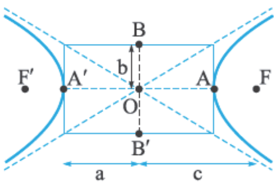
فهرست

معرفی اولیه‌ی هذلولی

① F و F' کانون‌های هذلولی هستند و فاصله‌ی FF' که برابر ۲c است را فاصله‌ی کانونی گوییم.



② A و A' رئوس (کانونی) و فاصله‌ی AA' که برابر ۲a است را قطر هذلولی گوییم.

③ کم‌ترین فاصله‌ی نقاط روی دو شاخه‌ی هذلولی برابر ۲a است.

④ با توجه به شکل روبه‌رو مشخص است که هذلولی دارای دو مجانب مایل است.

⑤ محل برخورد مجانب‌های هذلولی، مرکز هذلولی است.

⑥ اگر از رئوس A و A' عمودی بر محور کانونی رسم کنیم تا مجانب‌ها را قطع کند، مستطیلی تشکیل می‌شود که محوری ناکانونی (BB') با طول ۲b برای هذلولی ایجاد می‌کند.

⑦ مساحت مستطیل ایجادشده توسط مجانب‌های هذلولی برابر با ۴ab است (طول و عرض مستطیل عبارت‌اند از: ۲a و ۲b) و محیط مستطیل $۴(a+b)$ است.

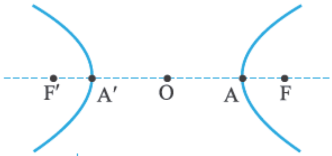
⑧ در مستطیل فوق، قطرها، مجانب‌های هذلولی هستند و طول قطرها برابر ۲c (فاصله‌ی کانونی هذلولی) است.

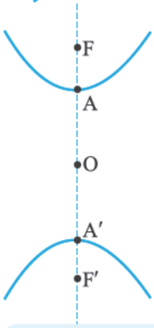
⑨ همان‌گونه که در شکل مشخص است، در هذلولی $c>a$ و $c>b$ است (در مورد مقایسه‌ی a و b چیزی نمی‌توان گفت).

⑩ در هذلولی یک رابطه‌ی مهم بین a، b و c وجود دارد که در اکثر موارد به کمک ما می‌آید: $c^۲-a^۲=b^۲$

معادلات هذلولی

الف) معادله‌ی کلاسیک (استاندارد)





۱) هذلولی افقی به مرکز $O(\alpha,\beta)$: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

(قطر هذلولی و محور کانونی هم‌راستا با محور x ها هستند.)

۲) هذلولی قائم به مرکز $O(\alpha,\beta)$: $\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$

(قطر هذلولی و محور کانونی هم‌راستا با محور y ها هستند.)

راهبردحل مسئله

تشخیص نوع هذلولی (در معادله‌ی استاندارد)

هذلولی افقی $\Leftarrow$ ضریب $x^2 > 0$ هذلولی قائم $\Leftarrow$ ضریب $y^2 > 0$

دقت! در هذلولی افقی، a^2 زیر x^2 و b^2 زیر y^2 و در هذلولی قائم، a^2 زیر y^2 و b^2 زیر x^2 است.

ب) معادله‌ی گسترده، معادله‌ی به شکل $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ با شرط $AB<0$ می‌تواند نمایش یک هذلولی باشد.

۱) افقی یا قائم بودن هذلولی از روی معادله‌ی گسترده مشخص نیست و باید پس از استانداردکردن (مربع کامل کردن و ...) نوع هذلولی را تشخیص داد.

۲) برای به دست آوردن مرکز هذلولی از روی معادله‌ی گسترده، یک بار از معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم (x مرکز به دست می‌آید) و یک بار نسبت به y مشتق می‌گیریم (y مرکز به دست می‌آید):

$$\begin{cases} F'_x=0 \rightarrow \text{مرکز } x:\alpha \\ F'_y=0 \rightarrow \text{مرکز } y:\beta \end{cases}$$

۳) معادله‌ی گسترده به شکل فوق ممکن است نمایش هذلولی یا دو خط متقاطع باشد. اگر $O(\alpha,\beta)$ را درون معادله‌ی $F(x,y): Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ قرار دهیم، آن‌گاه:

$$\begin{cases} F(\alpha,\beta)\neq 0 \rightarrow \text{هذلولی} \\ F(\alpha,\beta)=0 \rightarrow \text{دو خط متقاطع} \end{cases}$$

ج) معادله‌ی پارامتری (مثلثاتی) هذلولی،

از حرکت نقاطی مانند نقاط زیر، معادله‌ی هذلولی حاصل می‌شود:

$$M_1\left(\frac{1}{\cos\theta},\tan\theta\right) ، M_2\left(\tan\theta,\frac{1}{\cos\theta}\right) ، M_3\left(\alpha+\frac{m}{\cos\theta},\beta+n\tan\theta\right) ، M_4\left(\alpha+m\cot\theta,\beta-\frac{n}{\sin\theta}\right)$$

با توجه به فرمول‌های مثلثاتی $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ و $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ به چگونگی تبدیل مکان‌های هندسی زیر به هذلولی دقت کنید!

$$1)\begin{cases} x=-1+\dfrac{2}{\cos\theta} \\ y=2+3\tan\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=\dfrac{2}{\cos\theta} \\ y-2=3\tan\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \begin{cases} (x+1)^2=\dfrac{4}{\cos^2\theta} \\ (y-2)^2=9\tan^2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{(x+1)^2}{4} \\ \tan^2\theta=\dfrac{(y-2)^2}{9} \end{cases}$$

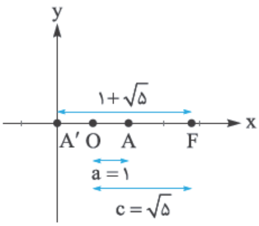
$$\xrightarrow{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}} 1+\frac{(y-2)^2}{9}=\frac{(x+1)^2}{4} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$
نمایش یک هذلولی افقی به مرکز $(-1,2)$

$$2)\begin{cases} x=-2+\cot\theta \\ y=1-\dfrac{3}{\sin\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=\cot\theta \\ y-1=\dfrac{-3}{\sin\theta} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \begin{cases} (x+2)^2=\cot^2\theta \\ (y-1)^2=\dfrac{9}{\sin^2\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cot^2\theta=(x+2)^2 \\ \dfrac{1}{\sin^2\theta}=\dfrac{(y-1)^2}{9} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}} 1+(x+2)^2=\frac{(y-1)^2}{9} \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{9}-(x+2)^2=1$$
نمایش یک هذلولی قائم به مرکز $(-2,1)$

تست ۳۷: نقاط $A(2,0)$ و $A'(0,0)$ دو رأس و $F(1+\sqrt{5},0)$ یکی از کانون‌های هذلولی است. معادله‌ی این هذلولی کدام است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۹۰)*

۱) $y^2=4(x^2-2x)$ ۲) $y^2=2(x^2-2x)$ ۳) $x^2=4(y^2-2y)$ ۴) $x^2=2(y^2-2y)$



پاسخ گزینه‌ی «۱» نقاط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم (چون عرض دو نقطه‌ی A و A' ثابت است، پس هذلولی افقی است). می‌دانیم O وسط AA' است، پس: $O(1,0)$ و $a=1$. در هذلولی رابطه‌ی $c^2-a^2=b^2$ برقرار است، پس:

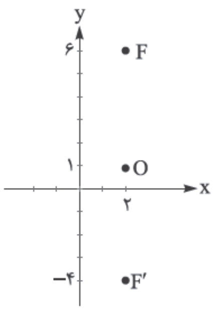
$$5-1=b^2 \Rightarrow b^2=4$$

معادله‌ی هذلولی: $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y-0)^2}{4}=1 \xrightarrow{\times 4} 4(x-1)^2-y^2=4$

$$\Rightarrow 4x^2-8x+4-y^2=4 \Rightarrow y^2=4x^2-8x \Rightarrow y^2=4(x^2-2x)$$

تست ۳۸: قدرمطلق تفاضل فواصل نقطه‌ی متحرک $M(x,y)$ از دو نقطه‌ی ثابت $(2,-4)$ و $(2,6)$ همواره برابر ۶ واحد است. این متحرک با کدام عرض، خط به معادله‌ی $x=5$ را قطع می‌کند؟ *(خارج از کشور تجربی ۹۳)*

۱) $1\pm\frac{15}{4}$ ۲) $1\pm 4\sqrt{2}$ ۳) $2\pm\frac{15}{4}$ ۴) $2\pm 3\sqrt{2}$



پاسخ گزینه‌ی «۱» در تعریف هذلولی داشتیم! «مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت به نام کانون (یعنی دو نقطه‌ی داده‌شده در مسئله F و F' هستند) به فاصله‌ی $2a$ (یعنی $2a$ برابر ۶) است.» اگر دو نقطه را در دستگاه مختصات رسم کنیم، داریم: (بدون رسم هم می‌توانیم بگوییم طول دو نقطه ثابت است، پس FF' در راستای محور y ها است؛ در نتیجه هذلولی قائم است اما رسم از خطاهای احتمالی جلوگیری می‌کند!) O وسط FF' است، پس: $O(2,1)$ و $c=5$. داشتیم $2a=6$، پس $a=3$.
در هذلولی همواره رابطه‌ی $c^2-a^2=b^2$ برقرار است، پس: $25-9=b^2 \Rightarrow b^2=16$

معادله‌ی هذلولی: $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1 \xrightarrow[\text{را قطع کند}]{\text{باید خط } x=5} \frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(5-2)^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{9}-\frac{9}{16}=1$

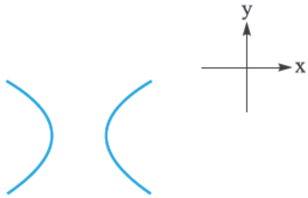
$$\Rightarrow \frac{(y-1)^2}{9}=\frac{25}{16} \Rightarrow (y-1)^2=\frac{9\times 25}{16} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \begin{cases} y-1=\dfrac{3\times 5}{4} \Rightarrow y=1+\dfrac{15}{4} \\ y-1=-\dfrac{3\times 5}{4} \Rightarrow y=1-\dfrac{15}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ عرض نقاط قاطع: $y=1\pm\frac{15}{4}$

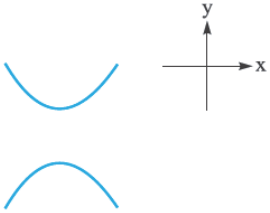
تست ۳۹: هر یک از دو شاخه‌ی هذلولی به معادله‌ی $x^2+ax-4y^2+4=0$ محور y ها را در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌مقادیر a به کدام صورت است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۸۷)*

۱) $|a|<2$ ۲) $|a|>2$ ۳) $|a|<4$ ۴) $|a|>4$

پاسخ گزینه‌ی «۳»



در هذلولی افقی، هر دو شاخه‌ی هذلولی محور x ها را در یک نقطه قطع می‌کنند.



در هذلولی قائم، هر دو شاخه‌ی هذلولی محور y ها را در یک نقطه قطع می‌کنند.

با توجه به این‌که هر یک از شاخه‌های هذلولی محور y ها را در یک نقطه قطع کرده است، پس هذلولی قائم است.

معادله‌ی داده‌شده را استاندارد می‌کنیم:

$$(x^2+ax)-4y^2+4=0 \Rightarrow \left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right)-4y^2=-4 \Rightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=\frac{a^2}{4}-4$$

در هذلولی قائم، ضریب y^2 مثبت است، پس باید مقدار $\frac{a^2}{4}-4$ منفی باشد تا وقتی بر آن تقسیم می‌کنیم، ضرایب x^2 و y^2 از نظر علامت، قرینه شوند:

$$\frac{a^2}{4}-4<0 \Rightarrow \frac{a^2}{4}<4 \Rightarrow a^2<16 \Rightarrow |a|<4$$

تست ۴۰: مساحت بین دو دایره یکی به قطر فاصله‌ی دو رأس و دیگری به قطر فاصله‌ی دو کانون هذلولی به معادله‌ی $9x^2-4y^2-18x-8y=31$ کدام است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۹۱)*

۱) 4π ۲) 5π ۳) 6π ۴) 9π

پاسخ گزینه‌ی «۴» ابتدا معادله‌ی هذلولی را استاندارد می‌کنیم و سپس سراغ خواسته‌ی مسئله می‌رویم!

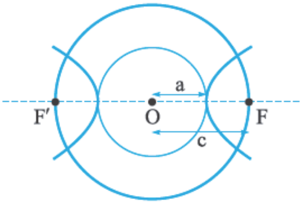
$$9x^2-18x-4y^2-8y=31 \Rightarrow 9(x^2-2x)-4(y^2+2y)=31 \Rightarrow 9((x-1)^2-1)-4((y+1)^2-1)=31$$

$$\Rightarrow 9(x-1)^2-4(y+1)^2=36 \xrightarrow{\div 36} \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1 \xrightarrow{\text{هذلولی افقی}} \begin{cases} a^2=4 \Rightarrow a=2 \\ b^2=9 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

در هذلولی رابطه‌ی $c^2-a^2=b^2$ برقرار است، پس:

$$c^2-4=9 \Rightarrow c^2=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$$

براساس اطلاعات مسئله باید به مرکز هذلولی دو دایره رسم کنیم. قطر یکی از دایره‌ها، فاصله‌ی دو رأس یعنی $۲a$ است (دایره‌ای به مرکز O و شعاع a) و قطر دایره‌ی دیگر، فاصله‌ی دو کانون یعنی $۲c$ است (دایره‌ای به مرکز O و شعاع c).



$c=\sqrt{۱۳}$ مساحت دایره‌ای به شعاع $=\pi(\sqrt{۱۳})^۲=۱۳\pi$

$a=۲$ مساحت دایره‌ای به شعاع $=\pi(۲)^۲=۴\pi$

مساحت بین دو دایره $=۱۳\pi-۴\pi=۹\pi$

تست ۴۱: هذلولی به معادله‌ی $۵y^۲-۴x^۲-۲۰y=۰$ مفروض است. معادله‌ی یک بیضی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۴)*

۱) $۵y^۲+۹x^۲-۲۰y=۲۵$ ۲) $۵y^۲+۹x^۲-۱۰y=۳۶$

۳) $۴y^۲+۵x^۲-۱۶y=۴$ ۴) $۹y^۲+۵x^۲-۳۶y=۹$

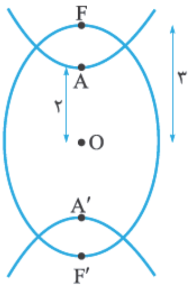
پاسخ گزینه‌ی «۱» معادله‌ی هذلولی را استاندارد می‌کنیم و سپس براساس خواسته‌های مسئله معادله‌ی بیضی را می‌نویسیم:

$$۵(y^۲-۴y)-۴x^۲=۰ \Rightarrow ۵((y-۲)^۲-۴)-۴x^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۵(y-۲)^۲-۴x^۲=۲۰ \xrightarrow{\div ۲۰} \frac{(y-۲)^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۵}=۱ \xrightarrow{\text{هذلولی قائم}} \begin{cases} O(۰,۲) \\ a^۲=۴ \\ b^۲=۵ \end{cases}$$

در هذلولی رابطه‌ی $c^۲-a^۲=b^۲$ برقرار است، پس: $c^۲-۴=۵ \Rightarrow c^۲=۹ \Rightarrow c=۳$

با توجه به شکل، مرکز هذلولی و مرکز بیضی یکی است و بیضی قائم است.



در بیضی $a=۳$ و $c=۲$ است. با قراردادن a و c در رابطه‌ی $a^۲-c^۲=b^۲$ داریم:

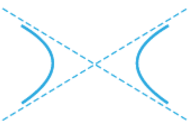
$$۹-۴=b^۲ \Rightarrow b^۲=۵$$

$$\begin{cases} O(۰,۲) \\ a^۲=۹ \\ b^۲=۵ \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی بیضی}: \frac{x^۲}{۵}+\frac{(y-۲)^۲}{۹}=۱ \xrightarrow{\times ۴۵} ۹x^۲+۵(y-۲)^۲=۴۵$$

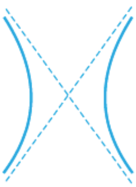
$$\Rightarrow ۹x^۲+۵y^۲-۲۰y=۲۵$$

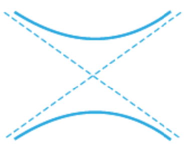
خروج از مرکز هذلولی

$e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی گوییم. چون در هذلولی $c>a$ است، پس همواره $e>۱$ می‌باشد.



اگر e به یک نزدیک شود، شاخه‌های هذلولی به هم نزدیک می‌شوند (هذلولی بسته می‌شود).





اگر e به سمت ∞ برود، شاخه‌های هذلولی از هم دور می‌شوند (هذلولی باز می‌شود).

راهبرد حل مسئله

برای به دست آوردن خروج از مرکز هذلولی (با توجه به شرایط مسئله) از یکی از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $e = \frac{c}{a}$

۲) $e = \sqrt{۱ + \frac{b^{۲}}{a^{۲}}}$ (کافی است در فرمول شماره‌ی ۱ از رابطه‌ی $c^{۲} - a^{۲} = b^{۲}$ استفاده کنیم و به جای c، $\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ قرار دهیم.)

اگر معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی داده شده بود، باید آن را استاندارد کنیم و از یکی از فرمول‌های بالا، خروج از مرکز را به دست آوریم.

تست ۴۲: خروج از مرکز هذلولی به معادله‌ی $x^{۲} - ۲ax - \frac{۱}{۲}y^{۲} = ۱$ کدام است؟ *(خارج از کشور تجربی ۹۱)*

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱ + a^{۲}}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» معادله‌ی هذلولی را استاندارد می‌کنیم و سپس خروج از مرکز آن را به دست می‌آوریم:

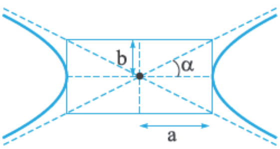
$$((x-a)^{۲} - a^{۲}) - \frac{۱}{۲}y^{۲} = ۱ \Rightarrow (x-a)^{۲} - \frac{y^{۲}}{۲} = a^{۲} + ۱ \xrightarrow{\div (a^{۲}+۱)} \frac{(x-a)^{۲}}{a^{۲}+۱} - \frac{y^{۲}}{۲(a^{۲}+۱)} = ۱$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{۱ + \frac{۲(a^{۲}+۱)}{a^{۲}+۱}} = \sqrt{۱+۲} = \sqrt{۳}$$

مجانب‌های هذلولی (شیب، معادله و زاویه‌ی بین مجانب‌ها)

۱) **شیب مجانب‌ها:** می‌دانیم $\tan\alpha$ = شیب، بنابراین با توجه به شکل به راحتی شیب مجانب‌ها در هذلولی افقی و قائم به دست می‌آید (در هر هذلولی شیب دو مجانب قرینه‌ی هم هستند).

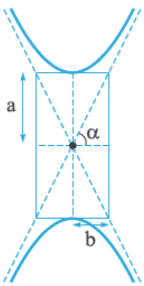
الف) شیب مجانب‌ها در هذلولی افقی:



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \text{شیب} = \frac{b}{a}$$

$$\boxed{\text{شیب مجانب‌های هذلولی افقی} = \pm\frac{b}{a}}$$

ب) شیب مجانب‌ها در هذلولی قائم:



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \text{شیب} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\text{شیب مجانب‌های هذلولی قائم} = \pm\frac{a}{b}}$$

راهبردحل مسئله

شیب مجانب‌ها در معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی

برای به دست آوردن شیب مجانب‌ها از روی معادله‌ی گسترده، عبارات درجه ۲ را مساوی صفر قرار می‌دهیم و سپس y را برحسب x می‌نویسیم. ضریب x، شیب مجانب‌ها را به ما می‌دهد. یعنی اگر معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی به صورت $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ باشد، آن‌گاه:

$$Ax^2+By^2=0 \Rightarrow By^2=-Ax^2 \Rightarrow y^2=-\frac{A}{B}x^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} y=\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}x$$

$$\boxed{\text{شیب مجانب‌های هذلولی در معادله‌ی گسترده}=\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}}$$

۲ معادله‌ی مجانب‌ها

الف نوشتن معادله‌ی مجانب‌ها از روی معادله‌ی استاندارد:

معادله‌ی هذلولی قائم: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ (جذر)

معادله‌ی مجانب‌ها: $\frac{y-\beta}{a}\pm\frac{x-\alpha}{b}=0$

معادله‌ی هذلولی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ (جذر)

معادله‌ی مجانب‌ها: $\frac{x-\alpha}{a}\pm\frac{y-\beta}{b}=0$

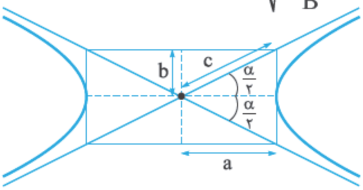
ب نوشتن معادله‌ی مجانب‌ها از روی معادله‌ی گسترده:

برای نوشتن معادله‌ی مجانب (که معادله‌ی یک خط است)، یک نقطه و شیب نیاز داریم. مرکز هذلولی روی مجانب است (مرکز هذلولی محل برخورد مجانب‌ها است) و آن را با مشتق نسبت به x و y به دست می‌آوریم. شیب مجانب‌ها هم که $\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}$ بود، پس معادله‌ی مجانب‌ها، معادله‌ی خطی است که از $O(\alpha,\beta)$ گذشته و شیب آن $\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}$ است:

معادله‌ی مجانب‌ها: $y-\beta=\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}(x-\alpha)$

۳ زاویه‌ی بین مجانب‌ها

زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی با توجه به شکل، به راحتی قابل محاسبه است. اگرزاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی α باشد، آن‌گاه:



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\sin^{-1}\frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{\text{زاویه‌ی بین مجانب‌ها}=2\sin^{-1}\frac{b}{c}}$$

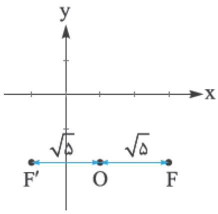
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\cos^{-1}\frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{\text{زاویه‌ی بین مجانب‌ها}=2\cos^{-1}\frac{a}{c}}$$

$$\xrightarrow[\text{e: خروج از مرکز هذلولی}]{e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{e}=\frac{a}{c}} \boxed{\text{زاویه‌ی بین مجانب‌ها}=2\cos^{-1}\frac{1}{e}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\tan^{-1}\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\text{زاویه‌ی بین مجانب‌ها}=2\tan^{-1}\frac{b}{a}}$$

تست۴۳: در هذلولی به کانون‌های $F(۱+\sqrt{۵},-۲)$ و $F'(۱-\sqrt{۵},-۲)$ فاصله‌ی دو رأس آن برابر ۲ واحد است. معادله‌ی مجانب آن با شیب منفی کدام است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۹۳)*

۱) $۲y+x=۰$ ۲) $y+۲x=۰$ ۳) $y+۲x=۱$ ۴) $۲y+x=-۳$



پاسخ گزینه‌ی «۲» با توجه به این‌که عرض دو نقطه‌ی F و F' ثابت است، پس FF' در راستای محور xها است، بنابراین هذلولی، افقی است.

مرکز، وسط FF' است، پس: $O(۱,-۲)$ و $c=\sqrt{۵}$.

در صورت مسئله گفته شده فاصله‌ی دو رأس برابر ۲ است، یعنی: $۲a=۲ \Rightarrow a=۱$

از رابطه‌ی $c^۲-a^۲=b^۲$، b را به دست می‌آوریم: $۵-۱=b^۲ \Rightarrow b=۲$

شیب مجانب‌ها در هذلولی افقی برابر $\pm\frac{b}{a}$ است، پس: $\text{شیب مجانب‌ها}=\pm\frac{۲}{۱}$

حال معادله‌ی مجانب‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{مرکز}: O(۱,-۲) \\ \text{شیب مجانب‌ها}=\pm۲ \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی مجانب با شیب منفی}: y+۲=-۲(x-۱) \quad \text{یا} \quad y+۲x=۰$$

تست۴۴: نقطه‌ی $M(-۲,۱)$ محل تلاقی مجانب‌های هذلولی به معادله‌ی $۴x^۲+ay^۲+bx+۲y+۱۱=۰$ است. معادله‌ی مجانب آن با شیب مثبت کدام است؟ *(سراسری تجربی ۸۹)*

۱) $۲y=x+۴$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=۲x+۵$ ۴) $y=۴x+۹$

پاسخ گزینه‌ی «۳» محل برخورد مجانب‌ها، مرکز هذلولی است، بنابراین $M(-۲,۱)$ مرکز هذلولی است. اگر از معادله نسبت به x و y مشتق بگیریم، می‌توانیم مرکز هذلولی را به دست آوریم و از آن‌جا مقادیر مجهول یعنی a و b قابل محاسبه است.

$$\begin{cases} F'_x=۰ \Rightarrow ۸x+b=۰ \Rightarrow x=\frac{-b}{۸}=-۲ \Rightarrow b=۱۶ \\ F'_y=۰ \Rightarrow ۲ay+۲=۰ \Rightarrow y=\frac{-۲}{۲a}=\frac{-۱}{a}=۱ \Rightarrow a=-۱ \end{cases}$$

حال برای به دست آوردن شیب مجانب‌ها، عبارات درجه ۲ معادله را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۴x^۲-y^۲=۰ \Rightarrow y^۲=۴x^۲ \Rightarrow y=\pm۲x \Rightarrow \text{شیب مجانب‌ها}=\pm۲$$

با داشتن شیب مجانب‌ها و یک نقطه (مرکز هذلولی)، معادله‌ی مجانب با شیب مثبت را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} O(-۲,۱) \\ \text{شیب مثبت}=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی مجانب}: y-۱=۲(x+۲) \quad \text{یا} \quad y=۲x+۵$$

تست۴۵: اگر زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی ۶۰° باشد، خروج از مرکز هذلولی کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۲

پاسخ گزینه‌ی «۲»

$$\text{زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی}=۲\cos^{-۱}\frac{۱}{e} \Rightarrow ۶۰^\circ=۲\cos^{-۱}\frac{۱}{e} \Rightarrow \cos^{-۱}\frac{۱}{e}=۳۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos} \cos(\cos^{-۱}\frac{۱}{e})=\cos۳۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{e}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow e=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

نوشتن معادله‌ی هذلولی با داشتن معادله‌ی مجانب‌ها و یک نقطه

اگر معادله‌ی مجانب‌های هذلولی به صورت $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ باشد، معادله‌ی هذلولی به صورت $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k$ خواهد بود.

با داشتن یک نقطه از هذلولی و قراردادن آن در معادله‌ی فوق، k به دست می‌آید.

تست ۴۶: دو خط به معادله‌های $y=-2x$ و $y=2x+4$ مجانب‌های یک هذلولی و $M(\frac{3}{2},5)$ یکی از نقاط آن است. فاصله‌ی دو کانون این هذلولی کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{5}$

پاسخ گزینه‌ی «۴» معادله‌ی هذلولی عبارت است از: $(y+2x)(y-2x-4)=k$

اگر نقطه‌ی $(\frac{3}{2},5)$ را در معادله‌ی بالا قرار دهیم، معادله‌ی هذلولی به دست می‌آید:

$$(5+(2\times\frac{3}{2}))(5-(2\times\frac{3}{2})-4)=k \Rightarrow 8\times(-2)=k \Rightarrow k=-16$$

بنابراین معادله‌ی هذلولی عبارت است از: $(y+2x)(y-2x-4)=-16$

اگر معادله را مرتب و سپس استاندارد کنیم، فاصله‌ی کانونی به راحتی به دست می‌آید:

$$\text{معادله‌ی هذلولی}: y^2-2xy-4y+2xy-4x^2-8x=-16 \Rightarrow y^2-4y-4x^2-8x=-16$$

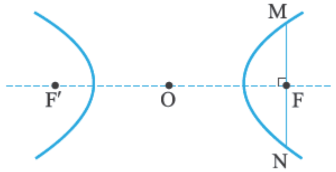
$$\xrightarrow{\text{مربع کامل}} ((y-2)^2-4)-4((x+1)^2-1)=-16$$

$$\Rightarrow (y-2)^2-4(x+1)^2=-16 \xrightarrow{\div(-16)} \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=16 \end{cases} \xrightarrow{c^2-a^2=b^2} c^2-4=16 \Rightarrow c^2=20 \Rightarrow \text{فاصله‌ی کانونی}=2c=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$$

طول وتر کانونی هذلولی

اگر خطی از کانون هذلولی (F یا F') عمود بر محور کانونی (FF') رسم کنیم تا هذلولی را در نقاط M و N قطع کند، پاره‌خط ایجادشده یعنی MN را وتر کانونی هذلولی گوییم.



راهبرد حل مسئله

طول وتر کانونی هذلولی از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

① $\text{طول وتر کانونی}=\frac{2b^2}{a}$

② $\text{طول وتر کانونی}=2b\sqrt{e^2-1}$

تست ۴۷: در هذلولی به معادله‌ی $3x^2-4y^2-6x-9=0$، طول وتری از آن، گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۳)*

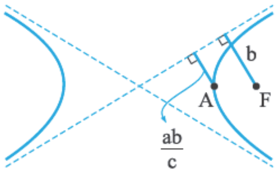
۱) 1 ۲) $\sqrt{7}$ ۳) 3 ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ گزینه‌ی «۳» مسئله از ما طول وتر کانونی هذلولی را می‌خواهد، پس باید معادله را استاندارد کنیم، a و b را به دست آوریم و در فرمول قرار دهیم:

$$۳x^۲-۶x-۴y^۲-۹=۰ \Rightarrow ۳(x^۲-۲x)-۴y^۲-۹=۰ \Rightarrow ۳((x-۱)^۲-۱)-۴y^۲-۹=۰ \Rightarrow ۳(x-۱)^۲-۴y^۲=۱۲$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} \frac{(x-۱)^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۳}=۱ \Rightarrow \begin{cases} a^۲=۴ \\ b^۲=۳ \end{cases} \Rightarrow \text{طول وتر کانونی}=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times۳}{۲}=۳$$

فاصله‌ی کانون و رأس از خط مجانب هذلولی



(۱) فاصله‌ی کانون از هر مجانب برابر است با: b

(◎) حاصل‌ضرب فواصل دو کانون از خط مجانب برابر است با: $b^۲$

(۲) فاصله‌ی رأس از هر مجانب برابر است با: $\frac{ab}{c}$ (یا $\frac{b}{e}$)

دقت! حاصل‌ضرب فواصل هر نقطه روی هذلولی از دو خط مجانب برابر است با: $\frac{a^۲b^۲}{c^۲}$

تست ۴۸: **در هذلولی به معادله‌ی $۴x^۲-y^۲-۸x-۴y=۴$، فاصله‌ی هر کانون از خط مجانب هذلولی کدام است؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳ *(خارج از کشور تجربی ۸۹)*

پاسخ گزینه‌ی «۳» فاصله‌ی هر کانون از خط مجانب برابر b است. باید معادله را استاندارد کنیم و b را به‌عنوان جواب مسئله در نظر بگیریم: $۴(x^۲-۲x)-(y^۲+۴y)=۴ \Rightarrow ۴((x-۱)^۲-۱)-((y+۲)^۲-۴)=۴ \Rightarrow ۴(x-۱)^۲-(y+۲)^۲=۴$

$$\xrightarrow{\div ۴} \frac{(x-۱)^۲}{۱}-\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱ \Rightarrow \begin{cases} a^۲=۱ \\ b^۲=۴ \Rightarrow b=۲ \end{cases}$$

بنابراین فاصله‌ی هر کانون از خط مجانب هذلولی داده‌شده برابر ۲ است.

هذلولی متساوی‌الساقین (متساوی‌القطرین)

اگر در هذلولی $a=b$ باشد، هذلولی را متساوی‌الساقین یا متساوی‌القطرین گوییم. در هذلولی متساوی‌الساقین:

(۱) شیب مجانب‌ها برابر با ±۱ است.

(۲) خروج از مرکز هذلولی برابر با $\sqrt{۲}$ است.

(۳) زاویه‌ی بین مجانب‌ها برابر با ۹۰° است.

(۴) مستطیل ساخته‌شده توسط مجانب‌ها تبدیل به مربعی با طول ضلع ۲a می‌شود.

(۵) در معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ قرینه‌ی هم خواهند بود.

(۶) طول وتر کانونی برابر با ۲a (یا ۲b) می‌شود.

تست ۴۹: **در یک هذلولی طول قطر هذلولی و طول وتری که از کانون عمود بر محور کانونی هذلولی رسم می‌شود با هم برابرند. زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی کدام است؟**

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

پاسخ گزینه‌ی «۴» **روش اول** طول قطر هذلولی برابر با ۲a و طول وتر کانونی هذلولی برابر با $\frac{۲b^۲}{a}$ است.

$$\frac{۲b^۲}{a}=۲a \Rightarrow ۲b^۲=۲a^۲ \Rightarrow a=b$$

بنابراین: $\text{زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی}=۲\text{Arc}\tan\frac{b}{a}=۲\text{Arc}\tan۱=۲\times۴۵^\circ=۹۰^\circ$

روش‌دوم چون در هذلولی داده‌شده طول قطر و طول وتر کانونی با هم برابرند، پس هذلولی، متساوی‌الساقین است؛ بنابراین زاویه‌ی بین مجانب‌های آن 90° است.

جدول مقایسه‌ای فرمول‌های هذلولی و بیضی

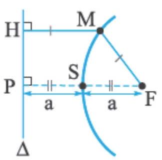
بیضی	هذلولی
$MF + MF' = 2a$	$\lvert MF - MF' \rvert = 2a$
$a^2 - c^2 = b^2$	$c^2 - a^2 = b^2$
بیضی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	هذلولی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
بیضی قائم: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$	هذلولی قائم: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$
مرکز بیضی: $\begin{cases} F'_x = 0 \rightarrow \text{مرکز } x \\ F'_y = 0 \rightarrow \text{مرکز } y \end{cases}$	مرکز هذلولی: $\begin{cases} F'_x = 0 \rightarrow \text{مرکز } x \\ F'_y = 0 \rightarrow \text{مرکز } y \end{cases}$
مجانب ندارد.	$\begin{cases} \text{هذلولی افقی: شیب مجانب‌ها} = \pm\frac{b}{a} \\ \text{هذلولی قائم: شیب مجانب‌ها} = \pm\frac{a}{b} \end{cases}$
خروج از مرکز: $\begin{cases} 1)\ e = \frac{c}{a} \\ 2)\ e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \end{cases}$	خروج از مرکز: $\begin{cases} 1)\ e = \frac{c}{a} \\ 2)\ e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \end{cases}$
طول وتر کانونی: $\begin{cases} 1)\ \frac{2b^2}{a} \\ 2)\ 2b\sqrt{1-e^2} \end{cases}$	طول وتر کانونی: $\begin{cases} 1)\ \frac{2b^2}{a} \\ 2)\ 2b\sqrt{e^2-1} \end{cases}$

سهمی

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به نام کانون و یک خط ثابت به نام خط هادی، متساوی‌الفاصله باشند.

$MH = MF$

$SF = SP = a$



معرفی اولیه‌ی سهمی

① F: کانون سهمی، S: رأس سهمی، Δ: خط هادی سهمی

② فاصله‌ی رأس تا کانون برابر با فاصله‌ی رأس تا خط هادی است (یعنی رأس وسط خط هادی و کانون قرار دارد).

③ فاصله‌ی رأس تا کانون را a می‌نامیم. a، پارامتر سهمی است و مقدار باز و بسته شدن دهانه‌ی سهمی را تنظیم می‌کند.

۴ کانون همواره در دهانه‌ی سهمی قرار دارد.

۵ شاخه‌های سهمی هیچ‌گاه خط هادی را قطع نمی‌کنند.

۶ اگر $a > ۰$ باشد، دهانه‌ی سهمی در جهت مثبت محورهای مختصات باز می‌شود و اگر $a < ۰$ باشد، دهانه‌ی سهمی در جهت منفی محورها باز می‌شود.

سهمی افقی :

سهمی قائم :

۷ اگر سهمی افقی باشد، خط هادی، موازی محور y ها است (معادله‌ی خط هادی به صورت $x = \cdots$ است).

اگر سهمی قائم باشد، خط هادی، موازی محور x ها است (معادله‌ی خط هادی به صورت $y = \cdots$ است).

۸ امتداد SF، محور تقارن سهمی است که بر خط هادی سهمی عمود است.

آزمون ۵ (مقاطع مخروطی)

۳۳- دایره‌ای بر محور xها و بر خط به معادله‌ی $3x+4y=0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه‌ی اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه‌ی مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۹۴)*

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۳۴- شعاع دایره‌ای به مرکز $(-2,2)$ و مماس خارج بر دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ کدام است؟ *(خارج از کشور تجربی ۹۴)*

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{3}$

۳۵- مجموع فاصله‌های کانون‌های بیضی $\frac{(y+2)^2}{25}+\frac{(x-1)^2}{16}=1$ از خط مماس بر آن در رأس ناکانونی B برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۹

۳۶- در یک بیضی مقدار خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. از دو رأس ناکانونی به یک کانون وصل می‌کنیم، زاویه‌ی بین دو پاره‌خط کدام است؟

۱) 30° ۲) 60° ۳) 45° ۴) $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

۳۷- اگر هذلولی $y^2-4x^2+ax+b=0$ از نقطه‌ی $A(2,1)$ گذشته و خط مماس بر هذلولی در همین نقطه، موازی خط $y=4x+7$ باشد، آن‌گاه مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۳۸- معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x^2-3x+2$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد، کدام است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۸۴)*

۱) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ ۲) $x^2+y^2-4x+6y+8=0$

۳) $x^2+y^2+6x-4y+5=0$ ۴) $x^2+y^2-6x+3y+9=0$

۳۹- محورهای مختصات را به اندازه‌ی مناسب در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا مقطع مخروطی به معادله‌ی $5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2=1$ به شکل استاندارد نوشته شود. مقدار x برحسب مختصات در دستگاه دوران‌یافته کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۹)*

۱) $x=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')$
۲) $x=\frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y')$
۳) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')$
۴) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y')$

۴۰- نوع منحنی $5y^2-2\sqrt{5}xy+x^2=0$ کدام است؟

۱) یک خط راست
۲) سهمی
۳) تهی
۴) دو خط موازی

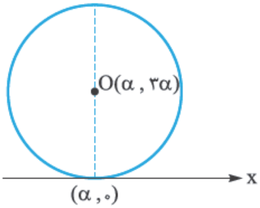
۳۳- گزینه «۱» چون دایره بر دو خط مماس است پس مرکز دایره روی نیمساز دو خط واقع است. ابتدا نیمساز دو خط $y=0$ (معادله‌ی محور x ها) و $3x+4y=0$ را می‌یابیم.

$$\frac{|3x+4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|y|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Rightarrow |3x+4y|=5|y| \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=5y \Rightarrow y=3x \\ 3x+4y=-5y \Rightarrow y=\frac{-1}{3}x \end{cases}$$

مرکز دایره در ناحیه‌ی اول واقع است، پس باید روی خط $y=3x$ باشد؛ یعنی مختصات مرکز دایره $O(\alpha, 3\alpha)$ است.

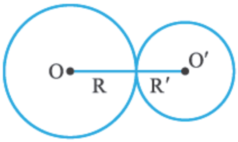
معادله‌ی دایره به صورت مقابل است: $(x-\alpha)^2+(y-3\alpha)^2=9$

چون نقطه‌ی مشترک با محور xها خواسته شده است و دایره بر محور xها مماس است، پس نقطه‌ی برخورد دایره با محور xها به صورت $(\alpha,۰)$ است و این نقطه در معادله‌ی دایره صدق می‌کند. بنابراین:



$$(\alpha,۰) \xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (\alpha-\alpha)^۲+(۰-۳\alpha)^۲=۹$$
$$\Rightarrow \alpha^۲=۱ \Rightarrow \alpha=۱$$

۳۴- گزینه «۲» چون دو دایره مماس خارج‌اند، پس $d=R+R'$. فاصله‌ی مراکز دو دایره برابر است با مجموع شعاع‌های دو دایره. شعاع و مرکز دایره‌ی داده‌شده را می‌یابیم.

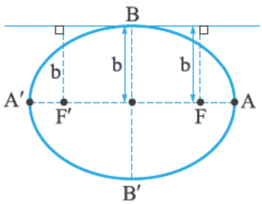


$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O(-\frac{-۲}{۲},\frac{-۴}{۲}) \\ \text{شعاع}: R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲-۴(۱)}=۲ \end{cases}$$

مرکز دایره‌ی دیگر داده شده است: $O'(-۲,۲)$، پس فاصله‌ی O تا O' را به دست می‌آوریم.

$$|OO'|=d=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=۵$$
$$d=R+R' \Rightarrow ۵=۲+R' \Rightarrow R'=۳$$

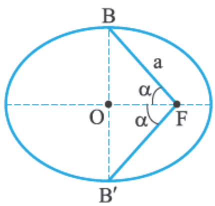
۳۵- گزینه «۲» فاصله‌ی کانون تا خط مماس بر بیضی در رأس B برابر است با: b



با توجه به این‌که معادله‌ی داده‌شده، معادله‌ی بیضی قائم است، پس مخرج $(x-۱)^۲$ برابر با $b^۲$ است.

$$b^۲=۱۶ \Rightarrow b=۴$$
$$\Rightarrow \text{مجموع فواصل کانون‌ها از خط مماس در رأس B}=۲b=۲\times۴=۸$$

۳۶- گزینه «۲» مسئله از ما زاویه‌ی بین BF و $B'F$ را خواسته است.



$$\cos\alpha=\frac{OF}{BF}=\frac{c}{a}$$

با توجه به این‌که خروج از مرکز داده شده است، داریم:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \alpha=۳۰^\circ \Rightarrow \text{زاویه‌ی بین BF و } B'F=۲\alpha=۶۰^\circ$$

۳۷- گزینه «۲» نقطه‌ی $A(۲,۱)$ در معادله‌ی هذلولی صدق می‌کند، بنابراین:

$$(۱)^۲-۴(۲)^۲+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=۱۵ \quad (*)$$

اگر از معادله‌ی داده‌شده مشتق ضمنی بگیریم، شیب خط مماس در نقطه‌ی موردنظر را به ما می‌دهد. پس:

$$m=\frac{-f'_x}{f'_y}=-\frac{-۸x+a}{۲y} \xrightarrow{A(۲,۱)} m=\frac{۱۶-a}{۲}$$

چون شیب این خط با شیب خط داده‌شده در مسئله باید یکی باشد (دو خط موازی هستند)، پس:

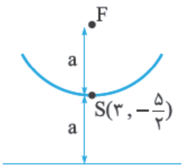
$$\frac{۱۶-a}{۲}=۴ \Rightarrow a=۸ \xrightarrow{(*)} b=-۱$$

۳۸- گزینه «۱» مرکز دایره F و شعاع آن $۲|a|$ است. ابتدا مختصات رأس سهمی را با مشتق به دست می‌آوریم و سپس مختصات کانون و پارامتر سهمی (a) را محاسبه می‌کنیم.

$$\xrightarrow[\text{عامل درجه ۲}]{\text{مشتق نسبت به}} x-۳=۰ \Rightarrow x_{\text{راس}}=۳ \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله}} y_{\text{راس}}=-\frac{۵}{۲}$$

با توجه به این‌که در سهمی $x^۲$ داریم، پس قائم است. $(\frac{۱}{۲}x^۲-۳x-y+۲=۰)$

$$\text{پارامتر سهمی}: a=-\frac{y\ \text{ضریب}}{\text{۴ برابر ضریب}\ x^۲}=-\frac{-۱}{۴\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$



a مثبت است پس سهمی رو به بالا است. $\text{مختصات کانون}: F(۳,-\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}) \Rightarrow F(۳,-۲)$

$$\text{معادله‌ی دایره}:\begin{cases}O(۳,-۲)\\ \text{شعاع}=۲|a|=۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱\\ \text{یا}\\ x^۲+y^۲-۶x+۴y+۱۲=۰\end{cases}$$

۳۹- گزینه «۴» $\text{زاویه‌ی مناسب}: \tan ۲\alpha=\frac{xy\ \text{ضریب}}{\text{ضریب}\ x^۲-\text{ضریب}\ y^۲}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۵-۷}=\sqrt{۳} \Rightarrow ۲\alpha=۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=x'\cos ۳۰^\circ-y'\sin ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'-\frac{۱}{۲}y'=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}x'-y')\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases}$$

۴۰- گزینه «۱» $\Delta=B^۲-۴AC=(-۲\sqrt{۵})^۲-۴(۱)(۵)=۰ \rightarrow$ گروه سهمی

چون می‌توانیم $x^۲$ و $-۲\sqrt{۵}xy$ و $۵y^۲$ را مربع کامل کنیم پس قطعاً سهمی نیست و باید از سه گزینه‌ی دیگر یکی را انتخاب کنیم.

$$(\sqrt{۵}y-x)^۲=۰ \Rightarrow \sqrt{۵}y-x=۰ \Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{۵}}x \ \text{یا}\ y=\frac{\sqrt{۵}}{۵}x$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک خط راست است.