}$$

سؤال دانش‌پژوه (ندرا کشتکار): آقا ببخشید اگه مثلث قائم‌الزاویه نبود چی؟

پاسخ: درود بر شما و مثلث قائم‌الزاویه! بین این بحث‌ها و تعاریفی که گفتیم فقط در مثلث قائم‌الزاویه انجام میشه. پس اگه مثلث قائم‌الزاویه نبود دیگه اون تعاریف بی‌معنی‌اند.



مثال در شکل مقابل، مقدار عبارت $\frac{\tan \hat{B} + \cot \hat{C}}{\sin \hat{B} \times \sin \hat{C}}$ را به دست آورید.

پاسخ: قبل از هر کاری به کمک قضیه فیثاغورس، طول وتر BC را می‌یابیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

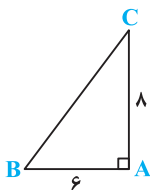
حال طبق تعریف‌های گفته شده در بالا حاصل کسر داده شده را می‌یابیم:

$$\frac{\tan \hat{B} + \cot \hat{C}}{\sin \hat{B} \times \sin \hat{C}} = \frac{\frac{AC}{AB} + \frac{AC}{AB}}{\frac{AC}{BC} \times \frac{AB}{BC}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{12}{25}} = \frac{6 \times 25}{4 \times 12} = \frac{25}{8}$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر افته‌پاری): آقا به جز این نسبت‌ها، باز هم چیزی داریم؟

پاسخ: درود بر شما! بله ولی مراقل امسال نمی‌فونین و واجب هم نیست برونید. ضمناً اگر جناب عالی همین نسبت‌ها رو هم حفظ کنید و بلد باشین، من ده هزار مرتبه می‌گم درود بر شما!

برگرفته از کتاب درسی



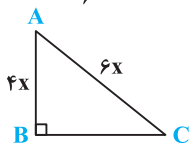
۱- در شکل مقابل، حاصل $\sin \hat{B} + \cos \hat{C}$ کدام است؟

۱/۸ (۲)

۱/۶ (۱)

۱/۲ (۴)

۱/۴ (۳)



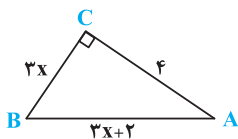
۲- در شکل مقابل، حاصل $\tan \hat{A} + \cot \hat{C}$ کدام است؟

$\sqrt{13}$ (۲)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{13}}{2}$ (۳)



۳- در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، مقدار $\sin \hat{A}$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۱)

$\frac{5}{9}$ (۴)

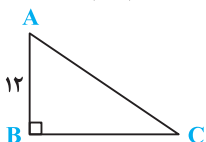
۴- در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اگر $\tan \hat{A} = \frac{3}{4}$ و $AB = 12$ باشد، محیط مثلث کدام است؟

۲۵ (۲)

۳۶ (۱)

۳۵ (۴)

۲۱ (۳)



۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\tan \hat{C} = \frac{5}{12}$ است. مقدار $\cos \hat{B} + \cos \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{13}$ (۲) $\frac{17}{13}$ (۳) $\frac{7}{13}$ (۴) $\frac{12}{13}$

۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$ است. مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB = 2AC$. مقدار $\sin \hat{B}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

درسنامه ۲

نسبت‌های مثلثات زوایای $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ از اهمیت بالایی برخوردار است و در همه‌جا مورد استفاده قرار می‌گیرد، پس حتماً آن‌ها را مطابق جدول زیر حفظ کنید.

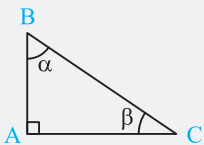
نسبت‌های مثلثاتی \ زاویه	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

مثال حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\tan 45^\circ \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ \cot 45^\circ$$

پاسخ:

$$\tan 45^\circ \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ \cot 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$



نکته اگر جمع زوایای α و β برابر 90° باشد (α و β متمم هم باشند) در این صورت تساوی‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه وجود دارد:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta, & \sin \beta = \cos \alpha \\ \tan \alpha = \cot \beta, & \tan \beta = \cot \alpha \end{cases}$$

مثال دو زاویه 30° و 60° متمم هم‌دیگرند ($30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$)، پس همان طوری که در جدول فوق می‌بینید، داریم:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

نکته

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

مثال حاصل عبارت $\tan 20^\circ \times \tan 70^\circ + \sin 10^\circ - \cos 80^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به ویژگی دو زاویه متمم داریم: $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 20^\circ = \cot 70^\circ$ ، $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 10^\circ = \cos 80^\circ$

با جای‌گذاری تساوی‌های به دست آمده در عبارت خواسته شده داریم:

$$\tan 20^\circ \times \tan 70^\circ + \sin 10^\circ - \cos 80^\circ = \underbrace{\cot 70^\circ \times \tan 70^\circ}_{=1} + \underbrace{\sin 10^\circ - \cos 80^\circ}_{=0} = 1 + 0 = 1$$

آزمون‌های گاج

۸- کدام گزینه صحیح است؟

$2 \sin 60^\circ = \tan 45^\circ$ (۴)

$\tan 60^\circ = 2 \cos 30^\circ$ (۳)

$\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ$ (۲)

$\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = 2$ (۱)

۹- حاصل $1 + \cot^2 60^\circ$ کدام است؟

$2 + \tan^2 45^\circ$ (۴)

$1 + \tan^2 30^\circ$ (۳)

$1 - \tan^2 30^\circ$ (۲)

$1 + \tan^2 45^\circ$ (۱)

۱۰- عبارت $\sin^4 x + \cos^4 x$ به ازای کدام یک از مقادیر زیر برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود؟

30° (۴)

45° (۳)

60° (۲)

90° (۱)

۱۱- مقدار عددی عبارت $(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)$ کدام است؟

صفر (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

۱۲- حاصل عبارت $\frac{\tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \times \frac{1 - \cot^2 60^\circ}{\cot^2 60^\circ + 1}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{16}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۱)

۱۳- اگر $A = \frac{2 \tan 30^\circ + \sin 60^\circ}{\sin^2 45^\circ - \sqrt{3} \cos 30^\circ}$ باشد، آن‌گاه A کدام است؟

$-\frac{7}{3}$ (۴)

-7 (۳)

$-\frac{7}{2}$ (۲)

$-\frac{7}{6}$ (۱)

۱۴- حاصل عبارت $\cot 2^\circ \cot 3^\circ \cot 45^\circ \cot 87^\circ \cot 88^\circ$ کدام است؟

$(\cot 88^\circ)^2$ (۴)

$(\tan 88^\circ)^2$ (۳)

2 (۲)

$(\tan 45^\circ)^2$ (۱)

۱۵- در صورتی که $\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{3}{2}$ باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

1 (۴)

2 (۳)

3 (۲)

4 (۱)

۱۶- اگر $\tan x = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل $\frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x}$ کدام است؟

1 (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

-1 (۲)

صفر (۱)

۱۷- اگر $\tan \theta = 0$ باشد، مقدار $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta}$ کدام است؟

-2 (۴)

2 (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

3 (۱)

۱۸- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ کدام است؟

-4 (۴)

-3 (۳)

1 (۲)

5 (۱)

۱۹- اگر داشته باشیم $3 \cos \hat{A} + 4 \sin \hat{A} = 0$ ، در این صورت $\tan \hat{A} + \cot \hat{A}$ کدام است؟

$\frac{25}{12}$ (۴)

$-\frac{25}{12}$ (۳)

$-\frac{12}{25}$ (۲)

$\frac{12}{25}$ (۱)

۲۰- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC کدام است؟

$6 + 2\sqrt{3}$ (۲)

$2 + 6\sqrt{3}$ (۱)

$4 + 2\sqrt{3}$ (۴)

$2 + 3\sqrt{6}$ (۳)

۲۱- در شکل مقابل، طول ضلع BC کدام است؟

$\frac{16}{\sqrt{3}}$ (۲)

8 (۱)

$\frac{8}{\sqrt{3}}$ (۴)

16 (۳)

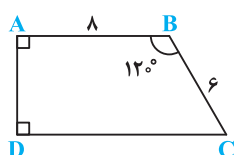
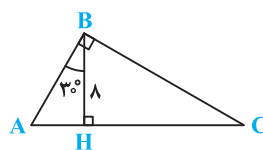
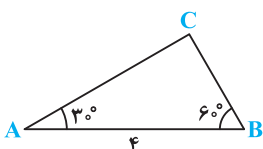
۲۲- در شکل مقابل، محیط دوزنقه ABCD کدام است؟

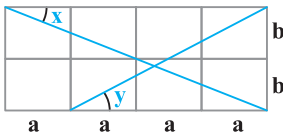
$25 + \sqrt{3}$ (۲)

$25 + 3\sqrt{3}$ (۱)

$24 + \sqrt{2}$ (۴)

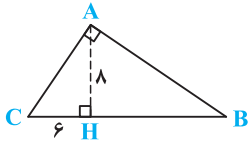
$24 + 4\sqrt{2}$ (۳)





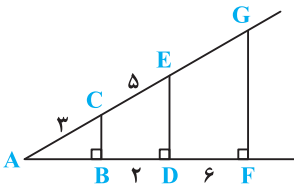
۲۳- در شکل مقابل، طول هر کدام از مستطیل‌ها a و عرض آن‌ها b است. در این صورت $\cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3a}{4b} \tan y$
 (۲) $\frac{3}{4} \tan y$
 (۳) $\frac{3b}{4a} \cot y$
 (۴) $\frac{4}{3} \cot y$



۲۴- با توجه به شکل مقابل، $\cos \hat{B}$ کدام است؟

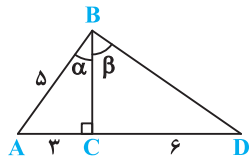
- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) $\frac{3}{5}$
 (۳) $\frac{4}{5}$
 (۴) $\frac{1}{2}$



برگرفته از کتاب درسی

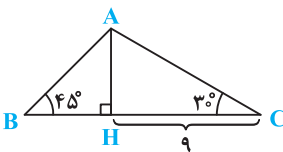
۲۵- با توجه به شکل مقابل، $\sin \hat{G}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{2}{5}$



۲۶- با توجه به شکل مقابل کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
 (۲) $\sin \beta = \frac{6}{\sqrt{52}}$
 (۳) $\tan \hat{A} = \cot \alpha$
 (۴) $\cot \beta = \frac{3}{2}$



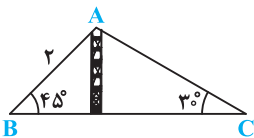
۲۷- در شکل مقابل، طول AB کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$
 (۲) $6\sqrt{6}$
 (۳) $3\sqrt{6}$
 (۴) $6\sqrt{3}$

۲۸- یک آنتن (دکل) توسط دو سیم AB و AC مطابق شکل مهار شده است. در این صورت

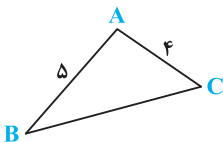
طول BC کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$
 (۲) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
 (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$
 (۴) $3\sqrt{2}$



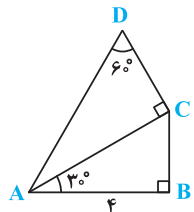
۲۹- در شکل مقابل، اگر $\cos \hat{C} = \frac{3}{4}$ باشد، آن‌گاه $\tan \hat{B}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{7}}{6}$
 (۳) $\frac{\sqrt{14}}{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{14}}{6}$



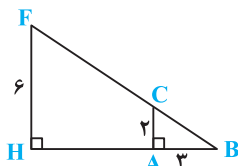
۳۰- در شکل مقابل، طول پاره خط CD کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) ۸
 (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$



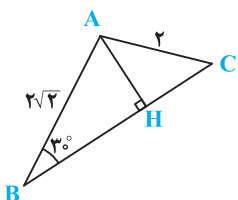
۳۱- در شکل مقابل، اندازه AH چند واحد است؟

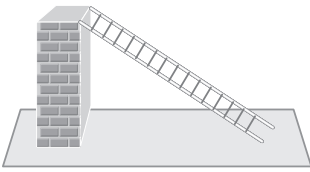
- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷



۳۲- زاویه A در مثلث شکل مقابل، چند درجه است؟

- (۱) ۶۰
 (۲) ۱۰۵
 (۳) ۹۰
 (۴) ۱۲۵





۳۳- نردبانی به طول ۳ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویه نردبان با سطح زمین 30° باشد، ارتفاع دیوار چقدر است؟

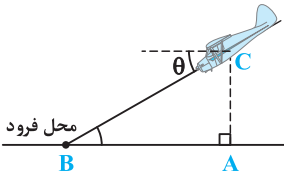
برگرفته از کتاب درسی

- ۶ (۱)
- ۴/۵ (۳)
- ۱/۵ (۲)
- ۵ (۴)

۳۴- هواپیمایی در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با سطح افق θ باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید؟

برگرفته از کتاب درسی

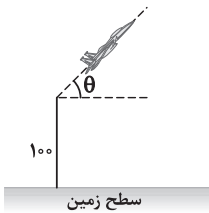
- $2 \tan \theta$ (۱)
- $2 \cot \theta$ (۳)
- $\frac{\sin \theta}{2}$ (۲)
- $\frac{\cot \theta}{2}$ (۴)



۳۵- موشکی مطابق شکل در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح زمین با زاویه θ پرتاب می‌شود. اگر پس از طی ۱۰۰۰ متر با همین زاویه به ارتفاع ۶۰۰ متری از سطح زمین برسد، زاویه پرتاب (θ) چقدر بوده است؟

برگرفته از کتاب درسی

- 45° (۲)
- 60° (۳)
- 30° (۱)
- 5° (۴)



۳۶- شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصله ۲/۵ متری یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر ایستاده است. این شخص چند سانتی‌متر به تیر نزدیک شود تا سایه‌اش ۲ برابر قدش شود؟

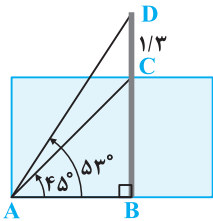
برگرفته از کتاب درسی

- ۱۰ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۴۰ (۴)

۳۷- در داخل حوضچه یک شهر بازی میله‌ای به صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون آب میله ۱/۳ متر باشد و قسمت انتهایی میله با نقطه‌ای در انتهای حوضچه زاویه 53° و قسمت ابتدایی بیرون آب با آن نقطه زاویه 45° بسازد، طول میله کدام است؟

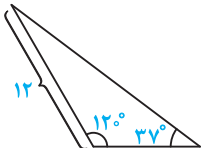
($\tan 53^\circ = \frac{4}{3}$)

- ۲/۳ (۱)
- ۲/۶ (۳)
- ۲ (۲)
- ۳/۹ (۴)



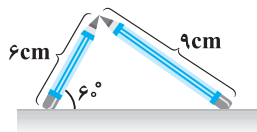
۳۸- شکل کلی کف یک موزه تاریخی به صورت مقابل است. مساحت موزه کدام است؟ ($\tan 37^\circ = \frac{3}{4}$)

- $72 - 18\sqrt{3}$ (۱)
- $72 + 18\sqrt{3}$ (۳)
- $8\sqrt{3} - 6$ (۲)
- $8\sqrt{3} + 6$ (۴)



۳۹- دو مداد به طول‌های ۶ و ۹ سانتی‌متر را به صورت زیر به هم تکیه داده‌ایم. فاصله پای دو مداد از هم روی زمین چند سانتی‌متر است؟

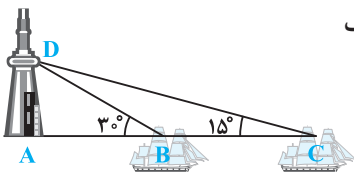
- $3\sqrt{6}$ (۲)
- $3 + 3\sqrt{7}$ (۳)
- $3\sqrt{7}$ (۱)
- $3 + 3\sqrt{6}$ (۴)



۴۰- دو کشتی مطابق شکل، نوری از یک برج مراقبت دریافت می‌کنند. اگر کشتی C نور را با زاویه 15° و کشتی B نور را با زاویه 3° نسبت به خط افق دریافت کنند و فاصله دو کشتی یک کیلومتر باشد، فاصله کشتی C از محل انتشار نور (D) چند کیلومتر است؟

برگرفته از کتاب درسی

- $2 + \sqrt{3}$ (۱)
- $2 + 2\sqrt{3}$ (۳)
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۲)
- $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ (۴)

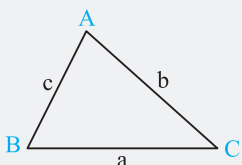


درسنامه ۳

محاسبه مساحت مثلث

اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه بین این دو ضلع معلوم باشد، می‌توان از رابطه‌های زیر مساحت مثلث را محاسبه نمود.

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \quad , \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \quad , \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$



پاسخ‌های تشریحی

۱ ۳ می‌دانیم $W \subseteq Z$ پس $W \cup Z = Z$ می‌شود و چون Z زیرمجموعه W نمی‌باشد، پس $W \cup Z \subseteq W$ غلط و گزینه (۳) جواب تست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) $\mathbb{N} \cup W \stackrel{N \subseteq W}{=} W \subseteq W \checkmark$ (۲) $\mathbb{N} \cap W = \mathbb{N} \subseteq W \checkmark$ (۴) $W \cap Z \stackrel{W \subseteq Z}{=} W \subseteq W \checkmark$

۲ ۳ حاصل تک‌تک گزینه‌ها را می‌یابیم:

(۱) $\mathbb{N} - \mathbb{O} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} - \{1, 3, 5, \dots\} = \{2, 4, 6, \dots\} = E$

(۲) $\mathbb{O} - E = \{1, 3, 5, \dots\} - \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\} = \mathbb{O}$

این دو هیچ اشتراکی ندارند، پس از مجموعه اول چیزی کم نمی‌شود.

(۳) $E - \mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} \stackrel{\text{هیچ عضوی از مجموعه اول وجود ندارد که در } \mathbb{N} \text{ نباشد.}}{\emptyset} \checkmark$

(۴) $W - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

۳ ۳ با بررسی گزینه‌ها باید ببینیم به‌ازای کدام گزینه، $B = \emptyset$ می‌شود:

(۱) $A = W - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

پس B به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \{0\}\} \xrightarrow{x=0} \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow$ این گزینه جواب نیست.

(۲) $B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}\}$

B ، تهی نیست، زیرا مثلاً اگر $x = \frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$ پس این گزینه هم جواب نیست.

(۳) $\mathbb{Z} - W = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} - \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

پس B به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \{\dots, -3, -2, -1\}\}$

به‌ازای هیچ x ای از مجموعه $\{\dots, -3, -2, -1\}$ ، $x^2 < 1$ نمی‌شود. پس $B = \emptyset$ و همین گزینه جواب است.

(۴) $B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}\}$

فقط به‌ازای $x = 0$ از مجموعه $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ ، $x^2 = 0 < 1$ می‌شود و لذا $B = \{0\}$ غیرتهی است.

۴ ۴ ابتدا هر یک از مجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$A = \{11, 13, 15, 17, 19\} \Rightarrow A \cup B = \{11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}$

$B = \{12, 15, 18\}$

$A \cup B$ ، A و B عضو دارند. پس $A \cup B$ دو عضو بیشتر از A دارد.

۴ ۵

مجموعه $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{a}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ بیانگر مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد طبیعی a می‌باشد. زیرا فقط x هایی انتخاب می‌شوند که a بر آن‌ها بخش پذیر باشد.

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{N}\right\} = \text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد } 12 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $\Rightarrow A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ عضو دارد.

$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{18}{x} \in \mathbb{N}\right\} = \text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد } 18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

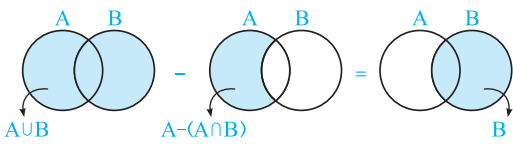
در واقع $A \cap B$ بیانگر شمارنده‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ می‌باشد.

۳ ۶ راه اول:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ و $A \cap B = \{2, 6\}$

$\Rightarrow (A \cup B) - [A - (A \cap B)] = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - [\{2, 3, 4, 6, 7, 8\} - \{2, 6\}]$

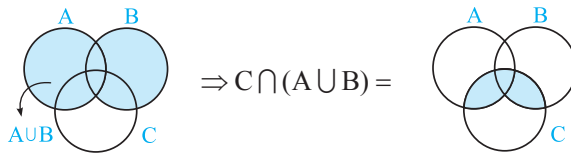
$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{3, 4, 6, 7, 8\} = \{2, 5\}$ چهار عضو دارد.



راه دوم: ابتدا مجموعه خواسته شده را ساده می‌کنیم:
 پس عبارت $(A \cup B) - (A - (A \cap B))$ همان مجموعه $B = \{2, 4, 5, 6\}$ است. لذا ۴ عضو دارد.

۴ ۷

می‌خواهیم مسأله را طوری حل کنیم که روش حل کلی این نوع تست‌ها را خوب یاد بگیریم. ببینید، معلوم است که گزینه‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند جواب باشند، زیرا در گزینه (۲) به علت وجود $A \cup B$ ، جواب باید شامل کل A باشد، در حالی که قسمت سایه‌خورده در شکل فقط بخشی از A را دربرمی‌گیرد. مشابهاً در گزینه (۳) به خاطر وجود $C \cup B$ جواب باید همه C را دربر بگیرد که با توجه به شکل چنین اتفاقی نیفتاده است. هم‌چنین در گزینه (۱)، عبارت $A \cap B$ ، یعنی فقط قسمتی از A باید جواب باشد ولی بخشی از ناحیه سایه‌خورده خارج از A قرار دارد و لذا گزینه (۴) جواب است. ببینید:



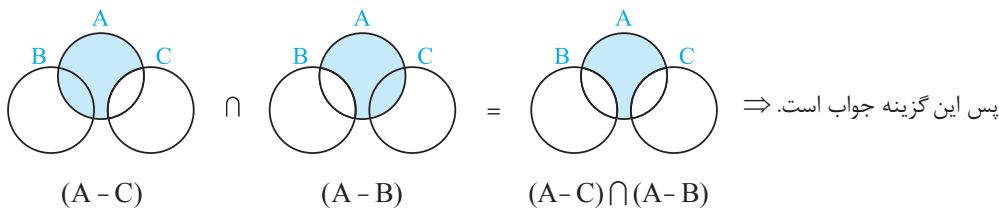
۲ ۸ بررسی گزینه‌ها:

$$A - (B \cap C) \stackrel{\text{با توجه به شکل صورت سؤال}}{B \cap C = \emptyset} = A - \emptyset = A$$

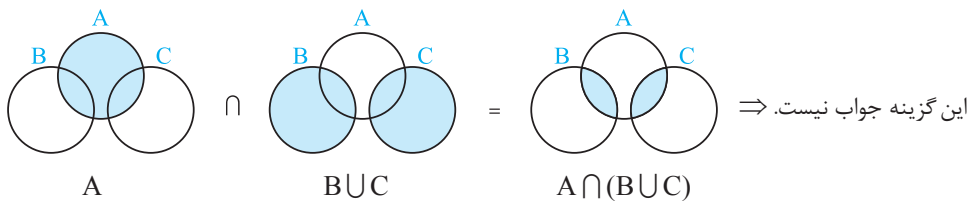
گزینه (۱):

شکل صورت تست، کل A را نشان نمی‌دهد، پس این گزینه جواب نیست.

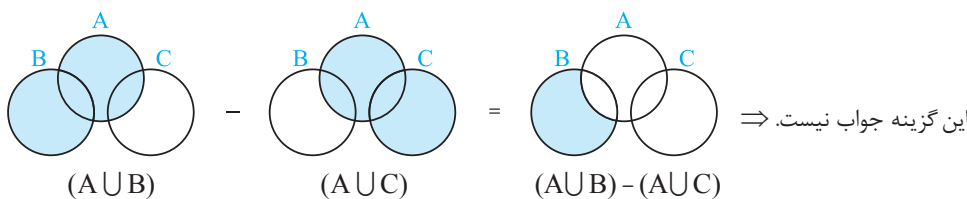
گزینه (۲):



گزینه (۳):



گزینه (۴):



ابتدا اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cup C$ را می‌یابیم: ۲ ۹

$$A \cup B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\} \quad (*)$$

$$A \cup C = \{1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots\} = \{1, 8, 27, 64, 125, \dots\} \quad (**)$$

حال برویم سراغ چیزی که تست از ما خواسته است:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\stackrel{(**), (*)}{=} \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\} \cap \{1, 8, 27, 64, 125, \dots\} = \{1, 64\}$$

از آن‌جا که $\mathbb{R} = [-4, 6] \cup (6, +\infty) \cup (-\infty, 4)$ و اشتراک این دو مجموعه، تهی است، پس $\mathbb{R} - [-4, 6] = (-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$. به عبارت‌ی:

$$(-\infty, 4) \cup (6, +\infty) = \text{شماره خطی} = \mathbb{R} - [-4, 6]$$

تکنه کلمه «و» در مجموعه‌ها معادل اشتراک (\cap) و کلمه «یا» معادل اجتماع (\cup) می‌باشد.

در گزینه (۴) داریم:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ یا } x > 1\} = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 1]$$

اما در سایر گزینه‌ها داریم:

$$\text{معادل «و»} \\ (1) \text{ گزینه (۱): } (-\infty, -2] \cap (1, +\infty) = \emptyset$$

$$\text{معادل «و»} \\ (2) \text{ گزینه (۲): } (-\infty, -2] \cap (1, +\infty) = \emptyset$$

$$\text{معادل «یا»} \\ (3) \text{ گزینه (۳): } (-\infty, -2] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 1)$$

سؤال دانش‌پژوه (نعیمه پولکی): ببخشید، همیشه بگید چرا اشتراک در گزینه‌های (۱) و (۲)، \emptyset شد؟

کهر پاسخ: در دو اشتراک دو بازه یعنی قسمتی که بین هر دو بازه مشترک است. اون دو خط رسم شده هیچ وقت با هم از یک با رد نشدن. مثلاً

$$(1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (1, 3)$$

اگر جواب $(-\infty, 3) \cap (1, +\infty)$ را بخواهیم داریم:

وقتی کلمه «یا» وجود دارد، یعنی باید اجتماع بگیریم.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ یا } x \leq 3\} = (-2, +\infty) \cup (-\infty, 3] = \mathbb{R}$$

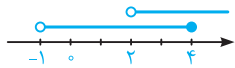
دقت کنید اجتماع برای این \mathbb{R} شد که دو بازه‌ای که اجتماع آن‌ها را می‌خواستیم، کل محور را شامل می‌شوند.

سؤال دانش‌پژوه (حسن بوربور): آقا اجتماع این دو بازه $(-2, 3)$ همیشه؟

کهر پاسخ: در دو بر هرپی بوربور! به به! دیکه پی؟ نه همیشه، اشتراک دو مجموعه رو نفواسته که جواب $(-2, 3)$ بشه، بلکه اجتماع اون‌ها رو فواسته.

بررسی گزینه‌ها: ۴ ۱۳

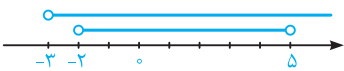
گزینه (۱): این گزینه صحیح است. زیرا:



$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4] \Rightarrow \sqrt{3} \approx 1.7 \notin (2, 4]$$

گزینه (۲): اعداد $\frac{\Delta b}{\gamma} = 2/5b$ و $2b$ هر دو عضو بازه $[b, 3b]$ هستند، پس $\left\{ \frac{\Delta b}{\gamma}, 2b \right\}$ زیرمجموعه $[b, 3b]$ بوده و این گزینه صحیح است.

گزینه (۳): این گزینه صحیح است. زیرا:



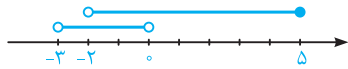
$$(-2, 5) \cup (-3, +\infty) = (-3, +\infty) \Rightarrow 6/022 \times 10^{23} \in (-3, +\infty)$$

در حقیقت $6/022 \times 10^{23}$ عددی خیلی بزرگ و مثبت است و بازه $(-3, +\infty)$ شامل همه اعداد حقیقی مثبت است.

گزینه (۴): نادرست است. زیرا بازه $[-1, 2]$ شامل عدد -1 است که این عدد در بازه $(-1, 2)$ حضور ندارد. پس بازه $[-1, 2]$ نمی‌تواند

زیرمجموعه $(-1, 2)$ باشد.

بررسی گزینه‌ها: ۳ ۱۴



$$(-3, 0) \cup (-2, 5) = (-3, 5)$$

گزینه (۱):



$$(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$$

گزینه (۲):



$$(3, +\infty) \cup (6, 10] = (3, +\infty) \checkmark$$

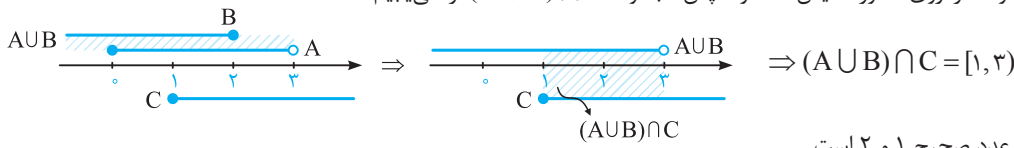
گزینه (۳):



$$(-\infty, 1) \cap [1, +\infty) = \emptyset$$

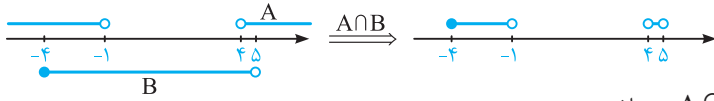
گزینه (۴):

مجموعه‌های A، B و C را روی محور نمایش داده و سپس مجموعه $(A \cup B) \cap C$ را می‌یابیم:



بازه حاصل شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

ابتدا مجموعه‌های $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و $B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty) = [-4, 5)$ را روی محور رسم می‌کنیم و سپس به کمک نمودار، اشتراک A و B را می‌یابیم:



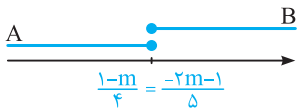
با توجه به گزینه‌ها فقط بازه $[-4, -2]$ زیرمجموعه $A \cap B$ می‌باشد.

ابتدا مجموعه‌های A و B را می‌یابیم:

$$A = \left\{ x \mid 2x + m \leq \frac{m+1}{2} \right\} : 2x + m \leq \frac{m+1}{2} \Rightarrow 2x \leq \frac{m+1}{2} - m \Rightarrow 2x \leq \frac{m+1-2m}{2}$$

$$\Rightarrow 2x \leq \frac{1-m}{2} \Rightarrow x \leq \frac{1-m}{4}$$

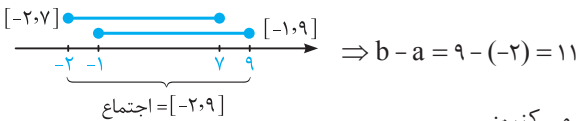
$$B = \{ x \mid m - \delta x \leq 3m + 1 \} : m - \delta x \leq 3m + 1 \Rightarrow m - 3m - 1 \leq \delta x \Rightarrow \frac{-2m-1}{\delta} \leq x$$



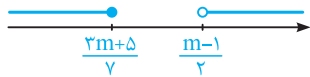
برای آنکه $A \cap B$ فقط یک عضو داشته باشد، به ناچار باید داشته باشیم:

$$\frac{1-m}{4} = \frac{-2m-1}{\delta} \Rightarrow \delta - 5m = -8m - 4 \Rightarrow 3m = -9 \Rightarrow m = -3$$

طبق فرض $[-1, b] \cup [a, 7] = [-2, 9]$ شده است. پس b باید برابر ۹ و a باید برابر -۲ باشد، علت آن را روی محور بیان می‌کنیم:



ابتدا دو مجموعه $(-\infty, \frac{3m+5}{\gamma})$ و $(\frac{m-1}{\gamma}, +\infty)$ را روی محور رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، اگر قرار باشد اجتماع این دو مجموعه، \mathbb{R} (مجموعه اعداد حقیقی) شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{3m+5}{\gamma} \geq \frac{m-1}{\gamma} \Rightarrow 2(3m+5) \geq \gamma(m-1) \Rightarrow 6m+10 \geq \gamma m - \gamma \Rightarrow 1\gamma \geq m$$

ابتدا A_4 و A_3 را تشکیل می‌دهیم:

$$A_4 = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x - 1 < 2^4 \} = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 5 \}$$

$$A_3 = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x - 1 < 2^3 \} = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 9 \}$$

$$\Rightarrow A_4 \cap A_3 = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 5 \} = (1, 5)$$

با توجه به تعریف A_n داریم:

$$A_4 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3} \right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow A_4 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$(A_4 \cup A_6) - A_4 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

ابتدا مجموعه‌های موردنظر را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{\gamma} \right] = [-1, 4] \text{ و } A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{\gamma} \right] = [-2, 3/5]$$

$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{\gamma} \right] = [-5, 2] \text{ و } A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{\gamma} \right] = [-7, 1]$$

$$\{ A_2 \cap A_5 = [-2, 3/5] \cap [-5, 2] = [-2, 2] \}$$

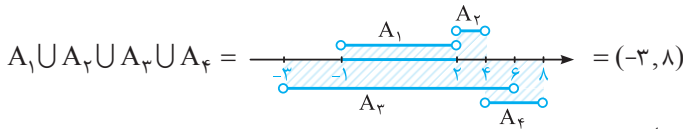
$$\{ A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1] \}$$

$$\Rightarrow (A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = \left[-2, 2 \right] - \left[-1, 1 \right] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

۳ ۲۳

تکته اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $a < b$ ، آنگاه در بازه (a, b) ، $b - a - 1$ ، عدد صحیح، در بازه $[a, b]$ یا $b - a$ ، عدد صحیح و در بازه $[a, b]$ ، $b - a + 1$ ، عدد صحیح وجود دارد.

$$A_1 = ((-1)^1 \times 1, 2(1)) = (-1, 2), A_2 = ((-1)^2 \times 2, 2(2)) = (2, 4), A_3 = ((-1)^3 \times 3, 2(3)) = (-3, 6), A_4 = ((-1)^4 \times 4, 2(4)) = (4, 8)$$



که در این بازه $8 - (-3) - 1 = 11 - 1 = 10$ عدد صحیح وجود دارد.

بررسی گزینه‌ها: ۴ ۲۴

- گزینه (۱): مجموعه اعداد اول یک‌رقمی به صورت $\{2, 3, 5, 7\}$ است که متناهی است.
 گزینه (۲): مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما هم دقیقاً تعداد مشخصی دارد و لذا متناهی است.
 گزینه (۳): تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب، $6/022 \times 10^{23}$ عدد است که با این‌که عدد خیلی بزرگی می‌باشد ولی قابل شمارش بوده و لذا مجموعه موردنظر متناهی است.

سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالاژاده): آقا! آخه تو اینجا هم باید شیمی بلد باشی! آگه ما این عدد را نمی‌دونستیم چی کار کنیم؟

کچر پاسخ: درود بر این درس فونرنت! بیچاره معلم شیمی‌ات. تو در همین هر بدون که تعداد مولکول‌ها همیشه په توی آب په توی هر بایی متناهی. فوب شر!

گزینه (۴): تعداد دایره‌هایی که می‌توان به مرکز مبدأ مختصات رسم کرد نامتناهی است. پس همین گزینه جواب تست است.

بررسی گزینه‌ها: ۴ ۲۵

- گزینه (۱): اگر $B = \mathbb{Q}$ باشد، آنگاه مجموعه A ، تمام اعداد گویای موجود در بازه $(0, 2)$ است که نامتناهی است.
 گزینه (۲): اگر $B = \mathbb{R}$ باشد، آنگاه مجموعه A ، تمام اعداد حقیقی موجود در بازه $(0, 2)$ است که نامتناهی است.
 گزینه (۳): اگر $B = \mathbb{Q}'$ باشد، آنگاه مجموعه A ، تمام اعداد گنگ موجود در بازه $(0, 2)$ است که نامتناهی است.
 گزینه (۴): اگر $B = \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه مجموعه A به صورت $\{1\}$ درمی‌آید که متناهی است و همین گزینه جواب تست است.

بررسی گزینه‌ها: ۳ ۲۶

- گزینه (۱): هر بازه‌ای که ابتدا و انتهایش یکسان نباشند بیانگر مجموعه‌ای نامتناهی است. اگر از این مجموعه یک یا حتی چند عدد برداریم باز هم نامتناهی باقی می‌ماند. پس گزینه (۱) بیانگر مجموعه‌ای نامتناهی است.
 گزینه (۲): اعداد صحیح مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۲۰۰۰ به صورت مقابل هستند:
 $\{0, 3, 6, 9, \dots, 1998, 1995, 1992, \dots, 0\}$
 همان‌طور که می‌بینید تا منفی بی‌نهایت این مضارب ادامه دارند، پس این مجموعه نیز نامتناهی است.
 گزینه (۳): اعداد کسری با مخرج یک که صورتشان اعداد طبیعی باشند، همان اعداد طبیعی هستند (مخرج ۱ عملاً بی‌تأثیر است) پس این گزینه بیانگر اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰۰ می‌باشد که مجموعه‌ای متناهی است.
 گزینه (۴): طبق آموخته‌های سال نهم و با توجه به تعریف مجموعه، جنگل‌های زیبای جهان نمی‌تواند بیانگر یک مجموعه باشد و لذا این گزینه اصلاً مجموعه نیست که بخواهد مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی باشد.

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضیات): آقا به نظر من، شما با طبیعت رابطه خوبی ندارید! آخه چرا جنگل مجموعه نیست!؟

کچر پاسخ: درود بر تو و علاقه‌ات به طبیعت! پیه! مشکل از پنگل نیست، مشکل اینه که عباراتی که دارای صفت هستن معمولاً مجموعه نیستن مثل افراد بلندقد و یا پاق یا همین پنگل‌های زیبا. چون که این صفت‌ها معمولاً از نظر افراد مختلف فرق می‌کنه. مثلاً ممکنه من پنگلی رو زیبا بدونم ولی شما نرونین و چون طبق تعریف کتاب سال قبل، مجموعه‌ها باید بیانگر اشیای کاملاً مشخص باشن، پس این عبارت بیانگر یک مجموعه نیست.

بررسی گزینه‌ها: ۲ ۲۷

- گزینه (۱): با توجه به بازه باز $(1, 7)$ باید کوچک‌ترین عضو پس از ۱ را بیابیم. اما هیچ عدد حقیقی‌ای بزرگ‌تر از عدد ۱ را نمی‌توان در این بازه یافت که بتوان ادعا کرد کوچک‌ترین عضو این بازه است. پس این بازه کوچک‌ترین عضو ندارد.

تکته بازه‌های باز، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ندارند.

- گزینه (۲): برای اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۷، ۷ کوچک‌ترین عضو به حساب می‌آید و لذا این گزینه جواب تست است.
 گزینه (۳): این مجموعه بزرگ‌ترین عضو دارد (عدد ۳ بزرگ‌ترین عضو آن است)، ولی کوچک‌ترین عضو ندارد.

مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی است، زیرا:

۴ ۲۸

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

متناهی: $A \cap B$: گزینه (۱)

نامتناهی

متناهی: $B - (A \cup B) \stackrel{B \subseteq A \cup B}{=} \emptyset$: گزینه (۳)

$$A = \{3, 6, 9, \dots\} \Rightarrow \text{نامتناهی}$$

$$B = \{-99, -98, \dots, 98, 99\} \Rightarrow \text{متناهی}$$

نامتناهی $\Rightarrow A - B$: گزینه (۱)

نامتناهی

متناهی $\Rightarrow A \cap B$: گزینه (۳)

نامتناهی

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

نامتناهی $\Rightarrow A - B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} - \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} = \{\text{اعداد فرد غیر اول}\} = \{1, 9, 15, \dots\}$: گزینه (۱)

متناهی و غیر تهی $\Rightarrow B - A = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} - \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{2\}$: گزینه (۲)

نامتناهی $\Rightarrow A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\} = \{\text{اعداد اول به غیر از ۲}\}$: گزینه (۳)

گزینه (۴): $A - (A \cup B) \stackrel{A \subseteq (A \cup B)}{=} \emptyset$

پس گزینه (۲) جواب تست است.

بررسی گزینه‌ها:

۳ ۳۱

گزینه (۱): A و B نامتناهی هستند و داریم:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

این مجموعه برابر \mathbb{N} نیست. زیرا مثلاً $1 \notin A \cup B$.

گزینه (۲): A مجموعه‌ای متناهی است، پس این گزینه نمی‌تواند جواب باشد.

گزینه (۳): اعداد طبیعی مضرب ۲ و ۳ همان اعداد طبیعی مضرب ۶ هستند.

$$A = \{6, 12, 18, \dots\} \text{ و } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, \dots\} \Rightarrow A \cup B = \mathbb{N} \text{ و } B \text{ نامتناهی}$$

گزینه (۴): A مجموعه‌ای متناهی است، پس این گزینه نمی‌تواند جواب باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۲ ۳۲

گزینه (۱): اگر A متناهی باشد، لزوماً هر زیرمجموعه آن هم قطعاً متناهی خواهد بود. پس این گزینه درست است.

گزینه (۲): اگر A نامتناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر A مجموعه اعداد طبیعی باشد، B می‌تواند مجموعه

متناهی $B = \{1\}$ یا مجموعه نامتناهی $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$ باشد.

گزینه (۳): واضح است وقتی زیرمجموعه یک مجموعه نامتناهی است، پس خود آن مجموعه هم قطعاً نامتناهی خواهد بود. پس این گزینه

درست است.

گزینه (۴): فرض کنید B مجموعه متناهی مانند $\{1\}$ باشد چون $B \subseteq A$ است، مجموعه A را می‌توان هم به صورت متناهی

مانند $A = \{1, 2\}$ در نظر گرفت و هم به صورت نامتناهی مانند $A = \mathbb{N}$ در نظر گرفت. پس این گزینه هم درست است.

با توجه به صورت تست داریم:

$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 8\} \Rightarrow A' = U - A = \{4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow 5 \text{ عضو دارد. } A'$$

۲ ۳۳

۳ ۳۴

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

مجموعه مرجع: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ شامل عضوهایی از مجموعه مرجع U است که آن عضوها در مجموعه $A \cup B$ حضور ندارند. پس داریم:

$$(A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$$

از طرفی $C' = \{3, 4, 5, 6\}$ است. پس مجموعه C برابر می‌شود با:

$$C = (C')' = \{1, 2, 7, 8, 9\}$$

بنابراین:

$$(A \cup B)' \cap C = \{5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{7, 9\}$$

۴ ۳۵

$$A' = U - A = \underbrace{\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}}_U - \underbrace{\{5, 6, 7, \dots, n-1, n\}}_A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow 4 \text{ عضو دارد.}$$

سؤال دانش‌پژوه (ملیکا پورفلاح): بخشید A مگه $\{n, n-1, \dots, 5\}$ نبود؟

کج پاسخ: بچه! مگه A ای که ما نوشتیم همون نیست؟! آگه فوب دقت کنی، من فقط ترتیب اعداد داخل مجموعه رو عوض کردم. یعنی A رو از ته نوشتم. همین.

۲ ۳۶

$$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) \stackrel{A \cup B \subseteq U}{=} A \cup B$$

برای حل و ساده‌سازی عبارت داده‌شده، باید یک عملیات که شبیه فاکتورگیری است را بلد باشید. با هم ببینیم:

۲ ۳۷

$$(A \cap B') \cup (B \cap A) \stackrel{A \cap B = B \cap A}{=} (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A$$

ابتدا علامت «-» را به « \cap » تبدیل می‌کنیم. داریم:

۲ ۳۸

$$(A \cap B) - A = (A \cap B) \cap A' = A \cap A' \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

۲ ۳۹

$$(B - A) \cup A = (B \cap A') \cup A = (B \cup A) \cap (A' \cup A) = (B \cup A) \cap U \stackrel{B \cup A \subseteq U}{=} B \cup A \stackrel{A \subseteq B}{=} B$$

ابتدا مجموعه $A - (B - A)$ را کمی ساده کرده و سپس متمم آن را به دست می‌آوریم:

۱ ۴۰

$$(B - A)' - A = (B \cap A')' \cap A' = (B' \cup A) \cap A' = (B' \cap A') \cup (A \cap A')$$

$$\stackrel{A \cap A' = \emptyset}{=} (B' \cap A') \cup \emptyset = (B' \cap A') = (B \cup A)'$$

بنابراین مجموعه $(B - A)' - A$ برابر با $(B \cup A)'$ است و متمم آن، مجموعه $A \cup B$ است.

۴ ۴۱

با توجه به آن‌که اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ است، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینه $B' \subseteq A' : B' - A = B' \cap A' = B'$ ✓

(۲) گزینه $B' \subseteq A' : A' - B = A' \cap B' = B'$ ✓

(۳) گزینه $A \subseteq B : A - B' = A \cap B = A$ ✓

(۴) گزینه $A \subseteq B : B - A' = B \cap A = A \neq B$

سؤال کمی سخت است. باید به خوبی از خواص اشتراک و اجتماع استفاده نماییم:

۲ ۴۲

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = [(\overbrace{A \cap A'}^{\emptyset}) \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (\overbrace{B \cap B'}^{\emptyset})]$$

$$= [\emptyset \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \emptyset] = (A \cap B) \cup (B \cap A') = (B \cap A) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B$$