# درس دوم: معادلات درجه دوم

## روابط بین ضرایب در ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله عبارت است از:

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\cdot\beta=P=\frac{c}{a}$$

مثلاً در معادلهٔ $۲x^۲+۵x-۳=۰$ داریم:

$$S=-\frac{۵}{۲} \qquad P=-\frac{۳}{۲}$$

**مثال** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۵x-۱=۰$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$  ب) $\alpha^۲+\beta^۲$  ج) $\alpha^۳+\beta^۳$  د) $|\alpha-\beta|$

**پاسخ** ابتدا $S$ و $P$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S=-\frac{۵}{۱}=-۵ \quad ; \quad P=-\frac{۱}{۱}=-۱$$

سپس باید هر عبارت را برحسب $S$ و $P$، به‌صورت زیر بنویسیم:

الف) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-۵}{-۱}=۵$

ب) $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\cdot\beta=S^۲-۲P=(-۵)^۲-۲(-۱)=۲۵+۲=۲۷$

ج) $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=(-۵)^۳-۳(-۱)(-۵)=-۱۲۵-۱۵=-۱۴۰$

د) $A=|\alpha-\beta|\xrightarrow[\text{۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}}A^۲=\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta\Rightarrow$

$$A^۲=S^۲-۴P=(-۵)^۲-۴(-۱)=۲۵+۴=۲۹\Rightarrow A=|\alpha-\beta|=\sqrt{۲۹}$$

**مثال** در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+kx+۹=۰$ یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

**پاسخ** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، طبق فرض داریم:

$$\alpha=۲\beta\longrightarrow\alpha^۲=۲\alpha\beta\xrightarrow{\alpha\beta=P=\frac{۹}{۲}}\alpha^۲=۲\left(\frac{۹}{۲}\right)=۹\Rightarrow\alpha=\pm۳\Rightarrow\alpha=+۳ \text{ قابل قبول } \Rightarrow\beta=\frac{\alpha}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو ریشهٔ مثبت}=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

**مثال** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۲=۰$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^۳+۲\alpha^۲-\beta)(\beta^۳+۲\beta^۲-\alpha)$ را به‌دست آورید.

**پاسخ** چون $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند. یعنی:

$$\alpha^۲+۲\alpha-۲=۰\Rightarrow\alpha^۲+۲\alpha=۲\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } \alpha]{\text{طرفین معادله را در}}\alpha^۳+۲\alpha^۲=۲\alpha$$

و

$$\beta^۲+۲\beta-۲=۰\Rightarrow\beta^۲+۲\beta=۲\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } \beta]{\text{طرفین معادله را در}}\beta^۳+۲\beta^۲=۲\beta$$

$$\Rightarrow(\alpha^۳+۲\alpha^۲-\beta)(\beta^۳+۲\beta^۲-\alpha)=(۲\alpha-\beta)(۲\beta-\alpha)=۴\alpha\beta-۲\alpha^۲-۲\beta^۲+\alpha\beta=۵\alpha\beta-۲(\alpha^۲+\beta^۲)=۵P-۲(S^۲-۲P)$$

$$\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-۲]{S=-\frac{b}{a}=-۲}۵(-۲)-۲(۴+۴)=-۱۰-۱۶=-۲۶$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۱. در معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$، که در آن $p$ و $q$ عددهای مثبت‌اند، اگر تفاضل ریشه‌ها ۱ باشد، آنگاه $p$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۴q+۱}$ ۲) $q-۱$ ۳) $\sqrt{۴q-۱}$ ۴) $q+۱$

۵۲. مهم اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-mx+۸=۰$ باشند و اعداد ۶، $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، آنگاه مقدار $m$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳. مهم $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های $۲x^۲+px+۸=۰$ هستند. $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x+q=۰$ هستند. حاصل $p+q$ کدام است؟

۱) $-۱۸$ ۲) $-۲۰$ ۳) $-۲۲$ ۴) $-۲۴$

۵۴. مهم ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+mx-۴=۰$ اعدادی صحیح هستند. مقدار $m$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) $-۳$ ۳) ۰ ۴) $-۲$

۵۵. به ازای کدام مقدار $m$، نسبت ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۰x+m=۰$ برابر ۴ است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) $-۴$ ۴) $-۸$

۵۶. در معادلهٔ $x^۲-۸x+m=۰$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. $m$ کدام است؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۱)*

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۵۷. $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ هستند و رابطهٔ $\alpha+\beta=\alpha^۲\beta^۲$ برقرار است. کدام گزینه درست است؟

۱) $b^۲+ac=۰$ ۲) $c+ab=۰$ ۳) $c^۲-ab=۰$ ۴) $c^۲+ab=۰$

۵۸. $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $(m+۲)x^۲+۲nx+۹m+۳n=۰$ هستند. به ازای کدام مقدار $n$، اعداد $\alpha$، ۳ و $\beta$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵۹. اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-(m+۴)x+m=۰$ باشند، آنگاه حاصل $\tan\alpha+\cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰. $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۴x+۷=۰$ هستند. حاصل $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶۱. مهم معادلهٔ $۲x^۲-(m+۱)x+m=۰$ با ریشه‌های $\alpha$ و $\beta$ مفروض است. اگر $\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=۵$، آنگاه مقدار $m$ کدام است؟

۱) $-۵$ ۲) ۴ ۳) $-۶$ ۴) ۷

۶۲. مهم به ازای کدام مقدار $m$، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $۲x^۲-mx+m-۱=۰$ برابر ۴ است؟ *(سنجش ریاضی ـ ۹۳)*

۱) ۲ ۲) $-۲$ ۳) ۶ ۴) $-۶$

۶۳. اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۷x+۱$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) ۷ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۶۴. معادلهٔ $x^۲+۴x-۱=۰$ با ریشه‌های $\alpha$ و $\beta$ مفروض است. حاصل $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^۲$ کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۲۰

۶۵. اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۵=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲+۳\beta$ کدام است؟

۱) $-۴$ ۲) ۴ ۳) $-۱۴$ ۴) ۱۴

۶۶. اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+4x-7=0$ باشند، آنگاه مقدار $x_1^2+5x_1+x_2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۷. اگر $x_1$ و $x_2$ جواب‌های معادلهٔ $x^2+2x-7=0$ باشند، حاصل $\sqrt{x_1^2(7-2x_2)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۶۸. دشوار اگر $\beta$ و $\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-4=0$ باشد، حاصل $\alpha^3-2\beta^2+4\beta$ کدام است؟ (سنجش ریاضی ـ ۹۴)

۱) ۰ ۲) ۸- ۳) ۱۶ ۴) ۳۲-

۶۹. دشوار اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-9=0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^2}{(\beta+3)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) ۱ ۴) ۴

۷۰. ریشه‌های معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ یک واحد بیشتر است. $b+c$ کدام است؟

۱) ۹- ۲) ۱۶- ۳) ۲۵- ۴) ۳۶-

۷۱. اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار $k$ مجموعه جواب‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

## نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دومی باشند، در این صورت با تشکیل $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\cdot\beta$ می‌توانیم این معادلهٔ درجه دوم را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x^2-Sx+P=0$$

**مثال** معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $(2-\sqrt{5})^3$ و $(2+\sqrt{5})^3$ باشد.

**پاسخ**

$$S=(2-\sqrt{5})^3+(2+\sqrt{5})^3=8-12\sqrt{5}+30-5\sqrt{5}+8+12\sqrt{5}+30+5\sqrt{5}=76$$

$$P=(2-\sqrt{5})^3\cdot(2+\sqrt{5})^3=\left((2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})\right)^3=(4-5)^3=-1$$

پس معادلهٔ درجه دوم خواسته شده عبارت است از:

$$x^2-76x-1=0$$

**مثال** معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ باشد.

**پاسخ** راه حل اول:

$$x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=|1+\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}\Rightarrow x-1=\sqrt{3}\Rightarrow(x-1)^2=3\Rightarrow x^2-2x+1=3\Rightarrow x^2-2x-2=0$$

$$\alpha=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=|1+\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}$$

راه حل دوم: اگر یکی از ریشه های معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا $m+\sqrt{n}$ باشد، حتماً ریشهٔ دیگر $m-\sqrt{n}$ است. پس در این سؤال ریشهٔ دیگر یعنی $\beta$ برابر $1-\sqrt{3}$ است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1+\sqrt{3}\\ \beta=1-\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow S=2\ ,\ P=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2$$

پس معادلهٔ درجه دوم عبارت است از:

$$x^2-2x-2=0$$

## تشکیل معادله درجه دوم جدید

هرگاه معادلهٔ درجه دومی داشته باشیم و معادلهٔ درجه دوم دیگری بخواهیم که ریشه‌هایش رابطه‌ای با ریشه‌های معادلهٔ اول داشته باشد، باید با تشکیل $S$ و $P$ معادلهٔ جدید برحسب $S$ و $P$ معادلهٔ اول، معادلهٔ دوم خواسته شده را از فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ بنویسیم.

**مثال** معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۹ برابر ریشه های معادلهٔ $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

**پاسخ** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه های معادلهٔ $x^2 - x - 3 = 0$ باشد و $\alpha'$ و $\beta'$ ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر باشد داریم:

$$\begin{matrix} \alpha' = 9\alpha \\ \beta' = 9\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha+\beta) \xrightarrow{\alpha+\beta = S = 1} 9(1) = 9 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = 9\alpha \cdot 9\beta = 81(\alpha\beta) \xrightarrow{\alpha\beta = P = -3} 81(-3) = -243 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $S' = 9$ و $P' = -243$، معادلهٔ جدید به‌صورت $x^2 - 9x - 243 = 0$ است.

**مثال** معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد.

**پاسخ** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ و $\alpha'$ و $\beta'$ ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر باشد، داریم:

$$\begin{matrix} \alpha' = \alpha^2 \\ \beta' = \beta^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \xrightarrow[P=1]{S=4} 16 - 2 = 14 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = P^2 = (1)^2 = 1 \end{cases}$$

با داشتن $S' = 14$ و $P' = 1$، معادلهٔ درجه دوم جدید به‌صورت $x^2 - 14x + 1 = 0$ است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۲. **مهم** مستطیلی به محیط ۳۰ و مساحت ۵۴ مفروض است. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۷۳. می‌دانیم $\alpha$، ۱۶ و $\beta$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. همچنین $\alpha$، ۱۰ و $\beta$ تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $x^2 - 16x + 10 = 0$ ۲) $x^2 - 32x + 10 = 0$ ۳) $x^2 - 16x + 100 = 0$ ۴) $x^2 - 32x + 100 = 0$

۷۴. **مهم** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار $k$ مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۰)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۷۵. **مهم** $\sqrt{5}-2$ و $\sqrt{5}+2$ ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟ *(کتاب درسی)*

۱) $x^2 + 4x + 1 = 0$ ۲) $x^2 - 4x + 1 = 0$ ۳) $x^2 + 4x - 1 = 0$ ۴) $x^2 - 4x - 1 = 0$

۷۶. **دشوار** $(\sqrt{5}-3)^3$ و $(\sqrt{5}+3)^3$ ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟

۱) $x^2 - 216x + 72 = 0$ ۲) $x^2 - 144x + 64 = 0$ ۳) $x^2 - 72x + 216 = 0$ ۴) $x^2 - 64x + 144 = 0$

۷۷. ریشه‌های کدام معادله از مربع ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 3x + 1 = 0$ یک واحد بیشتر است؟ *(سنجش ریاضی ـ ۹۴)*

۱) $x^2 - 9x + 9 = 0$ ۲) $x^2 + 9x + 9 = 0$ ۳) $x^2 - 5x - 5 = 0$ ۴) $x^2 + 5x - 5 = 0$

۷۸. **مهم** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 2 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\left\{\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}\right\}$ است؟

۱) $2x^2 - 18x + 9 = 0$ ۲) $2x^2 - 18x - 9 = 0$ ۳) $2x^2 + 18x + 9 = 0$ ۴) $2x^2 + 18x - 9 = 0$

۷۹. اگر $\beta$ و $\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۴=۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha}+۱,\frac{۱}{\beta}+۱\right\}$ است؟

(سراسری ریاضی ـ ۹۲)

۱) $۴x^۲-۵x+۱=۰$ ۲) $۴x^۲-۳x+۱=۰$ ۳) $۴x^۲-۵x-۱=۰$ ۴) $۴x^۲-۳x-۱=۰$

۸۰. نکته‌دار ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x-۱=۰$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۸۱. نکته‌دار جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+۵x+۱=۰$ معکوس جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۴=۰$ است. حاصل $ab$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

## صفرهای تابع درجه ۲

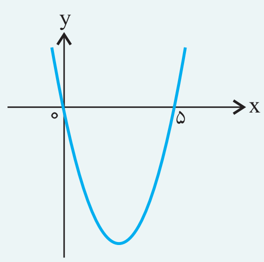
- برای تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$، جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌گویند.

اگر نمودار تابع درجه ۲ که یک سهمی است را رسم کنیم، صفرهای تابع طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور $x$ها است.

**مثال** صفرهای تابع $f(x)=x^۲-۵x$ را به‌دست آورید.

**پاسخ**

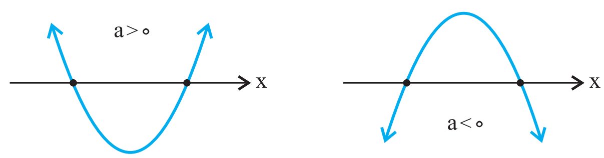
$$x^۲-۵x=۰\Rightarrow x(x-۵)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۵$$



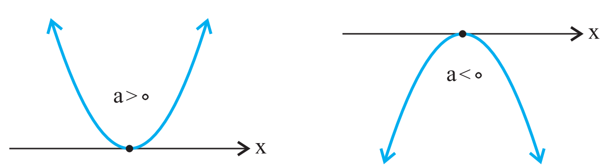

### تعیین تعداد صفرهای تابع درجه ۲ به کمک علامت $\Delta$

در تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ داریم:

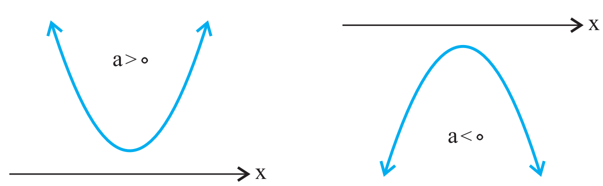
- اگر $\Delta>۰$ باشد، معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشه دارد و سهمی محور $x$ها را در دو نقطه قطع می‌کند.




- اگر $\Delta=۰$ باشد، معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد و سهمی در یک نقطه بر محور $x$ها مماس است.




- اگر $\Delta<۰$ باشد، معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشه ندارد و سهمی محور $x$ها را قطع نمی‌کند.

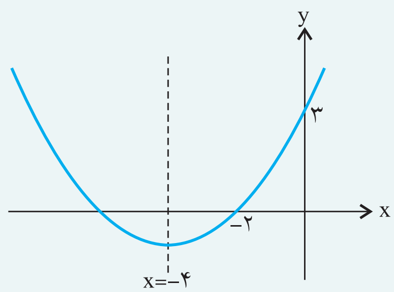


## تعیین معادله سهمی به کمک صفرهای تابع درجه ۲

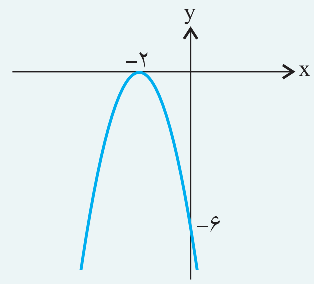
**اگر نمودار سهمی محور $x$ها را در ۲ نقطه به طول‌های $x_1$ و $x_2$ قطع کرده باشد ($x_1$ و $x_2$ صفرهای تابع‌اند)، در این صورت معادلهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ نوشت و اگر نمودار سهمی محور $x$ها را در یک نقطه به طول $x_1$ قطع کرده باشد ($x_1$ صفر تابع است)، در این صورت معادلهٔ سهمی را به‌صورت $f(x)=a(x-x_1)^2$ می‌توان نوشت که در هر حالت با داشتن مختصات یک نقطهٔ دیگر از سهمی و صدق دادن در معادلات فوق، به راحتی می‌توانیم $a$ را به‌دست آوریم و معادلهٔ سهمی را بنویسیم.**

**مثال** **معادلهٔ هریک از سهمی‌های زیر را بنویسید.**

الف




ب




**پاسخ**

**الف** چون $x=-4$ محور تقارن تابع است، پس نقطهٔ برخورد دیگر سهمی با محور $x$ها نقطهٔ $x=-6$ است. یعنی صفرهای تابع $-2$ و $-6$ است و داریم:

$$f(x)=a(x+2)(x+6)$$

چون نمودار محور $y$ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده پس $f(0)=3$. یعنی:

$$3=a(0+2)(0+6)\Rightarrow 12a=3\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{1}{4}(x+2)(x+6)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2+2x+3$$

**ب** نمودار سهمی محور $x$ها را فقط در نقطهٔ $x=-2$ قطع کرده، پس فقط تابع یک صفر دارد و داریم:

$$f(x)=a(x+2)^2$$

چون نمودار محور $y$ها را در نقطه‌ای به عرض $-6$ قطع کرده، پس $f(0)=-6$. یعنی:

$$-6=a(0+2)^2\Rightarrow a=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی عبارت است از:

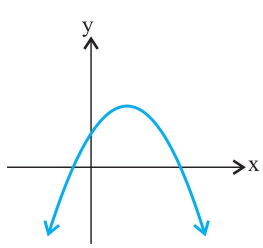
$$f(x)=-\frac{3}{2}(x+2)^2\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2}x^2-6x-6$$

**تذکر** **در تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$، علامت $a$ و $b$ و $c$ را می‌توان با توجه به نمودار تابع، به صورت زیر تعیین کرد:**

۱. **علامت $a$ را با توجه به ماکزیمم و یا مینیمم داشتن تابع تعیین می‌کنیم.**

۲. **علامت $b$ را با توجه به علامت طول رأس سهمی یعنی $x=-\frac{b}{2a}$ مشخص می‌کنیم.**

۳. **علامت $c$ را با توجه به محل برخورد نمودار با محور $y$ها به‌دست می‌آوریم، چون محل برخورد نمودار تابع با محور $y$ها برابر $f(0)=c$ است.**



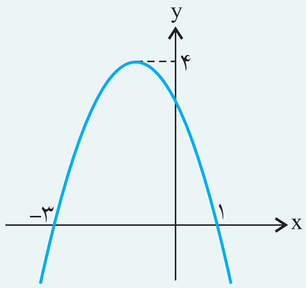

**مثلاً اگر نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت مقابل باشد:**

**اولاً $a<0$ است، چون سهمی ماکزیمم دارد.**

**ثانیاً چون رأس سهمی در ناحیهٔ اول است، پس $x=-\frac{b}{2a}>0$ و با توجه به اینکه $a<0$ است، باید $b>0$ باشد.**

**ثالثاً نمودار تابع محور $y$ها را در قسمت مثبت‌ها قطع کرده، پس $c>0$ است.**

**مثال** اگر نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $a+b$ را بیابید.




**پاسخ** چون نمودار تابع محور $x$ها را در نقاط $x=۱$ و $x=-۳$ قطع کرده، پس صفرهای تابع ۱ و $-۳$ است و ضابطهٔ آن را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=a(x-۱)(x+۳)$ بنویسیم.

از طرفی چون نقاط برخورد نمودار با محور $x$ها نسبت به محور تقارن تابع متقارن هستند لذا طول رأس سهمی به‌صورت $x=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ است و با توجه به عرض رأس سهمی که در شکل داده شده مختصات رأس سهمی $A(-۱,۴)$ است که در معادلهٔ تابع صدق می کند. یعنی:

$$۴=a(-۱-۱)(-۱+۳)\Rightarrow ۴=-۴a\Rightarrow a=-۱$$

پس تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=-۱(x-۱)(x+۳)\Rightarrow f(x)=-x^{۲}-۲x+۳\Rightarrow b=-۲$$
$$\Rightarrow a+b=-۱+(-۲)=-۳$$

## علامت صفرهای تابع درجه ۲

برای تعیین علامت صفرهای تابع درجه ۲ (در صورت وجود) که همان علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ است، می‌توانیم از علامت S و P به‌صورت زیر کمک بگیریم:

اگر
- $P=\frac{c}{a}<۰\Rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد (توجه: در این حالت همواره $\Delta>۰$ است.)
- $P=\frac{c}{a}>۰,\Delta>۰\Rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ هم‌علامت دارد
  - اگر $S=-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow$ ۲ ریشهٔ مثبت
  - اگر $S=-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow$ ۲ ریشهٔ منفی

**مثال** تعداد و علامت صفرهای هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

**الف** $f(x)=۵x^{۲}-۳x-۱$ **ب** $f(x)=۲x^{۲}-۳x+۱$

**پاسخ**

**الف** $f(x)=۰\Rightarrow ۵x^{۲}-۳x-۱=۰$

$\Delta=۹-۴(۵)(-۱)=۲۹>۰\rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ متمایز دارد

$P=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۵}<۰\rightarrow$ ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت‌اند

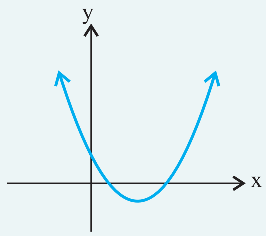
**ب** $f(x)=۰\Rightarrow ۲x^{۲}-۳x+۱=۰$

$\Delta=۹-۴(۲)(۱)=۱>۰\rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ متمایز دارد

$P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}>۰\rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند

$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}>۰\rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند

**مثال** اگر نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=۲x^۲-۴x+m-۳$ مطابق شکل مقابل باشد، حدود تغییرات $m$ را به‌دست آورید.



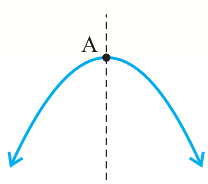

**پاسخ** مطابق شکل، سهمی محور $x$ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کرده است، پس معادلهٔ $۲x^۲-۴x+m-۳=۰$ باید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. یعنی باید:

$$\begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow ۱۶-۴(۲)(m-۳)>۰ \Rightarrow m<۵ \quad ① \\ \text{و} \\ P=\dfrac{c}{a}>۰ \Rightarrow \dfrac{m-۳}{۲}>۰ \Rightarrow m-۳>۰ \Rightarrow m>۳ \quad ② \\ \text{و} \\ S=-\dfrac{b}{a}>۰ \Rightarrow \dfrac{۴}{۲}>۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \quad ③ \end{cases} \Rightarrow ① \cap ② \cap ③ \Rightarrow ۳<m<۵$$

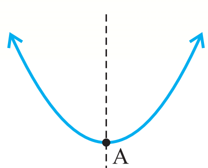
## ماکزیمم یا مینیمم سهمی

نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ یک سهمی است، به یکی از دو صورت زیر:

- نقطهٔ $A$ را رأس سهمی می‌گویند.
- طول رأس سهمی $x=-\dfrac{b}{۲a}$ است.
- اگر $a>۰$ باشد، سهمی رو به بالا و به ازای $x=-\dfrac{b}{۲a}$ سهمی مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.
- اگر $a<۰$ باشد، سهمی رو به پایین و به ازای $x=-\dfrac{b}{۲a}$ سهمی ماکزیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.



$a<۰$



$a>۰$

**مثال** بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع $f(x)=-x^۲+۴x-۳$ را بیابید.

**پاسخ**

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲ \Rightarrow f(۲)=-۴+۸-۳=۱$$

**نکته** ① مختصات رأس سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ به‌صورت $A\left(-\dfrac{b}{۲a},-\dfrac{\Delta}{۴a}\right)$ است.

② سهمی دارای یک خط محور تقارن به معادلهٔ $x=-\dfrac{b}{۲a}$ است.

**مثال** نمودار تابع به معادلهٔ $f(x)=mx^۲+۴x+m$ مینیممی به عرض $-۳$ دارد، در این صورت تابع با کدام عرض محور $y$ها را قطع می‌کند؟

**پاسخ**

$$y_A=-۳ \Rightarrow -\frac{\Delta}{۴a}=-۳ \Rightarrow \frac{-(۱۶-۴m^۲)}{۴m}=-۳ \Rightarrow ۴m^۲-۱۶=-۱۲m \Rightarrow ۴m^۲+۱۲m-۱۶=۰ \Rightarrow$$

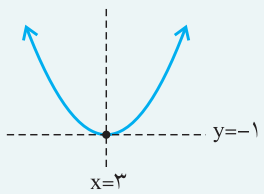
$$m^۲+۳m-۴=۰ \Rightarrow m=-۴ \text{ یا } m=۱$$

چون تابع مینیمم دارد، باید $a>۰$ باشد، پس $m=-۴$ غیرقابل قبول است و فقط $m=۱$ قابل قبول است و داریم:

$$f(x)=x^۲+۴x+۱ \xrightarrow[\text{برخورد با محور } y\text{ها}]{x=۰} f(۰)=۱$$

**مثال** **خط به معادلهٔ $y=-1$ محور تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{3}x^2-2x+a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. مقدار $a$ را بیابید.**

**پاسخ** $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{\frac{2}{3}}=3$ : محور تقارن

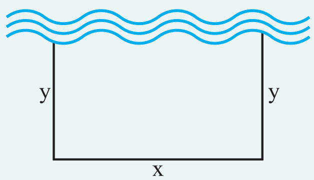



مطابق شکل چون محور تقارن خط $y=-1$ را روی منحنی قطع می کند، در واقع مختصات رأس سهمی به‌صورت $A(3,-1)$ است، پس:

$$y=\frac{1}{3}x^2-2x+a \xrightarrow{(3,-1)} -1=\frac{1}{3}(9)-6+a \Rightarrow a=2$$

**مثال** **بیشترین مساحت زمینی مستطیل‌شکل را که می‌توان توسط یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟**

**پاسخ** چون یک طرف زمین مستطیل‌شکل رودخانه است (مطابق شکل) پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیل‌شکل را پوشش می دهد و داریم:




طول طناب $L=2y+x$

از طرفی خود مسئله بیشترین مساحت را تعیین کرده که می‌توان با استفاده از آن طول طناب را به‌دست آورد:

$$\text{مساحت}\quad S=xy \xrightarrow{x=L-2y} S=(L-2y)y=Ly-2y^2=-2y^2+Ly$$

با توجه به اینکه معادله یک سهمی است، بیشترین مقدار $S$ به ازای $y=\frac{-L}{-4}=\frac{L}{4}$ به‌دست می‌آید، پس:

$$S_{max}=-2\left(\frac{L}{4}\right)^2+L\left(\frac{L}{4}\right)=-\frac{L^2}{8}+\frac{L^2}{4}=\frac{L^2}{8}=648 \Rightarrow L^2=8\times648=16\times324 \Rightarrow L=4\times18=72$$

پس طول طناب ۷۲ متر است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

**۸۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر $m$، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^2-4x+m-3$ محور $x$ها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟**

۱) $(-3,2)$ ۲) $(-1,4)$ ۳) $(0,6)$ ۴) $(-3,3)$

**۸۳.** مهم **به ازای کدام مقدار $m$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور $x$ها و مماس بر آن است؟**

۱) $-3$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $3$

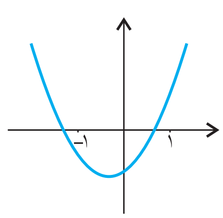
**۸۴. به ازای چند مقدار $m$، نمودار تابع $f(x)=\left(3-\frac{x}{m}\right)(mx-1)$ مماس بر محور $x$ها است؟** *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۲)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

**۸۵.** مهم **یک موشک با سرعت اولیهٔ ۱۶۰ متر بر ثانیه از زمین پرتاب می‌شود. ارتفاع آن $(h)$ در زمان $t$ از رابطهٔ $h(t)=-5t^2+160t$ به‌دست می‌آید. در ثانیه‌های چندم ارتفاع موشک از سطح زمین ۵۶۰ متر است؟ ارتفاع ماکزیمم موشک کدام است؟** *(کتاب درسی)*

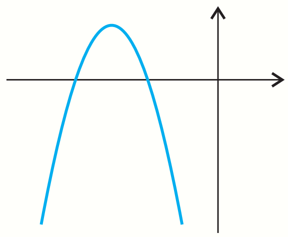
۱) ثانیه‌های ۶ و ۲۶، ارتفاع ۲۵۶۰ متر
۲) ثانیه‌های ۴ و ۲۸، ارتفاع ۱۲۸۰ متر
۳) ثانیه‌های ۶ و ۲۶، ارتفاع ۱۲۸۰ متر
۴) ثانیه‌های ۴ و ۲۸، ارتفاع ۲۵۶۰ متر

**۸۶.** مهم **نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه درست است؟**




۱) $a+b+c>0$ و $a-b+c>0$
۲) $a+b+c>0$ و $a-b+c<0$
۳) $a+b+c<0$ و $a-b+c>0$
۴) $a+b+c<0$ و $a-b+c<0$

۸۷. سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه درست است؟



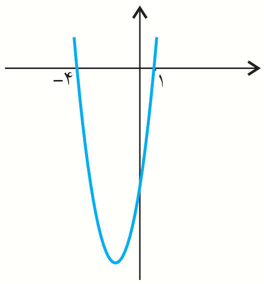
۱) $ab<۰$

۲) $bc<۰$

۳) $ab>۰$

۴) $ab\leq ۰$

۸۸. نمودار تابع $f(x)=۲x^{۲}+bx+c$ به شکل روبه‌رو است. این نمودار محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (کتاب درسی)



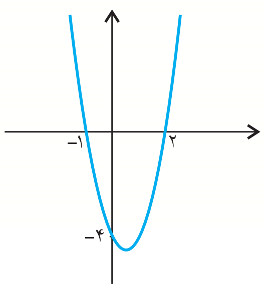

۱) $-۶$

۲) $-۷$

۳) $-۸$

۴) $-۹$

۸۹. نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به‌صورت مقابل است. حاصل $f(۳)$ کدام است؟



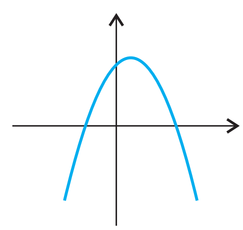

۱) ۳

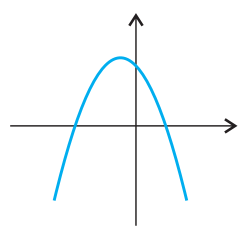
۲) ۸

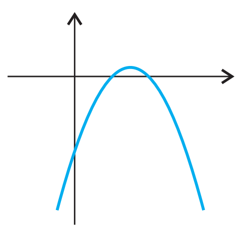
۳) ۹

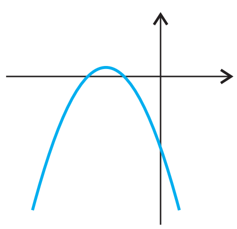
۴) ۱۲

۹۰. نمودار $f(x)=-x^{۲}+۴x+۱$ شبیه کدام گزینه است؟

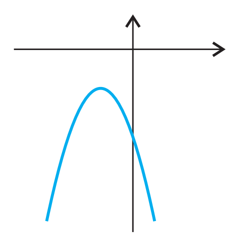
۱)


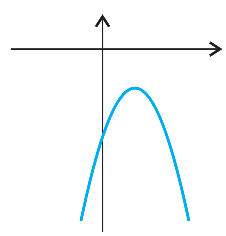
۲)


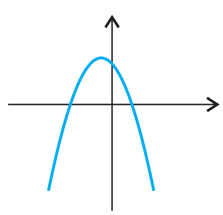
۳)


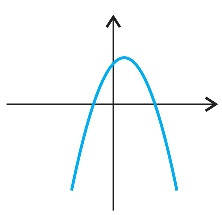
۴)


۹۱. نمودار $f(x)=x-(x+۲)^{۲}$ شبیه کدام گزینه است؟

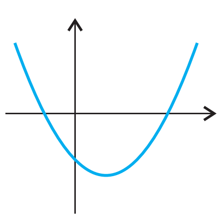
۱)


۲)


۳)


۴)


۹۲. مهم نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل است. همچنین $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ هستند. کدام گزینه درست است؟



۱) $\frac{\alpha}{\beta}>۰$ و $\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}>۰$

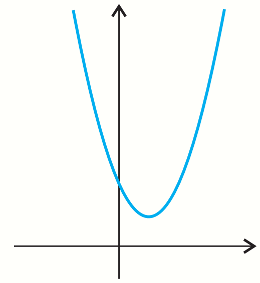
۲) $\frac{\alpha}{\beta}<۰$ و $\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}>۰$

۳) $\frac{\alpha}{\beta}>۰$ و $\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}<۰$

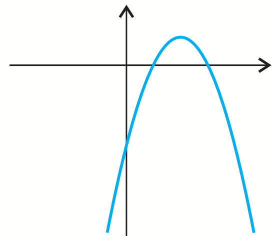
۴) $\frac{\alpha}{\beta}<۰$ و $\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}<۰$

۹۳. مهم نمودارهای زیر مربوط به توابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ است. در چه تعداد از آن‌ها $abc>۰$ است؟

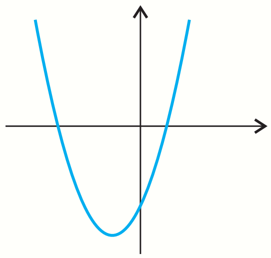
الف)



ب)



ج)



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۹۴. به ازای کدام مقادیر $m$، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره زیر محور $x$ها است؟

۱) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-۱<m<۱$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $m>\frac{۳}{۲}$

۹۵. محور تقارن سهمی $y=x^۲-۴x+k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض $-۲$ قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور $x$ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۹۶. تابع $f(x)=x^۲-۶x+k$ مفروض است. خط $y=۳$ محور تقارن تابع را در نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۹۷. رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۲x-۸$ و نقاط تلاقی این سهمی با محور $x$ها، سه رأس یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۹۸. مقادیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶$، در بازهٔ $(a,b)$ بزرگتر از $\frac{۷}{۲}$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

۹۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر $m$، منحنی به معادلهٔ $y=(m+۲)x^۲+۳x+۱-m$، محور $x$ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۵)

۱) $m>۱$ یا $m<-۲$ ۲) $-۲<m<۱$ ۳) فقط $m<-۲$ ۴) فقط $m>۱$

۱۰۰. مهم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^۲-۳x-۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف $x$های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور $x$ها غیرمنفی باشد؟ (سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۱. دشوار به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$، نمودار تابع $f(x)=ax^۲+(a+۳)x-۱$ محور $x$ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a<-۹$ ۲) $a<-۳$ ۳) $a>-۱$ ۴) $-۳<a<۰$

۱۰۲. مهم حدود $a$ کدام باشد، تا نمودار تابع $f(x)=ax^۲+(۲a+۱)x+(a-۱)$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نگذرد؟

۱) $a\geq ۱$ ۲) $-\frac{۱}{۸}<a<۱$ ۳) $-\frac{۱}{۸}<a<\frac{۳}{۲}$ ۴) $a<-\frac{۱}{۸}$

۱۰۳. مهم به ازای کدام مقادیر $a$، منحنی به معادلهٔ $y=ax^۲-(a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq -۲$ ۲) $a>۰$ ۳) $a>-۲$ ۴) $-۲\leq a<۰$

۱۰۴. به ازای کدام مقادیر $m$، سهمی $y=(m+۱)x^۲-۲x+m-۳$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m>۳$ یا $m<-۱$ ۲) $-۱<m<۳$
۳) $m>۱$ یا $m<-۳$ ۴) $-۳<m<۱$

۱۰۵. اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - kx + ۳k - ۲ = ۰$ باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار $k$، حاصل $\alpha^{۲} + \beta^{۲}$ مینیمم (کمترین مقدار) می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۶. دشوار $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - (m+۱)x + ۶ = ۰$ هستند. حدود $m$ برای آن‌که $\beta < -۳ < \alpha$ باشد، کدام است؟

۱) $m > -۶$ ۲) $m < -۶$ ۳) $m > -۹$ ۴) $m < -۹$

## صفرهای توابع درجه بالاتر از ۲

صفرهای تابع $f$ (در صورت وجود) مقادیری از $x$ (در دامنهٔ $f$) هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود، یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ هستند. می‌توان گفت صفرهای تابع طول نقاط تلاقی نمودار $f$ با محور $x$ها هستند.

**مثال** صفرهای تابع $f(x) = x^{۳} - ۲x^{۲} - ۴x + ۸$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

**پاسخ**

$$x^{۳} - ۲x^{۲} - ۴x + ۸ = ۰ \Rightarrow x^{۲}(x-۲) - ۴(x-۲) = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x^{۲}-۴) = ۰ \Rightarrow (x-۲)^{۲}(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} (x-۲)^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ \text{یا} \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

**مثال** اگر $x = ۱$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - x - ۳$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

**پاسخ** چون $x = ۱$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ است، پس تابع $f$ عاملی به‌صورت $(x-۱)$ دارد که با تقسیم $f(x)$ بر $(x-۱)$ عوامل دیگر $f(x)$ را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^{۳}} + ۳x^{۲} - x - ۳ & x - ۱ \\ \hline -\cancel{x^{۳}} + x^{۲} & x^{۲} + ۴x + ۳ \\ \hline \quad \cancel{۴x^{۲}} - x - ۳ & \\ \quad -\cancel{۴x^{۲}} + ۴x & \\ \hline \qquad \cancel{۳x} - \cancel{۳} & \\ \qquad -\cancel{۳x} + \cancel{۳} & \\ \hline \qquad ۰ & \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x-۱)(x^{۲} + ۴x + ۳)$$

و از حل معادله $f(x) = ۰$ صفرهای دیگر تابع را می‌یابیم:

$$(x-۱)(x^{۲} + ۴x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x^{۲} + ۴x + ۳ = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \checkmark \\ x = -۳ \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

**مثال** اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^{۴} + ax^{۳} + x^{۲} - ۲a$ برابر $(-۲)$ باشد، صفرهای دیگر تابع را در صورت وجود به‌دست آورید.

**پاسخ** چون $x = -۲$ یکی از صفرهای تابع است، پس $f(-۲) = ۰$ و داریم:

$$(-۲)^{۴} + a(-۲)^{۳} + (-۲)^{۲} - ۲a = ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۸a + ۴ - ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

پس تابع به‌صورت $f(x) = x^{۴} + ۲x^{۳} + x^{۲} - ۴$ است و عاملی به‌صورت $(x+۲)$ دارد که با تقسیم $f(x)$ بر $(x+۲)$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^{۴}} + \cancel{۲x^{۳}} + x^{۲} - ۴ & x + ۲ \\ \hline -\cancel{x^{۴}} - \cancel{۲x^{۳}} & x^{۳} + x - ۲ \\ \hline \quad \cancel{x^{۲}} - ۴ & \\ \quad -\cancel{x^{۲}} - ۲x & \\ \hline \qquad -\cancel{۲x} - \cancel{۴} & \\ \qquad \cancel{۲x} + \cancel{۴} & \\ \hline \qquad ۰ & \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

$f(x)=(x+۲)(x^۳+x-۲)$

برای تعیین صفرهای این تابع باید $(x^۳+x-۲)$ را نیز تجزیه کنیم چون $x=۱$ یکی از صفرهای $x^۳+x-۲$ است پس این عبارت را بر $x-۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^۳}+x-۲ & x-۱ \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^۳}+x^۲ & x^۲+x+۲ \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{x^۲}+x-۲ & \\
\quad -\cancel{x^۲}+x & \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{۲x}-\cancel{۲} & \\
\qquad -\cancel{۲x}+\cancel{۲} & \\ \cline{1-1}
\qquad \quad ۰ &
\end{array}
$$

پس تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$f(x)=(x+۲)(x-۱)(x^۲+x+۲)$

با حل معادلهٔ $f(x)=۰$ صفرهای تابع را می‌یابیم:

$$(x+۲)(x-۱)(x^۲+x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۲ \checkmark\\(x-۱)=۰\Rightarrow x=۱ \checkmark\\x^۲+x+۲=۰\to\Delta=۱-۸=-۷<۰\to \text{ریشه ندارد}\end{cases}$$

پس تابع علاوه بر $x=-۲$ یک صفر دیگر یعنی $x=۱$ دارد.

## روش تغییر متغیر در حل معادلات

**در حل برخی از معادلات می‌توان با تغییر متغیر مناسب معادله را به یکی از انواع معادلات که می‌شناسیم، مانند معادلهٔ درجه ۲، تبدیل کنیم و پس از حل آن و با توجه به تغییر متغیر صورت گرفته جواب‌های معادلهٔ اولیه را بیابیم.**

**مثال** **صفرهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید.**

**الف** $f(x)=x^۴+۲x^۲-۱۵$

**ب** $f(x)=(x^۲+x+۱)^۲+x^۲+x-۱$

**پاسخ**

**الف**

$f(x)=۰\Rightarrow x^۴+۲x^۲-۱۵=۰$

با تغییر متغیر $x^۲=t$ داریم:

$t^۲+۲t-۱۵=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۳$ یا $t=-۵$

$t=۳\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$

$t=-۵\Rightarrow x^۲=-۵\to$ معادله جواب ندارد

پس صفرهای تابع $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ هستند.

**ب**

$f(x)=۰\Rightarrow(x^۲+x+۱)^۲+x^۲+x-۱=۰$

با تغییر متغیر $x^۲+x=t$ داریم:

$(t+۱)^۲+t-۱=۰\Rightarrow t^۲+۲t+۱+t-۱=۰\Rightarrow t^۲+۳t=۰\Rightarrow t(t+۳)=۰\Rightarrow t=۰$ یا $t=-۳$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}t=۰\Rightarrow x^۲+x=۰\Rightarrow x(x+۱)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=-۱\\t=-۳\Rightarrow x^۲+x=-۳\Rightarrow x^۲+x+۳=۰\to\Delta=۱-۱۲=-۱۱<۰\quad \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد}\end{array}$$

پس صفرهای تابع $-۱$ و $۰$ هستند.

۱۰۷. معادلهٔ $(x^2+2)^2-5(x^2+2)+4=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۴

۱۰۸. تعداد و علامت جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)=5$ کدام است؟ (سنجش ریاضی ـ ۹۳)

۱) دو ریشهٔ مثبت
۲) دو ریشه با علامت مخالف
۳) یک ریشهٔ مثبت و سه ریشهٔ منفی
۴) دو ریشهٔ مثبت و دو ریشهٔ منفی

۱۰۹. معادلهٔ $x^4+2ax^2+a^2-1=0$ چهار ریشهٔ متمایز دارد. حدود $a$ کدام است؟

۱) $a>1$ ۲) $a<1$ ۳) $a<-1$ ۴) $-1<a<1$

۱۱۰. مهم ۲ و ۳ دوتا از صفرهای تابع $f(x)=x^3+ax^2-14x+b$ هستند. صفر دیگر تابع کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-1$ ۳) ۴ ۴) $-4$

۱۱۱. مهم اگر $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ صفرهای تابع $f(x)=2x^3+2x^2-12x$ باشند، آنگاه حاصل $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۱۲. به ازای مقداری از $a$ چندجمله‌ای $f(x)=x^4-ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچکترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۴)

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

۱۱۳. اگر نمودار تابع $f(x)=2x^3-5x^2-x-m$ محور $x$ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطهٔ تلاقی دیگر آن با محور $x$ها کدام‌اند؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۸۹)

۱) $-\frac{1}{2}$ و $-1$ ۲) $-\frac{1}{2}$ و ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ و $-1$ ۴) ۳ و $-\frac{1}{2}$

۱۱۴. به ازای یک مقدار $x$، اعداد $x^2-2$، $2x$ و $x^2+4$ به ترتیب سه جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $q>0$ هستند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۳)

۱) $\frac{117}{16}$ ۲) $\frac{125}{16}$ ۳) $\frac{63}{4}$ ۴) $\frac{127}{8}$

۱۱۵. مهم تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است. می‌دانیم ۱ و ۴ دوتا از صفرهای تابع $f(x)$ هستند، همچنین ۷ نیز یکی از صفرهای تابع $f(x-1)$ است. صفرهای تابع $f(x-2)$ کدام است؟

۱) ۱، ۴ و ۹ ۲) ۲، ۵ و ۸ ۳) ۳، ۶ و ۸ ۴) ۴، ۵ و ۹

۱۱۶. به ازای کدام مقادیر $a$، معادلهٔ $3x^4+5x^2+a^2=1$ فقط دو جواب قرینهٔ هم برای $x$ دارد؟

۱) $0<a<2$ ۲) $-1<a<1$ ۳) $|a|>1$ ۴) هر مقدار $a$

۱۱۷. دشوار صفرهای تابع $f(x)=3x^3+18x^2+ax$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۱۱۸. تعداد صفرهای تابع $f(x)=(x^2+3x+1)^3-(x^2+3x+1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۰

۱۱۹. دشوار ۰، ۱ و ۲ تمام صفرهای تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ هستند. مقدار $a$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $-3$ ۲) $-4$ ۳) $-5$ ۴) $-6$

## روش هندسی (نموداری) حل معادلات

طول نقاط تلاقی نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس. هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.

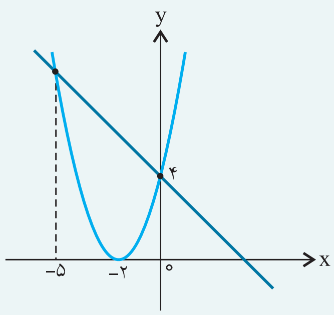
**مثال** معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $(x+۲)^۲=۴-x$

ب) $x^۲+|x|=۲$

**پاسخ**

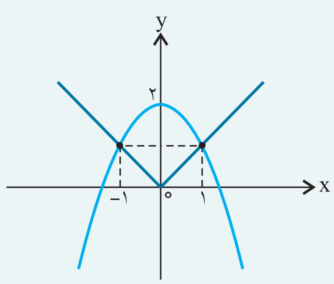
الف) با فرض $f(x)=(x+۲)^۲$ و $g(x)=۴-x$ نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم:




همان‌طور که می‌بینیم طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارتند از $x=۰$ و $x=-۵$ که جواب‌های معادله هستند.

ب) $x^۲+|x|=۲ \Rightarrow |x|=-x^۲+۲$

با فرض $f(x)=|x|$ و $g(x)=-x^۲+۲$ نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:




همان‌طور که می‌بینیم طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارتند از $x=۱$ و $x=-۱$ که جواب‌های معادله‌اند.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۰. **مهم** معادلهٔ $|x|=x^۲+x-۲$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

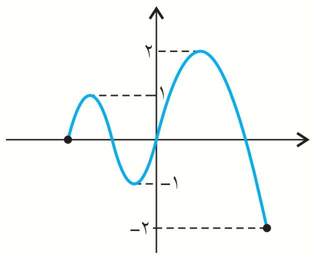
۱۲۱. دربارهٔ تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۴x+۳=|x|$ کدام است؟

۱) دو جواب، یکی مثبت و دیگری منفی
۲) دو جواب، هر دو مثبت
۳) دو جواب، هر دو منفی
۴) سه جواب، یکی مثبت و دو تا منفی

۱۲۲. به ازای چه مقادیری از $a$، معادلهٔ $|x+۱|=\frac{x}{۲}+a$ دارای دو جواب است؟

۱) $a>\frac{۱}{۲}$ ۲) $a<\frac{۱}{۲}$ ۳) $a>-\frac{۱}{۲}$ ۴) $a<-\frac{۱}{۲}$

۱۲۳. در شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ نشان داده شده است. به ازای کدام مقادیر $a$ معادلهٔ $f(x) = a$ دارای سه جواب است؟



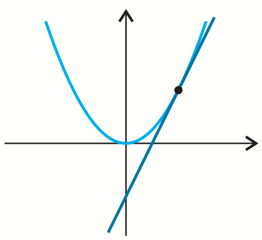

۱) $[-۱,۰] \cup \{۱\}$

۲) $(-۱,۰) \cup [۱,۲)$

۳) $(-۱,۰) \cup \{۱\}$

۴) $(-۲,۱) \cup \{۲\}$

۱۲۴. در شکل مقابل، حل هندسی معادلهٔ $x^۲ = ۲x + a$ نشان داده شده است، به طوری که معادله فقط یک جواب دارد. $a$ کدام است؟



۱) $-۱$

۲) $-۲$

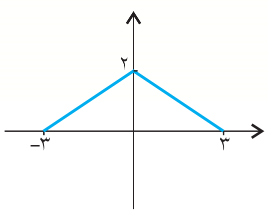
۳) $-۳$

۴) $-۴$

۱۲۵. دشوار حدود $a$ برای آن‌که معادلهٔ $x^۲ = |x| + a$ دارای چهار جواب باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲} < a < \frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴} < a < \frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴} < a < ۰$ ۴) $-\frac{۱}{۲} < a < ۰$

۱۲۶. دشوار در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. حدود $a$ برای آن‌که معادلهٔ $f(x) = x^۲ + a$ دارای دو جواب متمایز باشد، کدام است؟




۱) $-۹ \le a < ۲$

۲) $-۹ \le a < ۰$

۳) $۰ \le a < ۲$

۴) $-۹ \le a \le -۲$

۱۲۷. دشوار کدام معادله دارای سه جواب است؟

۱) $|x+۱| = x^۲ + ۲x + ۱$ ۲) $|x-۱| = x^۲ + ۲x + ۱$ ۳) $|x+۲| = x^۲ + ۲x + ۱$ ۴) $|x| = x^۲ + ۲x + ۱$