فهرست مطالب

آنـالیز ترکیبـی و احتمال

حتما بخوانید

آنالیز ترکیبی، یکی از پیش‌نیازهای بسیار مهم فصل احتمال است که تقریباً هر ۲ سال یک بار در کنکور به طور مجزا نیز از آن تست می‌آید و امسال قطعاً با توجه به نیامدنش در سال‌های قبل، یکی از شانس‌های اصلی برای طرح سؤال است. جالب ماجرا اینجا است که در سال ۹۲ همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد، از خود تمرینات کتاب در کنکور تست مطرح شد و این روال می‌تواند در سال ۹۶ نیز تکرار شود. به همین خاطر ما تمرینات مهم آنالیز ترکیبی در کتاب درسی را به خوبی تجزیه و تحلیل کرده و نتیجه‌ی آن را در قالب چند تست برای شما در این فصل آماده نموده‌ایم.

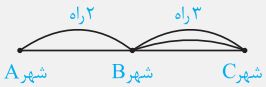
اما در مورد مبحث احتمال باید بگوییم که آمدن **۳ سؤال** از این قسمت، امری طبیعی است و این نشان می‌دهد که این مبحث چه قدر مهم و جدی است. ۳ سؤال از ۳۰ سؤال کنکور یعنی به تنهایی چیزی حدود ٪۱۰ سؤالات!! با توجه به این که سؤالات احتمال جزء سؤالات متوسط هستند و با صرف زمانی معقول می‌توانید به آن‌ها پاسخ دهید، به هیچ عنوان از این مبحث غافل نشوید.

از بین ۳ سؤال کنکور یکی از کتاب ریاضی ۳ و چند تست بعدتر، دو سؤال از کتاب سال چهارم می‌آید. زدن تست‌های احتمال خیلی دشوار نیست **به شرطی که فن کوزه‌گری را بلد باشید**. این فن یعنی این‌که بدانید تست داده شده، مربوط به کدام بخش و مبحث احتمال است و سریعاً بتوانید با کمک نکته‌های مربوطه و منظم‌سازی ذهنی آن را حل کنید. در درسنامه‌های کوتاه و روان این قسمت، می‌توانید روش‌های بی‌نظیر فهمیدن نکات مهم تست، مانند نشانه‌های مختلف و حتی نحوه‌ی استفاده از شماره‌ی سؤال در دفترچه را یاد بگیرید. هم‌چنین به کمک «ورژن‌های دیگر سؤال»، «دیدهای ویژه» و «ترفندهای ویژه» ضمن دیدن نمونه سؤال‌های قابل طرح و پی بردن به بخش‌های پراهمیت و کم‌اهمیت، می‌توانید ترفندهای موجود برای حل تست‌ها را نیز بیاموزید. اگر وقت داشتید می‌توانید از تست‌های رشته‌ی ریاضی مربوط به این مبحث در انتهای کتاب نیز برای حل تمرین بیشتر کمک بگیرید ولی حتماً باید معلم یا مشاورتان تست‌های مناسب این قسمت را برایتان مشخص کند.

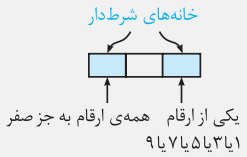
۱

۱ اصل ضرب

اگر دو عمل مستقل A و B یکی به n طریق و دیگری به m طریق قابل انجام باشد، آن‌گاه این دو عمل با هم بـه $m \times n$ طریـق مختلـف قابـل انجام هستند.



◀ **مثال:** از شهر A به شهر B، دو راه و از شهر B به شهر C، سه راه وجود دارد. پـس طبـق اصـل ضـرب به $۲ \times ۳ = ۶$ طریق مختلف می‌توان از شهر A به شهر C رفت (با عبور از شهر B).



◀ **روش:** در حل مسائل (بالاخص مسائل اعداد) برای استفاده از اصل ضرب ابتدا به سراغ خانه‌های شرط‌دار می‌رویم. **مثلاً:** اگر بخواهیم تعداد اعداد فرد سه رقمی را بیابیم، خانه‌های یکان (به خاطر فرد بودن) و صـدگان (صفر نباید در این خانه باشد) شرط‌دار هستند.

◀ **نکته:** در حل مسائل اگر بین دو یا چند عمل انتخاب، «وَ» به کار رود، تعداد حالات انجـام آن‌هـا را در هـم ضرب می‌کنیم و اگر «یا» به کار رود، تعداد حالات انجام آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

◀ **۱** **چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟** (داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۳)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

می‌خواهیم با ارقام فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ با ارقام **متمایز** بسازیم، لذا خانه‌ی شرط‌دار، هزارگان است که نباید عدد ۱ باشد. پس از این خانه محاسبه را شـروع مـی‌کنیم و در هر مرحله یک رقم از تعداد کل ارقام کم می‌کنیم:

تعداد حالات: $\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۹۶$

مرحله۱ مرحله۲ مرحله۳

۳، ۵، ۷ یا ۹

یکی از سه رقم باقی‌مانده از مرحله‌ی قبل و عدد ۱

◀ **۲** **یک عدد سه رقمی را متقارن گوییم، هرگاه رقم یکان و صدگان آن برابر باشند (مانند ۱۶۱). تعداد اعداد سه رقمی متقارن فرد کدام است؟** (تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲)

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۴۵۰

در اعداد سه رقمی متقارن، هر رقمی در یکان قرار بگیرد، رقم صدگان با آن برابر است. لذا با مشخص شدن رقم یکان، رقم صدگان نیز خود به خود مشخص می‌شود و حق انتخابی برای آن نداریم. از طرفی بـرای آن که عدد حاصل فرد باشد، یکان آن باید ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد. پس داریم:

تعداد حالات: $\boxed{۱} \times \boxed{۱۰} \times \boxed{۵} = ۵۰$

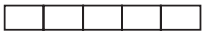
صدگان شبیه یکان

همه‌ی ارقام

یکی از ارقام ۱،۳،۵،۷،۹

فرار از اشتباه: متاسفانه بعضی از دوستان! در این مسأله توجه ندارند که با معلوم شدن یکان، رقم صدگان خود به خود معلـوم می‌شـود و انتخـابی برای آن نداریم و برای آن ۵ حالت در نظر می‌گیرند!

◀ **۳** **با استفاده از رنگ‌های آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد به‌طوری که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشند؟** (تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳)



۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴۳

خانه اول را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز یا سبز رنگ می‌کنیم ولی برای خانه‌های بعدی باید حواسمان باشد، رنگ مورد اسـتفاده نبایـد شـبیه رنـگ خانه‌ی قبلی باشد. مثلاً اگر خانه‌ی اول را آبی کرده‌ایم، برای خانه‌ی دوم باید از دو رنگ قرمز یا سبز استفاده کنیم نه آبی! به همین ترتیب برای رنگ کردن خانه‌ی سوم، رنگ خانه‌ی دوم را نباید استفاده کنیم. پس از خانه‌ی دوم به بعد برای رنگ کردن خانه‌ها فقط ۲ حق انتخاب داریم. بنابراین:

$\boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۳ \times ۲^۴ = ۳ \times ۱۶ = ۴۸$

۲ جایگشت

یادآوری (فاکتوریل): به حاصل‌ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n، n فاکتوریل $(n!)$ می‌گویند.

$$n! = n \times (n-۱) \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

مثلاً: $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ و $۰! = ۱$ (قرارداد)

جایگشت: اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم یک جایگشت می‌گویند.

◀ **نکته:** تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است. **مثلاً:** ۳ حرف a، b و c به $۳! = ۶$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند.

جایگشت‌های با تکرار: اگر در میان n شیء موجود، r شیء شبیه هم وجـود داشـته باشـد، تعـداد جایگشـت‌هـای اشـیاء برابـر $\frac{n!}{r!}$ اسـت.

مثلاً: تعداد جایگشت‌های حروف a،a،b،c،c برابر $\frac{۵!}{۲!\,۲!}$ است.

۲ تا a تکراری ۲ تا c تکراری

دید ویژه: بحث جایگشت‌های با تکرار به‌طور مستقیم در کتاب درسی نیامده، اما در مسائل ساده مانند مثال فوق به کار می‌رود. به هر حال دانستن مطلب در همین حد برای حل مسائل آنالیز ترکیبی و احتمال کافی است و بیشتر از آن به هیچ وجه لازم نیست.

۴ حروف کلمه‌ی SERESHT را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد، به طوری‌که حرف R همواره در وسط قرار گیرد؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۲

۷ خانه در نظر می‌گیریم و حرف R را در خانه‌ی وسط قرار می‌دهیم.

			R			

حال ۶ حرف S، E، E، S، H و T باقی می‌مانند که باید در ۶ مکان باقی‌مانده قرار بگیرند. پس انگار جایگشت ۶ حرف را می‌خواهیم که در آن ۲ حرف E و S هر یک دو بار تکرار شده‌اند. بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{۶!}{۲!۲!} = \frac{۷۲۰}{۴} = ۱۸۰$ است.

۳ چند شیء کنار هم باشند یا نباشند

روش: اگر در محاسبه‌ی جایگشت اشیاء، بخواهیم چند شیء خاص کنار هم باشند،آن‌ها را در داخل یک بسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت شیء حاصل را با اشیای دیگر محاسبه می‌کنیم.

مثال: ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند، به‌طوری که:

الف) ۲ و ۴ کنار هم باشند.

جابجایی داخل بسته

$\underbrace{۱،۳،(۲،۴)}_{\text{۳ شیء}} \Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب $= ۳! \times ۲!$

ب) ۲ بلافاصله بعد از ۴ بیاید.

۲و۴ داخل بسته جابجایی ندارند!

$\underbrace{۱،۳،(۴،۲)}_{\text{۳ شیء}} \Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب $= ۳! \times ۱$

دید ویژه: این قسمت را طراحان کنکور بیشتر از بقیه‌ی قسمت‌ها دوست داشته‌اند! جدیداً باب شده که از فعل منفی در صورت تست استفاده می‌شود و می‌گویند مثلاً a و b کنار هم نباشند! در این صورت تعداد جایگشت‌هایی که a و b کنار هم هستند را به دست می‌آوریم و از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم.

۵ ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

داخل تجربی ۸۲ | پاسخ: ۳

ارقام فرد ۱، ۳ و ۵ را در داخل یک بسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم که با دو عدد دیگر یعنی ۲ و ۴ تشکیل سه شیء می‌دهند که !۳ جایگشت دارند. از طرفی خود اعداد ۱، ۳ و ۵ نیز در داخل بسته به !۳ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند. بنابراین داریم:

$\overbrace{\boxed{۱}\boxed{۳}\boxed{۵}}^{\text{۱ بسته}}، \boxed{۲}، \boxed{۴} \Rightarrow$ تعداد اعداد ۵ رقمی موردنظر $= ۳! \times ۳! = ۶ \times ۶ = ۳۶$

۶ حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳

دو حرف A را یک بسته و دو حرف G را نیز یک بسته در نظر می‌گیریم که با ۴ حرف دیگر یعنی E، N، R و L تشکیل ۶ شیء می‌دهند. این شش شیء !۶ جایگشت دارند.

$\underbrace{\boxed{A،A}\boxed{G،G}\boxed{L}\boxed{R}\boxed{N}\boxed{E}}_{\text{۶ شیء}} \Rightarrow$ تعداد جایگشت‌ها $= ۶! = ۷۲۰$

فرار از اشتباه: در داخل هر کدام از بسته‌ها، حروف یکسان قرار دارند. پس با جابجایی آن‌ها درون بسته حالت جدیدی ایجاد نمی‌گردد و بر روی تعداد جایگشت‌ها تأثیری ندارند. ضمناً این مسأله ارتباطی با مسائل «جایگشت با تکرار» ندارد.

۷ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی SYSTEM به طوری‌که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۳

در سؤال از فعل منفی استفاده شده است. پس همان‌طور که در دید ویژه تأکید کردیم، ابتدا جایگشت‌هایی از حروف کلمه‌ی SYSTEM را می‌یابیم که دو حرف S کنار هم باشند. سپس آن‌ها را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$\underbrace{(SS)YTEM}_{\text{۵ شیء متمایز}} \Rightarrow$ تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف S کنار هم هستند $= ۵! = ۱۲۰$

از طرفی تعداد کل جایگشت‌های ۶ حرف S، S، Y، T، E و M که در میان آن‌ها ۲ حرف یکسان وجود دارد، طبق درسنامه‌ی «جایگشت‌های با تکرار» برابر $\frac{۶!}{۲!} = \frac{۷۲۰}{۲} = ۳۶۰$ است. بنابراین جواب برابر $۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$ می‌شود.

۴ جایگشت یکی در میان

در دو حالت زیر، اعضای تیم‌های A و B می‌توانند به صورت یکی در میان قرار بگیرند:

الف) تعداد اعضای A و B با هم مساوی باشند:

تعداد جایگشت‌های یکی در میان = ۲ × (جایگشت اعضای A) × (جایگشت اعضای B)

ب) تعداد اعضای A و B یکی اختلاف داشته باشند:

تعداد جایگشت‌های یکی در میان = (جایگشت اعضای A) × (جایگشت اعضای B)

۸ با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری که رقم‌های ۲ یک در میان باشند؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

سه رقم ۲ را گروه A و سه رقم ۶، ۵ و ۷ را گروه B در نظر می‌گیریم. چون تعداد اعضای دو گروه یکسان است، طبق درسنامه داریم:

تعداد حالات یکی در میان: ۲ × (جایگشت اعضای A) × (جایگشت اعضای B) = ۲ × ۱ × ۳! = ۲ × ۶ = ۱۲

تذکر: چون اعضای گروه A یکسان هستند، جایگشت اعضای آن یک است و جابه‌جایی آن‌ها نسبت به هم حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند.

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۲

۵ ترتیب و ترکیب

ترتیب: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز، هرگاه ترتیب انتخاب آن‌ها مهم باشد (مثل انتخاب سه نفر از یک گروه برای سمت‌های مدیریت، معاونت و نگهبانی)، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثلاً: $P(5,4)=\frac{5!}{(5-4)!}=\frac{5!}{1!}=5!=120$

زید ویژه: در حل مسائل ترتیب بهتر است از همان چیزهایی که در جایگشت و اصل ضرب یاد گرفتیم استفاده کنیم نه فرمول فوق! ولی شما باید فرمول را حفظ باشید تا در مسائلی که صرفاً فرمول مهم است یا جواب را برحسب $P(n,r)$ داده‌اند، بتوانید از آن استفاده کنید.

ترکیب: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز، اگر ترتیب انتخاب آن‌ها مهم نباشد و فقط انتخاب r شیء ملاک باشد (مثل انتخاب دو نفر از یک کلاس برای اردو)، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

زید ویژه: خیلی از مسائلی که در کنکور از مبحث آنالیز ترکیبی و احتمال می‌آید، از مبحث ترکیب می‌باشد. پس به این قسمت و تست‌های مربوط به آن توجه ویژه‌ای داشته باشید.

خواص مهم ترکیب:

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ مثلاً: $\binom{5}{0}=\binom{5}{5}=1$

۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ مثلاً: $\binom{5}{1}=\binom{5}{4}=5$

۳) $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$ مثلاً: $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=\frac{5\times4}{2}=10$

۴) قاعده‌ی پاسکال: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

دو عدد یکسان — یکی به n اضافه می‌شود.

دو عدد متوالی — عدد بزرگ‌تر

مثلاً: $\binom{25}{9}+\binom{25}{10}=\binom{26}{10}$

دو عدد یکسان — یکی به ۲۵ اضافه شود.

دو عدد متوالی — عدد بزرگ‌تر

ارتباط بین ترتیب و ترکیب:

$$P(n,r)=C(n,r)\times r!$$

مثلاً: $P(5,3)=C(5,3)\times 3!$

۹ اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} = 26$، مقدار n کدام است؟ (خارج تجربی ۸۴ | پاسخ: ۱)

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

با توجه به فرمول‌های $P(n,r)$ و $C(n,r)$ داریم:

$$\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} = 26 \Rightarrow \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{\underbrace{((n-1)-4)}_{n-5}!4!}} \underset{\text{نزدیک در نزدیک}}{\overset{\text{دور در دور}}{=}} \frac{\overset{n(n-1)!}{n!}(n-5)!4!}{(n-1)!\underset{(n-4)(n-5)!}{(n-4)!}} = 26 \Rightarrow \frac{n\cancel{(n-1)!}\cancel{(n-5)!}\times 24}{\cancel{(n-1)!}(n-4)\cancel{(n-5)!}} = 26$$

$$\Rightarrow \frac{24n}{n-4} = 26 \Rightarrow 24n = 26(n-4) \xRightarrow{\div 2} 12n = 13(n-4) \Rightarrow 12n = 13n - 52 \Rightarrow n = 52$$

۱۰ از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو غیرهم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟ (داخل تجربی ۹۲ و تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳)

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۴۸۰

سه دانش‌آموز دو به دو غیر هم مدرسه‌ای یعنی سه دانش‌آموز را از ۳ مدرسه‌ی مختلف برداریم. پس ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را به $\binom{5}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم. مثلاً مدارس A، B و C. سپس یک نفر از ۴ نفر مدرسه‌ی A، یک نفر از ۴ نفر مدرسه‌ی B و یک نفر از ۴ نفر مدرسه‌ی C انتخاب می‌کنیم که برای هر کدام از این انتخاب‌ها ۴ حالت وجود دارد. پس داریم:

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{انتخاب ۳ مدرسه از ۵ مدرسه}} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{5\times 4}{2} \times 64 = 640$$

۱۱ اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و در هر ردیف ۴ صندلی باشد، به چند طریق ۳ دانش‌آموز سال اول و ۲ دانش‌آموز سال دوم می‌توانند روی آن‌ها بنشینند به‌طوری که اولی‌ها در ردیف اول باشند؟ (تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳)

۱) ۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۳۶۰

یکی از تمرینات مهم کتاب درسی! ابتدا سه صندلی از چهار صندلی ردیف اول را به $\binom{4}{3}$ طریق انتخاب و سپس ۳ دانش‌آموز سال اولی را به $3!$ حالت روی آن‌ها می‌نشانیم. حال ۵ صندلی باقی‌مانده است (۴ صندلی در ردیف دوم و ۱ صندلی در ردیف اول) و باید ۲ دانش‌آموز سال دومی را در این صندلی‌ها قرار داد. پس دو صندلی از پنج صندلی باقی‌مانده را به $\binom{5}{2}$ طریق انتخاب و ۲ دانش‌آموز سال دوم را به $2!$ حالت روی آن‌ها می‌نشانیم. پس طبق اصل ضرب داریم:

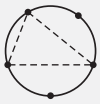
تعداد حالات موردنظر: $\binom{4}{3}\times 3! \times \binom{5}{2}\times 2! = 4\times 6 \times \frac{5\times 4}{2}\times 2 = 480$

ورژن دیگر: از آن‌جا که $P(n,r) = \binom{n}{r}\times r!$، پاسخ نهایی را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان نمود، زیرا ممکن است طراح، گزینه‌ها را برحسب P بدهد:

$$\underbrace{\binom{4}{3}\times 3!}_{P(4,3)} \times \underbrace{\binom{5}{2}\times 2!}_{P(5,2)} = P(4,3)\times P(5,2)$$

۶ مسائل هندسی ترکیب

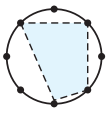
فرض کنید n نقطه روی محیط دایره باشد. تعداد k ضلعی‌هایی که با استفاده از این n نقطه می‌توان ساخت از فرمول $\binom{n}{k}$ به‌دست می‌آید. **مثلاً:** اگر ۵ نقطه روی یک دایره باشد، تعداد ۳ ضلعی‌های ساخته شده با این نقاط برابر $\binom{5}{3} = 10$ است.



۱۲ بر روی یک دایره، ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس آن واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟ (داخل تجربی ۸۰ | پاسخ: ۳)

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

برای ساخت چهارضلعی موردنظر نیاز به ۴ نقطه (رأس) داریم. پس کافی است از بین ۸ نقطه‌ی متمایز، ۴ تا انتخاب کنیم که این کار به $\binom{8}{4}$ طریق مختلف قابل انجام است. لذا داریم:



$$\text{تعداد چهارضلعی‌های محدب} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{4\times 3\times 2\times 1\times \cancel{4!}} = 70$$

۷ حداقل، حداکثر و روش متمم

در مسائل ترکیب و خصوصاً بعداً در احتمال مسائلی را خواهید دید که با لفظ حداقل یا حداکثر همراهند. بهتر است همین‌جا با این مفاهیم آشنا شویم:

۱ حداکثر k نفر، یعنی k نفر یا کم‌تر از k نفر. به عبارت دیگر یعنی: k نفر یا $(k-1)$ نفر یا ... یا ۲ نفر یا ۱ نفر یا ۰ نفر.

۲ حداقل k نفر، یعنی k نفر یا بیشتر از k نفر. به عبارت دیگر یعنی: k نفر یا $(k+1)$ نفر یا $(k+2)$ نفر یا ... .

روش متمم: بعضی وقت‌ها محاسبه‌ی تعداد حالات مطلوب مسأله خیلی وقت‌گیر و طولانی است. در این مسائل بهتر است تعداد حالات نامطلوب که محاسبه‌اش راحت‌تر می‌باشد را به‌دست آورده و این حالات نامطلوب را از کل حالات کم کنیم.

تعداد حالات نامطلوب − تعداد کل حالات = تعداد حالات مطلوب

زیر ویژه: اگر در صورت تست «**حداقل یکی**» را دیدید سریعاً بفهمید که باید از روش متمم سؤال را حل کنید. **مثلاً:** متمم آن که «**حداقل یکی** از ۳ نفر دکتر باشد» می‌شود «هیچ‌کدام از ۳ نفر دکتر نباشد!»

۱۳ از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان سه نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به‌طوری که لااقل دو نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟

خارج تجربی ۹۰ | پاسخ: ۴

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

از بین ۳ نفر انتخابی می‌خواهیم حداقل ۲ نفر دانش‌آموز تجربی باشد. پس باید ۲ نفر از دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی و ۱ نفر باقی‌مانده را از دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی یا هر ۳ نفر را از دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالات انتخاب}: \binom{5}{2} \overset{\text{و}}{\times} \binom{3}{1} \overset{\text{یا}}{+} \binom{5}{3} = \frac{5\times 4}{2}\times 3 + \frac{5!}{3!2!} = 30 + \frac{5\times 4}{2} = 40$$

۱۴ از میان ۷ کشتی‌گیر و ۵ وزنه‌بردار به چند روش می‌توان ۳ نفر را انتخاب کرد، به‌طوری که حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) ۲۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۶۰

طبق درسنامه لفظ «حداقل یکی» در سؤال وجود دارد، پس خیلی سریع از روش متمم استفاده می‌کنیم. متمم عبارت خواسته شده آن است که هیچ‌کدام از سه نفر انتخابی کشتی‌گیر نباشند. یعنی باید هر ۳ نفر را از بین ۵ نفر وزنه‌بردار انتخاب کنیم. پس داریم:

$$\text{متمم}: \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

از طرفی کل حالات، انتخاب ۳ نفر از $5+7=12$ نفر است که برابر می‌شود با:

$$\text{کل حالات}: \binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\times 11\times 10\times \cancel{9!}}{\cancel{9!}\times \cancel{6}} = 220$$

پس جواب مسأله برابر می‌شود با:

$$\text{حالات مطلوب} = \text{کل حالات} - \text{حالات نامطلوب} = 220 - 10 = 210$$

۱۵ از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آن‌که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول یعنی (۴ پرسش از ۵ پرسش اول) یا (۵ پرسش از ۵ پرسش اول). بنابراین:

$$\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{۴تا از ۵تای اول}}\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{۴تا از ۵تای دوم}} + \underbrace{\binom{5}{5}}_{\text{۵تا از ۵تای اول}}\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{۳تا از ۵تای دوم}} = 5\times 5 + 1\times \frac{5\times 4}{2} = 25 + 10 = 35$$

۸ زیرمجموعه

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی از فرمول $\binom{n}{k}$ به‌دست می‌آید. از طرفی می‌دانیم تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر 2^n است. پس داریم:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{زیرمجموعه ۰ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{زیرمجموعه ۱ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{زیرمجموعه ۲ عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{زیرمجموعه n عضوی}} = 2^n$$

نکته: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی} = 2^{n-1}$$

۱۶ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو a، کدام است؟ (داخل تجربی ۸۳ | پاسخ: ۲)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

می‌خواهیم سه عضو از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ انتخاب کنیم که شامل a باشد. پس یکی از سه عضو، a است. لذا فقط دو عضو دیگر نیاز داریم که باید آن‌ها را از بین ۵ عضو باقی‌مانده، یعنی b، c، d، e و f انتخاب کنیم که این کار به $\binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$ طریق مختلف ممکن است.

۱۷ تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,10\}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴)

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۲۵۶

۳) ۵۱۱ ۴) ۵۱۲

با توجه درسنامه تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی مجموعه‌ی ۱۰ عضوی برابر $2^{10-1}=2^9=512$ است.

۱۸ حاصل $\binom{8}{7}+\dots+\binom{8}{2}+\binom{8}{1}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴)

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۶

۳) ۲۵۶ ۴) ۲۵۴

طبق درسنامه: $\binom{8}{0}+\underbrace{\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\dots+\binom{8}{7}}_{\text{عبارت خواسته شده}}+\binom{8}{8}=2^8 \Rightarrow \binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\dots+\binom{8}{7}=2^8-\binom{8}{0}-\binom{8}{8}=256-1-1=254$

۹ فرمول اصلی احتمال

اگر تعداد اعضای پیشامد A را با $n(A)$ و تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نمایش دهیم، احتمال رخداد پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

دید ویژه: حل اکثر مسائل این بخش ساده می‌باشد و نیاز به تسلط بر مبحث ترکیب از بخش آنالیز ترکیبی دارد.

۱۹ در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟ (خارج تجربی ۹۵ | پاسخ: ۳)

۱) $\frac{8}{21}$ ۲) $\frac{17}{42}$

۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{9}{14}$

$$P(A)=\frac{\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{انتخاب ۱ مهره‌ی سفید از ۴ مهره}}\times\underbrace{\binom{2+3}{2}}_{\text{انتخاب ۲ مهره‌ی غیرسفید از ۵ مهره}}}{\binom{2+3+4}{3}}=\frac{4\times\frac{5\times 4}{2}}{\frac{9!}{6!3!}}=\frac{40}{\frac{9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6!}\times 6}}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$$

۲۰ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟ (داخل تجربی ۸۶ | پاسخ: ۳)

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{3}{5}$

$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب یکی از ۳ موش سفید}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{انتخاب ۳تای دیگر از ۵ موش سیاه}}}{\underbrace{\binom{8}{4}}_{\text{انتخاب ۴ تا از کل موش‌ها}}}=\frac{3\times\frac{5!}{3!2!}}{\frac{8!}{4!4!}}=\frac{3\times\frac{5\times 4}{2}}{\frac{8\times 7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{4\times 3\times 2\times 1\times \cancel{4!}}}=\frac{3}{7}$$

۲۱ در جعبه‌ای ۷ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۱ مهره‌ی قرمز و حداقل ۲ مهره‌ی سفید، خارج شده است؟

خارج تجربی ۹۴ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

۱ قرمز و حداقل ۲ سفید = (۱ قرمز و ۲ یا ۳ سفید) = (۱ قرمز و ۲ سفید و ۱ سیاه) یا (۱ قرمز و ۳ سفید)

۴ مهره‌ی خروجی ۴ مهره‌ی خروجی

$$\begin{cases} n(A)=\binom{۵}{۱}\overset{و}{\times}\binom{۷}{۲}\overset{و}{\times}\binom{۲}{۱}\overset{یا}{+}\binom{۷}{۳}\overset{و}{\times}\binom{۲}{۱}=۵\times۲۱\times۲+۳۵\times۲=۲۸۰ \\ n(S)=\binom{۱۴}{۵}=\frac{۱۴!}{۱۰!۴!}=\frac{\overset{۷}{\cancel{۱۴}}\times۱۳\times\cancel{۱۲}\times۱۱\times\cancel{۱۰!}}{\cancel{۱۰!}\times\underset{۲}{\cancel{۲۴}}}=۷\times۱۳\times۱۱ \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{\overset{۴۰}{\cancel{۲۸۰}}}{\cancel{۷}\times۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

دید ویژه: بچه‌ها تا پارسال طراح فقط می‌پرسید «حداقل ۲ مهره‌ی سفید خارج شود» ولی در سال ۹۴ سؤال را کمی سخت‌تر و طولانی‌تر کرده! و پرسیده: «حداقل ۲ مهره‌ی سفید و دقیقاً ۱ مهره‌ی قرمز» پس حواستان به این نوع بیان در سؤالات احتمال باشد.

۲۲ در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۱

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{\binom{۴}{۳}\overset{یا}{+}\binom{۵}{۳}}{\binom{۵+۴}{۳}}=\frac{۴+\frac{۵!}{۳!۲!}}{\frac{۹!}{۳!۶!}}=\frac{۴+۱۰}{\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{۶\times\cancel{۶!}}}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

انتخاب ۳ تا از ۴ مهره‌ی سفید — انتخاب ۳ تا از ۵ مهره‌ی سیاه — انتخاب ۳ تا از ۹ مهره‌ی کل

۲۳ حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

داخل تجربی ۸۹ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را می‌یابیم:

$$A,A,A,T,X,I \xrightarrow{\text{جایگشت با تکرار}} n(S)=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$$

سه حرف A

حال می‌خواهیم هر سه حرف A کنار هم باشند، پس حروف A را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. با این کار ۴ شیء داریم که کنار هم به !۴ حالت می‌توانند قرار بگیرند. حواستان باشد در داخل بسته سه حرف A فقط به یک حالت کنار هم می‌توانند قرار بگیرند. بنابراین:

$$\underbrace{\boxed{A,A,A},T,X,I}_{\text{۴ شیء}}\Rightarrow n(A)=۴!\times۱=۲۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۲۴ دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

خارج تجربی ۹۵ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

اگر A پیشامد رو شدن دو عدد متوالی در پرتاب دو تاس باشد، داریم:

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}\Rightarrow n(A)=۱۰$$

از طرفی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $n(S)=۶\times۶=۳۶$ است. پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۲۵ **۶ نفر که ۲ نفر آن‌ها برادر هستند، به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. چه‌قدر احتمال دارد دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند؟**

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

دو برادر a و b را به دو حالت در ابتدا و انتهای صف قرار می‌دهیم. سپس ۴ نفر باقی‌مانده در بین آن‌ها به !۴ حالت می‌توانند قرار بگیرند:

$$a\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{۴!}b \text{ یا } b\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{۴!}a \Rightarrow n(A)=۴!+۴!=۲\times ۴! \text{ و } n(S)=\text{جایگشت ۶ نفر}=۶!$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۲\times ۴!}{۶!}=\frac{۲\times \cancel{۴!}}{۶\times ۵\times \cancel{۴!}}=\frac{۱}{۱۵}$$

۲۶ **چهار رقم ۳، ۲، ۱ و ۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ ، حاصل می‌شود؟**

خارج تجربی ۸۹ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

وقتی در سؤال گفته است با کنار هم قرار دادن چهار رقم ۰، ۱، ۲ و ۳، عدد چهار رقمی می‌سازیم، یعنی تکرار ارقام مجاز نیست. ابتدا تعداد کل این ارقام را می‌یابیم:

در هر مرحله ۱ رقم مصرف می‌شود

$$n(S)=\boxed{۳}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=۱۸$$

یکی از ارقام ۱، ۲، ۳ — یکی از ارقام باقی‌مانده از مرحله‌ی قبل و رقم صفر

برای آن‌که عدد مذکور بر ۶ بخش‌پذیر باشد، باید هم زوج و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. شرط آن‌که عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد آن است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون همواره مجموع ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ برابر ۶ است، لذا هر عدد چهار رقمی که با این ارقام ساخته شود، همواره بر ۳ بخش‌پذیر می‌باشد. بنابراین کافی است تعداد اعداد چهار رقمی زوج را بیابیم. پس با توجه به ارقام موجود، برای زوج بودن باید یکان صفر یا ۲ باشد. از طرفی چون تکرار ارقام مجاز نیست و برای رقم صفر ۲ شرط داریم (در یکان آمدن و در هزارگان نیامدن) باید مسأله را به ۲ قسمت زیر تفکیک کنیم:

۱) صفر در یکان باشد: $\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}=۶$ (۲) (۳) (۴) (۱) — ۱ یا ۲ یا ۳ — رقم صفر

۲) صفر در یکان نباشد: $\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}=۴$ (۲) (۳) (۴) (۱) — ۱ یا ۳ — رقم ۲

پس کلاً $۶+۴=۱۰$ عدد زوج داریم که تمام آن ده عدد بر ۳ نیز بخش‌پذیرند. لذا ده عددِ مضرب ۶ داریم و احتمال موردنظر $\frac{۵}{۹}=\frac{۱۰}{۱۸}$ است.

۲۷ **هر یک از ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل، مضرب ۳ می‌باشد؟**

داخل تجربی ۹۵ | پاسخ: ۲

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

پس با سه کارت انتخابی می‌توان ۶۰ عدد سه رقمی ساخت. از طرفی می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. حال باید دنبال اعداد سه رقمی بگردیم که جمع ارقامشان بر ۳ بخش‌پذیر باشد! سختی کار همین‌جا است زیرا هیچ راه میان‌بری وجود ندارد و باید تمامی حالات را بررسی کنیم!!! پس از بررسی نه چندان کوتاه، دسته‌های سه‌تایی {۱،۲،۳}، {۲،۳،۴}، {۱،۳،۵} و {۳،۴،۵} جمع ارقامشان بر ۳ بخش‌پذیر است. با هرکدام از این دسته‌ها می‌توان !۳ = ۶ عدد سه رقمی ساخت. پس تعداد کل اعداد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۳ برابر ۲۴ = ۶ × ۴ است و داریم:

یکی از ۴ کارت باقی‌مانده

$$n(s)=\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۶۰$$

یکی از ۵ کارت ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ — یکی از ۳ کارت باقی‌مانده

$$P(A)=\frac{۲۴}{۶۰}=\frac{۴}{۱۰}$$

۱۰ احتمال متمم پیشامد A

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S و A′ متمم آن باشد. داریم:

$P(A')=۱-P(A)$ یا $P(A)=۱-P(A')$

دید ویژه: از احتمال متمم در مسائلی استفاده می‌کنیم که شمارش اعضای پیشامد A، طولانی و وقت‌گیر باشد. همان‌طور که در آنالیز ترکیبی هم اشاره شد، به کلمات «**حداقل**» و «**حداکثر**» در صورت تست‌ها بسیار توجه کنید. این کلمات اغلب بوی استفاده از متمم را می‌دهند! مخصوصاً عبارت «**حداقل یکی**».

۲۸ در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی، خارج می‌شود؟

خارج تجربی ۹۳ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

حداقل یک مهره از سه مهره‌ی انتخابی آبی، یعنی ۱ مهره یا ۲ مهره یا ۳ مهره‌ی انتخابی آبی باشد. حالت‌ها زیاد است، پس از روش متمم استفاده می‌کنیم که در آن هیچ کدام از ۳ مهره‌ی انتخابی آبی نیست (یعنی هر سه مهره از رنگ‌های قرمز و سفید انتخاب می‌شوند.) بنابراین داریم:

انتخاب ۳ مهره از رنگ‌های قرمز و سفید

$$P(A') = \frac{\binom{۲+۳}{۳}}{\binom{۲+۳+۴}{۳}} = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{\frac{۵!}{۳!۲!}}{\frac{۹!}{۶!۳!}} = \frac{\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times۶}} = \frac{۱۰}{۸۴} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

انتخاب ۳ مهره از کل مهره‌ها

۲۹ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آن‌ها تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

داخل تجربی ۸۵ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

برای حل این سؤال از روش متمم استفاده می‌کنیم. (البته حل معمولی مسأله هم خیلی دشوار نمی‌باشد.) فرض می‌کنیم بر روی هیچ‌یک از دو موش انتخابی آزمون مهارت انجام نگرفته باشد. پس داریم:

انتخاب ۲ تا از ۴ موش دیگر

$$P(A') = \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{\frac{۷\times۶}{۲}} = \frac{۶}{۲۱} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۶}{۲۱} = \frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۵}{۷}$$

۳۰ در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

خارج تجربی ۸۸ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

لااقل ۲ تا از ۵ نوزاد دختر باشد، یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ دختر. حالت‌ها زیاد شد، پس از متمم می‌رویم. متمم پیشامد موردنظر این می‌شود که یک دختر داشته باشیم (فرزند اول یا دوم یا ... یا پنجم دختر ⇐ ۵ حالت) یا هیچ دختری نداشته باشیم (همه‌ی فرزندان پسر ⇐ یک حالت). از طرفی $n(S) = ۲\times۲\times۲\times۲\times۲ = ۲^۵ = ۳۲$. داریم:

$$P(A') = P(\text{۱ دختر یا ۰ دختر}) = \frac{۶}{۳۲} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۶}{۳۲} = \frac{۲۶}{۳۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$$

۳۱ در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

داخل تجربی ۹۴ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

برای حل این سؤال از روش متمم استفاده می‌کنیم که در آن هر دو مهره‌ی انتخابی هم‌رنگ هستند. پس داریم:

$$P(A') = \frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۳+۱+\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۱۰\times۹}{۲}} = \frac{۴+۱۰}{۴۵} = \frac{۱۴}{۴۵} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۱۴}{۴۵} = \frac{۳۱}{۴۵}$$

۳۲ در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه، ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل ۲ مهره همرنگ باشند، کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۷

حداقل ۲ مهره از ۳ مهره‌ی انتخابی همرنگ باشد، یعنی ۲ مهره یا هر ۳ مهره همرنگ باشد. چون محاسبه‌ی این حالات وقت‌گیر است، از روش متمم مسأله را حل می‌کنیم. متمم پیشامد فوق آن است که ۳ مهره را از رنگ‌های مختلف برداریم، از طرفی فضای نمونه‌ای هم انتخاب ۳ مهره از کل مهره‌ها ($۳+۴+۳=۱۰$ مهره) است. بنابراین:

$$P(A') = \frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۳\times۴\times۳}{\frac{۱۰!}{۳!۷!}} = \frac{۳\times۴\times۳}{\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{۶\times\cancel{۷!}}} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷$$

۱۱ مسائل پرتاب دو تاس و جمع اعداد رو شده

اگر دو تاس را با هم (یا یک تاس را دو بار) پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد و مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس می‌تواند اعداد ۲ یا ۳ یا ... یا ۱۲ باشد. جدول زیر یک روش ساده و روان را برای محاسبه‌ی مجموع اعداد دو تاس بدون نوشتن حالات!!! به شما یاد می‌دهد.

به جدول و توضیحات بعد از آن خوب دقت کنید:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
n(A)	۱↗	۲↗	۳↗	۴↗	۵↗	۶↘	۵↘	۴↘	۳↘	۲↘	۱

طبق جدول فوق **مثلاً**: اگر بگویند مجموع دو تاس در چند حالت برابر ۷ می‌شود، جواب برابر ۶ است.

شگفتی جدول:

۱ تا مجموع ۷، تعداد حالات همواره یکی کم‌تر از مجموع خواسته شده است. **مثلاً**: مجموع ۶ دارای ۵ = ۱ − ۶ حالت است.

۲ از مجموع ۸ به بعد، تعداد حالات برابر ۱۳ منهای مجموع خواسته شده است. **مثلاً**: مجموع ۹ دارای ۴ = ۹ − ۱۳ حالت است.

دید ویژه:

۱ سؤال از مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس اهمیت ویژه‌ای در کنکور دارد. هم‌چنین کمی بعید است که طراح وارد بحث مجموع اعداد ۳ تاس شود مگر در حد یک سؤال ساده که در کتاب ریاضی ۳ آمده است.

۲ سؤالی که جدیداً از این مبحث در کنکور می‌آید با کلماتی نظیر حداقل یا حداکثر یا مضرب ۴ بودن یا عدد اول بودن همراه است. برای حل سؤال باید ابتدا اعداد مطلوب سؤال را مشخص کنید و سپس از دو ویژگی بیان شده در مورد جدول کمک بگیرید.

☆ **۳۳** دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

داخل تجربی ۹۲ | پاسخ: ۴

روش اول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=۳۶$ است. از طرفی مجموع دو عدد مضرب ۴ باشد، یعنی مجموع ۴ یا ۸ یا ۱۲ شود. حال با توجه به جدول درسنامه و ویژگی‌های گفته شده می‌توانیم بدون نوشتن حالات، احتمال‌ها را محاسبه کنیم:

$$P(A)=P(\text{مجموع }۴)+P(\text{مجموع }۸)+P(\text{مجموع }۱۲)=\overset{۴-۱}{\frac{۳}{۳۶}}+\overset{۱۳-۸}{\frac{۵}{۳۶}}+\overset{۱۳-۱۲}{\frac{۱}{۳۶}}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: حالت‌های که در آن‌ها مجموع دو تاس ۴ یا ۸ یا ۱۲ می‌شود را می‌نویسیم:

$$n(A)=\{\underbrace{(۱،۳)،(۲،۲)،(۳،۱)}_{\text{مجموع }۴}،\underbrace{(۲،۶)،(۳،۵)،(۴،۴)،(۵،۳)،(۶،۲)}_{\text{مجموع }۸}،\underbrace{(۶،۶)}_{\text{مجموع }۱۲}\}\xrightarrow{n(A)=۹}P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

۳۴ در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده حداکثر ۱۰ شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۲

مجموع دو تاس حداکثر ۱۰ شود، یعنی مجموع ۲ یا ۳ یا ۴ یا ... یا ۱۰. نوشتن اعضا واقعاً طولانی و وقت‌گیر است، پس از روش متمم استفاده می‌کنیم. متمم این پیشامد، یعنی این‌که مجموع دو تاس ۱۱ یا ۱۲ شود. بنابراین:

$$A'=\{(۵،۶)،(۶،۵)،(۶،۶)\}\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۲ قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه احتمال آن که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد، $P(A\cup B)$ بوده و فرمول آن به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{احتمال رخداد A یا B}}=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{احتمال رخداد A و B با هم}}}$$

دید ویژه: اکثر بچه‌ها نمی‌دانند چه زمانی از فرمول فوق باید استفاده کنند، باید به آن‌ها بگوییم یکی از نشانه‌ها این است که در صورت سؤال «یا» برای جدا کردن دو عمل مختلف می‌آید. **مثلاً**: «چه‌قدر احتمال دارد علی **یا** حسن در کنکور قبول شوند؟» هم‌چنین، یکی دیگر از نشانه‌ها، وجود عبارت «**حداقل یکی از دو**» در صورت مسأله است.

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد. $(A\cap B=\varnothing)$ در این‌صورت داریم:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

۳۵ **احتمال آن که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، ۰/۵۵ و در درس شیمی قبول شود، ۰/۶ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود، ۰/۷۵ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟**

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۵

حداقل در فیزیک یا شیمی قبول شود، یعنی (فیزیک $\overset{\text{یا}}{\cup}$ شیمی) P و در هر دو درس قبول شود، یعنی (فیزیک $\overset{\text{و}}{\cap}$ شیمی) P. بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(\text{فیزیک} \cup \text{شیمی}) = P(\text{فیزیک}) + P(\text{شیمی}) - P(\text{فیزیک} \cap \text{شیمی}) \Rightarrow ۰/۷۵ = ۰/۶ + ۰/۵۵ - P(\text{فیزیک} \cap \text{شیمی})$$

$$\Rightarrow P(\text{فیزیک} \cap \text{شیمی}) = ۰/۶ + ۰/۵۵ - ۰/۷۵ = ۰/۴$$

۳۶ **دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا اعداد رو شده‌ی هر دو تاس زوج باشد، کدام است؟**

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۱

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۸}{۳۶}$ ۳) $\frac{۹}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳۶}$

می‌دانیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $n(S) = ۳۶$ است. حال اگر A پیشامد مجموع اعداد ۸ و B پیشامد زوج بودن اعداد باشد، خواسته‌ی مسأله به خاطر کلمه‌ی «یا» که در صورت سؤال آمده $P(A \cup B)$ است. حال ابتدا A و B را می‌یابیم:

$$\begin{cases} A = \{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\} \\ B = \{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{(۲,۶),(۴,۴),(۶,۲)\}$$

بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۵}{۳۶} + \frac{۹}{۳۶} - \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱۱}{۳۶}$$

۱۳ مسائل پرتاب سکه یا فرزندان خانواده

۱ اگر یک سکه را n بار (یا n سکه را یک بار با هم) پرتاب کنیم، احتمال آمدن دقیقاً k بار «رو» (k بار «پشت») برابر $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ است.

۲ از آن‌جا که فرزندان هم مانند سکه‌ها دو حالت (دختر یا پسر) دارند، احتمال آن‌که خانواده‌ای n فرزندی، دقیقاً k پسر (k دختر) داشته باشد، مجدداً برابر $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ است.

۳۷ **احتمال این که از چهار فرزند یک خانواده، دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند، کدام است؟**

داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

منظور سؤال این است که در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی با کدام احتمال دقیقاً دو فرزند پسر است. زیرا در این خانواده وقتی دقیقاً دو فرزند، پسر است، قطعاً ۲ فرزند دیگر دختر هستند. بنابراین:

$$P(\text{دو فرزند پسر}) = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{\frac{۴ \times ۳}{۲}}{۱۶} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

فرار از اشتباه: ذکر کردن لفظ دو پسر و دو دختر در صورت سؤال صرفاً جهت گمراه کردن دانش‌آموز است! بارها دیده شده که دانش‌آموز به اشتباه جواب را به‌صورت $\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}}{۲^۴}$ نوشته است!

۳۸ **در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟**

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی، پیشامد ۲ پسر (A) و پیشامد ۳ دختر (B) ناسازگارند. زیرا در این خانواده هم‌زمان ۲ پسر و ۳ دختر نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \overset{\text{۲ پسر}}{\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}} \overset{\text{یا}}{+} \overset{\text{۳ دختر}}{\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}} = \frac{\frac{۴ \times ۳}{۲}}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۶+۴}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۳۹ در پرتاب ۴ سکه‌ی سالم با هم، احتمال این‌که فقط سه سکه «رو» یا فقط سه سکه «پشت» بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

در پرتاب ۴ سکه‌ی سالم، پیشامد A، فقط سه سکه «رو» و پیشامد B، فقط سه سکه «پشت» ناسازگارند، بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\overset{\text{۳ تا از ۴ سکه «رو»}}{\binom{۴}{۳}}}{۲^۴}\overset{\text{یا}}{+}\frac{\overset{\text{۳ تا از ۴ سکه «پشت»}}{\binom{۴}{۳}}}{۲^۴}=\frac{۴}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴ دو پیشامد مستقل

تعریف: دو پیشامد A و B را مستقل از هم گویند، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. در این صورت داریم:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

دید ویژه: در اکثر مسائل قانون جمع احتمالات، خودمان باید تشخیص دهیم دو پیشامد A و B مستقل هستند و به جای $P(A\cap B)$ در فرمول $P(A\cup B)$، عبارت $P(A)\times P(B)$ را قرار دهیم. از جمله پیشامدهای مستقل مهم که در کتاب درسی مطرح شده‌اند می‌توان به **قبولی افراد در دانشگاه، بهبود بیماری افراد پس از جراحی، تولد و وفات و پرتاب سکه و تاس** اشاره کرد.

نکته: اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه $(A'$ و $B)$، $(A$ و $B')$ و $(A'$ و $B')$ نیز مستقل از هم هستند و احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل‌ضرب احتمال‌هایشان است.

۴۰ در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۱

تحصیلات ابتدایی و مهارت قالی‌بافی مستقل از هم هستند. زیرا هیچ ربطی به هم ندارند. پس:

$$P(\text{تحصیلات}\overset{\text{و}}{\cap}\text{قالی‌بافی})=P(\text{تحصیلات})\times P(\text{قالی‌بافی})=۰/۶\times ۰/۲۵=۰/۱۵\quad(*)$$

از طرفی «یا» یکی از نشانه‌های قانون جمع احتمالات بود، پس احتمال تحصیلات ابتدایی **یا** مهارت قالی‌بافی، همان (قالی‌بافی $\cup$ تحصیلات) P است. داریم:

$$P(\text{تحصیلات}\overset{\text{یا}}{\cup}\text{قالی‌بافی})=P(\text{تحصیلات})+P(\text{قالی‌بافی})-P(\text{تحصیلات}\overset{\text{و}}{\cap}\text{قالی‌بافی})\overset{(*)}{=}۰/۶+۰/۲۵-۰/۱۵=۰/۷$$

۴۱ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

خارج تجربی ۹۱ | پاسخ: ۳

پرتاب دو سکه و یک تاس مستقل از هم هستند. پس کافی است احتمال هر کدام از آن‌ها را حساب کرده و سپس جواب‌ها را در هم ضرب کنیم.

احتمال حداقل یک سکه «رو» برابر $\frac{۳}{۴}$ است، زیرا:

$$S=\{(\text{پپ}),(\text{پر}),(\text{رپ}),(\text{رر})\}\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۴}$$

احتمال مضرب ۳ آمدن برابر $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ است، زیرا:

$$S'=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر $P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$ خواهد بود.

۴۲ تاس سالمی را سه بار می‌اندازیم. با کدام احتمال هیچ دو عدد رو شده‌ای مثل هم نمی‌باشند؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۸}$

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۲

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در ۳ بار پرتاب تاس برابر $n(S)=۶\times۶\times۶$ است. می‌خواهیم هیچ دو عددی یکسان نباشد، پس عدد رو شده در بار اول یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ می‌تواند باشد (۶ حق انتخاب) ولی عدد رو شده در بار دوم هر عددی به جز عدد اول (۵ حق انتخاب) و عدد رو شده در بار سوم هر عددی به جز اعداد بار اول و دوم (۴ حق انتخاب) می‌تواند باشد. پس داریم:

$$\text{احتمال موردنظر}=\frac{۶}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۵}{۹}$$

۴۳ احتمال این که روز تولد سه نفر در روزهای مختلف هفته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۰}{۴۹}$ ۴) $\frac{۳۱}{۴۹}$

نفر اول می‌تواند در هر کدام از هفت روز هفته متولد شده باشد (۷ حالت)، نفر بعدی در هر روز به جز روز تولد نفر اول (۶ حالت) و نفر سوم در هر روزی به جز روز تولد نفرات اول و دوم (۵ حالت). پس داریم:

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{۷}{۷} \times \frac{۶}{۷} \times \frac{۵}{۷} = \frac{۳۰}{۴۹}$$

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۴۴ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

حداقل ۲ نفر از ۴ نفر، یعنی ۲ نفر یا ۳ نفر یا ۴ نفر ماه تولدشان یکسان باشد. محاسبه‌ی این حالات طولانی و وقت‌گیر است. پس از متمم آن استفاده می‌کنیم که در آن ماه تولد هر ۴ نفر متفاوت است. در پیشامد متمم، نفر اول می‌تواند در هر یک از ۱۲ ماه متولد شده باشد، نفر دوم در هر ماه به جز ماه تولد نفر اول (یکی از ۱۱ ماه باقی‌مانده)، نفر سوم در هر ماه به جز ماه تولد دو نفر اول (یکی از ۱۰ ماه باقی‌مانده) و نفر چهارم در هر ماه به جز ماه تولد سه نفر اول (یکی از ۹ نفر باقی‌مانده). بنابراین:

$$P(A') = \frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۱}{۱۲} \times \frac{۱۰}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۲} = \frac{۵۵}{۹۶} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۵۵}{۹۶} = \frac{۴۱}{۹۶}$$

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۲

۴۵ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

از روش متمم استفاده می‌کنیم. پیشامد متمم این است که عمل جراحی هیچ‌کدام از دو نفر موفق نباشد. چون موفقیت در عمل جراحی برای اشخاص A و B مستقل می‌باشد. داریم:

$$P(\text{ناموفق بودن عمل A و B}) = P(\text{عدم موفقیت عمل A}) \times P(\text{عدم موفقیت عمل B}) = (۱ - ۰/۹) \times (۱ - ۰/۸) = ۰/۱ \times ۰/۲ = ۰/۰۲$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} = ۱ - ۰/۰۲ = ۰/۹۸$$

داخل تجربی ۹۵ | پاسخ: ۴

دید ویژه: این سؤال نیز مشابه سؤال ۷ آزمون ۲ جمع‌بندی کتاب ما بوده که در زیر آورده‌ایم! باز هم تأکیدی بر پیش‌بینی درست سؤالات کنکور توسط ما ☺

تمرین: احتمال این‌که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ٪۲۰ و احتمال این‌که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ٪۷۵ است. چه‌قدر احتمال دارد حداکثر یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۰/۵۸ ۴) ۰/۵۱

گزینه ۲

۴۶ احتمال این که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۶ و احتمال این که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۷ است. چه‌قدر احتمال دارد که حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکنند؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۵۸

از روش متمم برای حل استفاده می‌کنیم. حداقل یکی ناراحتی قلبی پیدا نکند، یعنی یکی از آن‌ها ناراحتی پیدا نکند یا هر دو ناراحتی پیدا نکنند و متمم آن وقتی رخ می‌دهد که هر دو ناراحتی قلبی پیدا کنند. یعنی باید $P(A \cap B)$ را بیابیم. از طرفی A و B مستقل‌اند، پس داریم:

$$\text{متمم}: P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۷ = ۰/۴۲ \Rightarrow P(\text{خواسته‌ی مسأله}) = ۱ - ۰/۴۲ = ۰/۵۸$$

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۴۷ می‌دانیم ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی‌اند. با کدام احتمال در خانواده‌ای دو فرزند از لحاظ خونی دارای یک نوع RH هستند؟

۱) ۰/۷۳۱۲ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۷۰۵۶

از زیست‌شناسی می‌دانید، برای آن که فردی دارای RH منفی باشد لازم است دو ژن منفی داشته باشد که این ژن‌ها را از هر یک از والدین خود به ارث می‌برد. پس می‌توان منفی بودن هر یک از ژن‌ها را مستقل فرض کرد:

$$P(\text{منفی RH}) = P(\text{هر دو ژن منفی}) = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۰/۱۶ \Rightarrow P(\text{مثبت RH}) = ۱ - ۰/۱۶ = ۰/۸۴$$

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۱

۵ ۳

$$R = \max - \min = ۳۶ - ۱۲ = ۲۴ \Rightarrow C = \frac{R}{k} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

پس دسته‌ها به صورت $(۱۲،۲۰]$، $[۲۰،۲۸)$ و $[۲۸،۳۶]$ می‌باشد.

ابتدا زاویه‌ی مرکزی مربوط به دسته‌ی اول را در حالت اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{۵}{۱۵} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

طبق فرض با اضافه کردن x داده با ساقه‌ی ۲، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی اول ۳۰ درجه کاهش می‌یابد، پس زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی اول در حالت دوم برابر $۱۲۰^\circ - ۳۰^\circ = ۹۰^\circ$ است: (وقتی x داده با ساقه‌ی ۲ اضافه می‌شود تعداد کل داده‌ها $۱۵ + x$ می‌شود ولی به دسته‌ی اول، داده‌ای اضافه نمی‌شود.)

$$\frac{۵}{۱۵ + x} \times ۳۶۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{۵}{۱۵ + x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲۰ = ۱۵ + x \Rightarrow x = ۵$$

۶ ۲

مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی $= N.C \Rightarrow ۱۰۰ = (۱ + ۶ + ۳ + ۴ + ۶)C \Rightarrow C = ۵ \Rightarrow$ مرکز دسته‌ها $= ۵،۱۰،۱۵،۲۰،۲۵$

مرکز دسته‌ها	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
فراوانی	۱	۶	۳	۴	۶

$\xrightarrow[\text{۱۵ تا کم می‌کنیم}]{\text{از همه‌ی داده‌ها}}$

مرکز دسته‌ها	-۱۰	-۵	۰	۵	۱۰
فراوانی	۱	۶	۳	۴	۶

$$\bar{x} = \frac{-۱۰ - ۳۰ + ۰ + ۲۰ + ۶۰}{۲۰} = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲ \quad \text{(داده‌های جدید)}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱(-۱۰ - ۲)^۲ + ۶(-۵ - ۲)^۲ + ۳(۰ - ۲)^۲ + ۴(۵ - ۲)^۲ + ۶(۱۰ - ۲)^۲}{۲۰} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۸۷۰}{۲۰} = ۴۳/۵$$

۷ ۴

برای آن‌که دومین مهره‌ی سفید، بلافاصله بعد از اولین مهره‌ی سیاه خارج شود، باید مهره‌ی اول سفید، مهره‌ی دوم سیاه و مهره‌ی سوم سفید خارج شده باشند. توجه کنید که مهره‌ی اول با جایگذاری بوده است. پس داریم:

$$P = \underbrace{\frac{۴}{۹}}_{\text{مهره‌ی اول سفید}} \times \underbrace{\frac{۵}{۹}}_{\text{مهره‌ی دوم سیاه}} \times \underbrace{\frac{۴}{۸}}_{\text{مهره‌ی سوم سفید}} = \frac{۱۰}{۸۱}$$

۸ ۲

ابتدا ضابطه‌ی تابع g را می‌یابیم:

$$g(f(x)) = \sqrt{۲x - ۱} \Rightarrow g\left(\frac{-۱ + x}{x}\right) = \sqrt{۲x - ۱} \quad (*)$$

$$\frac{-۱ + x}{x} = t \Rightarrow \frac{-۱}{x} + ۱ = t \Rightarrow \frac{-۱}{x} = t - ۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{t - ۱}$$

حال در (*) به جای x عبارت $\frac{-۱}{t - ۱}$ را قرار می‌دهیم:

$$g(t) = \sqrt{۲\left(\frac{-۱}{t - ۱}\right) - ۱} = \sqrt{\frac{-۲}{t - ۱} - ۱} \Rightarrow g(x) = \sqrt{\frac{-۲}{x - ۱} - ۱}$$

برای محاسبه‌ی محل برخورد با محور y ها کافی است $x = ۰$ را در تابع g قرار دهیم:

$$g(۰) = \sqrt{\frac{-۲}{۰ - ۱} - ۱} = \sqrt{۲ - ۱} = \sqrt{۱} = ۱$$

۹ ۴

با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos ۳x}}{۱ - \cos x} \overset{HOP}{=} \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}} + \frac{۳\sin ۳x}{۲\sqrt{\cos ۳x}}}{\sin x} = \lim_{x \to ۰}\left(\frac{-\sin x}{۲\sin x\sqrt{\cos x}} + \frac{۳\sin ۳x}{۲\sin x\sqrt{\cos ۳x}}\right)$$

$$= \lim_{x \to ۰}\left(\frac{-۱}{۲\sqrt{\cos x}} + \frac{۳ \times ۳x}{۲x\sqrt{\cos ۳x}}\right) = \frac{-۱}{۲} + \frac{۹}{۲} = ۴$$