

فصل اول

مجموعه لایحه و تنبیه



درس اول دهم

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، متمم مجموعه

مجموعه دسته‌ای از اعضا است که خوب مشخص شده باشند.

در میان مجموعه‌ها با \mathbb{N} (اعداد طبیعی)، \mathbb{W} (اعداد حسابی)، \mathbb{Z} (اعداد صحیح)، \mathbb{Q} (اعداد گویا)، \mathbb{Q}^c (اعداد گنگ) و \mathbb{R} (اعداد حقیقی) آشنا هستیم. تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. اگر $n(A)$ عددی محدود باشد، مجموعه‌ی A نامتناهی و در غیر این صورت نامتناهی می‌نامیم. اگر تمام عضوهای A در B هم باشند می‌گوییم $A \subset B$ و می‌خوانیم « A زیرمجموعه‌ی B است». زیرمجموعه‌های A از تهی تا خود A می‌توانند باشند.

در مسائل، یک مجموعه‌ی مرجع (عام، جهانی) داریم که تمام مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آن هستند. معمولن این مجموعه را با U نشان می‌دهیم، پس:

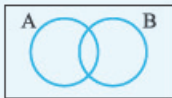
$$\emptyset \subset A \subset A \subset U$$

آن دسته از عضوهای U که در A نیستند، متمم A یا A' را می‌سازند.

پس داریم: $(A')' = A$ ، $\emptyset' = U$ ، و اگر $A \subset B$ باشد، همواره $B' \subset A'$ است.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

تعداد عضوهای متمم A برابر است با:



مجموعه‌ی مرجع

نمایش هندسی مجموعه‌ها به صورت روبه‌رو است:

دو مجموعه‌ی A و B می‌توانند عضوهای مشترکی داشته یا نداشته باشند.



A و B اشتراک دارند.



A و B اشتراک ندارند (جدا از هم هستند).

$A \cap B$ مجموعه‌ی عضوهایی است که هم در A و هم در B هستند.

$A \cup B$ مجموعه‌ی عضوهایی است که یا در A یا در B یا در هر دو هستند (در حداقل یکی از دو مجموعه).

$A - B$ مجموعه‌ی عضوهایی است که در A هستند و در B نیستند (همان $A \cap B'$).

$B - A$ مجموعه‌ی عضوهایی است که در B هستند و در A نیستند. (همان $B \cap A'$).

$A' \cap B'$ مجموعه‌ی عضوهایی است که نه در A هستند و نه در B .

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد عضوهای $A \cup B$ و $A - B$ را می‌توان به دست آورد:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

جدول زیر را هم در ذهن نگه می‌داریم:

با مجموعه‌ی مرجع	با مجموعه‌ی تهی	با متمم	با زیرمجموعه
$A \cup U = U$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cup A' = U$	$(B \subset A)$
$A \cap U = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap A' = \emptyset$	$\Leftrightarrow A \cup B = A$
$A - U = \emptyset$	$A - \emptyset = A$	$A - A' = A$	$\Leftrightarrow A \cap B = B$
$U - A = A'$	$\emptyset - A = \emptyset$	$A' - A = A'$	$\Leftrightarrow B - A = \emptyset$

$$(A \cap B)' = A' \cup B', (A \cup B)' = A' \cap B', A - B = B' - A'$$

هم‌چنین:

سوالات

مجموعه‌ها

۱ نام مجموعه‌های N, W, Z, Q و R در فارسی چیست؟ اعضای هر یک از آن‌ها را توصیف کنید. آیا این مجموعه‌ها متناهی‌اند؟

۲ رابطه‌ی زیرمجموعه بودن بین مجموعه‌های N, Q, Z, R و W چگونه است؟

۳ در نمودار زیر، مجموعه‌های N, W, Z, Q و R را مشخص کنید و به سوالات پاسخ دهید.

الف هر عدد موجود در ناحیه‌ی ۱، عددی طبیعی است و البته و و هم هست.

ب در ناحیه‌ی ۲، عددی قرار دارد که (طبیعی - حسابی) است اما (حسابی - طبیعی) نیست.

پ در ناحیه‌ی ۳، اعداد (صحیح مثبت - صحیح منفی) قرار دارند.

ت در ناحیه‌ی ۴، اعداد (گویا - گنگ) قرار دارند که نمایش آن‌ها است.

ث اعداد در ناحیه‌ی ۵، اعداد حقیقی هستند که نیستند.

۴ مجموعه‌ی $Q - R$ را توصیف کنید. اعضای این مجموعه چند رقم اعشاری دارند؟

۵ اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

a قطر مربع به ضلع $2 = a$

b $-\frac{3}{2} = b$

c نقطه‌ی ذوب یخ (برحسب درجه‌ی سانتی‌گراد) $= c$

d $\sqrt{\frac{50}{32}} = d$

e تعداد قاره‌های جهان $= e$

g $-\frac{0}{3} \times 10^1 = g$



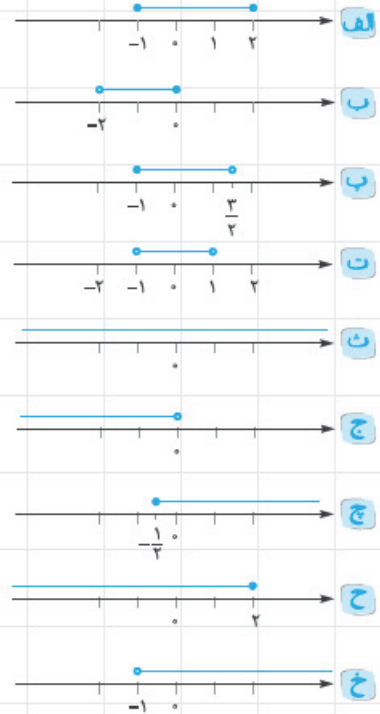
حالا جدول زیر را کامل کنید.

عددی	طبیعی	حسابی	صحیح	گویا	گنگ	حقیقی
a						
b		نیست				
c						
d						
e						است
f	نیست					
g						

بازه‌ها

۶ قسمت مشخص شده روی هر محور را با نماد بازه و مجموعه نشان دهید.

$[-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$



$\dots = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

۷ جمله‌های زیر را با انتخاب کلمه‌ی مناسب به یک گزاره‌ی درست تبدیل کنید.

الف بازه‌ی $(3, +\infty)$ یک بازه‌ی (باز - بسته) است.

ب بازه‌ی $(-\infty, -1]$ یک بازه‌ی (باز - بسته - نیم‌باز) است.

پ اعداد $+\infty$ و $-\infty$ عضو مجموعه‌ی \mathbb{R} (هستند - نیستند).

۸ بازه‌های زیر را مشخص کنید.

الف $(-2, 5] \cup [3, 6)$

ب $[-4, 2] \cap (-2, 4)$

ب $(0, +\infty) - (-\infty, 3]$

ت $[-1, 5] \cup (2, 3]$

ت $(2, +\infty) \cup [6, 11)$

ج $(-\infty, -1) \cap (-1, +\infty)$

۹ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ، آن‌گاه بازه‌هایی را که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند، مشخص کنید.

الف $(A \cup B) \cap C$

ب $(A \cap C) \cap B$

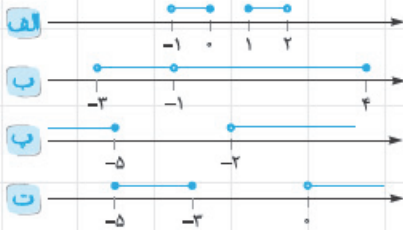
ب $A - (B \cup C)$

ت $(B \cap C) - \{1, 2\}$

ت $(A \cup C) - (2, +\infty)$

۱۰ مجموعه‌های $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ ، $\mathbb{R} - (-1, 2]$ و \mathbb{R} را به صورت اجتماعی از چند بازه نشان دهید.

۱۱ بازه‌هایی با نمایش محور به صورت زیر نشان داده می‌شوند. آن‌ها را به صورت اجتماعی از چند بازه نشان دهید:



۱۲ در رابطه‌ی $X \subset (-2, 5]$ چندتا از موارد زیر را می‌توان به جای X قرار داد؟

\emptyset ، $[-2, 2]$ ، $\{-2, 2\}$ ، $\{-1, 2\}$ ، -1 ، $\sqrt{2}$ ، $[-2, 5)$ ، $(-2, 5)$

۱۳ در رابطه‌ی $\square \in \{-1, 2\}$ به جای \square کدام موارد زیر قرار می‌گیرد؟

$(0, 1)$ ، $\{-1\}$ ، \emptyset ، 0 ، -1

۱۴ هر یک از اعداد زیر عضو کدام بازه‌ها هستند؟

اعداد: $\sqrt{10}$ ، 9×10^9 ، $8/85 \times 10^{-12}$ ، -60 ، $-0/3$

بازه‌ها: $(-1, 2)$ ، $(3, +\infty)$ ، $(-\infty, -1)$ ، $(3, 4)$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱۵ اگر تعداد اعضای یک مجموعه عددی باشد، آن مجموعه را یا می‌نامند. در یک مجموعه تعداد اعضا

از هر عددی که در نظر بگیریم است و این مجموعه‌ها هستند.

۱۶ مجموعه‌های متناهی را مشخص کنید.

الف اعداد اول دورقمی

ب مقسوم‌علیه‌های ۴۰

ب اعداد طبیعی زوج

ت مجموعه‌ی حشرات در زمین

ت مجموعه‌ی سلول‌های بدن انسان

ج مجموعه‌ی تمام استخوان‌های بدن

چ مجموعه‌ی تمام دانش‌آموزان شهر تهران

ح مجموعه‌ی تمام بردارها به طول ۲

خ بازه‌ی $(-\frac{1}{p}, 0)$

د $\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{3}{4} < x < -1\}$

ز مجموعه‌ی مضارب طبیعی ۷

ر مجموعه‌ی اعداد ۷ رقمی

ز مجموعه‌ی اتم‌های موجود در ۲۶ گرم فلز آهن

ز مجموعه‌ی اعداد گویایی که مخرج آن‌ها ۲ است.

س مجموعه‌ی تمام درختان جنگل‌های استان گلستان

ش مجموعه‌ی تمام بازه‌هایی که زیرمجموعه‌ی $[-2, 1]$ هستند.

۱۷ کدام مورد امکان دارد؟ در صورت وجود مثال بیاورید:

الف دو مجموعه‌ی نامتناهی A و B که $B - A$ دوعضوی باشد.

ب دو مجموعه‌ی نامتناهی که اجتماع آن‌ها متناهی باشد.

ب دو مجموعه‌ی نامتناهی که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

ت دو مجموعه‌ی نامتناهی A و B که $A \subset B$ و $A - B$ دوعضوی باشند.

۱۸ کدام مورد درست است؟

الف اگر $A \subset B$ و A متناهی باشد، B هم حتمن متناهی است.

ب اگر $A \subset B$ و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است.

ب اگر $A \subset B$ و B نامتناهی باشد، A حتمن نامتناهی است.

ت اگر $A \subset B$ و B متناهی باشد، A حتمن متناهی است.

۱۹ اگر B مجموعه‌ی تمام مضارب طبیعی ۳ باشد،

الف دو زیرمجموعه‌ی متناهی از B بنویسید.

ب دو زیرمجموعه‌ی نامتناهی جدا از هم از B بنویسید.

ب دو زیرمجموعه‌ی نامتناهی مانند E و F از B بنویسید که $E \subset F$ باشد.

۲۰ بین دو عدد ۰ و ۲ سه عدد گویا بنویسید.

آیا می‌توان بین آن‌ها ۸ عدد گویا نوشت؟

در حالت کلی بین دو عدد گویای مختلف، چند عدد گویا وجود دارد؟

متمم یک مجموعه

۲۱ مجموعه‌ی مرجع را با _____ نشان می‌دهیم. همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث _____ آن هستند.

۲۲ هر یک از مجموعه‌های زیر با انتخاب کدام مجموعه‌ی مرجع، تهی نیستند؟

	N	W	Z	Q	Q^c	R
$A = \{x \mid -2 < x < -1\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$B = \{x \mid x + 1 = 0\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$C = \{x \mid 2x - 1 = 0\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$D = \{x \mid x^2 = 3\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$E = \{x \mid x^2 + 1 = 0\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

۲۳) هر مجموعه‌ی زیر چند عضو دارد؟

الف) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x < 4\}$

ب) $A = \{x \in \mathbb{W} \mid -2 \leq x < 4\}$

پ) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 4\}$

۲۴) متمم مجموعه‌ی A را با A^c یا A^c نشان می‌دهیم. این مجموعه در واقع U است. A' شامل عضوهایی از مجموعه‌ی مرجع است که در A ...



الف) $A \cup U = \dots$

ب) $A \cup A' = \dots$

ت) $U - A = \dots$

ج) $A - A' = \dots$

خ) $n(A') = n(\dots) - \dots$

ز) $\emptyset' = \dots$

ح) $(A')' = \dots$

۲۵) با توجه به تعریف مجموعه‌ی مرجع و متمم، جاهای خالی را پر کنید.

ب) $A \cap U = \dots$

ت) $A \cap A' = \dots$

ج) $A - U = \dots$

ح) $A' - A = \dots$

د) $U \subset A \Rightarrow A = \dots$

ر) $U' = \dots$

۲۶) متمم مجموعه‌های زیر را در جدول کامل کنید.

A'	مجموعه‌ی مرجع	A
_____ →	\mathbb{R}	$(-1, 2]$
_____ →	\mathbb{R}	$[1, +\infty)$
_____ →	\mathbb{R}	\mathbb{W}
_____ →	\mathbb{R}	$(-\infty, 2)$
	\mathbb{Z}	\mathbb{W}
	\mathbb{R}	\mathbb{Q}
$\{5, 7, 9, 11, \dots\}$		$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$
	مراکز استان‌ها	مراکز استان‌های مرزی
	$\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$	مضارب ۲ یا ۳
	دانش‌آموزان کلاس شما	دانش‌آموزانی که به حداقل یکی از دروس ریاضی یا شیمی علاقه‌مند هستند.

۲۷) اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی را مرجع بگیریم، برای هر حالت مثالی بزنید.

الف) A متناهی و A' نامتناهی.

ب) A نامتناهی و A' نامتناهی.

ب) A متناهی و A' متناهی.

ت) از مورد (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۸) دو مجموعه‌ی A و B به صورت مقابل معرفی شده‌اند.

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی $A = 12$

مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی $B =$

اگر مجموعه‌ی مرجع $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ باشد، مجموعه‌های زیر را با تعداد اعضا مشخص کنید.

الف) A

ب) A'

ت) $A \cap B$

ج) $A' \cap B'$

خ) $A' \cup B$

ز) $A' \cup B'$

ب) B

ت) B'

ج) $A' \cap B$

ح) $A \cap B'$

د) $A \cup B$

ر) $A \cup B'$



با توجه به مجموعه‌های A و B نمودار مقابل را تکمیل کنید.

آیا رابطه‌ی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ درست است؟ چرا؟

۲۹) در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم والیبال اند. اگر ۶ نفر عضو هیچ‌یک از دو تیم نباشند،

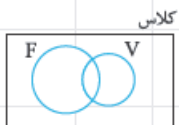
الف) چند نفر عضو حداقل یک تیم هستند؟

ب) چند نفر عضو هر دو تیم هستند؟

ب) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال اند؟

ت) چند نفر فقط عضو یک تیم هستند؟

ث) چند نفر عضو تیم والیبال نیستند؟



ج) اگر فوتبال را با F و والیبال را با V نشان دهیم، برای هر یک از موارد (الف) تا (ث) یک بیان مجموعه‌ای بنویسید (مثلن (پ) به صورت $V - F$ یا $V \cap F'$ است).

(راهنمایی: ابتدا در نمودار هندسی بالا، تعداد عضوهای مشترک را x بنامید و تعداد اعضای هر قسمت را حساب کنید. سپس با استفاده از

فرمول‌های $n(A \cup B)$ و $n(A - B)$ مسئله را حل کنید.)

۳۰ با توجه به رابطه‌ی $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ، اگر در جمعی از ۷۰ نفر مسافر، ۲۶ نفر تاجر، ۳۲ نفر خارجی و ۹ نفر تاجر و خارجی باشند:

الف چند نفر تاجر و بومی هستند؟

ب چند نفر نه تاجر و نه خارجی‌اند؟

ب چند نفر تاجر نیستند؟

ت چند نفر از خارجی‌ها تاجر نیستند؟

۳۱ اگر اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۱۷ و مجموعه‌ی A دارای ۸ عضو بوده و ۳ عضو مشترک با B داشته باشد، مجموعه‌ی B چندعضوی است؟

۳۲ در میان ۷۱ نفر از اهالی محل، ۳۶ نفر روزنامه‌ی A، ۲۷ نفر روزنامه‌ی B و ۱۲ نفر هر دو روزنامه را می‌خوانند.

الف چند نفر حداقل یک روزنامه می‌خوانند (دست کم یک روزنامه می‌خوانند)؟

ب چند نفر فقط روزنامه‌ی A را می‌خوانند؟

ب چند نفر فقط روزنامه‌ی B را می‌خوانند؟

ت چند نفر فقط یک روزنامه را می‌خوانند؟

ت چند نفر حداکثر یک روزنامه را می‌خوانند؟

ج چند نفر هیچ روزنامه‌ای را نمی‌خوانند؟

ج چند نفر دقیقاً یک روزنامه را نمی‌خوانند؟

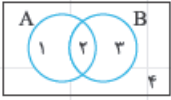
۳۳ درستی یا نادرستی روابط زیر را مشخص کنید.

الف $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ب $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

ب $n(A' \cap B') = n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$

۳۴) هر یک از مجموعه‌های زیر در نمودار، شامل کدام قسمت‌ها هستند؟



- | | |
|--------------|----------------|
| A: | $A \cap B$: |
| B: | $A - B$: |
| A' : | $B - A$: |
| B' : | $A' \cap B'$: |
| $A \cup B$: | $A' \cup B$: |

حالا با کمک نواحی، درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

برای نمونه، حل قسمت الف) را می‌بینیم:

الف) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ناحیه‌ی ۲ و $A \cap B$ ناحیه‌ی ۳ و $(A \cup B)'$ (ناحیه‌ی ۱، ۲ و ۳)

ناحیه‌ی ۴ = ناحیه‌ی ۴

پس درست است.

ب) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

ت) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

بنابراین متمم مجموعه‌ی A یا B به صورت نه A و نه B است. یعنی در متمم کردن به بیان فارسی، جای «یا» با «و» عوض می‌شود.

۳۵) اگر مجموعه‌ی مرجع ۸۶ عضوی و دو زیرمجموعه‌ی A و B از آن دارای ۲۸ و ۳۹ عضو بوده و ۱۱ عضو بین A و B مشترک باشند، تعداد

اعضای هر مجموعه را مشخص کنید.

الف) $A \cup B$

ب) $A \cap B'$

ب) $A' \cap B$

$$\text{ت} \quad A' \cap B'$$

$$\text{ب} \quad A' \cup B'$$

$$\text{ج} \quad A' - B'$$

از مقایسه‌ی بندهای (پ) و (ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۶ اگر $A \subset B$ باشد، کدام نتایج درست هستند؟

$$B' \subset A' \quad \text{ت} \quad A' \subset B' \quad \text{ب} \quad A' \subset B \quad \text{ج} \quad A \subset B' \quad \text{د}$$

با در نظر گرفتن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 5, 7\}$ روابط را کنترل کنید.

۳۷ اگر دو مجموعه‌ی A و B عضو مشترکی باشند، آن‌ها را _____ از هم یا مجزا می‌نامیم. مثلن همیشه A و _____ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

۳۸ اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، درستی روابط زیر را بررسی کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \text{د}$$

$$A \subset B' \quad \text{ب}$$

$$B \subset A' \quad \text{ب}$$

$$A' \cup B' = U \quad \text{ت}$$

ت آیا A' و B' نیز جدا از هم هستند؟