



۸	فصل اول استدلال
۱۲	فصل دوم مجموعه و ضرب دکارتی
۱۷	فصل سوم گراف
۲۹	فصل چهارم نظریه‌ی اعداد
۴۵	فصل پنجم رابطه‌ها و افراز
۵۷	فصل ششم آنالیز ترکیبی و اصل شمول و عدم شمول
۶۳	فصل هفتم احتمال
۸۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۹۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
۱۲۵	پاسخ‌نامه‌ی کلیدی



### مجموعه

مفهومش را در اول راهنمایی خوانده‌ایم و هر سال به بهانه‌ای یادآوری شده است، بیایید فقط نمادهایش را یادآوری کنیم:

تعداد اعضای  $A$ :  $|A|$  یا  $n(A)$  عضو  $A$ :  $A \in B$  زیرمجموعه‌ی  $A$ :  $A \subseteq B$

هر مجموعه  $2^n$  تا زیرمجموعه دارد که به این صورت حساب می‌شود:

مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d\}$  را در نظر بگیرید، می‌گوییم در تشکیل زیرمجموعه‌ها، هر عضو دو حالت دارد: باشد یا

$a$  ,  $b$  ,  $c$  ,  $d$   
 $\downarrow$  ,  $\downarrow$  ,  $\downarrow$  ,  $\downarrow$

نباشد، پس:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16 \text{ حالت}$$

پس اگر مجموعه  $n$  تا عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌ها می‌شود  $2^n$ . در بین این زیرمجموعه‌ها  $\emptyset$  و خود مجموعه

مهم‌اند. در مجموعه‌ی  $A$  به تمام زیرمجموعه‌ها به جز خود  $A$  زیرمجموعه‌ی سَره یا محض گفته می‌شود.

درباره‌ی مجموعه‌ی  $A = \{a, \{a\}, \{b\}, b\}$ ، چندتا از جملات زیر درست است؟

الف) این مجموعه ۱۵ زیرمجموعه‌ی سره دارد. (ب)  $\{a\} \subset A$

ج)  $\{\{a\}\} \in A$  (د)  $\gamma$  زیرمجموعه دارد که فاقد عضو  $\{a\}$  است.

ه) کلاً  $16 = 2^4$  زیرمجموعه داریم که در سره‌ها  $A$  را حساب نمی‌کنیم، پس می‌شود ۱۵ تا، بنابراین

«الف» درست است. قسمت «ب» هم درست است. چون در  $A$  عضو  $\{\{a\}\}$  وجود ندارد، پس  $\{\{a\}\}$

یک زیرمجموعه از  $A$  است نه یک عضو، پس «ج» نادرست است. در قسمت «د»، بیایید زیرمجموعه‌ها

را حساب کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & , & \{a\} & , & \{b\} & , & b \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{حالت ۲} & & \text{حالت ۱} & & \text{حالت ۲} & & \text{حالت ۲} \\
 (\text{نباید باشد}) & & (\text{نباید باشد}) & & & & 
 \end{array}$$

یعنی ۸ زیرمجموعه‌ی فاقد  $\{a\}$  داریم.  $2 \times 1 \times 2 \times 2 = 8$

**مجموعه‌ی توانی**  $(P(A))$ ، اگر تمام زیرمجموعه‌ی یک مجموعه را در یک مجموعه‌ی جدید قرار دهیم، اسم این مجموعه

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

می‌شود مجموعه‌ی توانی، مثلاً اگر  $A = \{1, 2\}$  باشد، داریم:

از این بحث‌ها کلاً ۲ تیپ سؤال در کنکور مطرح می‌شود.

**تیپ ۱ (عضو و زیرمجموعه)**: اگر  $A = \{2\}$ ،  $B = \{2, \{2\}\}$  و  $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$  کدام رابطه نادرست است؟

(سراسری ۸۶)  $B \in C$  (۴)  $A \in B$  (۳)  $A \subset B$  (۲)  $B \subset C$  (۱)

**استراتژی**: اعضای مانند  $\{2, \{2\}\}$  را با  $a$  و  $b$  و ... نام‌گذاری کنید که حواستان باشد یک عضو بیشتر نیستند!

⊖ **گزینه ی ۱** حواستان باشد  $\{2\}$  و  $\{2, \{2\}\}$  هر کدام یک عضو هستند، (فقط قیافه ی بنده خداها یک جور است!) که ما درستش می کنیم، می نویسیم  $a = \{2\}$  و  $b = \{2, \{2\}\}$  و مجموعه ها را یک بار دیگر با اینها باز نویسی می کنیم:  
 $A = \{2\}$      $B = \{2, a\}$      $C = \{a, b\}$   
 حالا مشخص است که  $A$  یکی از زیرمجموعه های  $B$  است و در عین حال مجموعه ی  $A$  همان  $a$  یعنی عضو  $B$  هم هست. از طرفی  $B$  که همان  $b$  است عضو  $C$  است، اما معلوم است که هیچ کدام از زیرمجموعه های  $C$  برابر با  $B$  نیست، یعنی گزینه ی (۱) غلط است.

**تیب ۲ (تعداد زیرمجموعه ها)** چند زیرمجموعه از مجموعه  $\{a, b, \{b, a\}, \{a, b\}\}$  عضو  $\{a, b\}$  را ندارد؟

(۱) ۴    (۲) ۶    (۳) ۸    (۴) ۹ (سراسری ۹۱)

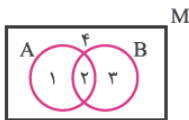
**استراتژی** هر عضو دو حالت دارد اما عضوهایی که باید باشند یا نباید باشند فقط یک حالت دارند.

⊖ **گزینه ی ۱** اولاً  $\{b, a\}$  و  $\{a, b\}$  با هم فرق ندارند، یعنی مجموعه ۳ عضوی است:  $\{a, b, \{b, a\}\}$ . در تشکیل زیرمجموعه ها  $a$  و  $b$  هر کدام ۲ حالت دارند (باشند یا نباشند) ولی  $\{a, b\}$  نباید باشد، پس یک حالت بیشتر ندارد. پس تعداد زیرمجموعه ها  $2 \times 2 \times 1$  یعنی ۴ تا است.

### جبرمجموعه ها

در سؤال های جبر مجموعه، هیچ فرمولی نمی خواهیم یاد بگیریم، فقط نگاه کنید که اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم را چگونه تعریف می کنیم:

دو مجموعه  $A$  و  $B$  درون مجموعه ی مرجع  $M$  نمایش داده شده اند:



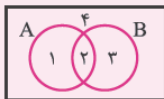
$$\begin{aligned} A' &= \{3, 4\} & A \cap B &= \{2\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3\} & A - B &= \{1\} & B - A &= \{3\} \end{aligned}$$

خب، حالا نگاه کنید که تست سراسری ۸۹ را چگونه حل می کنیم.

⊖ **مجموعه ی  $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$  برابر کدام است؟**

(۱)  $B - A$     (۲)  $B$     (۳)  $A'$     (۴)  $\emptyset$

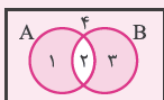
⊖ نمودار ون را رسم و ناحیه ها را عددگذاری می کنیم:



$$\begin{aligned} A - B = \{1\} &\Rightarrow (A - B)' = \{2, 3, 4\} \\ A \cup B = \{1, 2, 3\} &, \quad A' = \{3, 4\} \end{aligned}$$

حالا برویم سراغ خواسته ی سؤال:  $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$   
 عدد مشترک ۳ است که همان  $B - A$  است.

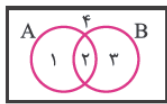
فقط چون خبر داریم که تفاضل متقارن ( $\Delta$ ) را ممکن است فراموش کرده باشید،  $\Delta$  هم از روی شکل می شود فقط  $A$  یا فقط  $B$ ، یعنی:



$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\}$$

تیپ ۳ (جبر مجموعه‌ها)، اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند،  $(A \cap B') - (B - A)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $B'$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $A \cap B$  (۴)  $A - B$  (فارج از کشور ۹۱)



$$A \cap B' = \{1, 2\} \cap \{1, 4\} = \{1\}$$

$$B - A = \{3\}$$

استراتژی، نمودار ون بکشید و ناحیه‌ها را عددگذاری کنید!

⇒ گزینه‌ی «۴»

مجموعه‌ی  $\{1\} - \{3\}$  هم که همان  $\{1\}$  است، یعنی  $A - B$ .

☛ قوانین دمرگان را هم بلد باشیم، بد نیست:

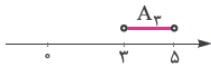
①  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

②  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

### چهره‌های دیگر مجموعه

الف) گزاره‌نما، گاهی مجموعه را به صورت یک عبارت ریاضی بیان می‌کنند، مثلاً می‌نویسند  $A = \{2k \mid k = 1, 2, 3\}$ . در این جا اعضای  $A$ ، به صورت  $2k$  هستند که  $k$  باید از بین  $1, 2, 3$  انتخاب شود. پس اعضای  $A$ ،  $2(1), 2(2)$  و  $2(3)$  هستند، یعنی  $A = \{2, 4, 6\}$ .

ب) نمایش بازه‌ای، بعضی وقت‌ها مجموعه، بازه‌ای از اعداد حقیقی است، مثلاً می‌گویند مجموعه‌ی  $A_i = (i, i + 2)$  یعنی اگر  $A_3$  را خواستند، جای  $i$  بگذارید  $3$ ، پس  $A_3 = (3, 5)$ . حواستان باشد که  $A$  یک بازه است پس می‌شود روی محور نمایشش داد:

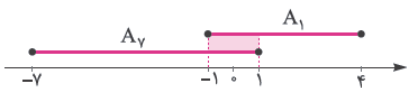


تیپ ۴ (مجموعه‌های بازه‌ای)، اگر  $A_i = [-i, \frac{9-i}{4}]$  و  $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی  $(A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$  به کدام صورت است؟ (سراسری ۹۲)

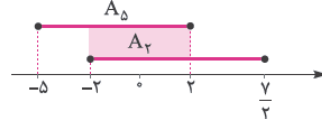
- (۱)  $(-2, -1) \cup (1, 2)$  (۲)  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  (۳)  $[-1, 1]$  (۴)  $\emptyset$

⇒ گزینه‌ی «۱» اول  $A_1, A_7, A_3, A_5$  را بیابیم:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= [-1, \frac{9-1}{4}] = [-1, 2] \\ A_7 &= [-7, \frac{9-7}{4}] = [-7, 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 \cap A_7 = [-1, 1]$$



$$\left. \begin{aligned} A_3 &= [-3, \frac{9-3}{4}] = [-3, \frac{3}{2}] \\ A_5 &= [-5, \frac{9-5}{4}] = [-5, 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_3 \cap A_5 = [-2, 2]$$



خب حالا برویم ببینیم، سؤال چه چیزی خواسته:  $(A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$

### ضرب دکارتی

ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  یک مجموعه‌ی جدید است که تمام عضوهای زوج مرتب‌هایی هستند که مؤلفه‌ی

اول آن‌ها از  $A$  و مؤلفه‌ی دوم آن‌ها از  $B$  می‌آید:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

مثلاً ضرب دکارتی  $\{1, 2, 3\}$  در  $B = \{a, b\}$  می‌شود:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

دیدید که وقتی  $A$ ،  $3$  عضو و  $B$ ،  $2$  عضو بود  $A \times B$  یک مجموعه‌ی  $6$  عضوی شد. به صورت کلی داریم:

(تعداد اعضای  $B \times A$  = تعداد اعضای  $A \times B$ )  $|A \times B| = |A| \times |B|$

① اگر مجموعه‌ی  $A$  در خودش ضرب شود به جای  $A \times A$  می‌نویسیم  $A^2$  و همواره داریم:  
 $|A^2| = |A|^2$  ویژگی‌ها،

① اگر  $A \times B = C \times D$  باشد، می‌توان نتیجه گرفت که  $B = D$  و  $A = C$  و در حالت خاص تنها راه این‌که  $A \times B = B \times A$  شود، تساوی  $A$  و  $B$  است.

② ضرب دکارتی روی اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن دو مجموعه، از چپ و راست توزیع‌پذیر است.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \qquad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

③ اگر  $A$  یا  $B$  تهی باشد، حاصل ضرب دکارتی آن‌ها تهی می‌شود.

④ اگر  $A, B, C, D$  و  $D$  ناتهی و اگر  $A \times B \subseteq C \times D$  باشد، آن‌گاه  $A \subseteq C$  و  $B \subseteq D$  است. پس اگر  $A \times B \subseteq B \times A$  باشد،  $A = B$  است. ( $A, B \neq \emptyset$ )

⑤ اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{3, 4\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی  $A \times B - A \times C$  چند عضوی است؟

⑥ اول از  $A$  فاکتور بگیریم و بعد تعداد اعضا را حساب کنیم:

$$|A \times B - A \times C| = |A \times (B - C)| = |A| \times |B - C|$$

خب  $A$  که ۳ عضوی است، یعنی  $|A| = 3$  و  $B - C = \{4\}$  یک عضوی است. بنابراین  $|B - C| = 1$  در نتیجه مجموعه‌ی مذکور  $3 \times 1 = 3$  عضوی است.

تیپ ۵ (قوانین ضرب دکارتی): اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی غیر تهی و  $(A \times B) \subseteq (B \times A)$  باشد، آن‌گاه  $A \Delta B$  برابر کدام است؟ (فارج از کشور ۸۵)

$$A \cup B \quad (4) \qquad A \cap B \quad (3) \qquad A \quad (2) \qquad \emptyset \quad (1)$$

استراتژی: دقت کنید که اگر  $A \times B \subseteq B \times A$  باید  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$  باشد.

⑥ گزینه‌ی «۱» از این‌که  $A \times B \subseteq B \times A$  نتیجه می‌شود که  $A = B$  است، خُب پس داریم:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \left( \underbrace{A \cap C}_{\text{اشتراک}} \right) \times \left( \underbrace{B \cap D}_{\text{اشتراک}} \right)$$

مجموعه‌های دوم مجموعه‌های اول

مهم‌ترین ویژگی ضرب دکارتی،

این ویژگی ۲ تا حالت خاص مهم دارد که تقریباً تمام سؤال‌های کنکور از آن‌ها می‌آید:

$$① |(A \times B) \cap (B \times A)| = (A \cap B)^2 = |A \cap B|^2 \qquad ② |A^2 \cap B^2| = |A \cap B|^2$$

⑤ اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 7\}$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی  $(A \times B) \cap (B \times A)$  چند عضوی است؟

⑥ اولاً  $A \cap B = \{2, 3\}$ ، پس  $|A \cap B| = 2$ ، عضوی است.  $|A \cap B|^2 = 2^2 = 4$ .

البته با توجه به این روابط می‌توانیم تعداد اعضای  $\Delta$  و تفاضل و اجتماع دو ضرب دکارتی را بیابیم، مثلاً داریم:

$$|A^2 \cup B^2| = |A^2| + |B^2| - |A^2 \cap B^2| = |A|^2 + |B|^2 - |A \cap B|^2$$

$$|A \times B - B \times A| = |A \times B| + |B \times A| - |(A \times B) \cap (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2$$

تیپ ۶ (اشتراک ضرب دکارتی)، اگر  $A = \{2k-1 | k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$  و  $B = \{k \in \mathbb{Z} | k-3 \leq 2\}$ ، آن گاه مجموعه‌ی

(سراسری ۹۲)

$(A \times B) \cap (B \times A)$  چند عضو دارد؟

۱۶ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

استراتژی:  $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$

⇒ گزینه‌ی «۳» با توجه به این که  $|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2$  باید اعضای  $A$  و  $B$  را بنویسیم تا تعداد اعضای

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$A \cap B$  مشخص شود:

$$|k-3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq k-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq k \leq 5 \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

پس  $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ، پس  $(A \times B) \cap (B \times A)$ ،  $3^2 = 9$  عضوی است.

تیپ ۷ (اعمال دیگر روی ضرب دکارتی)، اگر  $|(A \times B) \cup (B \times A)| = 8$  و  $|(A \times B) - (B \times A)| = 4$  باشد،

$|A \times B|$  کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

استراتژی: ضرب دکارتی یک مجموعه است و تمام قوانین مجموعه‌ها در ضرب دکارتی وجود دارد، پس اجتماع و تفاضل دوتا ضرب دکارتی یعنی اجتماع و تفاضل دو مجموعه.

⇒ گزینه‌ی «۲» فکر کنید  $A \times B = M$  و  $B \times A = N$  است، حالا دوتا مجموعه داریم که می‌خواهیم برایشان اجتماع

و تفاضل بنویسیم:

$$|(A \times B) \cup (B \times A)| = |A \times B| + |B \times A| - |(A \times B) \cap (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2 = 8$$

$$|(A \times B) - (B \times A)| = |A \times B| - |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A||B| - |A \cap B|^2 = 4$$

$$|A||B| = 8 - 4 = 4 \Rightarrow |A \times B| = |A||B| = 4$$

که از تفاضل دو رابطه به دست می‌آید:

آزمون (۳) - مجموعه و ضرب دکارتی

۲۷- اگر  $A, B$  و  $C$  سه مجموعه غیر تهی باشند، به طوری که داشته باشیم  $A \subseteq B$ ، آن گاه مجموعه  $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$  کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱)  $B$       (۲)  $A \cap C$       (۳)  $A$       (۴)  $A \cap C'$

۲۸- اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 2^m \leq n\}$ ، آن گاه مجموعه  $A_4 \cap A_3$  چند زیرمجموعه دارد؟ (فارج از کشور ۸۸)

- (۱) ۸      (۲) ۱۶      (۳) ۳۲      (۴) ۳۶

۲۹- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه  $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$  برابر کدام است؟ (سراسری ۸۹)

- (۱)  $A' - B'$       (۲)  $(A - B)'$       (۳)  $A'$       (۴)  $\emptyset$

۳۰- اگر  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$  و  $B = \{a, b\}$ ، مجموعه  $A - \{B\}$  چند زیرمجموعه سره‌ی غیر تهی دارد؟

- (۱) ۲      (۲) ۷      (۳) ۶      (۴) ۱۴

۳۱- اگر  $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq \lambda - i\}$ ، مجموعه  $\bigcup_{i=1}^{\lambda} A_i - \bigcap_{i=1}^{\lambda} A_i$  چند عضو دارد؟ (فارج از کشور ۸۷)

- (۱) ۱۳      (۲) ۱۴      (۳) ۱۵      (۴) ۱۶

۳۲- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی و  $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ ، آن گاه مجموعه  $A - B$  برابر کدام است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $B - A$  (۴)  $A \Delta B$  (فارج از کشور ۸۵)

۳۳- اگر  $B' \subseteq A'$  باشد، مجموعه  $(A \Delta B) \cup (A \cap B)$  برابر کدام مجموعه است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $B$  (۳)  $A'$  (۴)  $B'$  (فارج از کشور ۸۵)

۳۴- مجموعه  $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$  برابر کدام است؟

- (۱)  $B - A$  (۲)  $B$  (۳)  $A'$  (۴)  $\emptyset$  (سراسری ۸۸)

۳۵- اگر  $A = \{x \in \mathbb{N}, 5 < x^2 < 50\}$  و  $B = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 4\}$  باشند، تعداد زیرمجموعه‌های  $(A \times B) \cap (B \times A)$

کدام است؟ (سراسری ۹۳)

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۳۶- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی و  $A \cap B' = B \cap A'$ ، آن گاه مجموعه  $(A \Delta B) - A$  کدام است؟

- (۱)  $\emptyset$  (۲)  $A$  (۳)  $B$  (۴)  $B'$  (فارج از کشور ۹۰)

۳۷- متمم مجموعه  $(A - (A - B)) \cup (A \cap B)'$  کدام است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $B'$  (۳)  $A' \cup B'$  (۴)  $\emptyset$  (فارج از کشور ۸۹)

۳۸- اگر مجموعه  $A$  دارای ۵ عضو و مجموعه  $B$  دارای ۶ عضو و مجموعه  $A \cap B$  دارای ۲ عضو باشد،

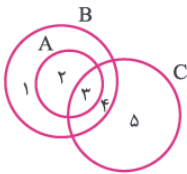
مجموعه  $(A \cap B') \times (A \cup B)'$  چند عضو دارد؟ (سراسری ۸۷)

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۳۹- اگر  $n$  عدد طبیعی و  $A_n$  بازه  $((-1)^n \cdot n, 2n)$  باشد، چند عدد صحیح به  $\bigcup_{n=1}^4 A_n$  تعلق دارد؟ (سراسری ۸۳)

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱





۲۷- گزینه‌ی «۴»

نمودار ون را ببینید:

**راه اول:** دقت کنید که چون  $A \subseteq B$  است، مجموعه‌ی  $A$  را درون  $B$  رسم کردیم.

در این نمودار ون،  $B - C$  ناحیه‌های ۱ و ۲ است، پس  $A \cap (B - C)$  فقط ناحیه‌ی ۲ می‌شود.  $A \cap B \cap C$  هم

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = \{2\} - \{3\} = \{2\}$$

ناحیه‌ی ۳ است. بنابراین:

با توجه به گزینه‌ها، ناحیه‌ی ۲ به صورت  $A \cap C'$  در گزینه‌ی (۴) آورده شده است.

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = (A \cap B \cap C') - (A \cap B \cap C)$$

**راه دوم:** از جبر مجموعه‌ها برویم:

$$\frac{A \subseteq B}{A \cap B = A} \rightarrow (A \cap C') - (A \cap C) \xrightarrow{\text{جدا از هم هستند } A \cap C \text{ و } A \cap C'} = A \cap C'$$

❗ وقتی دو مجموعه جدا از هم هستند، تفاضل آن‌ها برابر مجموعه‌ی اولی می‌شود.

۲۸- گزینه‌ی «۳» اول  $A_3$  و  $A_4$  را بنویسیم. دقت کنید که به جای  $\pi$ ، ۳ و ۴ می‌گذاریم:

$$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -4, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

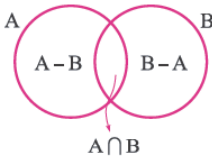
$$\Rightarrow A_4 \cap A_3 = A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

حالا اشتراک:

پس اشتراک آن‌ها ۵ عضو دارد، بنابراین  $2^5 = 32$  زیرمجموعه خواهد داشت.

۲۹- گزینه‌ی «۱» طبق قانون جذب  $[A \cup (A \cap B)]$  می‌شود  $A$ . در قسمت دوم هم  $(B \cap A) \cup (B - A)$

می‌شود  $B$ . ببینید:



پس خواسته‌ی سؤال  $A' \cap B$  است که به صورت  $A' - B'$  یا  $B - A$  می‌توانیم بیانش کنیم.

۳۰- گزینه‌ی «۳»

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\}$$

اول  $A - \{B\}$  را می‌سازیم:

پس مجموعه‌ای ۳ عضوی است، بنابراین  $2^3 - 2 = 6$  زیرمجموعه‌ی سره‌ی ناتهی دارد.

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 7\} = \{-1, \dots, 7\}$$

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m \leq 6\} = \{-2, \dots, 6\}$$

$$\vdots$$

$$A_8 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -8 \leq m \leq 0\} = \{-8, \dots, 0\}$$

چندتا از این مجموعه‌ها را می‌بینیم:

۳۱- گزینه‌ی «۲»

$$\bigcap_{i=1}^8 A_i = \{-1, 0\} \text{ و } \bigcup_{i=1}^8 A_i = \{-8, \dots, 7\}$$

$$\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i = \{-8, \dots, 7\} - \{-1, 0\} \Rightarrow 16 - 2 = 14$$

عضو دارد

۳۲- گزینه‌ی «۱» همان  $(A \times B) \cap (B \times A)$  است. پس طبق صورت سؤال  $(A \cap B)^2 = \emptyset$  و

بنابراین  $\emptyset = A \cap B$ ؛ یعنی  $A$  و  $B$  جدا از هم هستند و داریم:  $A - B = A$ .

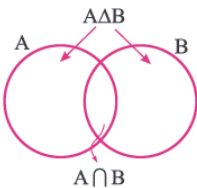
❗ در دو مجموعه‌ی جدا از هم، تفاضل برابر مجموعه‌ی اولی است.

۳۳- گزینه‌ی «۲» اولاً  $B' \subseteq A'$  یعنی  $A \subseteq B$ .



$$\left. \begin{aligned} A \Delta B &= \{\} \Delta \{1, 2\} = \{2\} \\ A \cap B &= A = \{1\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{\} \cup \{2\} = \{1, 2\} = B$$

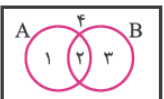
راه اول:



راه دوم: ثانیاً  $(A \Delta B) \cup (A \cap B)$  می‌شود  $(A \cup B)$ . پس داریم:

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = (A \cup B) \xrightarrow{A \subseteq B} = B$$

۳۴- گزینه‌ی «۱» راه اول: از ناحیه‌ها در نمودار ون کمک بگیریم:



$$\underbrace{(A - B)}_1 \cap \underbrace{(A \cup B)}_{1, 2, 3} \cap \underbrace{A'}_{3, 4} = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\} = B - A$$

**راه دوم:** حل عادی را هم ببینید:

$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به } \cap} (A \cap B)' \cap (A \cup B) \cap A' \xrightarrow{\text{دمرگان}} (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{از UB فاکتور بگیریم}} \underbrace{((A' \cap A) \cup B)}_{\emptyset} \cap A' = B \cap A' = B - A$$

مجموعه‌های A و B را تشکیل می‌دهیم: **۳۵- گزینه‌ی ۳**

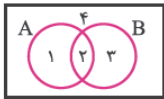
$$\left. \begin{aligned} A &= \{3, 4, 5, 6, 7\} \\ B &= \{1, 4, 7, 10\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{4, 7\}$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2 = |A \cap B|^2 \xrightarrow{|A \cap B|=2} = 4 \quad . 2^4 = 16 \text{ برابر است با: } 2^4 = 16$$

**۳۶- گزینه‌ی ۱**

$$(A \Delta B) - A = (A \Delta A) - A = \emptyset - A = \emptyset \quad \text{پس } A = B \text{ داریم. صورت سؤال می‌گوید } A - B = B - A$$

**راه اول:** **۳۷- گزینه‌ی ۴**



$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 3, 4\} \Rightarrow A - B = \{1\} \Rightarrow A - (A - B) = \{2\}$$

$$\Rightarrow A - B = \{2\} \Rightarrow A - (A - B) = \{2\}$$

متمم مجموعه‌ی جهانی، مجموعه‌ی تهی است.

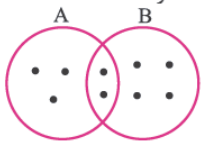
**راه دوم:**  $A - (A - B)$  می‌شود  $A \cap B$ ، پس باید حاصل  $(A \cap B) \cup (A \cap B)'$  را به دست آوریم که اجتماع یک مجموعه با متمم خودش برابر با  $U$  است، بنابراین پاسخ  $U' = \emptyset$  است.

**۳۸- گزینه‌ی ۳** اول  $A \cap B'$  و  $(A \cup B)'$  را ساده‌تر می‌کنیم.

$$A \cap B' = A - B$$

$$(A \cup B)' \xrightarrow{\text{دمرگان}} A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

پس  $(A - B) \times (B - A)$  را می‌خواهیم. با توجه به نمودار ون،  $A - B$  و  $B - A$  دارای ۳ و ۴ عضوند:



$$|A| = 5 \text{ و } |B| = 6 \Rightarrow |(A - B) \times (B - A)| = |A - B| \times |B - A| = 3 \times 4 = 12$$

**۳۹- گزینه‌ی ۳** مجموعه‌های  $A_1$  تا  $A_4$  را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1, 2) \\ A_2 &= (2, 4) \\ A_3 &= (-3, 6) \\ A_4 &= (4, 8) \end{aligned} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^4 A_i = (-3, 8)$$

۱۰ عدد صحیح در بازه‌ی  $(-3, 8)$  وجود دارد.